**Відгук**

офіційного опонента,
завідувача кафедри алгебри, топології та основ математики
Львівського національного університету імені Івана Франка,
доктора фізико-математичних наук (за спеціальностями 01.01.01 –
математичний аналіз та 01.01.04 – геометрія і топологія),
професора Банаха Тараса Онуфрійовича
на дисертаційну роботу Никоровича Святослава Ігоровича
«Апроксимації в просторах псевдометрик»
на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

1. **Актуальність теми дослідження**

Дисертація присвячена дослідженню порядкових властивостей частково впорядкованих просторів псевдометрик та псевдоультраметрик. Поняття метрики є одним з фундаментальних понять, на яких базується уся сучасна математика. Нерівність трикутника, що входить в означення метрики, виконується на більшості віддалей, що виникають на практиці (хоча у теоретичній фізиці виникають екзотичніші віддалі, наприклад Лоренца, що не задовольняють нерівності трикутника і приводять до відомих парадоксів, наприклад, парадоксу близнюків у теорії відносності Айнштайна). З іншого боку у низці важливих застосувань математики, наприклад, до лінгвістики, інформатики чи генетики, виникають метрики, що задовольняють сильнішу версію нерівності трикутника, у якій сума замінена максимумом. Такі метрики називають ультраметриками. Часом доводиться послаблювати аксіому невиродженості в означенні (ультра)метрики, допускаючи нульову віддаль між різними точками, що приводить до поняття псевдо(ультра)метрики. Таке послаблення також продиктоване практичними вимогами, коли потрібно ототожнювати певні об'єкти, різниця між якими несуттєва. Наприклад, у класовій теорії Маркса та Енгельса відстань між представниками різних класів вважалася на порядок більшою за відстань між представниками одного класу, яку можна було вважати нульовою, тому і виник відомий лозунг «Пролетарі усіх країн єднайтеся!».

Псевдоультраметрики також дуже корисні як мінімальні «будівельні блоки», з яких можна будувати складніші метрики. До речі, саме цим займається дисертант в останньому розділі дисертації. Метриками, псевдометриками, ультраметриками, квазіметриками, симметриками займалося багато математиків, починаючи з Гаусдорфа, який і ввів в математичний ужиток формальне поняття метрики. Лише в AMS Subject Classification я нарахував 46 рубрик, в яких зустрічається термін «метрика». Тому тема дисертації безумовно актуальна. Фактично вона стосується не так поодиноких (псевдо)метрик, як сімей сукупності псевдометрик на фіксованій множині X. Ця сукупність має багату структуру, оскільки псевдометрики можна порівнювати, додавати, множини на невід'ємні числа, тощо. Множина псевдометрик природньо «живе» у векторній ґратці усіх дійснозначних симетричних функцій на квадраті множини X, що приймають нульове значення на діагоналі квадрата. Вивчення структури просторів псевдометрик як підмножин таких просторів функцій започаткував у 90-х роках минулого століття польський математик львівського походження, класик нескінченно-вимірної топології, Чеслав Бессага, який привніс цю тематику і у львівське топологічне середовище, вихованцем якого є науковий керівник дисертанта професор Олег Ростиславович Никифорчин.

Проте дисертація Никоровича стосується в першу чергу порядкової структури на просторах псевдоультраметрик. Теорія порядкових структур є невід'ємною частиною математики, що знайшла численні застосування, особливо у теоретичній інформатиці. У цій теорії є своя «Біблія», а саме відома монографія «Continuous Lattices and Domains» шести «апостолів» цієї науки: Gierz, Hofmann, Keimel, Lawson, Mislove, Scott, яка систематично розвиває упорядкований погляд на світ, в тому числі на світ топологічний – порядок визначає канонічні топології (зокрема Лоусона та Скотта). Власне дисертаційна робота стосується саме такого, впорядкованого погляду на простори псевдоультраметрик. Оскільки дослідження проводилося у відносно маловивченій області на перетині теорії метричних просторів, теорії порядку, та функціонального аналізу, то дисертанту вдалося отримати низку нових цікавих і нетривіальних результатів про порядкову структуру просторів псевдоультраметрик.

Закінчу обговорення актуальності теми дисертації коментарем щодо термінології. Основним об'єктом вивчення у дисертаційній роботі є псевдоультраметрики, надто довгий термін, який може відлякувати потенційних поціновувачів цієї важливої і цікавої наукової праці. Цей термін став жертвою неправильного початкового підходу в творенні математичної номенклатури. Подібною жертвою неправильного термінотворення є поняття напівгрупи, яке узагальнює поняття групи, або тернарного кільця, яке не є кільцем, чи скошеного поля, яке не є полем. Продуманіший підхід до термінологічних питань починається лише з виходом на математичну сцену групи Бурбакі, які на початку 50-х років минулого століття зайнялися систематизацією математичних понять (хоча для псевдоультраметрик це вже було запізно – незручна термінологія вже прижилася). Так от, згідно з підходом Бурбакі, простіші та фундаментальніші поняття повинні мати коротші назви, які видовжуться при додаванні аксіом до первинних понять. З поняттями псевдометрики чи напівгрупи відбувся зворотний процес – віднімання аксіом призвело до видовження понять. Але з цим наявним і історично усталеним термінологічним хаосом вже нічого не вдієш, природну еволюцію важко розвернути навспак, і дисертанту довелося працювати з наявним довгим термінологічним покручем «псевдоультраметрикою», чи що те саме «ультрапсевдометрикою». Але якщо розібратися в суті отриманих результатів, то вони дуже важливі, цікаві, красиві, та, без сумніву, актуальні.

## 2. Загальна характеристика дисертаційної роботи

Дисертація досить об'ємна (145 сторінок), як половина докторської. Вона складається з вступу та чотирьох розділів, перший з яких є радше термінологічно-підготовчий.

Нові математичні результати починаються з **другого** розділу, який присвячено вивченню і характеризації важливого порядку «значно нижче» (англійською «way below») на частково впорядкованій множині псевдоультраметрик на даній множині X. Тут автору вдалося отримати остаточні результати: Теорему 2.2, що характеризує це відношення на псевдоультраметриках на скінченних множинах, та Теорему 2.3, що дає необхідні умови знаходження однієї псевдоультраметрики значно нижче за другу. Цей розділ також містить низку цікавих прикладів, зокрема приклад двох неперервних метрик на відрізку, інфімум яких є нульовою псевдометрикою. Я мав підозру, що такий класико-подібний приклад мав би бути відомим, проте не зміг знайти в інтернеті нічого аналогічного.

**Третій** розділ дисертації присвячено вивченню дуального до «значно нижче» поняття «значно вище» на частково впорядкованій множині псевоультраметрик. Виявилося, що результати, що стосуються цього дуального поняття зовсім не дуальні до результатів попереднього розділу. Зокрема, в теоремі 3.7 показано, що це поняття вироджується до розгляду скінченних псевдоультраметричних просторів. Для отримання нетривіальних результатів, автор обмежує допустимі псевдоультраметрики певною компактною псевдоультраметрикою і для таких просторів обмежених псевдоультраметрик отримує цілком нетривіальну та цікаву характеризацію відношення «значно нижче» у Теоремі 3.9. Для доведення цієї теореми використовується послаблена версія «значної нижчості» і теж розвивається новаторська техніка жорстких чи розтяжних пар точок.

**Четвертий** розділ має функціонально-аналітичну спрямованість і вивчає простори псевдометрик як підмножини векторних просторів симетричних функцій, що зануляються на діагоналі. Також у цьому розділі досліджуються та розв'язуються проблеми метризації просторів псевдоультраметрик на компактних ультраметричних простpах. Фактично, запропоновано три метризації простору псевдоультраметрик: метрику Гаусдорфа між підграфіками двох псевдометрик, метрику рівномірної збіжності, та метрику типу Хартоґа – де Вінка, що визначається через надграфіки. Доведено, що перші дві метрики породжують однакову топологію на просторах псевдоультраметрик, яка теж узгоджується з топологією Лоусона, що породжена порядком, а от метрика типу Хартоґа – де Вінка уже не має настільки хороших властивостей. У підрозділі 4.6 досліджуються конуси та лінійні підпростори, породжені псевдоультраметриками і доведено цікаві теореми про зображення довільних псевдометрик у вигляді сум (чи різних) псевдоультраметрик. При цьому проявилися цікаві феномени на рівні відмінностей між 4-точковими та 5-точковими просторами. Наприклад, у Твердженнях 4.6.5 та 4.6.6 доведено до конус усіх псевдометрик на множині X потужності $|X| < 5$ породжується псевдоультраметриками, але вже для 5-елементного X цей факт не виконується. У підрозділі 4.7 вивчається структура простору псевдометрик з точки зору ідемпотентного аналізу, а підрозділ 4.8 включає спільні результати дисертанта та професора Тараса Василишина про симетричні функціонали на лінійних просторах, породжених псевдометриками, де доведено аналог поляризаційної формули для таких функціоналів.

## 2. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації

Підсумовуючи вищесказане, хочу зазначити, що дисертаційна робота насичена новими цікавими результатами, доведення яких коректні, строго сформульовані та мають належні посилання. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і описують основні результати.

## 3. Основні наукові результати, одержані автором та їх новизна

У висновку до дисертації сформульовано 15 пунктів з описом нових результатів, що є забагато навіть для докторської дисертації. Із цих 15 пунктів я б виділив 3 найсуттєвіших та найрепрезентативніших (на мою думку):

- охарактеризовано відношення «значно менше» та «значно більше» та частково впорядкованій множині (обмежених) псевдоультраметрик;
- запроваджено відстань між псевдоультраметриками як відстань Гаусдорфа між підграфіками цих псевдоультраметрик та доведено, що ця метрика породжує компактну топологію, що збігається з топологією рівномірної збіжності, а також топологією Лоусона, що породжується порядком на множині псевдоультраметрик;
- охарактеризовано множини потужності менше 5 як множини, конус псевдометрик над якими породжується псевдоультраметриками.

## 4. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Основні положення дисертаційної роботи опубліковано у 8 наукових працях, з яких 5 є це статті у виданнях 4 з яких входить до переліку міжнародних наукометричних баз, та 3 праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях.

## 5. Дотримання академічної доброчесності

Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертаційної роботи. Вони мають належні посилання. Також в дисертації є посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації. У роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

## 6. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати розширюють розуміння порядкової структури просторів псевдометрик та можуть бути використані в функціональному аналізі, загальній топології, теорії множин, теоретичній інформатиці та інших суміжних розділах математичних досліджень ті їхніх застосуваннях.

## 7. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

**a.** При обговоренні актуальності автор дисертації стверджує, що метрика Мінковського насправді є псевдометрикою і в фізиці називається метрикою Лоренца. Проте Вікіпедія стверджує, що метрикою Мінковського є звичайна $l_1$-метрика на n-вимірному евклідовому просторі, яка є узагальненням добре відомої метрики таксиста, що називається теж Манхеттенською метрикою. Видно автор сплутав поняття метрики Мінковського (яка таки є метрикою, а не псевдометрикою) з псевдоевклідовим простором Мінковського, який наділено метрикою Лоренца, що навіть не є псевдометрикою, оскільки вона не задовольняє нерівності трикутника. Саме порушенням нерівності трикутника пояснюється відомий парадокс близнюків у Теорії Відносності Айнштайна.

**b.** Означеннях 1.1.1 та 1.1.3 псевдометрики та псевдоультраметрики умова невід'ємності зайва і випливає з решти аксіом. Це зауваження суттєве, оскільки ця (зайва) умова часто появляється при перевірці того, що та чи інша функція є псевдометрикою (наприклад, на сторінках 49, 97). Дивно, але саме така надлишкова аксіоматика надійно закріпилася в літературі і ця дисертація тут не є винятком.

**c.** Часом трапляються описки: «напівграткових операції» на сторінці 36, «була слідувала б за» на стор. 50, «псевдоультрометрика» в Теоремі 3.2 на стор. 71, «її діаметром дорівнює» в лемі 3.3.5, «точна нижня грань межа» на початку сторінки 80, «компактна ультрапсевдометрика» замість «компактні ультрапсевдометрики» в Означенні 3.4.2, пропущено пропуск перед «що» в кінці стор. 54, пропущено круглі дужки навколо «псевдо» на сторінці 26, пропущено фігурні дужки навколо формули $F_i \mid i \in I$ на сторінці 32, навколо формули, що означує ε на стор. 72, та навколо формули $d_\alpha \mid \alpha \in A$ внизу сторінки 76,

**d.** Розділювач між $R^n$ і d у двох формулах внизу сторінки 26 треба було оточити пропусками, щоб виглядало естетичніше.

**e.** Означувані терміни прийнято виділяти курсивом, щоб відразу кидалося в вічі, яке саме поняття означуються. Це стосується практично усіх означень в дисертації.

**f.** В Означенні 1.2.13 вводиться поняття *умовно повної напівгратки*. Наскільки я розумію це є українським перекладом англійського терміну *boundedly complete semilattice*. Чому *умовно?* Тим більше, що в розділі 4.7 автор не дотримується власного ж перекладу і говорить про *обмежено повні* ідемпотентні векторні простори.

**g.** В Означеннях 1.2.18 та 1.2.19 з якогось «космосу» (видно «копі-пастного») прибула множина Ps(X), замість частково впорядкованої множини X. Також закриваюча лапка переродилася в [22] (яке знаходиться на тій же клавіші клавіатури).

**h.** Лема 2.1.1 є частковим випадком відомої конструкції псевдометрики, що менша за дану функцію двох змінних. Можливо, саме в такому загальному формулюванні її слід було доводити?

**i.** В лемі 2.2.4 замість значка об'єднання мав би бути перетин (множин $F_i$).

**j.** У передостанній лінійці доведення леми 2.2.14 на сторінці 54 пропущено «=0».

**k.** У першу умову Теореми 2.3 вартувало б уточнити, оскільки вона залежить від ε.

**l.** Не зовсім зрозуміла кінцівка доведення прикладу 2.2.19, а саме фраза «а це в свою чергу суперечить нашому припущенню». Якому саме припущенню?

**m.** У передостанній лінійці доведення теореми 2.4 на сторінці 60 *точна верхня грань* напевно мала б бути *точною нижньою гранню*.

**n.** Мені видається, що забагато компактності в реченні «Компактний образ компактного простору є компактним» на сторінці 66.

**o.** Тотожні відображення з та в псевдометричний простор (X,d) на сторінці 67 мали б бути з та в псевдометричний простір $(X,d_*)$.

**p.** Як розуміти можливість k=0 в умові 2 Теореми 3.5 на сторінці 80? В першому абзаці доведення цієї теорему доцільніше було використати аргумент мінімальності: вибрати найменше k для якого виконуються умови теореми 3.5 і тоді нічого не треба було б викидати.

**q.** Що значить «будь-яка» в умові леми 3.4.1 на сторінці 82: «кожна», чи «одна з»? Бо остання умова (нескінченності) випливає з двох попередніх.

Проте згадані вище недоліки непринципові і не применшують позитивного враження про дисертаційну роботу, яка виконана на високому науковому рівні і свідчить про наукову зрілість її автора.

## 8. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота Никоровича Святослава Ігоровича «Апроксимації в просторах псевдометрик», подана до захисту на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 -- математичний аналіз, є завершеною науковою працею, яку виконано на високому теоретичному та методологічному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати. Вона задовольняє вимоги "Порядку присудження наукових степенів", затвердженого постановою Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013 р. (з наступними змінами), а дисертант Никорович Святослав Ігорович заслуговує на присудження наукового наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 -- математичний аналіз.

Офіційний опонент
завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики
Львівського національного університету імені Івана Франка,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Тарас Банах

ВІДДІЛ КАДРІВ

Підпис Банаха Т. О.
ПІДТВЕРДЖУЮ
Нач. ВК ЛНУ ім. І. Франка

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Відділ аспірантури і докторантури
Вх. № 03.04-30/08
«10» 02 2021 р.