Відгук
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Никоровича Святослава Ігоровича
"Апроксимації в просторах псевдометрик"
на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

Актуальність теми дослідження. Дисертація Святослава Ігоровича Никоровича присвячена наближенню псевдометрик, у першу чергу компактних псевдоультраметрик, у просторах неперервних функцій. Досі розглядались переважно наближення псевдоультраметрик на скінченних множинах (праці Муртаґа, Контрераса, Ді Сумми, Прічарда та ін.), причому з точки зору обчислювальної ефективності алгоритмів, що не дивно, оскільки ці алгоритми широко вживаються у задачах класифікації у термінах еволюційних дерев.

Мірою близькості при оцінці наближень у більшості досліджень виступає або метрика рівномірної збіжності, або потужність множини пар, на якій псевдометрики відрізняються. Псевдометрики наближаються або псевдоультраметриками, які є простішими в обчислювальному сенсі, або сумами (чи лінійними комбінаціями) псевдометрик (результати Михайлова). Водночас наближення псевдометрик на нескінченних множинах недостатньо вивчені, як і вкладення просторів псевдометрик у нормовані векторні простори, хоча результати Банаха, Бессаги, Піхурка, Тимчатина, Зарічного та ін. про лінійні оператори продовження і усереднення псевдометрик свідчать про перспективність цього напрямку досліджень.

Часто при пошуку апроксимуючої функції накладається обмеження, що вона повинна бути не меншою від вихідної псевдометрики (домінантною) чи не більшою від неї (субдомінантною), тому аналіз відношення порядку на множинах псевдометрик, здійснений у роботі, є природним. Фактично автор досліджує конуси у просторах Ріса (векторних гратках), породжені множинами псевдометрик, що не перевищують фіксованої компактної псевдометрики, на нескінченному просторі. Отже, дисертант розширює область, у якій розглядаються задачі апроксимації псевдометрик, та доповнює використовувані методи і засоби, тому актуальність тематики роботи є безсумнівною.

Структура та зміст роботи. Робота складається з анотації, вступу та чотирьох розділів. У вступі автор здійснює огляд літератури за темою дисертації і обґрунтовує актуальність її теми. Перший розділ містить необхідні поняття та факти про псевдометрики, відношення часткового порядку та пов'язані з ними відношення апроксимації. Щодо теорії областей автор притримується термінології, запропонованої у монографії Continuous Lattices and Domains авторів Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M.,

Другий розділ має підготовчий характер: описує частково впорядковані множини псевдометрик, вводить відношення апроксимації на них і містить значну кількість використаних пізніше технічних тверджень. З результатів, які становлять самостійний інтерес, варто відзначити Теорему 2.1 про існування двох метрик на одиничному відрізку, топологічно еквівалентних до стандартної метрики, і таких, що жодна метрика на одиничному відрізку не передує їм одночасно. Вже у цьому розділі отримано результати, що на множині всіх псевдометрик на фіксованій нескінченній множині X відношення апроксимації знизу ("значно нижче") і апроксимації згори ("значно вище") є дуже бідними (Теореми 2.3 і 2.4).

Внаслідок цього клас розглядуваних функцій відстані у третьому розділі звужено до псевдоультраметрик, тобто до псевдометрик, для яких нерівність трикутника виконано у посиленому вигляді. Досліджено множину Psu(X) всіх псевдоультраметрик на множині X та її підмножини Cpsu(X) і Lcpsu(X), що складаються відповідно з усіх компактних псевдоультраметрик та усіх локально компактних псевдоультраметрик на X, з відношенням поточкового порівняння. Доведено, що підмножини всіх компактних псевдоультраметрик і всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X не є напрямленими вгору, тому супремум двох елементів у них не завжди існує, а навіть за умови існування інфімум у Psu(X) та Lcpsu(X) не є дистрибутивним щодо супремума зростаючої послідовності (Приклад 3.2.7). Водночас у множині Cpsu(X) компактних псевдоультраметрик на довільній множині X інфімум двох елементів дистрибутивний щодо супремума напрямленої вгору множини елементів, (Теорема 3.1). Отже, обґрунтовано звуження класу псевдоультраметрик, для яких можна очікувати ефективних відношень апроксимації, до компактних, причому таких, що не перевищують фіксованої компактної псевдоультраметрики d (дисертант позначає відповідну множину

Автор вводить допоміжне відношення “слабко значно нижче” між псевдоультраметриками і отримує його повний опис у Теоремах 3.3 і 3.4, що дозволяє йому у Теоремі 3.5 охарактеризувати псевдоультраметрики у d↓, що перебувають у відношенні апроксимації знизу. Аналогічно описане Теоремою 3.8 поняття (d, d')-жорсткої пари дозволяє у Теоремі 3.9 дати характеризацію відношення апроксимації згори у d↓. Одночасно Твердження 3.4.3 надає метод для побудови псевдоультраметрики значно вище за дану. Врешті Теореми 3.6 і 3.10 стверджують, що у порядковому сенсі множина d↓ є двонеперервною у сенсі теорії областей, тому надалі є сенс досліджувати на ній визначену порядком класичну топологію Лоусона.

У четвертому розділі отримано основні результати роботи про метризації множини d↓, її вкладення у банахові простори неперервних функцій та породжені цими вкладеннями конуси і підпростори. Автор розглядає і порівнює різні підходи до метризації d↓ — через підграфіки і надграфіки (за аналогією до запропонованих Никифорчином метризацій просторів неадитивних мір). У Твердженні 4.3.1 показано, що визначена підграфіками метрика рівномірно еквівалентна до породженої нормою рівномірної збіжності. Водночас згідно з Теоремою 4.1 визначена надграфіками метрика на d↓ у стилі Гартоґа-де Вінка є повною, але у загальному випадку сильнішою від породженої нормою рівномірної збіжності. Це підводить до центрального результату розділу — Теореми 4.3 про те, що для компактної псевдоультраметрики d на множині X гратка d↓ є не тільки неперервною, а й зв'язано двонеперервною, тобто топологія Лоусона на ній збігається з двоїстою топологією Лоусона, і обидві породжуються нормою рівномірної збіжності. Отже, метричні і порядкові підходи до апроксимації у d↓ по суті еквівалентні.

Дисертант дослідив породжений множиною d↓ конус у множині неперервних щодо d функцій двох змінних і довів у Твердженнях 4.6.5, 4.6.6, що він збігається з конусом псевдометрик, якщо і тільки якщо d розбиває множину не більш, ніж на чотири класи еквівалентності. Водночас згідно Теореми 4.4 породжений d↓ замкнений підпростір складається з усіх неперервних щодо d симетричних функцій двох змінних, рівних нулю при збігу аргументів. Цікавими є Твердження 4.7.1 та Теорема 4.5 про те, що що простори компактних псевдометрик та компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо даної, є повними нормованими ідемпотентними векторними просторами у сенсі запропонованого Масловим, Колокольцовим та іншими ідемпотентного узагальнення функціонального аналізу.

Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації. Всі твердження дисертації є акуратно і детально доведеними. Висновки спираються на доведені твердження.

Новизна результатів, повнота їх викладу в наукових публікаціях. Результати дисертації є новими. Основні результати опубліковані у 5 статтях, з яких 3 включені до наукометричних баз Scopus та Web of Science Core міжнародні.

Дискусійні положення та пропозиції.

1. Автор на сторінках 25, 52 та ін. вживає термін "симетрія" за аналогією з англійським symmetry, хоча в українському тексті природніше виглядала б "симетричність".
2. Позначення "~" (тильда) на сторінці 27 для "розвертання" порядку вживається тільки на наступній сторінці та сторінці 34. Чи доречно було його вводити?
3. У Теоремі 3.6 повинно бути "значно нижчими", а не "слабко нижчими" (або "слабко значно нижчими", що згідно з попереднім є рівносильним).
4. Приклад 4.6.3 можна було б опустити, достатньо Прикладу 4.6.4.
5. Автор подекуди вживає англомовні терміни (хоча й введені раніше) нарівні з українськими. Можливо, це пояснюється тим, що англійська термінологія, на відміну від української, є стабільною і загальноприйнятою.
6. "Розтяжна" пара на сторінці 84 названа "розтягуваною" на сторінці 88.
7. Дисертант використовує емоційно забарвлені терміни для абстрактних понять, наприклад, на сторінці 62 порядок і топологія можуть бути "гарними".
8. Є незначна кількість описок, наприклад, на сторінці 100 пропущено "випливає з".

Загальний висновок та оцінка дисертації. Висловлені вище зауваження не змінюють загальної оцінки дисертації як завершеного наукового дослідження, якісно написаного і ретельно вичитаного. Автореферат правильно та повно відображає основні положення і зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота С.І. Никоровича "Апроксимації в просторах псевдометрик", подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз, задовольняє всім вимогам "Порядку присудження наукових степенів", затвердженого Постановою Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013 р. зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року, № 1159 від 30 грудня 2015 року, № 576 від 27 липня 2016 року, № 943 від 20 листопада 2019 року, № 607 від 15 липня 2020 року щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор, Никорович Святослав Ігорович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри алгебри, геометрії та
математичного аналізу
Херсонського державного університету — О.Г. Савченко

О.Г. Савченко

07.02.2025