Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Міністерство освіти і науки України

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Никорович Святослав Ігорович

УДК 517.982.272

ДИСЕРТАЦІЯ

Апроксимації в просторах псевдометрик

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________________ Никорович С.І.

підпис

Науковий керівник Никифорчин Олег Ростиславович,
доктор фізико-математичних наук, доцент

Івано-Франківськ — 2024

АНОТАЦІЯ

Никорович С. І. Апроксимації в просторах псевдометрик. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню пов'язаних з відношеннями апроксимації метричних та порядкових властивостей частково впорядкованих множин всіх псевдометрик на фіксованих множинах та їх підмножин. Зокрема, велика увага присвячена псевдоультраметрикам, які з одного боку, є частковим випадком псевдометрик з посиленою нерівністю трикутника, а, з іншого, є узагальненням ультраметрик (чи неархімедових метрик, для яких послаблена вимога невиродженості (тобто різні точки не обов'язково відокремлені додатною відстанню). Отримані результати дозволяють поєднувати порядкові підходи та вибір метризації при наближеному розв'язанні задач класифікації.

У першому розділі наведено необхідні відомості з теорії метричних просторів та неперервних областей, зокрема, означення топологій Скотта та Лоусона, відношення апроксимації, тощо.

У другому розділі розглянуто порядкові властивості множини псевдометрик. Зокрема, доведено, що множина всіх псевдометрик на довільній фіксованій множині X з поточковим впорядкуванням є умовно повною недистрибутивною граткою, а множина всіх метрик на $X = [0, 1]$ не є напрямленою вниз, тому не є нижньою напівграткою, а тим більше граткою.

Також описано відношення апроксимації знизу на множині всіх псевдометрик на скінченній множині X і доведено, що, якщо нетривіальна псевдоме-

трика d_0 на нескінченній множині X апроксимує знизу псевдометрику d на X, то d обмежена, а d_0 розбиває X на скінченну кількість класів еквівалентності, які щодо d є відкрито-замкненими.

Показано, що множина $Ps_a(X)$ всіх псевдометрик на деякій фіксованій множині X, значення яких не перевищують фіксованого додатного числа a, є двоїсто неперервною. Для цього створено допоміжні конструкції, які за даною псевдометрикою дозволять отримувати сім'ї псевдометрик, що наближають її у порядковому сенсі.

Доведено факт, що жодні дві псевдометрики на нескінченній множині X не перебувають у відношенні апроксимації згори у множині всіх псевдометрик на X, а у підмножині всіх псевдометрик на X, значення яких не перевищують фіксованого $a > 0$, кожний елемент є точною нижньою гранню напрямленої вниз множини елементів, що апроксимують його згори.

Часткові порядки на множинах псевдометрик мають досить бідні відношення апроксимації і не становлять значного інтересу з погляду теорії областей. Для існування нетривіального наближення знизу псевдометрика повинна бути обмеженою, а верхньою гранню своїх апроксимацій знизу вона може бути тільки тоді, коли визначає цілком незв'язну топологію. Тому в подальшому ми знайдемо класи з цікавішими властивостями.

У третьому розділі розглядються псевдоультраметрики, зокрема, описано граткові операції (точну верхню та точну нижню грані) у поточково впорядкованій множині всіх псевдоультраметрик на фіксованій множині X. Доведено, що підмножини всіх компактних псевдоультраметрик і всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X не є напрямленими вгору. Надалі ми розглядаємо простір всіх псевдоультраметрик на фіксованій множині та порядкові властивості такого простору.

Доведено, що у множині компактних псевдоультраметрик на довільній множині X інфімум двох елементів дистрибутивний щодо супремума довільної кількості елементів, а для множин всіх псевдоультраметрик на зліченній множині X та всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X ця властивість не виконана.

Показано, що некомпактну псевдоультраметрику на довільній множині X у множині всіх псевдоультраметрик на X чи у множині всіх локально компактних псевдоультраметрик на X апроксимує знизу тільки тривіальна псевдометрика.

Введено допоміжне відношення "бути слабко значно нижче", за допомогою якого отримано необхідні і достатні умови того, що компактна псевдоультраметрика d_0 апроксимує знизу компактну псевдоультраметрику d_1, і доведено, що кожна компактна псевдоультраметрика є точною верхньою гранню напрямленої вгору множини компактних псевдоультраметрик, що апроксимують її знизу.

У підсумку розділу отримано висновок, що жодна компактна псевдоультраметрика на нескінченній множині X не апроксимує згори компактну псевдоультраметрику на цій множині.

Таким чином ми описали відношення апроксимації згори і алгоритм побудови апроксимуючих згори елементів у множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, з чого випливає двонеперервність цієї частково впорядкованої множини.

Обгрунтовано використання компактних псевдоультраметрик для подальшого дослідження.

Четвертий розділ присвячено метричним просторам псевдоультраметрик та їх вкладенням у нормовані векторні простори. Описано множини, які є підграфіками і надграфіками компактних псевдоультраметрик, і введено відстані між компактними псевдоультраметриками як відстань Гаусдорфа між їх підграфіками та відстань Гаусдорфа між їх надграфіками.

Показано, що напівгратка нижньої тіні деякої фіксованої компактної ультрапсевдометрики з топологією, індукованою метрикою Гаусдорфа є компактною гаусдорфовою верхньою напівґраткою Лоусона.

Доведено, що множина всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що передують фіксованій компактній псевдометриці на X, з введеною через підграфіки метрикою є метричним компактом, і ця метрика топологічно еквівалентна до метрики рівномірної збіжності.

Також встановлено співвідношення між метрикою на основі метрики Гаусдорфа і метрикою рівномірної збіжності на множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, і показано, що метрика рівномірної збіжності є граничним випадком метрик, означених через підграфіки.

Встановлено, що множина "нижньої тіні" компактної псевдоультраметрики з метрикою Гаусдорфа є компактною. Наведено два різних доведення цього факту, зокрема, з використанням теореми Арцела-Асколі та властивостей компактних метрик. Окрім того показано, що з того, що одна компактна псевдоультраметрика менша за іншу випливає,що включення множин їхніх тіней з метриками Гаусдорфа є топологічним вкладенням.

Введено аналог ультраметрики Гартоґа-де Вінка між компактними псевдоультраметриками, і доведено, що ця ультраметрика є граничним випадком метрик, означених через надграфіки.

Показано, що для кожної фіксованої компактної псевдоультраметрики існує компактна гаусдорфова топологія на множині її тіні, що робить її топологічною ґраткою з малими підґратками. Ця топологія визначається за допомогою метрики рівномірної збіжності.

Доведено, що множина всіх псевдоультраметрик, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, є повною граткою, на якій топологія Лоусона і двоїста топологія Лоусона збігаються і є визначеними метрикою рівномірної збіжності.

Доведено, що множина всіх псевдоультраметрик на скінченній множині породжує конус псевдометрик у банаховому просторі функцій двох змінних тоді і тільки тоді, коли потужність множини не більша за чотири. Показано, що множина всіх компактних псевдоультраметрик, що не перевищують даної, породжує у банаховому просторі неперервних функцій двох змінних замкнений підпростір симетричних функцій, що рівні нулю для всіх пар однакових аргументів.

Показано, що множина всіх компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо даної, є замкненим підпростором повного нормованого ідемпотентного векторного простору невід'ємних неперервних функцій двох змінних, породженим множиною псевдоультраметрик, визначених розбиттями на дві відкрито-замкнені множини.

Ключові слова: псевдометрики, псевдоультраметрики, апроксимація, двонеперервність, норма рівномірної збіжності, ідемпотентний векторний простір.

ABSTRACT

Nykorovych S. I. Approximations in pseudometric spaces. — Qualifying scientific work, manuscript. Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01- mathematical analysis. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2024.

This thesis is devoted to the study of approximation relations involving metric and order properties of partially ordered sets of all pseudometrics on fixed sets and their subsets. In particular, considerable attention is paid to pseudoultrametrics, which, on one hand, are a special case of pseudometrics with a strengthened triangle inequality, and on the other, are generalizations of ultrametrics (or non-Archimedean metrics, for which the requirement of non-degeneracy is relaxed, meaning different points are not necessarily separated by a positive distance). The obtained results allow for the combination of order approaches and the choice of metrization in the approximate solution of classification tasks.

The first chapter provides necessary information from the theory of metric spaces and continuous domains, including the definitions of Scott and Lawson topologies, approximation relations, etc.

The second chapter discusses the order properties of the set of pseudometrics. In particular, it is proven that the set of all pseudometrics on any given set X with pointwise ordering is a conditionally complete non-distributive lattice, and the set of all metrics on $X = [0, 1]$ is not downward directed, therefore it is not a lower semi-lattice, much less a lattice.

The relationship of approximation from below on the set of all pseudometrics on a finite set X is also described, and it is proven that if a non-trivial pseudometric

d_0 on an infinite set X approximates from below a pseudometric d on X, then d is bounded, and d_0 partitions X into a finite number of equivalence classes, which are open-closed with respect to d.

It is shown that the set $Ps_a(X)$ of all pseudometrics on a certain fixed set X, whose values do not exceed a fixed positive number a, is dually continuous. For this purpose, auxiliary constructions are created that allow for obtaining families of pseudometrics that approximate it in the order sense.

It is proven that no two pseudometrics on an infinite set X are in an approximation relation from above in the set of all pseudometrics on X, and in the subset of all pseudometrics on X whose values do not exceed a fixed $a > 0$, each element is the exact lower bound of a downward directed set of elements that approximate it from above.

Partial orders on sets of pseudometrics have rather poor approximation relations and are not of significant interest from the perspective of domain theory. For a non-trivial approximation from below to exist, a pseudometric must be bounded, and it can only be the least upper bound of its approximations from below if it defines a totally disconnected topology. Therefore, further on, classes with more interesting properties will be identified.

The third chapter deals with pseudoultrametrics, including a description of lattice operations (exact upper and lower bounds) in the pointwise ordered set of all pseudoultrametrics on a fixed set X. It is proven that subsets of all compact pseudoultrametrics and all locally compact pseudoultrametrics on a countable set X are not upward directed. Further, the space of all pseudo-ultrametrics on a fixed set and the order properties of such space are considered.

It is demonstrated that in the set of compact pseudoultrametrics on any set X, the infimum of two elements is distributive with respect to the supremum of any number of elements (meet continuity is achieved), but for the sets of all pseudoultrametrics on a countable set X and all locally compact pseudoultrametrics on a countable set X, this property is not satisfied.

It is shown that a non-compact pseudoultrametric on any set X in the set of all pseudoultrametrics on X or in the set of all locally compact pseudoultrametrics on X is approximated from below only by a trivial pseudometric.

An auxiliary relation of "being weakly way below" is introduced, through which the necessary and sufficient conditions are obtained for a compact pseudoultrametric d_0 to approximate from below a compact pseudoultrametric d_1, and it is proven that every compact pseudoultrametric is the exact upper bound of an upward directed set of compact pseudoultrametrics that approximate it from below.

The conclusion of the chapter is that no compact pseudoultrametric on an infinite set X approximates from above a compact pseudoultrametric on that set.

Thus, the relations of approximation from above and the algorithm for constructing elements that approximate from above in the set of all compact pseudoultrametrics on a fixed set X, which do not exceed a given compact pseudoultrametric, are described, resulting in the dual continuity of this partially ordered set.

The use of compact pseudoultrametrics for further research is justified.

The fourth chapter is devoted to metric spaces of pseudoultrametrics and to their embeddings into normed vector spaces. It describes the sets that are subgraphs and supergraphs of compact pseudoultrametrics, and introduces distances between compact pseudoultrametrics as the Hausdorff distance between their subgraphs and the Hausdorff distance between their supergraphs.

It is shown that the semilattice of the lower shadow of a certain fixed compact pseudoultrametric with the topology induced by the Hausdorff metric is a compact Hausdorff upper Lawson semilattice.

It is proven that the set of all compact pseudoultrametrics on a fixed set X, preceding a fixed compact pseudometric on X, with the metric introduced through subgraphs is a metric compact, and this metric is topologically equivalent to the metric of uniform convergence.

The relationship between the metric based on the Hausdorff metric and the metric of uniform convergence on the set of all compact pseudoultrametrics on a fixed set X is established, showing that the metric of uniform convergence is a limiting case of metrics defined through subgraphs.

It is established that the "lower shadow" set of a compact pseudoultrametric with the Hausdorff metric is compact. Two different proofs of this fact are provided, including using the Arzela-Ascoli theorem and properties of compact metrics. Furthermore, it is shown that if one compact pseudoultrametric is less than another, it implies that the inclusion of their shadow sets with Hausdorff metrics is a topological embedding.

An analog of the Hartogs-de Vink ultrametric between compact ultrapseudometrics is introduced, and it is proven that this ultrametric is a limiting case of metrics defined through supergraphs.

It is shown that for each fixed compact pseudoultrametric, there exists a compact Hausdorff topology on the set of its shadow that makes it a topological lattice with small sublattices. This topology is defined by the metric of uniform convergence.

It is proven that the set of all pseudoultrametrics that do not exceed a given compact pseudoultrametric is a complete lattice, on which the Lawson topology and the dual Lawson topology coincide and are defined by the metric of uniform convergence.

It is proven that the set of all pseudoultrametrics on a finite set generates the cone of pseudoultrametrics in the Banach space of the functions of two variables

if and only if the cardinality of the set is not greater than four. It is shown that the set of all compact pseudoultrametrics not exceeding a given one, generates in the Banach space of the continuous functions of two variables the closed subset of all symmetric functions that are equal to zero for each pair of equal arguments.

It is proven the set of all compact pseudoultrametrics not exceeding a given one, is a closed subset of the complete normed idempotent vector space of nonnegative continuous functions of two variables, which is generated by the set of the pseudometrics corresponding to the partitions consisting of two clopen sets.

Keywords: pseudometrics, pseudoultrametrics, approximation, bicontinuity, uniform convergence norm, idempotent vector space.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Nykorovych S.I. *Approximation relations on the posets of pseudometrics and of pseudoultrametrics*// Carpathian Math. Publ. — 2016. — 8(1), p. 150–157.

   Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.15330/cmp.8.1.150-157
2. Nykorovych, S. I., Vasylyshyn, T. V. *Symmetric linear functionals on the Banach space generated by pseudometrics*// Matematychni Studii — 62(1), 2024. — 81-92.

   Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.30970/ms.62.1.81-92
3. Никифорчин О.Р., Никорович С.І., Копорх К.М. *Компактні ультрапсевдометрики та зворотні спектри* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2022. — Вип. 17(64), С. 299–314.

   Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.31471/2304-7399-2022-17(64)-65-74.
4. Nykorovych S.I., Nykyforchyn O.R., Zagorodnyuk, A.V. *Approximation Relations on the Posets of Pseudoultrametrics*// Axioms.— 2023. – 12(5), p.438.

   Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.3390/axioms12050438.
5. Nykorovych S., Nykyforchyn O. *Metric and Topology on the Poset of Compact Pseudoultrametrics* // Carpathian Math. Publ. — 2023. — Vol. 15 (2), p. 321-330.

   Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.15330/cmp.15.2.321-330

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Никорович С.І. *Порядкові властивості множин псевдометрик* // IXth Summer School. Algebra, Topology and Analysis. Abstracts of Lectures and Report, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези доп. – Поляниця.— 2014. – С. 59-60.
2. Nykorovych S. *Approximation relations on the posets of pseudoultrametrics* // Сучасні проблеми механіки та математики, 23 – 25 травня, 2023, Львів: тези доп. – Львів. — 2023. – С. 425.
3. Nykorovych S. International Workshop On Current Trends In Analysis And Approximation Theory, July 18, Rome, Italy: Proc. Book. — Rome, 2023. — P. 79.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми.

Основними об'єктами дисертаційного дослідження є простори псевдометрик. Псевдометрики виникають у різних галузях математики, передусім у функціональному аналізі, зокрема, у теорії топологічних векторних просторів. Вони забезпечують ширшу основу для вивчення просторів із поняттями відстані. Зокрема, псевдометрики є загальнішим випадком метрик - від них не вимагається невиродженості. Згідно з [6, p.51], вперше псевдометричні простори були введені югославським математиком Джуро Курепою у 1934 році [20]. Вже у 1955 році Джон Л. Келлі вживає цей термін у своєму підручнику "Загальна топологія" [18]. У 1970 році Стефан Віллард наводить приклади псевдоультраметрик у своїй монографії "Загальна топологія" [63]. Більше прикладів можна знайти у книзі 1978 року Лінна Стіна та Дж. Артура Сібаха молодшого "Контрприклади в топології" [56].

У функціональному аналізі псевдометрики використовуються для означення топологічних векторних просторів, зокрема в контексті теорії локально опуклих просторів. Усі напівнормовані простори є псевдометричними просторами, так само як усі нормовані простори є метричними просторами. Через цю подібність термін "напівметричний простір" (який має різні значення в топології) іноді використовується як синонім до "псевдометричний простір", особливо у функціональному аналізі. Коли топологія генерується з використанням сімейства псевдометрик, простір називається калібрувальним простором [34].

У функціональному аналізі часто використовують так звану метрику Мінковського, яка насправді є псевдометрикою. Вона ж відома у фізиці під назвою метрики Лоренца. У теорії відносності псевдометрики використовуються, щоб визначити N-вектори енергії та імпульсу [62].

Псевдоультраметрики [60], з одного боку, є частковим випадком псевдометрик з посиленою нерівністю трикутника, а, з іншого, є узагальненням ультраметрик (чи неархімедових метрик [31, 70]), яке послаблює вимогу невиродженості (тобто різні точки не обов'язково відокремлені додатною відстанню). Псевдо(ультра)метрика на множині може розглядатися як деревоподібна класифікація її елементів, в якій числове значення є мірою (не)схожості. Це призводить до застосувань у таких галузях, як таксономія та побудова філогенетичних дерев [23]. Ультраметрики довели свою корисність при аналізі складних систем, таких як мережі та соціальні структури [32]. Їх можна розглядати як засіб зображення "багаторівневих" грубих множин [12, 44]. Вони природно пов'язані з неархімедовими рівномірними структурами [48, 51].

Корені теорії ультраметричних просторів знаходяться в комп'ютерних науках, тому зрозуміло, що псевдоультраметричні простори мають застосування в дослідженні абстрактних типів даних та алгоритмів. Як було вказано М. Кроцшем [19], "Теорія областей та теорія метричних просторів - це два центральні інструменти у вивченні денотаційної семантики в комп'ютерних науках. " Внутрішні відносини між ультраметриками та порядками були розкриті в останній праці. Зокрема, було показано, що простір формальних куль в узагальненому ультраметричному просторі є (за прийнятних припущень) неперервною частково впорядкованою множиною, тобто частково впорядкованою множиною, в якої кожен її елемент є точною верхньою гранню напрямленої множини елементів, які наближають його знизу.

Псевдоультраметричні простори забезпечують більш гнучку структуру, ніж ультраметричні простори, дозволяючи ширший "діапазон несхожості", і зберігаючи при цьому основні властивості метричного простору. Їх універсальність робить їх цінними інструментами в різних наукових дисциплінах і математичних дослідженнях.

Інший згаданий у [19] інструмент денотаційної семантики є розділом теорії порядку. Виявилося [13], що часткові порядки тісно пов'язані з топологіями. Зокрема, "пристойне" упорядкування множини визначає досить природні та корисні топології, наприклад, топологію Скотта, верхню/нижню топологію, топологію Лоусона і інші. Для того, щоб ці топології мали гарні властивості, вихідний порядок повинен відповідати певним вимогам, головним чином пов'язаним з відносинами наближення і названими "неперервністю" в теорії областей. Ці вимоги виконуються багатьма природними частковими порядками, наприклад, на множинах замкнених підмножин фіксованих топологічних просторів [29, 46], на множинах гіперпросторів включення [41], на множинах ємностей [42] і т.д. Це мало плідні наслідки для топологічних та алгебраїчних властивостей цих множин.

Топологія Скотта — це поняття, в основному пов'язане з теорією домену та її застосуванням в інформатиці та математичній логіці. Ідеї, що привели до введення топології Скотта, почали з'являтися в 1960-х роках, коли комп'ютерні вчені та логіки досліджували математичні структури для моделювання семантики мов програмування. Дана Скотт, видатний інформатик і логік, відіграв вирішальну роль у цих подіях. Він запропонував концепцію області, яку можна розглядати як математичну абстракцію для представлення інформації про можливі стани програми, тоді функції між областями описують поведінку програми [54].

Було обґрунтовано [7, 8], чому відповідні множини повинні бути частково впорядкованими і неперервними. Елементи області розглядаються як інформаційні стани, де один стан є більш інформативним (знає більше), ніж інший. Тоді функції, що відповідають переходам між станами (трансформери предикатів), є монотонними, і, щобільше, неперервними щодо топологій Скотта. Вони стали щоденним засобом дослідження семантики мов програмування та міркувань про обчислення, включаючи аналіз програм, перевірку моделей і верифікацію програмних систем. У математичному аналізі апроксимації використовуються для вивчення границь, неперервності та збіжності послідовностей і функцій. Подібним чином у денотаційній семантиці мов програмування апроксимації в областях (наділених топологіями Скотта) відіграють вирішальну роль у розумінні того, як збігаються обчислення та програми.

Топологія Лоусона — теж добре відоме поняття в теорії областей та математичній логіці. Вона охоплює як топологію Скотта, так і так звану нижню топологію, покращуючи їх, оскільки вони загалом не є гаусдорфовими, а топологія Лоусона на області є такою, а за додаткових умов і компактною, що є корисним для задач апроксимації.

Практично важливими є не тільки окремі псевдометрики, а й їх множини, наділені додатковою структурою (метрикою та/чи порядком) і вкладені у нормовані або топологічні векторні простори, що вписує їх у контекст функціонального аналізу. Т. Банах, Ч. Бессага, О. Піхурко, Е. Тимчатин та інші [2, 3, 45, 55, 59] отримали серію результатів про лінійні неперервні оператори, що продовжують чи усереднюють псевдометрики.

Для нас є цінним, що теорія областей пропонує гармонійний “порядковий” підхід до апроксимації, що доповнює традиційний, опертий на метричні структури [1]. Хоча у функціональному аналізі, зокрема, у теорії просторів Ріса (векторних граток) розглядаються збіжності, означені через порядок [62], теорія областей нарешті надає порядковій збіжності завершений вигляд. Зокрема, саме вона є природною для опису наближення (псевдо-)метричних структур, якщо ми розуміємо їх як засіб класифікації [67]. У цьому дисертаційному дослідженні ми розглянемо простори псевдо(ультра)метрик і покажемо, як здійснюється їх апроксимація знизу і згори і чому вона узгоджується з апроксимацією на основі природних метрик і норм. Це відкриє шлях до створення і дослідження апроксимаційних операторів для нечітких і грубих множин [25, 26, 69].

Тому логічним є застосування поєднання засобів функціонального аналізу і апарату теорії областей до природно (тобто поточково) упорядкованих множин метрик або структур, схожих на метрики. Ми прийшли до висновку, що найбільш підходящим класом для цього підходу є псевдоультраметрики. Категорії ультраметрик вже досліджувалися [24], але властивості порядку, особливо з точки зору апроксимації, та властивості множин (псевдо-)ультраметрик, природно вкладених у нормовані простори, ще не були вивчені, як і замкнені конуси та замкнені векторні підпростори, породжені цими вкладеннями.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження, що увійшли в основу дисертації, проводились на кафедрі математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника в рамках науково-дослідної теми «Дослідження алгебр, породжених симетричними поліноміальними та раціональними відображеннями у банахових просторах» (номер державної реєстрації 0123U101791).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження пов'язаних з відношеннями апроксимації метричних, топологічних та порядкових властивостей частково впорядкованих множин псевдометрик на фіксованих множинах та вкладень цих множин у нормовані векторні простори.

Досягнення поставленої мети пов'язане із розв'язанням наступних *завдань*:

– дослідження відношень апроксимації (неперервність, двоїста неперервність) у просторі псевдометрик $Ps(X)$;
– дослідження відношень апроксимації (неперервність, двоїста неперервність) у просторі псевдоультраметрик $PsU(X)$ та його підпросторах;

– дослідження властивостей топологій на псевдоультраметрик, що визначаються частковим порядком, та їх зв'язків з нормою рівномірної збіжності та метрикою Гаусдорфа;
– дослідження породжених множинами псевдоультраметрик замкнених підпросторів і конусів у нормованих просторах неперервних функцій.

Об'єктом дослідження є підмножини з заданими властивостями простору псевдометрик.

Предметом дослідження є властивості частково впорядкованих підмножин простору псевдометрик, а також відображень та відношень між цими об'єктами.

Методи дослідження. У процесі виконання дисертаційної роботи використані методи функціонального аналізу та теорії неперервних областей.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, є новими. У дисертації вперше:

- Описано порядкові властивості множини $Ps(X)$ усіх псевдометрик на фіксованій множині X та множини $PsU(X)$ усіх псевдоультраметрик на фіксованій множині X.

- Доведено, що частково впорядковані множини $Ps(X)$ і $PsU(X)$ не мають нетривіальних апроксимаційних відношень, отже, не є неперервними або двоїсто неперервними, а множина $Ps(X)$ навіть не є граткою.

- Доведено, що частково впорядкована множина $CPsU(X)$ (множина усіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X) неперервна.

- Встановлено, що наближення псевдоультраметрик (в сенсі теорії порядку) ефективне тільки у випадку компактних псевдоультраметрик.

- Встановлено, які класи псевдометрик на фіксованих множинах є неперервними та двоїсто неперервними.

- Отримано спосіб побудови компактних псевдоультраметрик значно нижче або значно вище заданої і як завгодно близьких до неї.

- Для фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на множині X запропоновано методи метризації множини $\hat{d}\uparrow$ усіх компактних псевдоультраметрик на X, менших або рівних $\hat{d}$, і доведено, що вони (за винятком метрики Гартоґа-де Вінка) є топологічно еквівалентними.

- Встановлено, що компактні псевдоультраметрики, неперервні щодо даної компактної псевдоультраметрики на фіксованій множині, утворюють повний нормований ідемпотентний векторний простір, породжують банахів простір симетричних неперервних функцій двох змінних, рівних нулю на діагоналі, але у загальному випадку не породжують додатній конус у цьому просторі.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати у теорії наближень та денотаційній семантиці мов програмування.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. У статті [67] співавторам належить огляд літератури, постановка задачі та участь у редагуванні статті. У статті [40] співавторам належить огляд літератури, постановка задачі та участь у редагуванні і перегляді статті. У статтях [39, 38] співавтору належить огляд літератури та постановка задачі.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації апробовано на таких наукових конференціях та семінарах:

1. IX-ій літній школі “Алгебра, топологія і аналіз ” (с. Поляниця, Івано-Франківська обл., 7–18 липня 2014 р.);
2. Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, (м. Львів, 23–25 травня 2023 р.);
3. Міжнародному семінарі з сучасних тенденцій в аналізі і теорії наближень (м. Рим, Італія, 18 липня 2023 р.);

4. Звітних науково-практичних конференціях Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2014 – 2016, 2022 – 2024);
5. Наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2012 – 2016, 2021 – 2024);
6. Наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2012 – 2016, 2021 – 2024);
7. Розширеному засіданні кафедри алгебри та геометрії, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 21 жовтня 2024 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 8 наукових працях: 5 статтях ([35, 38, 39, 40, 67]), з яких 3 ([38, 39, 40]) включені до наукометричних баз Scopus та Web of Science Core Collection (1 стаття [40] у періодичному закордонному виданні і 1 стаття [39] – у періодичному вітчизняному виданні, віднесених відповідно до третього квартиля (Q3) та другого квартиля (Q2) згідно класифікації SCImago Journal Rank), та 3 тезах ([68, 37, 36]) конференцій різного рівня, ([68, 36]) – тези міжнародних конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 70 найменувань, та додатків на 2 сторінках. Обсяг основного тексту дисертації – 130 сторінок, обсяг списку використаних джерел – 6 сторінок.

РОЗДІЛ 1
НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ

Тут ми наводимо основні поняття, позначення та факти, потрібні у подальшому.

1.1. Псевдометрики та їх класи

У цьому підрозділі ми притримуємось термінології та позначень джерел [19, 49, 60], у яких відомості нижче викладено детальніше.

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.1. Відображення $d : X \times X \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умови:

(1) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geqslant 0$ (невід'ємність);

(2) $\forall x \in X \quad d(x, x) = 0$ (тотожність);

(3) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ (симетрія);

(4) $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leqslant d(y, z) + d(z, x)$ (нерівність трикутника),

називаємо псевдометрикою на множині X, а пару (X, d) — псевдометричним простором.

Якщо друга умова виконана у сильнішій формі

(2^+) $\forall x, y \in X \quad \big(d(x, y) = 0 \iff x = y\big)$,

то d називаємо метрикою на X, а (X, d) — метричним простором.

ОЗНАЧЕННЯ 1.1.2. Метрику $d : X \times X \to \mathbb{R}$, для якої виконано посилену нерівність трикутника

(4^+) $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leqslant \max\{d(y, z), d(z, x)\}$,

називаємо ультраметрикою.

Одними з центральних об'єктів дослідження будуть псевдоультраметрики (які також називають ультрапсевдометриками) — “гібриди” псевдометрик та ультраметрик:

Означення 1.1.3. Відображення $d : X\times X \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умови:

(1) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geqslant 0$ (невід'ємність);

(2) $\forall x \in X \quad d(x, x) = 0$ (тотожність);

(3) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ (симетрія);

(4^+) $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leqslant \max\{d(y, z), d(z, x)\}$ (посилена нерівність трикутника),

називаємо псевдоультраметрикою на множині X, а пару (X, d) — псевдоультраметричним простором.

Для довільного $\varepsilon > 0$ та точки x_0 псевдометричного простору (X, d) кулею та замкненою кулею радіуса ε з центром x_0 називаємо відповідно множини

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}, \qquad \bar{B}_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}.$$

Для довільної псевдометрики (зокрема, метрики, ультраметрики чи псевдоультраметрики) d на X, точки $x \in X$ та непорожньої підмножини $F \subset X$ число $\inf\{d(x, y \mid y \in F)\}$ називаємо (псевдо-)відстанню від x до F і позначаємо $d(x, F)$.

Зрозуміло, що $d(x, F) = 0$, якщо і тільки якщо x є точкою дотику множини F щодо d, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $y \in F$, для якої $d(x, y) < \varepsilon$.

Зауваження 1.1.4. Загальновідомо, що для кожних точок $x, y \in X$, непорожньої підмножини $F \subset X$ та псевдометрики d на X істинна нерівність $d(x, F) \leqslant d(x, y) + d(y, F)$.

Дійсно,

$$\begin{aligned} d(x,F) &= \inf\{d(x,z) \mid z \in F\} \\ &\leqslant \inf\{d(x,y) + d(y,z) \mid z \in F\} \\ &= d(x,y) + \inf\{d(y,z) \mid z \in F\} \\ &= d(x,y) + d(y,F). \end{aligned}$$

(Псевдо-)відстанню щодо псевдо метрики d на множині X між непорожніми підмножинами $F, G \subset X$ називаємо число

$$d(F,G) = \inf\{d(x,y) \mid x \in F, y \in G\}.$$

Зауважимо, що ця функція двох аргументів насправді не є метрикою на сукупності підмножин X, наприклад, $d(F,G) = 0$ при $\varnothing \neq F \subsetneq G$, і навіть не завжди є псевдометрикою, наприклад, для стандартної метрики d на $\mathbb{R}$ маємо

$$d(\{0\},\{1\}) \nleqslant d(\{0\},\{0,1\}) + d(\{0,1\},\{1\}),$$

оскільки $1 \nleqslant 0 + 0$, тобто нерівність трикутника теж не виконано.

Означення 1.1.5. Діаметром непорожньої множини F у псевдометричному просторі (X,d) називаємо число

$$\operatorname{diam} F = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in F\}.$$

Надалі будемо розглядати множину

$$Ps(X) = \{d : X \times X \to \mathbb{R} | d \text{ — псевдометрика на } X\},$$

та її підмножину

$$PsU(X) = \{d : X \times X \to \mathbb{R} | d \text{ — псевдоультраметрика на } X\}.$$

1.2. Частково впорядковані множини та відношення апроксимації

Переважно джерелом понять і фактів з цього підрозділу є [13], і нумерація означень і теорем, якщо не вказано іншого, стосується цієї книги.

Означення 1.2.1. Частково впорядкованою множиною $(X, \leqslant)$ називається множина X із заданим на ній відношенням нестрогого часткового порядку, тобто рефлексивним, антисиметричним та транзитивним бінарним відношенням.

У англійській мові для частково впорядкованої множини вживається коротший термін “poset” (**p**artially **o**rdered **set**). У цій праці під впорядкованою множиною скрізь маємо на увазі частково впорядковану множину, а під порядком — нестрогий частковий порядок.

Означення 1.2.2. Якщо у частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$ виконано $x \leqslant y$, то кажемо, що x (нестрого) передує y, а y (нестрого) слідує за x. Елементи x, y, один з яких передує іншому, називаємо порівнянними. Частково впорядковану множину, у якій кожні два елементи порівнянні, називаємо лінійно впорядкованою, а відповідний порядок — лінійним порядком.

Для кожного нестрогого порядку $\leqslant$ на X обернене відношення $\tilde{\leqslant}$, означене як $x \mathrel{\tilde{\leqslant}} y \iff y \mathrel{\tilde{\leqslant}} x$, теж є частковим порядком, який називаємо протилежним (хоча формально правильніше називати його оберненим) і частіше позначаємо $\geqslant$, розвертаючи позначення. Пара нестрогих порядків $\leqslant$ і $\tilde{\leqslant}$ визначає пару взаємно обернених строгих порядків

$$x < y \iff x \leqslant y \wedge x \neq y, \quad x > y \iff x \geqslant y \wedge x \neq y,$$

які є іррефлексивними і транзитивними. Надалі для кожного нестрогого порядку $\preceq$ без окремого оголошення вживаємо визначені ним відношення $\succeq$, $\prec$ і

$\succ$. Відношення $\preceq$, $\succeq$, $\prec$ та $\succ$ часто читаємо як "менше або рівне", "більше або рівне", "менше" та "більше".

Для довільної підмножини A частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ розглядаємо множини

$$A{\downarrow} = \{x \in X \mid \text{існує } a \in A, x \leqslant a\}$$

та

$$A{\uparrow} = \{x \in X \mid \text{існує } a \in A, a \leqslant x\}$$

("нижню тінь" та "верхню тінь" множини A). Скорочуємо $\{a\}{\downarrow}$ та $\{a\}{\uparrow}$ відповідно до $a{\downarrow}$ та $a{\uparrow}$ для множин елементів, що відповідно передують a та слідують за a.

Означення 1.2.3. Якщо $A = A{\downarrow}$ (відповідно $A = A{\uparrow}$), то множину A називаємо нижньою (відповідно верхньою) щодо даного часткового порядку.

Інакше кажучи, нижня (верхня) множина — це та, що з кожним своїм елементом містить всі, що йому передують (відповідно всі, що за ним слідують).

Легко бачити, що множина є нижньою щодо порядку $\leqslant$, якщо і тільки якщо вона є верхньою щодо протилежного порядку $\tilde{\leqslant}$, а нижня тінь щодо $\leqslant$ збігається з верхньою тінню щодо $\tilde{\leqslant}$. Такі поняття, конструкції та факти називаємо двоїстими чи дуальними. Надалі для кожного означення чи твердження автоматично виникатиме двоїсте.

Означення 1.2.4. Якщо $A \subset b{\downarrow}$, тобто всі елементи $a \in A$ передують елементові b, то b називаємо верхньою гранню множини A.

Двоїсте поняття:

Означення 1.2.5. Якщо $A \subset b{\uparrow}$, тобто всі елементи $a \in A$ слідують за елементом b, то b називаємо нижньою гранню множини A.

Множину, для якої існує нижня (верхня) грань, називаємо обмеженою знизу (згори). Нижня (верхня) грань множини не зобов'язана бути елементом цієї множини. Якщо вона все ж належить до множини, то є її найменшим (відповідно найбільшим) елементом.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.6. Якщо серед нижніх граней множини A в частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$ існує найбільша, то її називаємо точною нижньою гранню множини A чи інфімумом A і позначаємо $\inf A$.

Відповідно:

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.7. Якщо серед верхніх граней множини A в частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$ існує найменша, то її називаємо точною верхньою гранню множини A чи супремумом A і позначаємо $\sup A$.

Для точних граней двох елементів вживаємо скорочення $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ та $\sup\{a, b\} = a \vee b$.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.8. Частково впорядкована множина, в якій для кожних двох елементів існує їх точна нижня грань, називається нижньою напівграткою. Аналогічно верхня напівгратка — частково впорядкована множина, в якій для кожних двох елементів існує точна верхня грань.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.9. Частково впорядкована множина, яка одночасно є нижньою напівграткою і верхньою напівграткою, називається граткою [4].

Якщо два елементи порівнянні, то менший з них є точною нижньою гранню, а більший — точною верхньою гранню даної пари. Звідси випливає, що лінійно впорядкована множина завжди є граткою.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.10. Гратку називаємо дистрибутивною, якщо у ній виконано тотожності

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Насправді ці тотожності рівносильні, тобто досить перевірити довільну з них.

З існування точних нижніх (верхніх) граней кожної пари елементів випливає існування точних нижніх (верхніх) граней кожної скінченної множини, але точні грані нескінченних множин можуть і не існувати.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.11. Частково впорядковану множину $(X, \leqslant)$ називаємо повною нижньою (верхньою) напівграткою, якщо існує $\inf$ ($\sup$) для будь-якої непорожньої підмножини $A \subset X$.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.12. Частково впорядкована множина, яка одночасно є повною нижньою напівграткою і повною верхньою напівграткою, називається умовно повною граткою.

Дещо слабші поняття:

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.13. Частково впорядковану множину $(X, \leqslant)$ називаємо умовно повною нижньою (верхньою) напівграткою, якщо існує $\inf$ ($\sup$) для будь-якої непорожньої обмеженої знизу (згори) підмножини $A \subset X$.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.14. Частково впорядкована множина, яка одночасно є умовно повною нижньою напівграткою і умовно повною верхньою напівграткою, називається умовно повною граткою.

Наприклад множина $\mathbb{R}$ з природним порядком є умовно повною, але не повною граткою.

ОЗНАЧЕННЯ 1.2.15. Піднапівграткою нижньої (верхньої) напівгратки $(S, \leqslant)$ називається довільна така її підмножина S_0, що для кожних $x, y \in S_0$ інфімум $x \wedge y$ (відповідно супремум $x \vee y$) теж належить до S_0.

Зрозуміло, що тоді S_0 з обмеженням порядку $\leqslant$ теж є напівграткою.

Означення 1.2.16. Підграткою гратки $(L, \leqslant)$ називається довільна її підмножина L_0, що є нижньою і верхньою піднапівграткою L.

Інакше кажучи, для кожних $x, y \in L_0$ інфімум $x \wedge y$ та супремум $x \vee y$ повинні теж належати до L_0.

Означення 1.2.17. Кажемо, що частково впорядкована множина $(D, \leqslant)$ напрямлена (чи спрямована) вгору (вниз), якщо для для будь-яких $d_1, d_2 \in D$ знайдеться таке $d \in D$, що $d_1, d_2 \leqslant d$ (відповідно $d_1, d_2 \geqslant d$).

Напрямлені вниз множини також називають “фільтрованими” (filtered), тоді напрямлені вгору називають просто “напрямленими” (directed).

Означення 1.2.18. Нехай $d_1, d_2 \in Ps(X)$ і $d_1 \leqslant d_2$. Тоді кажемо, що d_1 перебуває у відношенні "значно нижче-[22] з d_2 (пишемо $d_1 \ll d_2$ і кажемо також, що d_1 апроксимує чи наближає d_2 знизу), якщо будь-якої напрямленої вгору множини $D \subset Ps(X)$, такої, що $d_2 \leqslant \sup D$, знайдеться таке $d \in D$, що $d_1 \leqslant d$.

Означення 1.2.19. Нехай $d_1, d_2 \in Ps(X)$ і $d_2 \geqslant d_1$. Тоді кажемо, що d_1 перебуває у відношенні "значно вище-[22] з d_2 (пишемо $d_2 \gg d_1$ і кажемо також, що d_2 апроксимує чи наближає d_1 згори), якщо будь-якої напрямленої вниз множини $D \subset Ps(X)$, такої, що $d_1 \geqslant \inf D$, знайдеться таке $d \in D$, що $d_2 \geqslant d$.

Зрозуміло, що і з $d_1 \ll d_2$, і з $d_2 \gg d_1$ випливає $d_1 \leqslant d_2$, але у загальному зворотна імплікація є хибною.

Означення 1.2.20. Частково впорядковану множину $(X, \leqslant)$ називаємо неперервною [22], якщо для кожного елемента $x \in X$ множина $x \downarrow$ всіх елементів, що апроксимують x знизу, є напрямленою вгору, і її точна верхня грань дорівнює x.

Означення 1.2.21. Частково впорядковану множину $(X, \leqslant)$ називаємо двоїсто неперервною [22], якщо для кожного елемента $x \in X$ множина $x \Uparrow$ всіх елементів, що апроксимують x згори, є напрямленою вниз, і її точна нижня грань дорівнює x.

Означення 1.2.22. Частково впорядковану множину $(X, \leqslant)$, яка одночасно є неперервною і двоїсто неперервною, називаємо двонеперервною [22].

Приклад 1.2.23. Розглянемо множину $BC(\mathbb{R}^2)$ всіх обмежених замкнених непорожніх підмножин площини $\mathbb{R}^2$ [29]. Зручно вважати, що підмножина A нестрого передує підмножині B у $BC(\mathbb{R}^2)$, чи A є (нестрого) меншим елементом в $BC(\mathbb{R}^2)$, ніж B, якщо $A \subseteq B$, і позначимо це як $A \leqslant B$. Тоді $BC(\mathbb{R}^2)$ є частково впорядкованою множиною. Відомо, що наступні твердження еквівалентні:

1. A міститься у внутрішності B.
2. Для будь-якої фільтрованої (за включенням) сім'ї $F_i \mid i \in \mathcal{I}$ обмежених замкнених непорожніх підмножин площини таких, що $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i \subseteq A$, існує $F_i \subseteq B$.

Таким чином, B наближає A зверху в $BC(\mathbb{R}^2)$ тоді і тільки тоді, коли A міститься у внутрішності B, тобто B є замкненим околом для A.

Оскільки всі замкнені околи для кожного $A \in BC(\mathbb{R}^2)$ утворюють напрямлену вниз сім'ю з перетином, що дорівнює A, то впорядкована множина $(BC(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ є двоїсто неперервною.

Цей приклад показує, чому використовується термін "наближає": неможливо наблизитися до A ззовні за допомогою F_i, не "захопивши" якусь F_i в B. Тоді B є "безпечним" наближенням A: навіть якщо точне положення A можна виміряти з деякою похибкою, для достатньо малих похибок ми завжди знаходимося в B.

Тепер можна розуміти суть (двоїстої) неперервності частково впорядкованої множини: кожен елемент можна “безпечно” наблизити знизу (відповідно зверху). Тоді будь-які дві напрямлені множини, елементи яких наближають один і той же елемент знизу, “переплітаються” таким чином: кожен елемент першої множини передує елементу другої, і навпаки (аналогічно для наближень зверху). Таким чином, всі “безпечні” наближення є практично “однаковими”.

Ще одне важливе зауваження стосовно останнього прикладу полягає в тому, що підмножина $A \subset \mathbb{R}^2$ може розглядатися як фрагмент інформації про фактичне положення невидимої точки на площині. Тоді природно розглядати підмножину A, яка міститься в B, як “більший” фрагмент інформації, ніж B, оскільки вона більш конкретно описує місцезнаходження точки. Тому в інформатиці, коли мова йде про теорію інформації, підмножини часто упорядковуються зворотним включенням: $A \leqslant B$, якщо $A \supseteq B$. Тоді $(BC(\mathbb{R}^2), \supseteq)$ є неперервною впорядкованою множиною, і B знаходиться значно нижче A тоді і тільки тоді, коли A міститься у внутрішності B. Див. [43] щодо більш вигадливого застосування цього підходу у розпізнаванні зображень.

1.3. Області. Топології, визначені частковими порядками

Частковий порядок визначає кілька класичних топологій, зокрема, нижню/верхню топології та топології Скотта і Лоусона (вся інформація і нумерація фактів цього підрозділу походить з [13], див. також [61]). Неперервність частково впорядкованої множини означає, що ці топології мають хороші властивості (наприклад, є гаусдорфовими або компактними). Ці топології і пов’язані метрики також є предметом поточних досліджень.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.1. Топологія Скотта на частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$ складається з усіх множин $U \subset X$ з такою властивістю: якщо множина $D \subset X$ напрямлена вгору і існує $\sup D$, що (нестрого) слідує за деяким елементом множини U, то деякий елемент множини D належить до U.

Неважко перевірити, що описана вище сім'я множин дійсно є топологією, і всі її елементи є верхніми множинами. Множина F у $(X, \leqslant)$ є замкненою щодо топології Скотта, якщо і тільки якщо вона є нижньою і для кожної напрямленої вгору множини $D \subset F$, якщо супремум D існує, то він належить F. Інакше кажучи, F повинна бути нижньою і замкненою щодо супремумів спрямованих вгору множин.

Очевидно, як означити двоїсту топологію Скотта на $(X, \leqslant)$, тобто топологію Скотта на $(X, \tilde{\leqslant})$, і які множини у ній є замкненими.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.2. Нижня (верхня) топологія на $(X, \leqslant)$ — це топологія, задана передбазою з усіх множин вигляду $X \setminus a\uparrow$ (відповідно з усіх множин вигляду $X \setminus a\downarrow$).

Легко бачити, що елементи нижньої (верхньої) топології дійсно є нижніми (верхніми) множинами.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.3. Топологія Лоусона на $(X, \leqslant)$ — це супремум топології Скотта і нижньої топології, тобто найменша топологія, що містить дві вказані топології.

Зрозуміло, що двоїста топологія Лоусона на $(X, \leqslant)$, тобто топологія Лоусона на $(X, \tilde{\leqslant})$, є супремумом двоїстої топології Скотта і верхньої топології.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.4. Частково впорядкована множина $(X, \leqslant)$ називається спрямовано (чи напрямлено) повною (directed complete), якщо кожна напрямлена вгору множина $D \subset X$ має точну верхню грань. Напрямлено повна неперервна частково впорядкована множина називається областю.

Для областей згадані вище топології мають корисні властивості. Зокрема, за Теоремою III.1-10, топологія Лоусона на області є гаусдорфовою.

ОЗНАЧЕННЯ 1.3.5. (Нижньою) неперервною напівграткою називаємо нижню напівгратку, яка є напрямлено повною і неперервною.

Зрозуміло, що неперервна напівгратка є областю. Якщо вона є повною (як нижня напівгратка, тобто кожна непорожня її підмножина має інфімум), то топологія Лоусона є і компактною (Наслідок III.1-11). Більше того, напівгратка з цією топологією є топологічною, тобто знаходження інфімуму двох елементів є неперервне у сукупності. У кожній точці існує локальна база з піднапівграток (Теорема III.2-15, див. також [22]). Це разом з компактністю дозволяє показати, що інфімум непорожньої замкненої підмножини неперервно залежить від цієї множини [58].

Якщо неперервна нижня напівгратка є повною граткою, то називаємо її неперервною граткою [64].

РОЗДІЛ 2

ПОРЯДКОВІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИН ПСЕВДОМЕТРИК

На множині $Ps(X)$ всіх псевдометрик на множині X введемо відношення нестрогого порядку природним чином (поточково): псевдометрика d_1 передує (менша або рівна) псевдометриці d_2, якщо для будь-яких двох точок $x, y \in X$ виконано $d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)$.

Метою цього розділу є з'ясування, як збудовані відношення апроксимації знизу і згори у множині $Ps(X)$. У найкращому випадку ця множина виявиться неперервною та/або двоїсто неперервною, тоді частковий порядок визначить топології з корисними властивостями.

Варто спершу розглянути простіший випадок скінченної множини X, а також перевірити існування напівграткових операції у множині X. Актуальним також є питання, чи можна обмежитись вужчою (і звичнішою) множиною *метрик* на фіксованій множині X, і отримати аналогічні результати.

Для досягнення цієї мети ми запровадимо допоміжні конструкції, які за даною псевдоматрикою дозволять отримувати сім'ї псевдометрик, що наближають її у порядковому сенсі.

2.1. Частковий порядок на множині псевдометрик

Розглянемо найпростіші властивості порядку на множині $Ps(X)$.

2.1.1. Спрямованість вгору і вниз. Перевіримо ці властивості для множини $Ps(X)$. Для будь-яких $d_1, d_2 \in Ps(X)$ їх сума $d_1 + d_2$ теж належить $Ps(X)$. Очевидно, що $d_1 + d_2 \geqslant d_1$ та $d_1 + d_2 \geqslant d_2$. Отже, $Ps(X)$ — спрямована вгору.

Слід зауважити, що з означення псевдометрики ми маємо, що довільна псевдометрика d задовольняє умову невід'ємності, тому псевдометрика $d \equiv 0$, яку називаємо антидискретною (чи тривіальною) псевдометрикою, є найменшим елементом $Ps(X)$. Зокрема, тривіальна псевдометрика передує кожним двом псевдометрикам d_1 та d_2 на X. Отже, $Ps(X)$ — спрямована вниз.

2.1.2. Верхня і нижня напівгратка. Як бачимо, тривіальна нижня грань існує для кожних двох псевдометрик. Знайдемо інфімум, тобто найбільшу нижню грань. Назвемо шляхом з точки x у точку y множини X будь-яку послідовність точок $t_0, t_1, \ldots, t_n \in X$, де $n \in \mathbb{N}$, у якій $t_0 = x$, $t_n = y$.

Лема 2.1.1. *Нехай $d_1, d_2 \in Ps(X)$. Тоді наступна функція є псевдометрикою:*

$$d_*(x, y) = \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} \min\{d_1(t_k, t_{k+1}), d_2(t_k, t_{k+1})\} | n \in \mathbb{N},$$

$$x = t_0,\ t_1, ..., t_{n-1} \in X,\ t_n = y\} \in Ps(X).$$

Доведення. Симетрія та тотожність для d_* є очевидними. Перевіримо нерівність трикутника:

$$d_*(x, y) \leqslant d_*(x, z) + d_*(z, y)$$

$$d_*(x, y) = \inf\{\sum_{k=0}^{n-1}\{\min\{d_1(t_k, t_{k+1}), d_2(t_k, t_{k+1})\}\} \mid$$

$$n \in \mathbb{N}, x = t_0,\ t_1, ..., t_{n-1} \in X,\ t_n = y\}.$$

Серед усіх шляхів $x = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = y$ є такі, що проходять через точку z, тобто існує $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, для якого $z = t_m$.

Звідси, оскільки інфімум множини не перевищує їнфімуму її підмножини (перепозначимо $l = n - m$, $t_{m+k} = s_k$):

$$d_*(x, y) = \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} \min\{d_1(t_k, t_{k+1}), d_2(t_k, t_{k+1})\}|$$
$$n \in \mathbb{N}, x = t_0,\ t_1, ..., t_{n-1} \in X,\ t_n = y\Big\}$$
$$\leqslant \inf\{\sum_{k=0}^{n-1}\{\min\{d_1(t_k, t_{k+1}), d_2(t_k, t_{k+1})\}|$$
$$n \in \mathbb{N}, x = t_0,\ t_1, ..., t_{n-1} \in X,\ t_n = y,\ 0 < m < n,\ x_m = z\Big\}$$
$$= \inf\{\sum_{k=0}^{m-1}\{\min\{d_1(t_k, t_{k+1}), d_2(t_k, t_{k+1})\}|$$
$$m \in \mathbb{N}, x = t_0,\ t_1, ..., t_{m-1} \in X,\ t_m = z\Big\}$$
$$+ \inf\{\sum_{k=0}^{l-1} \min\{d_1(s_k, s_{k+1}), d_2(s_k, s_{k+1})\}|$$
$$l \in \mathbb{N}, z = s_0,\ s_1, ..., s_{l-1} \in X,\ s_l = y\Big\}$$
$$= d_*(x, z) + d_*(z, y).$$

$\square$

Лема 2.1.2. *Нехай $d_1, d_2 \in Ps(X)$. Тоді побудована вище псевдометрика d_* є інфімумом для d_1, d_2 у $Ps(X)$.*

Доведення. Одним із можливих шляхів є шлях при $n = 1$, де $t_1 = y$. Звідси отримуємо, що $d_*(x, y) \leqslant \min\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$. Отже d_* є нижньою гранню для псевдометрик d_1, d_2.

Покажемо, що d_* — найбільша серед нижніх граней. Інакше існують такі $x, y \in X$, і псевдометрика d', що $d'(x, y) > d_*(x, y)$ і $d' \leqslant d_1, d_2$.

Отже,

$$d'(x,y) > \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} \min\{d_1(t_k,t_{k+1}), d_2(t_k,t_{k+1})\}|$$

$$n \in \mathbb{N}, x = t_0,\ t_1, ..., t_{n-1} \in X,\ t_n = y\Big\}.$$

Врахувавши, що $d'(t_k,t_{k+1}) \leqslant d_1(t_k,t_{k+1}), d_2(t_k,t_{k+1})$ отримаємо:

$$d'(x,y) > \inf\{\sum_{k=0}^{n-1}(d'(t_k,t_{k+1}))|n \in \mathbb{N}, x = t_0,\ t_1, ..., t_{n-1} \in X,\ t_n = y\}.$$

Звідси отримуємо, що d' — не псевдометрика, оскільки з останньої нерівності маємо невиконання нерівності трикутника. □

Отже, $Ps(X)$ є нижньою напівграткою. Покажемо, що $Ps(X)$ є і верхньою напівграткою.

Лема 2.1.3. *Супремум довільних псевдометрик на множині X обчислюється поточково, тобто ним є псевдометрика з формулою*

$$d^*(x,y) = \sup\{(d_1(x,y), d_2(x,y)|x, y \in X\}$$

для кожних $x, y \in X$.

Тобто, для кожних $x, y \in X$ виконано

$$d^*(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y), & d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y), \\ d_2(x,y), & d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y). \end{cases}$$

Оскільки невід'ємність, тотожність та симетрія є очевидними, покажемо тільки виконання властивості нерівності трикутника.

Нехай, не зменшуючи загальності, для деяких x, y $d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y)$, тоді:

$$d^*(x,y) = d_1(x,y) \leqslant d_1(x,z) + d_1(z,y) \leqslant \max\{d_1(x,z), d_2(x,z)\} +$$
$$+ \max\{d_1(z,y), d_2(z,y)\} = d^*(x,z) + d^*(z,y).$$

Тому $Ps(X)$ є граткою з найменшим елементом $d \equiv 0$, але, очевидно, без найбільшого елементу для $|X| > 1$.

2.1.3. Недистрибутивність. Ця гратка не є дистрибутивною.

Приклад 2.1.4. Розглянемо, наприклад, множину $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ і псевдометрики

$$d_1(a,b) = \begin{cases} 0, & \{a,b\} = \{x_2, x_3\} \text{ або } a = b, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$d_2(a,b) = \begin{cases} 0, & \{a,b\} = \{x_1, x_3\} \text{ або } a = b, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$d_3(a,b) = \begin{cases} 0, & \{a,b\} = \{x_1, x_2\} \text{ або } a = b, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases}$$

для всіх $a, b \in X$. Тоді

$$d_1 \vee d_2(a,b) = \begin{cases} 0, & a = b, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases} \quad \text{тому } (d_1 \vee d_2) \wedge d_3 = d_3.$$

З іншого боку

$$d_1 \wedge d_3 = d_2 \wedge d_3 \equiv 0, \text{ тому } (d_1 \wedge d_3) \vee (d_2 \wedge d_3) \equiv 0.$$

Отже, $(d_1 \vee d_2) \wedge d_3 \neq (d_1 \wedge d_3) \vee (d_2 \wedge d_3)$.

2.1.4. Умовно повна гратка. Нехай D — довільна підмножина в множині псевдометрик $Ps(X)$, обмежена згори псевдометрикою $\hat{d}$. Покажемо, що така множина має супремум. Визначимо його природним чином — поточково для кожних $x, y \in X : d_0(x, y) = \sup\{d(x, y) | d \in D\}$.

Точна верхня грань числової множини вище існує, оскільки для кожної фіксованої пари $x, y \in X$ множина $\{d(x, y) | d \in D\}$ обмежена згори числом

$\hat{d}(x, y)$. Згідно теореми про точну верхню грань кожна непорожня обмежена згори підмножина множини дійсних чисел має супремум.

Перевіримо, чи є отриманий супремум псевдометрикою. Умови 1–3 є очевидними, тому покажемо тільки виконання нерівності трикутника. Для кожних $x, y, z \in X$:

$$d_0(x, y) = \sup\{d(x, y)|d \in D\} \leqslant \sup\{d(x, z) + d(y, z)|d \in D\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{d(x, z)|d \in D\} + \sup\{d(y, z)|d \in D\} = d_0(x, z) + d_0(z, y).$$

Зрозуміло, що кожна псевдометрика d' на X, яка слідує за усіма $d \in D$, слідує і за d_0, тобто $d_0 = \sup D$. Отже $Ps(X)$ — умовно повна верхня напівгратка.

Зауважимо, що у множині псевдометрик довільна підмножина є обмеженою знизу, оскільки кожна псевдометрика більша або рівна від тривіальної (нульової) псевдометрики. Інфімум підмножини множини псевдометрик визначається аналогічно, як і в Лемі 2.1.2.

$$(\inf D)(x, y) = \inf\Big\{\sum_{k=0}^{n-1} \inf\{d(t_k, t_{k+1}) \mid d \in D\} \Big|$$
$$n \in \mathbb{N}, x = t_0, \{t_1, ..., t_{n-1}\} \subset X, t_n = y\Big\} \in Ps(X).$$

Існування інфімуму також випливає з того, що “верхня” умовна повнота і “нижня” умовна повнота рівносильні. Отже, $Ps(X)$ — повна нижня напівгратка.

Цим показано, що множина псевдометрик $Ps(X)$ — умовно повна гратка.

2.1.5. Всі метрики на фіксованій множині не утворюють підгратки. Природно постає запитання, чи не варто розглянути порядкові властивості вужчої множини, що складається з *метрик* на фіксованій множині X. Зрозуміло, що ця множина (з поточковим впорядкуванням) не є повною як нижня напівгратка: для довільної метрики d на X єдиною невід'ємною функцією, що передує всім метрикам з множини $\{\frac{1}{n}d \mid n \in \mathbb{N}\}$, є тривіальна (нульова) псевдометрика, яка не є метрикою. Однак, якщо (умовна) повнота не обов'язкова, може виникнути припущення, що принаймні граткові операції на множині метрик на X існують, можливо, з додатковими умовами типу компактності чи обмеженості згори однією "достатньо гарною" метрикою.

Теорема нижче не залишає таких шансів.

Теорема 2.1. *Існують метрики d_1, d_2 на одиничному відрізку I, топологічно еквівалентні до стандартної метрики, такі, що жодна метрика на I не передує їм обом.*

Доведення. Ми побудуємо зростаючу бієкцію $\varphi : I \to I$ як границю незростаючої послідовності кусково-лінійних бієкцій.

Розглянемо для кожного $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ множину $A_n = \{\frac{k}{2^n} \mid 0 \leqslant k \leqslant 2^n\}$ всіх двійково-десяткових дробів у I зі знаменником 2^n. Зрозуміло, що

$$\{0, 1\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots\ ,$$

і $A = \bigcup_{n=0,1,2,\ldots} A_n$ є множиною всіх двійково-раціональних дробів з проміжка I. Зіставимо кожному числу $\frac{k}{2^n} \in A$ число $f_{\frac{k}{2^n}} \in I$, яке буде значенням $\varphi(\frac{k}{2^n})$. Спершу покладемо $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, і нехай $\varphi_0 : I \to I$ — єдина лінійна функція, що відображає 0 у 0, а 1 в 1, тобто тотожна функція. Підберемо $f_{\frac{1}{2}}$ так, щоб $\frac{f_{\frac{1}{2}} - f_0}{f_1 - f_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$, тобто $f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Тепер нехай φ_1 — функція на I, рівна відповідно $f_0, f_{\frac{1}{2}}, f_1$ у точках $0, \frac{1}{2}, f_1$, і лінійна на проміжках $[0, \frac{1}{2}]$ та $[\frac{1}{2}, 1]$. Оскільки $f_{\frac{1}{2}} < \varphi_0(\frac{1}{2})$, то $\varphi_1 \leqslant \varphi_0$. Оберемо $f_{\frac{1}{4}}$ і $f_{\frac{3}{4}}$ так, щоб

$$\frac{f_{\frac{1}{4}} - f_0}{f_{\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{4}}} = \frac{f_{\frac{3}{4}} - f_{\frac{1}{2}}}{f_1 - f_{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{3},$$

звідки випливає

$$f_0 < f_{\frac{1}{4}} < \frac{1}{2}(f_0 + f_{\frac{1}{2}}) = \varphi_1(\frac{1}{4}) < f_{\frac{1}{2}}, \quad f_{\frac{1}{2}} < f_{\frac{3}{4}} < \frac{1}{2}(f_{\frac{1}{2}} + f_1) = \varphi_1(\frac{3}{4}) < f_1.$$

Тепер позначимо φ_2 функцію, рівну f_a у кожній з точок $a \in A_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, і лінійну на проміжках між цими точками. Зрозуміло, що $\varphi_2 \leqslant \varphi_1$

Надалі, якщо вже обрані f_a для всіх $a \in A_n$ і за ними побудована кусково-лінійна функція φ_n, то кожен елемент $a \in A_{n+1} \setminus A_n$ має вигляд $\frac{2k+1}{2^{n+1}}$, $0 \leqslant k < n$, і є серединою відрізка $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Оберемо $f_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ так, щоб виконувалось

$$\frac{f_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} - f_{\frac{k}{2^n}}}{f_{\frac{k+1}{2^n}} - f_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}} = \frac{1}{n+2},$$

і побудуємо кусково-лінійну функцію φ_{n+1} за значеннями f_a для всіх $a \in A_{n+1}$. Знову ж, $0 \leqslant \varphi_{n+1} \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, тому незростаюча послідовність бієкцій $\varphi_n : I \to I$ поточково збігається до деякої неспадної функції $\varphi : I \to I$. Зрозуміло, що, якщо $a \in A_n \subset A$, то послідовність $\varphi_n(a)$, починаючи з n-го члена, збігається з f_a, отже, $\varphi(a) = f_a$.

Розглянемо два сусідні елементи $\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \in A_n$. Тоді

$$0 < \varphi(\frac{k+1}{2^n}) - \varphi(\frac{k}{2^n}) = f_{\frac{k+1}{2^n}} - f_{\frac{k}{2^n}} \leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Оскільки φ неспадна, звідси випливає, що $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \frac{1}{n+1}$, якщо $x, y \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Отже, при $|x - y| \leqslant \frac{1}{2^n}$ точки x, y розташовані у одному чи у двох сусідніх проміжках вигляду $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, звідки маємо $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \frac{2}{n+1}$, і функція φ рівномірно неперервна на I. Множина A скрізь щільна у I, і $f_a = \varphi(a)$ зростає при зростанні $a \in A$, отже, $\varphi : I \to I$ є зростаючою бієкцією і гомеоморфізмом.

Звідси випливає, що функції, означені як

$$d_1(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \text{ та } d_2(x, y) = |\varphi(1-x) - \varphi(1-y)| \text{ для всіх } x, y \in I,$$

є метриками на I, топологічно еквівалентними до стандартної метрики.

Припустимо, що $d \leqslant d_1$, $d \leqslant d_2$ для деякої псевдометрики d на I. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$:

$$d(0,1) \leqslant d(0,\frac{1}{2^n}) + d(\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}) + \ldots + d(\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}) + d(\frac{2^n-1}{2^n},1)$$
$$\leqslant d_1(0,\frac{1}{2^n}) + d_2(\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}) + \ldots + d_1(\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}) + d_2(\frac{2^n-1}{2^n},1).$$

Беручи до уваги $d_2(x,y) \equiv d_1(1-y,1-x)$, маємо

$$d(0,1) \leqslant 2d_1(0,\frac{1}{2^n}) + 2d_1(\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n}) + \ldots + 2d_1(\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n})$$
$$= 2\big(\varphi(\frac{1}{2^n}) - \varphi(0) + \varphi(\frac{3}{2^n}) - \varphi(\frac{2}{2^n}) + \ldots + \varphi(\frac{2^n-1}{2^n}) - \varphi(\frac{2^n-2}{2^n})\big).$$

Тепер зауважимо, що за побудовою

$$\varphi(\frac{1}{2^n}) - \varphi(0) = \frac{1}{n+1}\big(\varphi(\frac{2}{2^n}) - \varphi(\frac{1}{2^n})\big),$$
$$\varphi(\frac{3}{2^n}) - \varphi(\frac{2}{2^n}) = \frac{1}{n+1}\big(\varphi(\frac{4}{2^n}) - \varphi(\frac{3}{2^n})\big),$$
$$\ldots$$
$$\varphi(\frac{2^n-1}{2^n}) - \varphi(\frac{2^n-2}{2^n}) = \frac{1}{n+1}\big(\varphi(1) - \varphi(\frac{2^n-1}{2^n})\big),$$

тому

$$\varphi(\frac{1}{2^n}) - \varphi(0) + \varphi(\frac{3}{2^n}) - \varphi(\frac{2}{2^n}) + \ldots + \varphi(\frac{2^n-1}{2^n}) - \varphi(\frac{2^n-2}{2^n}) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\big(\varphi(\frac{2}{2^n}) - \varphi(\frac{1}{2^n}) + \varphi(\frac{4}{2^n}) - \varphi(\frac{3}{2^n}) + \ldots + \varphi(1) - \varphi(\frac{2^n-1}{2^n})\big),$$

і водночас

$$\big(\varphi(\frac{1}{2^n}) - \varphi(0) + \varphi(\frac{3}{2^n}) - \varphi(\frac{2}{2^n}) + \ldots + \varphi(\frac{2^n-1}{2^n}) - \varphi(\frac{2^n-2}{2^n})\big) +$$
$$+\big(\varphi(\frac{2}{2^n}) - \varphi(\frac{1}{2^n}) + \varphi(\frac{4}{2^n}) - \varphi(\frac{3}{2^n}) + \ldots + \varphi(1) - \varphi(\frac{2^n-1}{2^n})\big) = \varphi(1) - \varphi(0) = 1,$$

звідки маємо

$$\varphi(\frac{1}{2^n}) - \varphi(0) + \varphi(\frac{3}{2^n}) - \varphi(\frac{2}{2^n}) + \ldots + \varphi(\frac{2^n-1}{2^n}) - \varphi(\frac{2^n-2}{2^n}) = \frac{1}{n+2}.$$

Отже, $d(0,1) \leqslant \frac{2}{n+2}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $d(0,1) = 0$, і кожна псевдометрика d, що передує d_1 і d_2, не є метрикою. $\square$

Зауважимо, що супремум d_1 та d_2 теж є метрикою, топологічно еквівалентною до стандартної метрики на I. Отже, для d_1 і d_2 не існує інфімуму ні у множині всіх метрик на I, ні у множині всіх компактних метрик на I, ні у її підмножині з усіх метрик, що передують $d_1 \vee d_2$. Тому надалі ми не цікавимось множиною всіх метрик на даних X, а відразу беремо ширший клас усіх псевдометрик.

2.2. Порядкова апроксимація псевдометрик знизу і згори

2.2.1. Допоміжні конструкції. Надалі ми використовуватимемо дві операції, які дозволяють за деякою псевдометрикою на довільній множині X побудувати іншу псевдометрику, що передує вихідній.

ЛЕМА 2.2.1. *Нехай $d \in Ps(X)$ і підмножина $F \subset X$ — непорожня. Тоді функція $\acute{d}_F : X \times X \to \mathbb{R}$, визначена рівністю*

$$\acute{d}_F(x, y) = \min\{d(x, y), d(x, F) + d(y, F)\}$$

для кожних $x, y \in X$, є псевдометрикою на X, і $\acute{d}_F \leqslant d$.

ДОВЕДЕННЯ. Нерівність $\acute{d}_F \leqslant d$ негайно випливає з формули. Покажемо, що $\acute{d}_F$ – псевдометрика. Перевіримо властивості (1)-(4) для довільних $x, y, z \in X$:

(1) $\acute{d}_F(x, y) \geqslant 0$, оскільки $d(x, y) \geqslant 0$ і $d(x, F) + d(y, F) \geqslant 0$.

(2) $\acute{d}_F(x, x) = \min\{d(x, x), d(x, F) + d(x, F)\} = 0$.

(3) $\acute{d}_F(x, y) = \min\{d(x, y), d(x, F) + d(y, F)\} =$
$= \min\{d(y, x), d(y, F) + d(x, F)\} = \acute{d}_F(y, x)$.

(4) Для доведення нерівності $\acute{d}_F(x, y) \leqslant \acute{d}_F(x, z) + \acute{d}_F(z, y)$ розглянемо всі можливі випадки.

а) Якщо

$$\begin{cases} \acute{d}_F(x,y) = d(x,y), \\ \acute{d}_F(x,z) = d(x,z), \end{cases}$$
то $\acute{d}_F(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) = \acute{d}_F(x,z) + \acute{d}_F(z,y)$.

b) Якщо
$$\begin{cases} \acute{d}_F(x,z) = d(x,F) + d(z,F), \\ \acute{d}_F(y,z) = d(y,F) + d(z,F), \end{cases}$$
то $\acute{d}_F(x,y) \leqslant d(x,F) + d(y,F) \leqslant d(x,F) + d(z,F) + d(z,F) + d(y,F) = \acute{d}_F(x,z) + \acute{d}_F(z,y)$.

c) Якщо
$$\begin{cases} \acute{d}_F(x,z) = d(x,F) + d(z,F), \\ \acute{d}_F(z,y) = d(z,y), \end{cases}$$
то, враховуючи Зауваження 1.1.4, маємо $\acute{d}_F(x,y) \leqslant d(x,F) + d(y,F) \leqslant d(x,F) + d(y,z) + d(z,F) = \acute{d}_F(x,z) + \acute{d}_F(z,y)$.

d) Випадок
$$\begin{cases} \acute{d}_F(x,z) = d(x,z), \\ \acute{d}_F(z,y) = d(z,F) + d(y,F) \end{cases}$$
аналогічний до попереднього.

Отже, нерівність (4) $\acute{d}_F(x,y) \leqslant \acute{d}_F(x,z) + \acute{d}_F(z,y)$ виконано завжди, що завершує доведення того, що $\acute{d}_F$ є псевдометрикою. □

Лема 2.2.2. *Для кожних $x, y \in X$ і непорожньої $F \subset X$ виконано нерівність*

$$\acute{d}_F(x,y) \geqslant d(x,y) - \operatorname{diam} F.$$

Доведення. Нагадаємо, що $\operatorname{diam} F = \sup_{t,s\in F} d(t,s)$.

Якщо $\acute{d}_F(x,y) = d(x,y)$, нерівність очевидна. Отже, розглянемо випадок $d(x,y) \geqslant d(x,F) + d(y,F)$.

Для кожних $t, s \in X$ маємо $d(x,t) + d(t,s) + d(s,y) \geqslant d(x,y)$, звідки $d(x,t) + d(s,y) \geqslant d(x,y) - d(t,s)$, тому

$$\begin{aligned} d(x,F) + d(y,F) &= \inf_{t\in F} d(x,t) + \inf_{s\in F} d(s,y) \\ &= \inf_{t,s\in F} (d(x,t) + d(s,y)) \\ &\geqslant \inf_{t,s\in F} (d(x,y) - d(t,s)) \\ &= d(x,y) - \sup_{t,s\in F} d(t,s) \\ &= d(x,y) - \operatorname{diam} F, \end{aligned}$$

отже, і в цьому випадку $\acute{d}_F(x,y) \geqslant d(x,y) - \operatorname{diam} F$. □

Зауваження 2.2.3. Неважко зауважити, що $\acute{d}_F$ — найбільша з псевдометрик d' на X, для яких $d' \leqslant d$ і одночасно $d'(x,y) = 0$ для всіх $x, y \in F$.

Легко зауважити, що при $F \subset G \subset X$ істинне

$$\acute{d}_F(x,y) = \min\{d(x,y), d(x,F) + d(y,F)\} \geqslant$$
$$\geqslant \min\{d(x,y), d(x,G) + d(y,G)\} = \acute{d}_G(x,y).$$

Лема 2.2.4. *Нехай d — псевдометрика на X, послідовність множин $F_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}$, є незростаючою, тобто $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$, і існує точка $x_0 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ така, що для кожної точки $x \in X$ виконано $d(x,x_0) = \sup\{d(x,F_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тоді множина $D = \{\acute{d}_{F_i} | i \in \mathbb{N}\}$ — напрямлена вгору, і $\sup D = d$.*

Доведення. Зауважимо, що згідно з зауваженням вище послідовність d_{F_i}, $i \in \mathbb{N}$, неспадна, тому множина D лінійно впорядкована, отже, напрямлена вгору. З тієї ж причини всі її елементи не перевищують $\acute{d}_{\{x_0\}} = d$, з чого випливає $\sup D \leqslant d$. Покажемо, що $d = \sup D$.

$$
\begin{aligned}
(\sup D)(x, y) &= \sup\{d_{F_i}(x, y) | i \in \mathbb{N}\} = \\
&= \lim_{i\to\infty}(\min\{d(x, y), d(x, F_i) + d(y, F_i)\}) = \\
&= \min\{d(x, y), \lim_{i\to\infty}(d(x, F_i) + d(y, F_i))\} = \\
&= \min\{d(x, y), \lim_{i\to\infty} d(x, F_i) + \lim_{i\to\infty} d(y, F_i)\} = \\
&= \min\{d(x, y), d(x, x_0) + d(y, x_0)\} = d(x, y).
\end{aligned}
$$

□

Зокрема, якщо діаметри множин F_i зменшуються до нуля, маємо корисний частинний випадок.

Лема 2.2.5. *Нехай d — псевдометрика на X, послідовність множин $F_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}$, є незростаючою, тобто $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$, її перетин непорожній, і $\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam} F_i = 0$. Тоді множина $D = \{\acute{d}_{F_i} | i \in \mathbb{N}\}$ — напрямлена вгору, і $\sup D = d$.*

Доведення. Нагадаємо, що для кожних $x, y \in X$, $i \in \mathbb{N}$

$$
d(x, y) \geqslant \tilde{d}_{F_i}(x, y) \geqslant d(x, y) - \operatorname{diam} F_i.
$$

Оскільки за умовою $\lim_{i\to\infty}(d(x, y) - \operatorname{diam} F_i) = d(x, y)$, отримуємо, що зростаюча послідовність $\tilde{d}_{F_i}(x, y)$ прямує до $d(x, y)$ при $i \to \infty$. □

Нам також придасться інша конструкція.

Лема 2.2.6. *Нехай $d \in Ps(X)$ і підмножина $F \subset X$ — непорожня. Тоді функція $\ddot{d}_F : X \times X \to \mathbb{R}$, визначена рівністю*

$$
\ddot{d}_F(x, y) = \sup_{t\in F} |d(x, t) - d(y, t)|
$$

для кожних $x, y \in X$, є псевдометрикою на X.

Доведення. Перевіримо властивості псевдометрики:

1) $\ddot{d}_F(x, y) \geqslant 0$, випливає з властивостей модуля.

2) $\ddot{d}_F(x, x) = \sup_{t \in F} |d(x, t) - d(x, t)| = 0$.

3) $\ddot{d}_F(x, y) = \sup_{t \in F} |d(x, t) - d(y, t)| = \sup_{t \in F} |d(y, t) - d(x, t)| =$
$= \ddot{d}_F(y, x)$.

4) $\ddot{d}_F(x, y) = \sup_{t \in F} |d(x, t) - d(y, t)| =$
$= \sup_{t \in F} |d(x, t) - d(z, t) + d(z, t) - d(y, t)| \leqslant$
$\leqslant \sup_{t \in F} |d(x, t) - d(z, t)| + \sup_{t \in F} |d(z, t) - d(y, t)| \leqslant$
$\leqslant \ddot{d}_F(x, z) + \ddot{d}_F(z, y)$. □

Лема 2.2.7. *Нехай $F \subset G$, тоді $\ddot{d}_F(x, y) \leqslant \ddot{d}_G(x, y)$.*

Доведення. Дійсно, $\ddot{d}_F(x, y) = \sup_{t \in F} |d(x, t) - d(y, t)| \leqslant$
$\leqslant \sup_{t \in G} |d(x, t) - d(y, t| = \ddot{d}_G(x, y)$. □

Наслідок 2.2.8. Для всіх $x, y \in X$ виконано

$$d(x, y) - 2\sup\{d(z, F) \mid z \in X\} \leqslant \ddot{d}_F(x, y) \leqslant d(x, y).$$

Доведення. Досить зауважити, що $\ddot{d}_X = d$, тому з $F \subset X$ маємо $\ddot{d}_F \leqslant d$. З іншого боку, для довільних $x, y \in X$ і кожного $a > \sup\{d(z, F) \mid z \in X\}$ існує таке $t \in F$, що $d(y, t) < a$. Тоді $d(x, t) + d(t, y) \geqslant d(x, y)$, отже, $d(x, t) - d(y, t) \geqslant d(x, y) - 2d(y, t) > d(x, y) - 2a$. Звідси випливає $d(x, t) - d(y, t) \geqslant d(x, y) - 2\sup\{d(z, F) \mid z \in X\}$ для цього t, а тим більше

$$\ddot{d}_F(x, y) = \sup_{t \in F} |d(x, t) - d(y, t)| \geqslant d(x, y) - 2\sup\{d(z, F) \mid z \in X\}.$$

□

Лема 2.2.9. *Нехай d — псевдометрика на X, а $\mathfrak{F}$ — сім'я підмножин X, об'єднання якої скрізь щільне в X щодо d. Тоді сукупність $\{\ddot{d}_F(x, y) | F \in \mathfrak{F}\}$ псевдометрик має супремум d.*

Доведення є модифікацією попереднього. Для довільних $x, y \in X$ і $\varepsilon > 0$ існують такі $F \in \mathfrak{F}$ та $t \in F$, що $d(y,t) < \varepsilon$. Тоді, як і вище, з нерівності $d(x,t) + d(t,y) \geqslant d(x,y)$ випливає $d(x,t) - d(y,t) \geqslant d(x,y) - 2d(y,t) > d(x,y) - 2\varepsilon$. Отже,

$$d(x,y) \geqslant \sup_{F \in \mathfrak{F}} \ddot{d}_F(x,y) \geqslant d(x,y) - 2\varepsilon$$

для всіх $\varepsilon > 0$, тобто $d(x,y) = \sup_{F \in \mathfrak{F}} \ddot{d}_F(x,y)$. □

Очевидно, якщо сім'я $\mathfrak{F}$ вище спрямована вгору за включенням, то з леми 2.2.7 випливає, що сукупність $\{\ddot{d}_F(x,y) | F \in \mathfrak{F}\}$ псевдометрик теж спрямована вгору.

2.2.2. Відношення "значно нижче". Розпочнемо з простого, але важливого спостереження.

Лема 2.2.10. *Нехай псевдометрики $d_0 \leqslant d$ на X такі, що існують $x_0, y_0 \in X$, для яких $d_0(x_0, y_0) = d(x_0, y_0) > 0$. Тоді не виконано $d_0 \ll d$.*

Доведення. Оберемо напрямлену вгору множину псевдометрик D, для якої $\sup D = d$, так, щоб у ній не знайшлося псевдометрики, яка була слідувала б за d_0. Достатньо обрати довільну послідовність чисел $\alpha_n \in [0; 1)$, що прямує до 1 (наприклад, $\alpha = (\frac{n-1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$), і побудувати напрямлену вгору множину $D = \{\alpha_n \cdot d | n \in \mathbb{N}\}$). □

Проілюструємо цей підхід на конкретному прикладі.

Приклад 2.2.11. Нехай X — довільна множина, і для деяких двох різних точок x_0, y_0 псевдометрики $d_0(x_0, y_0)$ та $d(x_0, y_0)$ дорівнюють 2. Для всіх інших пар $x \neq y$ нехай $d_0(x, y) = 2$ і $d(x, y) = 4$. Напрямлену вгору множину D побудуємо наступним чином:

$d_i : X \times X \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, де $d_i(x, y) = d(x, y)(1 - \frac{1}{i})$.

Нехай $D = \{d_i | i \in \mathbb{N}\}$. Неважко переконатися, що кожна d_i — псевдометрика. З побудови видно, що $\sup D = d$, а при $x = x_0$, $y = y_0$ маємо $d_0 > d_i$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Отже, не виконано $d_0 \ll d$.

Натомість псевдометрика $d_0 \equiv 0$ перебуває у відношенні "значно нижче" з усіма іншими псевдометриками з множини псевдометрик, оскільки для довільної напрямленої вгору множини її елементи задовольняють нерівність $\geqslant d_0$.

Для скінченної множини X останнього спостереження достатньо для повного опису відношення "значно нижче" у $Ps(X)$.

Теорема 2.2. *Для того, щоб псевдометрики d_0 і d на деякій скінченній множині* X *перебували у відношенні "значно нижче" у $Ps(X)$, необхідно і достатньо, щоб для кожних $x, y \in X$ було виконано або $d_0(x, y) = d(x, y) = 0$, або $d_0(x, y) < d(x, y)$.*

Доведення. Нехай виконується умова $d_0(x, y) < d(x, y)$ за винятком тих точок $x, y \in X$, де $d_0(x, y) = d(x, y) = 0$. Тоді в довільній напрямленій вгорі множині D такій, що $\sup D \geqslant d$, для кожних $x, y \in X$, таких, що $d_0(x, y) > 0$ (отже, $d(x, y) > d_0(x, y)$), знайдеться псевдометрика $d_{xy} \in D$, що $d_0(x, y) < d_{xy}(x, y)$. Оскільки множина X — скінченна, то перебравши всі пари її елементів x, y з властивістю $d_0(x, y) > 0$, отримаємо скінченну кількість псевдометрик, які кожній з цих пар перевищують псевдометрику d_0. Оскільки D — напрямлена вгору, то для кожної скінченної кількості псевдометрик з D знайдеться псевдометрика $d' \in D$, що слідує за ними всіма. Тоді для тих пар $x, y \in X$, що $d_0(x, y) > 0$, маємо $d'(x, y) \geqslant d_{xy}(x, y) > d_0(x, y)$, а для інших пар $d'(x, y) \geqslant d_0(x, y) = 0$, тобто $d' \geqslant d_0$. Отже, псевдометрики d_0 та d перебувають у відношенні "значно нижче".

Якщо ж маємо $d_0(x, y) = d(x, y) > 0$, то аналогічно до прикладу зможемо побудувати напрямлену вгору множину, щоб порушувалися умови відношення “значно нижче”. Для цього оберемо множину $\alpha = \{\frac{n-1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ і побудуємо напрямлену вгору множину $D = \{a \times d_2 \mid a \in \alpha\}$. $\square$

На жаль, умови Теореми 2.2 недостатні (хоча й необхідні) для випадку псевдометрик на *нескіченній* множині. Наведемо приклад такої пари псевдометрик на нескінченній множині X, що виконується умова Теореми 2.2, проте ця пара не перебуває у відношенні “значно нижче”.

Приклад 2.2.12. Розглянемо наступну псевдометрику та напрямлену вгору множину псевдометрик на множині натуральних чисел.

Нехай d — стандартна метрика на $\mathbb{N}$:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Побудуємо напрямлену вгору множину наступним чином:

$$D = \{d_i | i \in \mathbb{N}\}, \text{ де } d_i(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x, y < i; \\ |i - x|, & x < i, y \geqslant i; \\ |i - y|, & x \geqslant i, y < i; \\ 0, & x, y \geqslant i. \end{cases}$$

Покажемо, що d_i — псевдометрика. Дійсно, невід’ємність, симетрія та тотожність виконується автоматично за побудовою. Лишається перевірити нерівність трикутника.

Зауважимо, що $d_i(x, y) = d(\min\{x, i\}, \min\{y, i\})$, тому нерівність трикутника $d_i(x, z) \leqslant d_i(x, y) + d_i(y, z)$ рівносильна до

$$d(\min\{x, i\}, \min\{z, i\}) \leqslant d(\min\{x, i\}, \min\{y, i\}) + d(\min\{y, i\}, \min\{y, i\}),$$

тобто до нерівності трикутника для стандартної метрики і точок $\min\{x, i\}$, $\min\{y, i\}$, $\min\{z, i\}$. Отже, d_i — псевдометрика.

Перевіримо, що $d_i \leqslant d_{i+1}$, з чого випливатиме, що D — напрямлена вгору.

При $x, y < i$ маємо $d_i(x, y) = d_{i+1}(x, y)$. Якщо $x = y$ або $x, y > i + 1$, то отримаємо: $d_i(x, y) = d_{i+1}(x, y) = 0$.

Залишилися наступні принципово різні варіанти (на підставі симетрії опустимо ті, що відрізняються від наведених перестановкою x, y):

$x = i, y \geqslant i + 1$: $d_i(x, y) = 0 < |i + 1 - i| = 1 = d_{i+1}(x, y)$;

$x < i, y \geqslant i + 1$: $d_i(x, y) = |i - x| = i - x < |i + 1 - x| = i + 1 - x = d_{i+1}(x, y)$.

Отже, $d_i(x, y) \leqslant d_{i+1}(x, y)$ для всіх $x, y \in X$, $i \in \mathbb{N}$.

Оскільки $d_i \leqslant d$ і водночас $d_i(x, y) = d(x, y)$ для всіх $i \geqslant \max\{x, y\}$, то $\sup D = d$. Для кожного множника $a \in (0; 1)$ псевдометрики $d_0 = a \cdot d$ та d задовольняють умови Теореми 2.2 (крім скінченності множини), однак жодна з псевдометрик $d_i \in D$, де $i \in \mathbb{N}$, не слідує за d_0 (наприклад, $d_i(i, i+1) = 0 \not\geqslant d_0(i, i + 1) = a$). Отже, псевдометрики d_0 і d не перебувають у відношенні " значно нижче".

Причина не у тому, що псевдометрика d_0 вище необмежена (тому некомпактна). Компактність і навіть скінченність множини куль щодо псевдометрики не рятують ситуації.

Приклад 2.2.13. Покажемо, що зі стандартною метрикою на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ не перебуває у відношенні "значно нижче" наступна псевдометрика d_0,

$$d_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x = 1, y \geqslant 2 \text{ або } x \geqslant 2, y = 1; \\ 0 \text{ у інших випадках.} \end{cases}$$

Неважко помітити, що $d_0 = \frac{1}{2}\acute{d}_{\{2,3,\ldots\}}$.

Для цього побудуємо множину D наступним чином: $D = \{\acute{d}_{F_k} | k \in \mathbb{N}\}$, де $F_k = \{1\} \cup \{3^k\mathbb{N}\}$.

Очевидно, що в множині D, нема жодного елемента, який би слідував за d_1 (псевдометрика d_{F_k} має нульову відстань від 1 до всіх кратних 3^k чисел). Також з Леми 2.2.4 випливає, що супремум D — це стандартна метрика d. Тому псевдометрика d_0 та стандартна метрика на множині натуральних чисел не перебувають у відношенні "значно нижче", хоча задовольняють умови Теореми 2.2. Зауважимо, що є тільки дві нетривіальні кулі щодо d_0, а саме $\{1\}$ та $\{2, 3, \ldots\}$, на які d_0 розбиває $\mathbb{N}$.

Щоб з'ясувати будову відношення "значно нижче" детальніше, використаємо наступні твердження.

Лема 2.2.14. *Якщо $d_0 \ll d$ у $Ps(X)$, то для кожного x_0 існує таке $\varepsilon > 0$, що для всіх x, для яких $d(x, x_0) \leqslant \varepsilon$, маємо $d_0(x, x_0) = 0$.*

Доведення. Для фіксованої точки x_0 сукупність всіх замкнених куль $\bar{B}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ для $n \in \mathbb{N}$ спрямована вниз за включенням, її перетин дорівнює $\{x_0\}$, а діаметри $\operatorname{diam} \bar{B}_\varepsilon(x_0) \leqslant \frac{2}{n}$ прямують до нуля при $n \to \infty$. Отже, ця сукупність задовольняє вимоги Леми 2.2.5, звідки $\sup_{n\in\mathbb{N}} \acute{d}_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}(x_0)} = d$. Оскільки за припущенням $d_0 \ll d$, повинно виконуватись $\acute{d}_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}(x_0)} \geqslant d_0$ для деякого n. Однак $\acute{d}_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}(x_0)}(x, x_0)$ для всіх $x \in \bar{B}_{\frac{1}{n}}(x_0)$, отже, для всіх x з $d(x, x_0) \leqslant \varepsilon = \frac{1}{n}$ випливає $d_0(x, x_0) = 0$. □

Звідси випливає,що всі класи еквівалентності щодо метрики d_0, тобто множини $[x]_0 = \{y \in X \mid d_0(x, y) = 0\}$, є не тільки замкненими щодо d_0 (тому й щодо d), але й відкритими щодо d.

Зауваження 2.2.15. Очевидно, що, якщо $d_0 \ll d$, і x, y є у одній компоненті зв'язності щодо d, то $d_0(x, y) = 0$.

Останнє твердження можна посилити.

Лема 2.2.16. *Якщо $d_0 \ll d$ у $Ps(X)$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що для всіх $x, y \in X$ при $d(x, y) < \varepsilon$ маємо $d_0(x, y) = 0$.*

Доведення. Припустимо протилежне, тоді існують послідовності (x_n) і (y_n) у X, для яких $d(x_n, y_n) \to 0$, але $d_0(x_n, y_n) \neq 0$ при $n \to \infty$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $d(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо $\rho_n = \acute{d}_{\{x_n, y_n\}}$, $d_n = \inf\{\rho_i \mid i \geqslant n\}$. Ми хочемо показати, що послідовність d_n неспадна і прямує до d при $n \to \infty$, однак $d_n(x_n, y_n) = 0 \ngeqslant d_0(x_n, y_n) > 0$, що суперечить $d_0 \ll d$.

Зауважимо, що $d_n = \inf\{\rho_i \mid i \geqslant n\}$ є точною нижньою гранню спадної послідовності інфімумів $d_{n,m} = \inf\{\rho_i \mid n \leqslant i \leqslant m\}$ для всіх $m \geqslant n$. З Зауваження 2.2.3 зрозуміло, що $d_{n,m}$ — це найбільша з псевдометрик d' на X, для яких $d'(x_n, y_n) = 0$, $d'(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0$, …, $d'(x_m, y_m) = 0$. Тому її можна обчислити покроково:

$$d_{n,n} = \acute{d}_{\{x_n, y_n\}}, \; d_{n,n+1} = (\acute{d}_{n,n})_{\{x_{n+1}, y_{n+1}\}}, \; \ldots \; d_{n,m} = (\acute{d}_{n,m-1})_{\{x_m, y_m\}},$$

і, згідно з Лемою 2.2.2, для всіх $x, y \in X$ виконано

$$d_{n,n}(x, y) \geqslant d(x, y) - \operatorname{diam}\{x_n, y_n\} \geqslant d(x, y) - \frac{1}{2^n},$$

$$d_{n,n+1}(x, y) \geqslant d_{n,n}(x, y) - \operatorname{diam}\{x_{n+1}, y_{n+1}\} \geqslant d_{n,n}(x, y) - \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\ldots$$

$$d_{n,m}(x, y) \geqslant d_{n,m-1}(x, y) - \operatorname{diam}\{x_m, y_m\} \geqslant d_{n,m-1}(x, y) - \frac{1}{2^m}.$$

Звідси

$$d_{n,m}(x, y) \geqslant d(x, y) - (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}) > d(x, y) - \frac{1}{2^{n-1}}$$

для всіх $x, y \in X$, $n \leqslant m$ у $\mathbb{N}$. Тоді

$$d_n(x, y) = \lim_{m\to\infty} d_{n,m}(x, y) \geqslant d(x, y) - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Враховуючи $d_n \leqslant d$, маємо, що неспадна послідовність всіх d_n, $n \in \mathbb{N}$ прямує до d, що завершує доведення. □

З останнього випливає, що для кожних різних класів еквівалентності $[x]_0$ та $[y]_0$ щодо псевдометрики d_0, тобто для кожних $x, y \in X$, для яких $d_0(x, y) > 0$, маємо

$$d([x]_0, [y]_0) = \inf\{d(x', y') \mid x', y' \in X, d_0(x, x') = d_0(y, y') = 0\} \geqslant \varepsilon$$

для деякого фіксованого $\varepsilon > 0$.

Лема 2.2.17. *Якщо $d_0 \ll d$ у $Ps(X)$, і $d_0 \not\equiv 0$, то кількість класів еквівалентності щодо псевдометрики d_0 є скінченною, а псевдометрика d є обмеженою.*

Доведення. Спершу покажемо, що псевдометрика d_0 є обмеженою. Досить зауважити, що послідовність псевдометрик $d_n(x, y) = \min\{d(x, y), n\}$, $m \in \mathbb{N}$, є неспадною, збігається до d, тому $d_0 \leqslant d_n \leqslant n$ для деякого натурального n.

Відкрито-замкненість класів еквівалентності щодо псевдометрики d_0 вже доведена раніше. Припустимо, що кількість цих класів нескінченна, і оберемо послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точок з різних класів. Вже показано, що $d(x_i, d_j) \geqslant \varepsilon$ для всіх $i \neq j$ і деякого фіксованого $\varepsilon > 0$.

Нехай множина $\{d(x_i, x_j) \mid i \neq j\}$ необмежена згори, тобто множина точок $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ необмежена щодо d. Позначимо $\mathfrak{F}_0$ множину всіх непорожніх *скінченних* підмножин X. Для $F \in \mathfrak{F}_0$, $x, y \in X$ позначимо

$$\rho_F(x, y) = \max\Big\{\big|\min\{d(x, z), |F|\} - \min\{d(y, z), |F|\}\big| \;\Big|\; z \in F\Big\}.$$

Очевидно, що $\rho_F \leqslant |F|$, сукупність $(\rho_F)_{F\in\mathfrak{F}_0}$ спрямована вгору і за Лемою 2.2.9 збігається до d. Звідси $\rho_F \geqslant d_0$ для деякої скінченної підмножини $F \subset X$. За припущенням існують такі $x_i \neq x_j$, що $d(x_i, F) \geqslant |F|$, $d(x_j, F) \geqslant |F|$, тоді $\rho_F(x_i, x_j) = 0 \ngeqslant d_0(x_i, x_j) > 0$, що суперечить $\rho_F \geqslant d_0$. Отже, множина точок $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ є обмеженою щодо d, тобто $d(x_i, x_j) \leqslant E$ для деякого $E > 0$ і всіх $i \neq j$.

Якщо хоча б один клас еквівалентності $[x_0]$ щодо d_0 є необмежений щодо d (а з $d_0 \not\equiv 0$ випливає, що класів принаймні два), то зафіксуємо $x_1, x_2, x_3, \ldots \in [x_0]$, для яких $d(x_0, x_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, а також $y_0 \notin [x_0]$.

Знову для всіх $n \in \mathbb{N}$ позначимо $\rho_n = \acute{d}_{\{x_n, y_0\}}$, $d_n = \inf\{\rho_i \mid i \geqslant n\}$. Тоді для кожних $x, y \in X$ маємо

$$d(x, x_n) + d(y, y_0) \to \infty, \quad d(x, y_0) + d(y, x_n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

тому $\rho_n(x, y) = d(x, y)$, отже, і $d_n(x, y) = d(x, y)$, починаючи з деякого $n \in \mathbb{N}$. Отже, як і у доведенні попередньої леми, ми показали, що послідовність d_n неспадна і прямує до d при $n \to \infty$, однак $d_n(x_n, y_0) = 0 \ngeqslant d_0(x_n, y_0) > 0$, що суперечить $d_0 \ll d$.

Тому всі класи еквівалентності $[x_0]$ щодо d_0 є обмеженими щодо d, і їх діаметри щодо d скінченні. Якщо X необмежений щодо d в сукупності (що можливо тільки, якщо класів безліч), то з різних класів еквівалентності можна обрати множину точок $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, необмежену щодо d, що, як ми знаємо, неможливо.

Отже, діаметр E всього X щодо d скінченний, і $d(x, y) \leqslant E$ для всіх $x, y \in X$.

Припустимо, що класів еквівалентності $[x_0]$ щодо d_0 безліч, і зафіксуємо множину точок $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ з різних класів еквівалентності. Псевдометрика

$$d^E(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & d_0(x, y) = 0, \\ E, & d_0(x, y) > 0, \end{cases} \qquad x, y, \in X,$$

слідує за d і є точною верхньою гранню неспадної послідовності псевдометрик

$$d_n = \acute{d}^E_{[x_n] \cup [x_{n+1}] \cup [x_{n+2}] \cup \ldots}, \quad , n = 1, 2, 3, \ldots,$$

однак $d_n(x_n, x_{n+1}) = 0 \ngeq d_0(x_n, x_{n+1}) > 0$, що суперечить $d_0 \ll d$. Цим доведення закінчено. $\square$

Тепер можемо підсумувати леми вище і отримати необхідні умови для відношення “значно нижче” на нескінченній множині.

Теорема 2.3. *Нехай X — нескінченна множина. Якщо псевдометрики d_0, d на X перебувають у відношенні “значно нижче” у $Ps(X)$, і d_0 є нетривіальною, то виконано:*

1) класи еквівалентності щодо псевдометрики d_0 є відкрито-замкненими щодо d, і їх кількість є скінченною;

2) існує таке $\delta > 0$, що для кожних $x, y \in X$ виконано або $d_0(x, y) = 0$, або $d(x, y) \geqslant d_0(x, y) + \delta$;

3) псевдометрика d є обмеженою.

Наслідок 2.2.18. Якщо простір X з псевдометрикою d є зв’язним, то єдиною псевдометрикою значно нижче d є антидискретна (тривіальна).

Наприклад, нульова псевдометрика є єдиною, яка на $\mathbb{R}$ є значно нижче від стандартної метрики.

Наведемо приклад двох псевдометрик, які перебувають у відношенні “значно нижче”.

ПРИКЛАД 2.2.19. Нехай задано наступні псевдометрики на множині $\mathbb{N}$:

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 2, x = 1, y \geqslant 2 \text{ або } y = 1, x \geqslant 2; \\ 0, x, y \neq 1 \text{ або } x = y. \end{cases}$$

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 1, x = 1, y \geqslant 2 \text{ або } y = 1, x \geqslant 2; \\ 0, x, y \neq 1 \text{ або } x = y. \end{cases}$$

Припустимо, що існує така напрямлена вгору множина D, що $\sup D = d_2$, проте не знайдеться така псевдометрика $d \in D$, що $d > d_1$. Очевидно, що існує $d \in D$, що для деяких $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$, $d(x_0, y_0) > 0$. Очевидно, що x_0 або y_0 дорівнює 1, при $x \neq 1$ і $y \neq 1$ з того, що $\sup D = d_2$ маємо, що $d(x,y) = 0$.

Не зменшуючи загальності, нехай $x_0 = 1$ і $d(x_0, y_0) = c, c = const$. Тоді з нерівності трикутника для довільного $z \in \mathbb{N}$ маємо:

$c = d(x_0, y_0) = d(1, y_0) \leqslant d(1, z) + d(z, y_0) = d(1, z)$.

Звідки $d(1,z) \geqslant c$ для довільного $z \in \mathbb{N}$. З того, що $\sup D = d_2$,випливає, що $c \geqslant 1$, а це в свою чергу суперечить нашому припущенню. Отже $d_1 \ll d_2$.

2.2.3. Відношення "значно вище". Опис відношення "значно вище" на $Ps(X)$ для *скінченної* множини X тривіальний і аналогічний до Теореми 2.2 для відношення "значно нижче". Однак для нескінченної множини ситуація суттєво змінюється.

ТЕОРЕМА 2.4. *Жодні псевдометрики d, d_1 на нескінченній множині X не перебувають у відношенні "значно вище" у $Ps(X)$.*

ДОВЕДЕННЯ. Для кожної скінченної підмножини $F \subset X$ позначимо

$$d_F(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ d(x,y), & x, y \in F, \\ d(x,y) + 1 + d_1(x,y), & x \neq y, \text{ і } x \notin F \text{ чи } y \notin F, \end{cases} \qquad x, y \in X,$$

Тоді кожна d_F є множина $D = \{d_F | F \subset X$ — скінченна$\}$ є напрямленою вниз, і її точна верхня грань рівна d. З іншого боку, $d_F \not\leqslant d_1$ для всіх F, що суперечить $d_1 \gg d$. □

Розгляд відношення "значно вище" набуває деякого сенсу тільки при обмеженні множини псевдометрик згори, наприклад, у множині

$$Ps_a(X) = \{d \in Ps(X) | d(x, y) \leqslant a \text{ для всіх } x, y \in X\} \subset Ps(X).$$

Найбільшим її елементом є кратна до дискретної псевдометрика $\bar{d}(x, y) = \begin{cases} a, x \neq y, \\ 0, x = y. \end{cases}$, яка, очевидно, значно вище від усіх елементів $Ps_a(X)$.

Лема 2.2.20. *Для кожних $a, \delta > 0$, скінченної підмножини F нескінченної множини X і псевдометрики $d \in Ps_a(X)$ функція*

$$d_F^\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \min\{d(x, y) + \delta, a\}, & x \neq y,\ x, y \in F, \\ a, & x \neq y,\ \text{і } x \notin F \text{ чи } y \notin F, \end{cases} \qquad x, y \in X,$$

є псевдометрикою на X, значно вищою за d у $Ps_a(X)$.

Доведення є очевидним, як і те, що d_F^δ незростаюча при спаданні δ і зростанні F. Множина всіх d_F^δ напрямлена вниз і має точну нижню грань d. Звідси:

Теорема 2.5. *Множина $Ps_a(X)$ всіх псевдометрик на множині X, значення яких не перевищують фіксованого додатного числа a, є двоїсто неперервною.*

Аналогічно, але довше, можна описати відношення "значно вище" на множині всіх псевдометрик на множині X, значення яких не перевищують значень фіксованої псевдометрики на X.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі дисертації:

(1) Доведено, що множина всіх псевдометрик на довільній фіксованій множині X з поточковим впорядкуванням є умовно повною недистрибутивною граткою, а множина всіх метрик на $X = [0,1]$ не є напрямленою вниз, тому не є нижньою напівграткою, а тим більше граткою.

(2) Описано відношення апроксимації знизу на множині всіх псевдометрик на скінченній множині X і доведено, що, якщо нетривіальна псевдометрика d_0 на нескінченній множині X апроксимує знизу псевдометрику d на X, то d обмежена, а d_0 розбиває X на скінченну кількість класів еквівалентності, які щодо d є відкрито-замкненими.

(3) Доведено, що жодні дві псевдометрики на нескінченній множині X не перебувають у відношенні апроксимації згори у множині всіх псевдометрик на X, а у підмножині всіх псевдометрик на X, значення яких не перевищують фіксованого $a > 0$, кожний елемент є точною нижньою гранню напрямленої вниз множини елементів, що апроксимують його згори.

Результати другого розділу опубліковано в статті [35], а також доповідалися на конференції [68] і наукових семінарах.

РОЗДІЛ 3

ПОРЯДКОВІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИН ПСЕВДОУЛЬТРАМЕТРИК

Як бачимо, у попередньому розділі отримано переважно негативні результати. Часткові порядки на множинах псевдометрик мають досить бідні відношення апроксимації і не становлять значного інтересу з погляду теорії областей. Зокрема, для існування нетривіального наближення знизу псевдометрика повинна бути обмеженою, а верхньою гранню своїх апроксимацій знизу вона може бути тільки тоді, коли визначає цілком незв'язну топологію.

Відомо, що цілком незв'язні топології визначаються ультраметриками, а також псевдоультраметриками. Псевдоультраметрика [60] є узагальненням ультраметрики, яка послаблює вимогу невиродженості (тобто, відмінні точки не обов'язково розділені додатньою відстанню).

Надалі ми будемо розглядати простір всіх псевдоультраметрик на фіксованій множині та порядкові властивості такого простору. Можна очікувати, що цілком незв'язність дозволить отримати "позитивніші" результати, ніж доведені вище для псевдометрик.

Нагадаємо [13], що часткові порядки тісно пов'язані з топологіями, зокрема, «гарний» порядок на множині визначає досить природні і корисні топології, наприклад, топологію Скотта, верхню/нижню топологію, топологію Лоусона тощо. Для того, щоб ці топології мали гарні властивості, початковий порядок повинен задовольняти певні вимоги, переважно пов'язані з відношеннями наближення [10].

Ці властивості для псевдоультраметрик ми і перевірятимемо у даному розділі.

3.1. Псевдоультраметрики

Ультраметрики (або неархімедові метрики [14]) вивчаються з початку XX століття, див. огляд у [24]. Вони знайшли численні застосування, наприклад, у комп'ютерних науках. Монотонні сім'ї (псевдо-)ультраметрик вивчалися у [60], але відношення наближення були поза увагою у цій роботі.

Для зручності нагадаємо Означення 1.1.3 псевдоультраметрики, яке є природнім поєднанням означень ультраметрики і псевдометрики.

Означення. Відображення $d : X \times X \to \mathbb{R}$, яке задовольняє умови:

— $d(x, y) \geqslant 0$ для всіх $x, y \in X$ (невід'ємність);

— $d(x, x) = 0$ для всіх $x \in X$ (тотожність);

— $d(x, y) = d(y, x)$ для всіх $x, y \in X$ (симетричність);

— $d(x, y) \leqslant \max d(y, z), d(z, x)$ для всіх $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника),

називається псевдоультраметрикою на множині X.

Це просто псевдометрика, для якої звичайна нерівність трикутника $d(x, y) \leqslant d(y, z) + d(z, x)$ виконується у сильнішій формі.

Пара (X, d) з множиною X та псевдоультраметрикою d на ній називається псевдоультраметричним простором. Як і для довільних (псевдо-)метрик, для будь-якої підмножини A у псевдоультраметричному просторі (X, d) діаметр A щодо d, який може бути скінченним або нескінченним, визначається як $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Як і для будь-якої (псевдо-)метрики, для $r > 0$ визначаються куля $B_r(x)$ та замкнена куля $\bar{B}_r(x)$ таким чином:

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, \qquad \bar{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}.$$

3.2. Частково упорядковані множини псевдоультраметрик

Позначимо $PsU(X)$ множину всіх псевдоультраметрик на множині X. Її підмножини $CPsU(X)$ та $LCPsU(X)$ складаються з усіх компактних псевдоультраметрик та усіх локально компактних псевдоультраметрик відповідно, тобто $CPsU(X)$ є множиною всіх псевдоультраметрик, які роблять X компактним простором. Аналогічно $LCPsU(X)$ позначає множину всіх псевдоультраметрик на X, таких що кожна точка X є центром компактної замкненої кулі (зверніть увагу, що ми *не вимагаємо* властивості Гаусдорфа, і згадані функції можуть не бути ультраметриками) [9].

Приклад 3.2.1. Нехай X - довільна множина. Дискретна метрика, визначена формулою

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in X,$$

є ультраметрикою і, отже, псевдоультраметрикою. Кожна куля в X з радіусом 1 є одноелементною множиною (множиною з однією точкою), тому є компактною. Отже, $d \in LCPsU(X)$, але $d \notin CPsU(X)$ для нескінченного X, оскільки кожна послідовність неповторюваних точок в (X, d) не має границі.

Приклад 3.2.2. Розглянемо скінченне розбиття $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множини X і визначимо функцію $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ за формулою

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x, y \in A_i \text{ для деякого } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ 1, & x \in A_i, y \in A_j \text{ для } i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$

Очевидно, що функція ρ є псевдоультраметрикою, але вона не є ультраметрикою, якщо хоча б одна A_i містить більше однієї точки. Кожна куля в (X, ρ) або дорівнює X, якщо радіус більший за 1, або збігається з однією з A_i у протилежному випадку. Таким чином, $\rho \in CPsU(X)$.

Зауваження 3.2.3. Нагадаємо, що дві кулі однакового радіуса в псевдоультраметричному просторі (X, d) або співпадають, або не мають спільних точок. Отже, кулі з фіксованим радіусом R утворюють розбиття X, тому вони є відкритими і замкненими. Це означає, що X є повним тоді і тільки тоді, коли для кожної точки $x \in X$ існує $R > 0$ таке, що для кожної спадної послідовності куль

$$B_R(x) \supset B_{r_1}(x_1) \supset B_{r_2}(x_2) \supset \ldots \text{ при } R > r_1 > r_2 > \ldots \searrow 0$$

перетин є непорожнім.

Аналогічно псевдоультраметричний простір X є компактним тоді і тільки тоді, коли X є повним, і для всіх $r > 0$ існує лише скінченна кількість відмінних куль радіуса r в X. Простір (X, d) є локально компактним тоді і тільки тоді, коли він є повним і для кожної точки $x \in X$ існує $R > 0$ таке, що для всіх $0 < r < R$ куля $B_R(x)$ є об'єднанням скінченної кількості куль радіуса r.

Часткові порядки на множині $PsU(X)$ всіх псевдоультраметрик на X і її підмножинах $CPsU(X)$ і $LCPsU(X)$ визначаються, як і раніше, поточково: псевдоультраметрика d_1 передує псевдоультраметриці d_2 (позначається $d_1 \leqslant d_2$ або $d_2 \geqslant d_1$), якщо $d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)$ виконується для всіх точок $x, y \in X$. Тривіальна псевдометрика $d \equiv 0$ є найменшим елементом $PsU(X)$, $CPsU(X)$ та $LCPsU(X)$. Ми позначаємо $d_1 < d_2$ або $d_2 > d_1$, якщо $d_1 \leqslant d_2$ і $d_1 \neq d_2$ (це не означає, що $d_1(x, y) < d_2(x, y)$ для всіх x, y).

Зауважимо, що якщо $d_1 \leqslant d_2$ для $d_1, d_2 \in PsU(X)$, то тотожне відображення $1_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$ є неперервним. Компактний образ компактного простору є компактним. Тому, якщо $d_2 \in CPsU(X)$ і $d_1 \leqslant d_2$, то $d_1 \in CPsU(X)$, тобто $CPsU(X) \subset PsU(X)$ є нижньою підмножиною:

$$CPsU(X)\downarrow =$$
$$= \{d' \in PsU(X) \mid d' \leqslant d \text{ для деякого } d \in CPsU(X)\} \subset CPsU(X).$$

Найменшою верхньою гранню псевдоультраметрик d_1, d_2 в $PsU(X)$ є поточковий максимум $d^*(x, y) = \max(d_1(x, y), d_2(x, y)$ для всіх $x, y \in X$.

Приклад 3.2.4. Існують компактні псевдоультраметрики d_1, d_2 на зліченній множині X, такі що $\sup\{d_1, d_2\}$ не є локально компактною псевдоультраметрикою. Нехай $Y_+ = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ і $Y = Y_+ \cup \{-1, 0\}$. Визначимо $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$ за формулою

$$\rho(u, v) = \begin{cases} 0, & u = v, \\ \max\{|u|, |v|\}, & u \neq v, \end{cases} \qquad u, v \in Y.$$

Розглянемо множину

$$X = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots\right\}\right)$$

з компактною ультраметрикою $d_1((u, v), (u', v')) = \max\{\rho(u, u'), \rho(v, v')\}$ і з компактною псевдоультраметрикою

$$d_2((u, v), (u', v')) = \begin{cases} 1, & (u, v), (u', v') \text{ є у різних з множин} \\ & Y_+ \times \{0\} \text{ і } X \setminus (Y_+ \times \{0\}), \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

для $(u, v), (u', v') \in X$.

Тоді X з псевдоультраметрикою $d^* = \sup\{d_1, d_2\}$ є ізометричним до множини

$$X_{\pm} = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots\right\} \cup Y_+ \times \{-1\}$$

з псевдоультраметрикою $d_{\pm}((u,v),(u',v')) = \max \rho(u,u'), \rho(v,v')$, яка не є локально компактною.

Отже, жодна з множин $CPsU(X)$ та $LCPsU(X)$ не є верхньою піднапівграткою у гратці $PsU(X)$.

Зауваження 3.2.5. Якщо всі кулі в X відносно псевдоультраметрики d_1 є відкритими відносно (локально) компактної псевдоультраметрики d_2 (тобто d_1 є неперервною відносно d_2), то псевдоультраметрика $\sup\{d_1, d_2\}$, очевидно, також є (локально) компактною.

Формула

$$d_*(x,y) = \inf\Big\{\max\{\min\{d_1(t_k,t_{k+1}), d_2(t_k,t_{k+1})\} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\} \;\Big|\; n \in \mathbb{N},$$
$$t_0 = x, \{t_1, ..., t_{n-1}\} \subset X, t_n = y\Big\}$$

визначає інфімум d_1, d_2 в множині всіх псевдоультраметрик. Тотожні відображення $\mathbf{1}_X : (X, d_1) \to (X, d)$ та $\mathbf{1}_X : (X, d_1) \to (X, d)$ є неперервними, тому компактність як d_1, так і d_2 достатня для компактності d_*.

Тим не менш, для *напрямлених вниз* множин наведені вище формули для інфімумів у $PsU(X)$ стають тривіальними.

Твердження 3.2.6. *Нехай множина $\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ псевдоультраметрик на множині X напрямлена вниз, тобто для всіх $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ існує таке $\gamma \in \mathcal{A}$, що $d_\gamma \leqslant d_\alpha$, $d_\gamma \leqslant d_\beta$. Тоді точна нижня грань d_0 цієї множини існує і обчислюється поточково:*

$$d_0(x,y) = \inf\{d_\alpha(x,y) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}, \qquad x, y \in X.$$

Доведення. Згідно очевидно модифікованої формули вище, якщо $d_0(x,y) < \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, то існують $x_0 = x, x_n = y, x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$ і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ такі, що

$$\max\{d_{\alpha_1}(x_0,x_1), d_{\alpha_2}(x_1,x_2), \ldots, d_{\alpha_n}(x_{n-1},x_n)\} < \varepsilon,$$

тобто

$$d_{\alpha_1}(x_0,x_1) < \varepsilon,\ d_{\alpha_2}(x_1,x_2) < \varepsilon,\ \ldots, d_{\alpha_n}(x_{n-1},x_n) < \varepsilon.$$

Неодноразово вживаючи напрямленість вниз, можемо знайти таке $\gamma \in \mathcal{A}$, що d_γ передує всім $d_{\alpha_1}, d_{\alpha_2}, \ldots, d_{\alpha_n}$, звідки випливає

$$d_\gamma(x_0,x_1) < \varepsilon,\ d_\gamma(x_1,x_2) < \varepsilon,\ \ldots, d_\gamma(x_{n-1},x_n) < \varepsilon,$$

отже, за посиленою нерівністю трикутника, $d_\gamma(x_0,x_n) = d_\gamma(x,y) < \varepsilon$. Таким чином,

$$d_0(x,y) \geqslant \inf\{d_\alpha(x,y) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \text{ для всіх } x,y \in X.$$

Зворотна нерівність очевидна, що завершує доведення. $\square$

Приклад 3.2.7. Існують локально компактні псевдоультраметрики ρ, d та $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots$ на зліченній множині X такі, що $d = \sup\{d_1, d_2, \ldots\}$, але $\inf\{\rho, d\} \neq \sup\big\{\inf\{\rho, d_1\}, \inf\{\rho, d_2\}, \ldots\big\}$.

Нехай $X = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\} \cup \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, і задамо псевдоультраметрики на цій множині формулами :

$$\rho(u,v)=\begin{cases}0, & |u|=|v|,\\ 1, & |u|\neq|v|,\end{cases}$$

$$d(u,v)=\begin{cases}0, & u=v=0,\\ 0, & \{u,v\}\subset\{-\frac{1}{2k-1},-\frac{1}{2k}\}\text{ або}\\ & \{u,v\}\subset\{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k+1}\}\text{ для } k\in\mathbb{N},\\ 1 & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$d_n(u,v)=\begin{cases}0, & |u|,|v|<\frac{1}{2n+1},\\ 0, & \{u,v\}\subset\{-\frac{1}{2k-1},-\frac{1}{2k}\}\text{ або}\\ & \{u,v\}\subset\{\frac{1}{2k},\frac{1}{2k+1}\}\text{ для } 1\leqslant k\leqslant n,\\ 1 & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

для всіх $u,v\in X$. Легко перевірити, що $\inf\{\rho,d_n\}(-1,0)=0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$, але $\inf\{\rho,d\}(-1,0)=1$.

Іншими словами, для частково упорядкованих множин $PsU(X)$ та $LCPsU(X)$ попарний інфімум не є дистрибутивним щодо супремума.

Теорема 3.1. *Для кожної псевдоультраметрики ρ та напрямленої множини $\{d_\alpha \mid \alpha\in\mathcal{A}\}$ псевдоультраметрик таких, що існує компактна псевдоультраметрика $d=\sup\{d_\alpha\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$ (на тій самій множині X), має місце рівність*

$$\inf\bigl\{\rho,d\bigr\}=\sup\bigl\{\inf\{\rho,d_\alpha\}\bigm|\alpha\in\mathcal{A}\bigr\}.$$

Доведення. Позначимо $\rho'=\inf\{\rho,d\}$ і, оскільки

$$\inf\{\rho,d_\alpha\}=\inf\{\rho,d,d_\alpha\}=\inf\{\rho',d_\alpha\},$$

тому $\rho' = \sup\big\{\inf\{\rho', d_\alpha\} \bigm| \alpha \in \mathcal{A}\big\} = d'$ — це рівність, яку ми хочемо довести, з умовою $\rho' \leqslant d = \sup\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Легко бачити, що ρ' є компактною, так само як і d' та всі $\inf\{\rho', d_\alpha\}$, і права сторона менша або дорівнює лівій. Нехай $x, y \in X$ такі, що $\rho'(x, y) = \varepsilon > \theta > d'(x, y)$. Тоді $x \in B = B_\varepsilon(x)$, $y \in C = X \setminus B_\varepsilon(c)$ (кулі взяті відносно ρ'), і $\rho'(u, v) \geqslant \varepsilon$ для всіх $u \in B$, $v \in C$. Для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$ маємо $\inf\{\rho', d_\alpha\} < \theta$. Кожна послідовність точок "від x до y" повинна перескочити хоча б один раз з B до C. Тому за формулою для $\inf\{\rho', d_\alpha\}$ повинні існувати $u \in B$, $v \in C$ такі, що $\inf\{\rho'(u, v), d_\alpha(u.v)\} \leqslant \theta$. Враховуючи $\rho'(u, v) \geqslant \varepsilon > \theta$, отримуємо $d_\alpha(u, v) \leqslant \theta$. Отже, замкнена множина $\{z \in C \mid d_\alpha(z, B) \leqslant \theta\}$ є непорожньою для всіх α. Зауважимо, що $\{z \in C \mid d_\alpha(z, B) \leqslant \theta\} \subset \{z \in C \mid d_\beta(z, B) \leqslant \theta\}$ якщо $d_\alpha \geqslant d_\beta$. Отже, сім'я компактних множин $\{z \in C \mid d_\alpha(z, B) \leqslant \theta\}$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$ є фільтрованою. Тому їх перетин є непорожнім, і існує $z \in C$ таке, що $d_\alpha(z, B) \leqslant \theta$ для всіх $\alpha \in A$. Це означає, що $d(z, B) \leqslant \theta$, що суперечить $d(z, B) \geqslant \rho'(z, B) \geqslant \varepsilon > \theta$. Отже, $\rho' = d'$, і доведення завершено. $\square$

Таким чином, для частково упорядкованої множини $CPsU(X)$ інфімум двох елементів дистрибутивний щодо супремума довільної кількості елементів, тобто рівність

$$\inf\big\{\rho, \sup\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}\big\} = \sup\big\{\inf\{\rho, d_\alpha\} \bigm| \alpha \in \mathcal{A}\big\}$$

має місце за умови, що всі псевдоультраметрики і їх верхні грані тут є компактними. Ми не розглядаємо існування або властивості найменших верхніх граней обмежених множин в частково упорядкованій множині $LCPsU(X)$.

3.3. Апроксимація знизу

У цьому підрозділі ми обмежуємося вивченням відношення "значно нижче". Ми використовуємо наступне допоміжне поняття.

Означення 3.3.1. Елемент x_0 називається "слабко значно нижчим" за елемент x_1 в частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$ (позначається $x_0 \lll x_1$), якщо для кожної непорожньої напрямленої підмножини $D \subset X$, для якої $x_1 = \sup D$, існує елемент $d \in D$ такий, що $x_0 \leqslant d$.

Звернемо увагу на знак рівності, який відрізняє це означення від означення відношення "бути значно нижчим". Далі буде показано, що "слабко значно нижче" насправді є суттєво слабшою властивістю, ніж "значно нижче".

Нехай d — псевдоультраметрика на X. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ всі ε-кулі в X відносно d є відкритими і не перетинаються. Отже, множини $A = B_\varepsilon(x)$ та $B = X \setminus B_\varepsilon(x) = \bigcup_{y \notin B_\varepsilon(x)} B_\varepsilon(y)$ також є відкритими і не перетинаються. Ясно, що $d(u, v) \geqslant \varepsilon$ для всіх $u \in A$, $v \in B$. Отже, формула

$$d_\varepsilon^x(u, v) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{тільки один із } u, v \text{ в } B_\varepsilon(x), \\ 0 & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \qquad u, v \in X,$$

визначає компактну псевдоультраметрику $d_\varepsilon^x \leqslant d$ на X. Крім того,

$$d(u, v) = \sup\{d_\varepsilon^x(u, v) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$$

для всіх $u, v \in X$.

Це означає, що будь-яка псевдоультраметрика d на X є найменшою верхньою межею напрямленої множини всіх компактних псевдоультраметрик вигляду

$$\sup\{d_{\varepsilon_1}^{x_1}, d_{\varepsilon_2}^{x_2}, \ldots, d_{\varepsilon_n}^{x_n}\}, \quad n \in \mathbb{N},\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X,\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0.$$

Це має безпосередній наслідок для відношень "слабко значно нижче" у частково упорядкованих множинах $PsU(X)$ та $LCPsU(X)$.

Теорема 3.2. *Нехай d, d_0 — псевдоультрометрика на X, причому $d_0 \notin CPsU(X)$. Тоді d_0 не «значно нижче» за d (і, отже, не «не слабко значно нижче» за d), ні в $PsU(X)$, ні в $LCPsU(X)$.*

Нагадаємо, що псевдоультраметрика d на множині X є компактною, якщо і тільки якщо:

— вона досягає своєї найменшої верхньої межі

$$\varepsilon = \operatorname{diam} X = \sup d(u, v) \mid u, v \in X;$$

— X розбивається на скінченну кількість ε-куль $B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2), \ldots, B_\varepsilon(x_n)$;

— кожна куля $B_\varepsilon(x_i)$ є компактом відносно d.

З цих властивостей випливає, що $\operatorname{diam} B_\varepsilon(x_i) < \varepsilon$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Розглянемо відношення «слабко значно нижче» в $PsU(X)$ в п'яти наступних лемах:

Лема 3.3.2. *Припустимо, що для псевдоультраметрики d на X існує куля $B_\epsilon(x)$ така, що значення $d(u, v)$ для $u, v \in B_\epsilon(x)$ не досягають їх найменшої верхньої межі $\epsilon_0 = \operatorname{diam} B_\epsilon(x)$. Тоді для будь-якої псевдоультраметрики $d_0 \lll d$ і всіх $u, v \in B_\epsilon(x)$ виконується рівність $d_0(u, v) = 0$.*

Доведення. Зауважимо, що $B_\varepsilon(x)$ не є компактним відносно d. Припустимо, що існують $s, t \in B_\varepsilon(x)$ такі, що $d_0(s, t) = \delta > 0$, тоді $B_\varepsilon(x)$ є об'єднанням неперетинних (або співпадаючих) куль $B^0_\delta(y) \cap B_\varepsilon(x)$ відносно d_0 для всіх $y \in B_\varepsilon(x)$.

Множини $A = B^0_\delta(s)$ і $B = X \setminus B^0_\delta(s)$ є замкненими і відкритими в X відносно d_0, отже, $A_0 = A \cap B_\varepsilon(x) \ni s$ і $B_0 = B \cap B_\varepsilon(x) \ni t$ є замкненими і відкритими в $B_\varepsilon(x)$ відносно d і, принаймні, одна з множин A_0, B_0, наприклад, B_0, має діаметр ε_0.

Розглянемо конструкцію на основі псевдоультраметрики d на множині Y. Для довільних $x \in Y$ і $\theta > 0$ позначимо

$$d^x_{\leqslant\theta}(u,v) = \begin{cases} d(u,v), & u,v \in B_\theta(x), \\ 0, & u,v \notin B_\theta(x), \\ d(u,x), & u \in B_\theta(x),\ v \notin B_\theta(x), \\ d(v,x), & u \notin B_\theta(x),\ v \in B_\theta(x), \end{cases} \qquad u,v \in Y.$$

Зауважимо, що $d^x_{\leqslant\theta}$ є псевдоультраметрикою, меншою або рівною d.

Виберемо неспадну послідовність

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \ldots \nearrow \varepsilon_0,$$

і розглянемо послідовність

$$d^s_{\leqslant\theta_1} \leqslant d^s_{\leqslant\theta_2} \leqslant \ldots \leqslant d^s_{\leqslant\theta_n} \leqslant \ldots$$

псевдоультраметрик на $B_\varepsilon(x) \subset X$. Кожну з цих псевдоультраметрик ми розширимо на X, розмістивши $d^s_{\leqslant\theta_n}(u,v) = d(u,v)$, якщо або u, або v не належить $B_\varepsilon(x)$. Тоді легко перевірити, що $d^s_{\leqslant\theta_n}(u,v) \nearrow d(u,v)$ при $n \to \infty$ для всіх $u,v \in X$.

З іншого боку, псевдоультраметрика

$$d^{A,B}_\delta(u,v) = \begin{cases} 0, & u,v \in A \text{ or } u,v \in B, \\ \delta & \text{в інших випадках}, \end{cases} \qquad u,v \in X,$$

задовольняє нерівність $d^{A,B}_\delta \leqslant d_0$, отже, $d^{A,B}_\delta \lll d$. Тому мусить існувати $n \in \mathbb{N}$ таке, що $d^s_{\leqslant\theta_n} \geqslant d^{A,B}\delta$, що є неможливим, оскільки існує $y \in B_0$, такий що $d(s,y) \geqslant \theta n + 1 > \theta_n$, отже, $d^s_{\leqslant\theta_n}(s,y) = d(s,s) = 0 \not\geqslant d^{A,B}_\delta(s,y) = \delta$.

Ця суперечність завершує доведення того, що $d_0(u,v) = 0$ для всіх $u,v \in B_\varepsilon(x)$. $\square$

Лема 3.3.3. *Припустимо, що для псевдоультраметрики d на X існує куля $B_\epsilon(x)$ така, що значення $d(u,v)$ для $u,v \in B_\epsilon(x)$ досягають їх найменшої верхньої межі $\varepsilon_0 = \operatorname{diam} B_\varepsilon(x) > 0$, і є нескінченна кількість точок $x_1, x_2, x_3, \ldots \in B_\varepsilon(x)$ таких, що $d(x_i, x_j) = \varepsilon_0$ для $i \neq j$. Тоді для будь-якої псевдоультраметрики $d_0 \lll d$ і всіх $u, v \in B_\epsilon(x)$ виконується рівність $d_0(u,v) = 0$.*

Доведення. За умовою $B_\epsilon(x)$ є диз'юнктним об'єднанням нескінченної кількості куль $B_{\epsilon_0}(y)$, $y \in B_\epsilon(x)$. Нехай $d_0 \lll d$, і існують $s, t \in B_\epsilon(x)$ такі, що $d_0(s,t) = \delta > 0$.

Знову розглянемо множини $A = B^0_\delta(s)$ та $B = X \setminus B^0_\delta(s)$, які є замкненими та відкритими в X відносно d_0, і замкнені та відкриті в $B_\varepsilon(x)$ відносно d перетини $A_0 = A \cap B_\epsilon(x) \ni s$ та $B_0 = B \cap B_\epsilon(x) \ni t$. Принаймні одна з A_0 та B_0, скажімо B_0, перетинає нескінченно багато диз'юнктних куль $B_{\varepsilon_0}(x_1)$, $B_{\epsilon_0}(x_2)$, $B_{\varepsilon_0}(x_3)$, $\ldots$. Ми також можемо припустити, що $s \notin B_{\varepsilon_0}(x_n)$ для всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Позначимо $C_n = B_{\varepsilon_0}(x_n) \cup B_{\varepsilon_0}(x_{n+1}) \cup B_{\varepsilon_0}(x_{n+2}) \cup \ldots$ для всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тоді множини $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ є замкненими та відкритими, і їх перетин порожній. Визначимо псевдоультраметрику d_n для довільного $n \in \mathbb{N}$ за формулою

$$d_n(u,v) = \begin{cases} d(u,v), & u,v \notin C_n, \\ 0, & u,v \in C_n, \\ d(u,s), & u \notin C_n,\ v \in C_n, \\ d(v,s), & u \in C_n,\ v \notin C_n, \end{cases} \qquad u, v \in X,$$

(ми склеюємо всі точки з C_n з точкою s). Ясно, що $d_n(u,v) \nearrow d(u,v)$ при $n \to \infty$.

Аналогічно до попередньої леми, ми показуємо, що жодна з псевдоультраметрик d_n не є більшою або рівною псевдоультраметриці

$$d_\delta^{A,B}(u,v) = \begin{cases} 0, & u,v \in A \text{ або } u,v \in B, \\ \delta & \text{в інших випадках,} \end{cases} \qquad u,v \in X,$$

яка задовольняє нерівність $d^{A,B}\delta \leqslant d_0$, тому вірно, що $d^{A,B}\delta \lll d$. За вибором x_i маємо $B_0 \cap C_n \neq \varnothing$, тому існує $y \in B_0 \cap C_n$. Тоді $d_n(s,y) = d(s,s) = 0 \ngeqslant d_\delta^{A,B}(s,y) = \delta$, що суперечить припущенню. $\square$

Несуттєві зміни в останніх міркуваннях дають висновок:

Лема 3.3.4. *Якщо значення $d(u,v)$ для u,v на всьому X не досягають своєї найменшої верхньої грані $\varepsilon_0 = \operatorname{diam} X$, або досягають ε_0 і існує нескінченна кількість точок $x_1, x_2, x_3, \dots$ таких, що $d(x_i, x_j) = \varepsilon_0$ для всіх $i \neq j$, то $d_0 \equiv 0$ є єдиною слабко значно нижчою за d псевдоультраметрикою.*

Лема 3.3.5. *Нехай d – псевдоультраметрика на X, яка досягає своєї найменшої верхньої грані $\varepsilon = \operatorname{diam} X > 0$, і існує така куля $B_\varepsilon(x)$, що її діаметром* дорівнює ε. *Тоді $d_0 \equiv 0$ є єдиною псевдометрикою, слабко значно нижчою за d.*

Зауважимо, що остання умова означає, що значення $d(u,v)$ для $u,v \in B_\varepsilon(x)$ не досягають своєї найменшої верхньої грані, яка дорівнює ε.

Доведення. Нехай $d_0 \lll d$. Як вже показано, для всіх $u,v \in B_\varepsilon(x)$ виконується рівність $d_0(u,v) = 0$. Оберемо $0 < \theta < \varepsilon$ і довільні $y \notin B_\varepsilon(x)$, і визначимо псевдоультраметрику $d^{x,y}_{\leqslant\theta}$ наступним чином:

$$d^{x,y}_{\leqslant\theta}(u,v) = \begin{cases} \min\{d(u,v),\theta\}, & u,v \in B_\epsilon(x), \\ \min\{d(u,v),\theta\}, & u,v \in B_\theta(x) \cup B_\epsilon(y), \\ \min\{d(v,y),\theta\}, & u \in B_\epsilon(x) \setminus B_\theta(x), v \in B_\epsilon(y) \\ \min\{d(u,y),\theta\}, & v \in B_\epsilon(x) \setminus B_\theta(x), u \in B_\epsilon(y), \\ d(u,v) & \text{у інших випадках,} \end{cases} \qquad u,v \in X.$$

Оберемо послідовність

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \ldots \nearrow \epsilon,$$

і застосуємо доведену вище лему до послідовності

$$d^{x,y}_{\leqslant\theta_1} \leqslant d^{x,y}_{\leqslant\theta_2} \leqslant \ldots \leqslant d^{x,y}_{\leqslant\theta_n} \leqslant \ldots,$$

яка збігається до d. З іншого боку, для кожного $n = 1,2,3,\ldots$ і $u \in B_\varepsilon(x) \setminus B_{\theta_n}(x)$ має місце $d^{x,y}_{\leqslant\theta_n}(u,y) = 0$. Оскільки $d_0 \leqslant d^{x,y}_{\leqslant\theta_n}$ для деякого n, то $d_0(u,y) = 0$ для всіх $u \in B_\epsilon(x) \setminus B_{\theta_n}(x)$. Для будь-якого іншого $z \notin B_\epsilon(x)$ також існує m таке, що $d_0(u,z) = 0$ для всіх $u \in B_\epsilon(x) \setminus B_{\theta_m}(x)$. Покладемо $k = \max\{n,m\}$ і $u \in B_\epsilon(x) \setminus B_{\theta_k}(x)$, і враховуючи $d_0(x,u) = 0$, отримаємо $d_0(u,y) = d_0(u,x) + d_0(x,y) = 0$. Оскільки y і z були вибрані довільно, отримуємо $d_0(u,v) = 0$ для всіх $u,v \in B_\epsilon(x)$.

Розглянемо тепер $u \in B_\epsilon(x) \setminus B_{\theta_k}(x)$ і $v \in B_\epsilon(x)$. Маємо $d_0(u,v) = d_0(u,x)+d_0(x,v) = 0+d_0(x,v) = d(x,v) \leqslant d(u,v)$. Аналогічно розглядаючи $u \in B_\epsilon(x)$ і $v \in B_\epsilon(x) \setminus B_{\theta_k}(x)$, отримаємо $d_0(u,v) \leqslant d(u,v)$ для всіх $u,v \in B_\epsilon(x)$.

Таким чином, $d_0(u,v) = d(u,v)$ для всіх $u,v \in B_\epsilon(x)$, а це означає, що $d_0(u,v) = d(u,v)$ для всіх $u,v \in X$ згідно з лемою 3.3.3. Отже, $d_0 \equiv 0$. $\square$

Лема 3.3.6. *Припустимо, що псевдоультраметрика d на X* ***досягає*** *своє найбільше значення $\varepsilon = \operatorname{diam} X > 0$ і X є диз'юнктним об'єднанням* *куль* $X_1 = B_\epsilon(x_1)$*,* $X_2 = B_\varepsilon(x_2)$*,* $\ldots$*,* $X_n = B_\varepsilon(x_n)$ *з діаметрами* ***меншими за*** ε*.*

Тоді псевдоультраметрика $d_0 \leqslant d$ *є слабко значно нижчою за* d*, якщо і тільки якщо:*

(a) *всі значення* $d_0(x_i, x_j)$ *менші за* ϵ*;*

(b) *для всіх* $i = 1, 2, \ldots, n$ *обмеження* d_{0i} *псевдоультраметрики* d_0 *на кулю* X_i *є слабко значно нижчою за обмеження* d_i *псевдоультраметрики* d *на* X_i*.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо $d_0(x_i, x_j) = \epsilon$ для деяких i, j, тоді зростаюча послідовність псевдоультраметрик $(1-\frac{1}{k})d$, $k = 1, 2, \ldots$, збігається до d, але $(1-\frac{1}{k})d(x_i, x_j) \leqslant (1-\frac{1}{k})\varepsilon < \varepsilon = d_0(x_i, x_j)$ для всіх k, отже $d_0 \not\ll d$. Отже, (a) є необхідною умовою.

Розглянемо напрямлену множину $\rho_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}$ псевдоультраметрик на кулі X_i з найменшою верхньою межею d_i. Розширимо кожну ρ_α до псевдоультраметрики $\bar{\rho}_\alpha$ на X за формулою

$$\bar{\rho}_\alpha = \begin{cases} \rho_\alpha(u, v), & u, v \in X_i, \\ d(u, v), & u \notin X_i \text{ or } v \notin X_i, \end{cases} \qquad u, v \in X.$$

Тоді множина $\bar{\rho}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}$ є напрямленою і має найменшу верхню межу d, отже $d_0 \leqslant \bar{\rho}_\alpha$ для деякого $\alpha \in \mathcal{A}$. Повернувшись до обмежень на X_i, ми отримуємо $d_{0i} \leqslant \rho_\alpha$, тому $d_{0i} \ll d_i$. Отже, (b) є необхідною умовою також.

Достатність. Припустимо (a) і (b). Нехай $d_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}$ є напрямленою множиною псевдоультраметрик, таких що верхня межа d_α дорівнює d. Ми покажемо, що для всіх $0 < \theta < \varepsilon$ нерівність $d_\alpha(x_i, x_j) > \theta$ справедлива для всіх $i \neq j$ і деякого $\alpha \in \mathcal{A}$. Припустивши протилежне для деяких $i \neq j$, отримуємо з $d_\alpha \leqslant d$ для всіх $\alpha \in \mathcal{A}$:

$$
\begin{aligned}
d_\alpha(u,v) \leqslant d'(u,v) = \min\bigl\{&d(u,v),\\
&\max\{d(u,x_i),\theta,d(x_j,v)\},\\
&\max\{d(v,x_i),\theta,d(x_j,u)\}\bigr\}, \qquad u,v \in X.
\end{aligned}
$$

Тоді d' є псевдоультраметрикою, $d_\alpha < d'$ (оскільки $d'(x_i,x_j) = \theta < \varepsilon = d(x_i,x_j)$), що суперечить тому, що d є верхньою межею всіх d_α. За умови ми можемо вибрати θ так, щоб $\max\{\operatorname{diam}_0 X_1, \operatorname{diam}_0 X_1, \ldots, \operatorname{diam}_0 X_n\} < \theta < \varepsilon$, $\theta \geqslant \max\{d_0(x_i,x_j) \mid i \neq j\}$, тоді існує $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ таке, що $d_{\alpha_0}(x_i,x_j) > \theta$ для всіх $i \neq j$. Аналогічно до попередніх міркувань, можна показати, що обмеження $d_{\alpha i}$ всіх d_α на X_i мають найменшу верхню межу d_i в $PsU(X_i)$. Отже, $d_i \geqslant d_i$ для всіх i, отже $d_{\alpha_i} \geqslant d_{0i}$ для деякого α_i. Тепер існує $\beta \in \mathcal{A}$ таке, що d_β більше або дорівнює всім d_{α_0}, d_{α_1}, $\ldots$, d_{α_n}. Ясно, що $d_\beta(u,v) \geqslant d_{0i}(u,v) = d_0(u,v)$ для всіх $u,v \in X_i$. Якщо $i \neq j$, $u \in X_i$, $v \in X_j$, то $d_\beta(x_i,x_j) > \theta$, $d_\beta(u,x_i) \leqslant \theta$, $d_\beta(x_j,v) \leqslant \theta$, що означає $d_\beta(u,v) > \theta \geqslant d_0(u,v)$. Отже, $d_\beta \geqslant d_0$, що завершує доведення $d_0 \ll d$. $\square$

Зауваження 3.3.7. Легко перевірити, що якщо у п'яти останніх лемах псевдоультраметрика d є локально компактною, то за зауваженням 3.2.5 всі введені у доведеннях допоміжні псевдоультраметрики також є локально компактними. Тому ці леми справедливі для відношення «слабко значно нижче» не тільки в $PsU(X)$, але й в $LCPsU(X)$.

Тепер ми можемо отримати наслідок про те, що означає "значно нижче" для некомпактної псевдоультраметрики.

Теорема 3.3. *Якщо псевдоультраметрика (локально компактна псевдоультраметрика) d не є компактною, то $d_0 \equiv 0$ є єдиною псевдоуль-*

траметрикою, що є слабко значно нижчою за d' в $PsU(X)$ (відповідно, в $LCPsU(X)$).

Доведення. За зауваженням 3.2.3, для d існує або спадна послідовність куль

$$B_R(x) \supset B_{r_1}(x_1) \supset B_{r_2}(x_2) \supset \ldots \text{ with } R > r_1 > r_2 > \ldots \searrow 0$$

з порожнім перетином, або для деякого $r > 0$ існують відмінні кулі $B_r(x_1)$, $B_r(x_2), \ldots$.

У першому випадку ми позначимо $A_1 = B_R(x) \setminus B_{r_1}(x_1)$, $A_2 = B_{r_1}(x_1) \setminus B_{r_2}(x_2), \ldots$. У іншому випадку просто поставимо $A_1 = B_r(x_1)$, $A_2 = B_r(x_2)$, $\ldots$. В обох випадках всі множини $A_1, A_2, \ldots$, а також $A_0 = X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots)$, є відкритими і утворюють розбиття X. Тому псевдоультраметрика

$$\rho(u,v) = \begin{cases} 0, & u, v \text{ знаходяться в одній і тій же } A_i, \\ \max\{i,j\}, & u \in A_i, v \in A_j, i \neq j, \end{cases} \qquad u, v \in X,$$

є неперервною відносно d. Тоді $d' = \sup\{d, \rho\}$ є псевдоультраметрикою, і буде локально компактною, якщо d є локально компактною. Вона задовольняє умови Леми 3.3.4, отже єдиною псевдоультраметрикою, що є слабко нижчою за d' в $PsU(X)$ (відповідно, в $LCPsU(X)$), є нульова псевдоультраметрика. Оскільки $d \leq d'$ і $d_0 \ll d$ має наслідком $d_0 \ll d'$, доведення завершено. $\square$

Зауваження 3.3.8. Разом з попередньою лемою це означає, що відношення "слабко значно нижче" і "значно нижче" для некомпактних псевдоультраметрик є різними.

Теорема 3.4. *Відношення "слабко значно нижче" і "значно нижче" на частково впорядкованій множині $CPsU(X)$ співпадають.*

Доведення. Нам потрібно лише довести, що $d_0 \lll d \Rightarrow d_0 \ll d$ в $CPsU$. Нехай $d_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}$ – напрямлена підмножина псевдоультраметрик, така що точна нижня грань межа ρ з d_α є компактною і більшою або рівною d. За властивістю теореми 3.1 (тобто неперервністю перетину) точна нижня грань $\inf\{d, d_\alpha\}$ дорівнює $\inf\{d, \rho\} = d$, тому існує $\inf\{d, d_\alpha\} \geq d_0$, що означає $d_\alpha \geq d_0$. □

Теорема 3.5. *Нехай $d_0, d_1 \in CPsU(X)$, $d_0 \leq d_1$. Тоді $d_0 \ll d_1$ тоді й тільки тоді, коли виконується наступне:*

(1) *якщо $d_0(x, y) = d_1(x, y)$ для деяких $x, y \in X$, то $d_1(x, y) = 0$;*
(2) *існують $k \in 0, 1, 2, \ldots$ і $z_1, \ldots, z_k \in X$ такі, що для всіх $x \in X$ виконується рівність $d_0(x, z_i) = 0$ для деякого $1 \leq i \leq k$.*

Доведення. *Достатність.* Припустимо (1) і (2). Можемо припустити, що $d_0(z_i, z_j) > 0$ для всіх $i \neq j$ (інакше ми можемо викинути одиницю або другу одиницю, і так далі, поки умова не буде виконана). Ми доведемо твердження за допомогою індукції. Якщо $k = 0$ або $k = 1$, то $d_0 \equiv 0$, отже $d_0 \ll d_1$.

Якщо твердження виконується для $k \leq n$, $n \geq 1$, то для $k = n + 1$ існує $\varepsilon = \max d_0(z_i, z_j) \mid 1 \leq i < j \leq n + 1 > 0$, отже X є скінченним об'єднанням компактних куль $B_\varepsilon(z_i)$ відносно d_0, які або попарно не перетинаються, або є однаковими. Зауважимо, що обмеження d_0 і d_1 на кожну кулю, очевидно, задовольняють (1) і (2), отже $d_0|B_\varepsilon(z_i) \ll d_1|B_\varepsilon(z_i)$. Виконуються умови Леми 3.3.6, звідки випливає $d_0 \lll d_1 \implies d_0 \ll d_1$.

Необхідність. Припустимо, що $d_0 \ll d_1$. Щоб показати (1), припустимо, що існують $x, y \in X$, такі що $d_0(x, y) = d_1(x, y) > 0$. Розглянемо множину $D = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right) d_1 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Тоді $D \subset CPsU(X)$ – напрямлена, і $\sup D = d_1$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $d_0(x, y) = d_2(x, y) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) d_1(x, y)$, отже жоден елемент множини D не перевищує d_1, що суперечить тому, що $d_1 \ll d_2$. Отже, (1) виконується.

Ми покажемо, що з $d_0 \ll d_1$ випливає (2). Для $\varepsilon > 0$ покладемо

$$d^{(\varepsilon)}(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y), & \text{if } d_1(x,y) \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

для $x, y \in X$. Очевидно, що $d^{(\varepsilon)}$ є псевдоультраметрикою, $d^{(\varepsilon)} \le d_1$, і компактність d_1 вимагає, щоб $d^{(\varepsilon)}$ була компактною. Розглянемо множину $D = \{d^{(\varepsilon)} \mid \varepsilon > 0\}$. Вона напрямлена, і $(\sup D)(x,y) = \sup\{d^{(\varepsilon)}(x,y) \mid \varepsilon > 0\} = d_1(x,y)$ для всіх $x, y \in X$, отже $\sup D = d_1$. Враховуючи, що $d_0 \ll d_1$, ми можемо вибрати $\varepsilon > 0$ так, щоб $d_0 \le d^{(\varepsilon)}$. Існує скінченне розбиття $B_\varepsilon(z_1)$, $B_\varepsilon(z_2), \ldots, B_\varepsilon(z_m)$ X на кулі відносно $d^{(\varepsilon)}$, і $d^{(\varepsilon)}$ не набуває значень в $(0,\varepsilon)$, отже для кожного $x \in B_{\varepsilon'}(z_i)$ маємо $d_0(x,z_i) \le d^{(\varepsilon)}(x,z_i) = 0$. Це завершує доведення. □

Остання теорема вказує на те, що для будь-якої $d \in CPsU(X)$, $\varepsilon > 0$ і $\lambda \in (0,1)$ псевдоультраметрика з формулою

$$d_\lambda^\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \lambda d(x,y), & d(x,y) \geqslant \varepsilon, \\ 0, & d(x,y) < \varepsilon, \end{cases}$$

є значно нижчою за d. Множина

$$D = \{d_\lambda^\varepsilon | \lambda \in [0;1), \varepsilon > 0\}$$

є направленою, і

$$(\sup D)(x,y) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \lambda \to 1}} d_\lambda^\varepsilon(x,y) = d(x,y).$$

Таким чином, отримуємо наступну теорему:

Теорема 3.6. *Для будь-якої $d \in CPsU(X)$ існує напрямлена множина компактних псевдоультраметрик, які є слабко нижчими за d, і* $\sup D = d$.

Ми довели, що множина $CPsU(X)$ є неперервною. Вона не є повною, тому не є областю, але кожна підмножина вигляду $d\!\downarrow = \{\rho \in CPsU(X) \mid \rho \le d\}$ для $d \in CPsU(X)$ є областю, а саме повною неперервною нижньою напівграткою. Ми описуватимемо їх властивості в наступному розділі. Це дозволить застосовувати весь розроблений апарат теорії областей [13] для задач класифікації.

Загальнішим висновком цього підрозділу є те, що наближення знизу псевдоультраметрик (у змісті теорії порядку) є ефективними лише для компактного випадку. Це не є великим сюрпризом, оскільки подібні обмеження вже з'являлися раніше в схожих обставинах, наприклад, для наближень мір можливості чи неадитивних мір. На практиці компактність відповідає поступовій класифікації, коли множина класів (кластерів тощо) на будь-якому етапі є скінченною. Насправді це трапляється у більшості випадків, тому компактні псевдоультраметрики цілком достатні для більшості застосувань.

3.4. Апроксимація згори

Тепер ми отримаємо нові результати щодо відношень "значно вище". Ми вже пояснили, чому нічого цінного (з нашої точки зору, звичайно) не можна очікувати за межами $(CPsU(X), \leqslant)$, тому ми обмежуємо нашу увагу виключно цією частково впорядкованою множиною.

Лема 3.4.1. *Якщо $d, d_0 \in CPsU(X)$ і виконується будь-яке з наведеного нижче:*

— *існують $x, y \in X$ такі, що $0 < d(x, y) \geqslant d_0(x, y)$;*

— *d_0 досягає довільно малого додатнього значення;*

— *d досягає як завгодно малого додатнього значення;*

— *X нескінченний;*

тоді $d_0 \gg d$ не виконується.

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $d_0(x, y)$ не більша за $d(x, y) > 0$, тоді розглянемо (нестрого) спадну послідовність ультрапсевдометрик $d_n(u, v) = (1+\frac{1}{n})d(u, v)$ для $n \in \mathbb{N}$ і всіх $u, v \in X$. Очевидно $\inf_{n\in\mathbb{N}} d_n = d$, але $d_n(x, y) > d_0(u, v)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, що суперечить $d_0 \gg d$.

Отже, якщо $d_0 \gg d$, то $d_0(x, y) > d(x, y)$ для всіх $x, y \in X$ таких, що $d(x, y) > 0$.

Якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі $x, y \in X$, що $0 < d_0(x, y) < \varepsilon$, то формула $d_0^\varepsilon(x, y) = 2\min\{d_0(x, y), \varepsilon\}$ визначає компактну ультрапсевдометрику таку, що $d_0^\varepsilon \not\leqslant d_0$. З іншого з боку, сім'я $F = \{d_0^\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ фільтрується і $\inf F \equiv 0 \leqslant d$, тому $d_0 \gg d$ неможливе.

Тепер нехай $d_0 \gg d$, отже, згідно з вищенаписаним, існує $\theta > 0$ таке, що для всіх $x, y \in X$ ми маємо або $d_0(x, y) = 0$, або $d_0(x, y) \geqslant \theta$. Оскільки $d_0 \gg d$ означає $d_0 \geqslant d$, нерівність $d_0(x, y) \geqslant \theta$ виконується для всіх $x, y \in X$ таких, що $d(x, y) > 0$. Якщо d досягає як завгодно малих значень, то для всіх $m \in \mathbb{N}$ існують $\varepsilon > 0$ і точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ такі, що $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$, а тому $d_0(x_i, x_j) \geqslant \theta$ для всіх $i \neq j$. Отже, це суперечить компактності d_0 $d_0 \gg d$ неможливо і в цьому випадку.

Припустимо, що $d_0 \gg d$ і X – нескінченна. Також і d, і d_0 не досягають додатніх значень, менших за деяке $\theta > 0$. Число куль відносно d_0 радіуса θ є скінченним, отже принаймні одна з них, скажімо, B, містить принаймні дві точки x_1 і x_2. Виберемо довільні набори B_1 і B_2, щоб $B = B_1 \sqcup B_2$, $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$, і нехай $B_0 = X \setminus B$. Для всіх $\varepsilon > 0$ і $u, v \in X$ покладемо $d_\varepsilon(u, v) = 0$, якщо u, v знаходяться в одному з наборів B_0, B_1, B_2, інакше $d_\varepsilon(u, v) = \varepsilon$. Зрозуміло, що $d_\varepsilon \in CPsU(X)$, множина $F = \{d_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ фільтрована, $\inf F \equiv 0 \leqslant d$, але жодне з d_ε не передує d_0, що також суперечить $d_0 \gg d$. □

Таким чином ми приходимо до висновку.

Теорема 3.7. *Для компактних ультрапсевдометрик d, d_0 на множині X виконано $d_0 \gg d$, якщо і тільки якщо:*

— *X скінченний;*

— *$d_0(x, y) > d(x, y)$ для всіх $x \neq y$ в X.*

Це означає, що $CPsU(X)$ є двоїсто неперервним тоді і тільки тоді X є скінченним, тобто «майже ніколи». Ми виявили, що обмеження зверху змінює результат. Отже, розглянемо підмножину $\hat{d}\downarrow \subset CPsU(X)$ для деякого фіксованого $\hat{d} \in CPsU(X)$.

Означення 3.4.2. Нехай $d, \hat{d}$ — компактна ультрапсевдометрика на множині X така, що $d \leqslant \hat{d}$. (Невпорядкована) пара $\{x, y\} \subset X$ називається $(d, \hat{d})$-*розтяжною*, якщо для всіх $\varepsilon > 0$ існує компактна ультрапсевдометрика d' на Xтака, що:

— $d \leqslant d' \leqslant \hat{d}$;

— $d'(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$;

— $d'(x, y) > d(x, y)$.

Пара точок у X, яка не є $(d, \hat{d})$-розтяжною, називається $(d, \hat{d})$-*жорсткою*.

Отже, $(d, \hat{d})$-розтяжність пари $\{x, y\} \subset X$ означає, що d можна збільшити як завгодно мало, але не більше за $\hat{d}$, так що $d(x, y)$ збільшується («розтягується»). Пара $\{x, y\} \subset X$ є $(d, \hat{d})$-жорсткою тоді і тільки тоді, коли існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожної компактної ультрапсевдометрики d' на X так, що $d \leqslant d' \leqslant \hat{d}$ і $d'(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$, маємо $d'(x, y) = d(x, y)$ (псевдовідстань не змінюється).

Теорема 3.8. *Клас R усіх $(d, \hat{d})$-жорстких пар у X є найменшим щодо класу включення невпорядкованих пар у X, який має наступні властивості:*

a *якщо $d(x, y) = \hat{d}(x, y)$, то $\{x, y\} \in R$;*

b *якщо x, y, x', y' — це точки в X такі, що $\{x', y'\} \in R$, $d(x, x') < d(x', y')$, $d(y, y') < d(x', y')$, то $\{x, y\} \in R$;*

c *якщо x, y, z — це точки в X такі, що $\{x, y\} \in R$, $\{y, z\} \in R$ і $d(x, y) = d(y, z) = d(x, z)$, то $\{x, z\} \in R$.*

Доведення. Нехай R — це клас усіх $(d, \hat{d})$-жорстких пар.

Якщо $d(x, y) = \hat{d}(x, y)$, то $d(x, y) < d'(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y)$ неможливе, отже цього достатньо для $\{x, y\} \in R$, і (a) виконується.

Якщо $x, y, x', y' \in X$ такі, що $\{x', y'\} \in R$, $d(x, x') < d(x', y')$, $d(y, y') < d(x', y')$, звідки з нерівності трикутника $d(x, y) = d(x', y')$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $d(x, x') + \varepsilon < d(x', y')$, $d(y, y') + \varepsilon < d(x', y')$. Припустимо, що існує $d' \in CPsU(X)$ таке, що $d \leqslant d' \leqslant \hat{d}$, $d'(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$ і $d(x, y) < d'(x, y)$. Звідки $d'(x, x') < d(x', y') < d'(x, y)$, $d'(y, y') < d(x', y') < d'(x, y)$, тому з нерівності трикутника $d'(x', y') = d'(x, y) > d(x, y) = d(x', y')$, що суперечить тому, що пара $\{x, y\}$ є $(d, \hat{d})$-жорсткою. Таким чином, пара $\{x', y'\}$ не може бути $(d, \hat{d})$-розтяжною, отже $\{x', y'\} \in R$, і (b) вірне.

Нехай x, y, z — точки в X такі, що $\{x, y\} \in R$, $\{y, z\} \in R$ і $d(x, y) = d(y, z) = d(x, z)$. За припущенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $d' \in CPsU(X)$ таких, що $d \leqslant d' \leqslant \hat{d}$ і $d'(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$, жодна з нерівностей $d(x, y < d'(x, y)$ і $d(y, z)) < d'(y, z)$ не виконується. Тому $d(x, y) = d'(x, y)$ і $d(y, z) = d'(y, z)$, що разом з $d(x, y) = d(y, z) = d(x, z)$ означає $d(x, z) = d'(x, z)$, отже пара $\{x, z\}$ в $(d, \hat{d})$-жорстка також, тобто ми показали (c). Це завершує доведення того, що (a), (b) і (c) виконуються для класу R усіх $(d, \hat{d})$-жорстких пар.

Тепер нехай R_0 буде *найменшим* класом пар у X, що задовольняє (a), (b) і (c), тобто R_0 містить усі пари, описані (a) а також усі пари, до яких ми потрапляємо через скінченну кількість застосувань (b) і (c). Припустимо, що

$\{x, y\}$ $(d, \hat{d})$-жорсткі, але $\{x, y\} \notin R_0$, тоді $r = \hat{d}(x, y) > 0$ (очевидно, що всі пари $\{x, y\}$ такі, що $\hat{d}(x, y) = 0$ через (a) знаходяться в R_0).

Спочатку розглянемо випадок $d(x, y) = 0$. Позначимо через B кулю $B_r(y)$ відносно $\hat{d}$, і нехай $A = X \setminus B$, тоді множини A і B є відкритими доповненнями одна до одної, $x \in A$ і $y \in B$. Очевидно, що $\hat{d}(u, v) \geqslant r$ для всіх $u \in A$, $v \in B$.

Для кожного $\varepsilon > 0$ формула

$$d_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} d(u, v), & u, v \in A \text{ або } u, v \in B, \\ \max\bigl\{d(u, v), \min\{r, \varepsilon\}\bigr\}, & u \in A, v \in B \text{ або } u \in B, v \in A, \end{cases},$$

де $u, v \in X$, визначає компактну ультрапсевдометрику d_ε на X таку, що $d \leqslant d_\varepsilon \leqslant \hat{d}$, $d_\varepsilon(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$, і $d_\varepsilon(x, y) > d(x, y) = 0$. Це суперечить $(d, \hat{d})$-жорсткості $\{x, y\}$.

Тепер нехай $d(x, y) = \theta > 0$. Нехай C — це *замкнена* куля $\bar{B}_\theta(c)$ відносно d, тоді її непорожні перетини з *відкритими* кулями радіусів θ щодо $\hat{d}$ є скінченним розбиттям $C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_k = C$. Зауважимо, що x і y знаходяться в різних C_i і C_j, отже $k \geqslant 2$. Виберемо довільні $z_1 \in C_1$, $z_2 \in C_2$, $\ldots$, $z_k \in C_k$. Легко побачити, що для всіх $u \in C_i$, $v \in C_j$ рівності $d(u, v) = \theta$ і $d(z_i, z_j) = \theta$ еквівалентні, і, крім того, якщо $d(u, v) = d(z_i, z_j) = \theta$, то пари $\{u, v\}$ і $\{z_i, z_j\}$ або обидві є в R_0 або обидві не в R_0.

З компактності існує $\delta > 0$ таке, що $d(u, v) > \theta + \delta$ для всіх $u \in C$, $v \in X \setminus C$ і $d(z_i, z_j) + \delta < \hat{d}(z_i, z_j)$ для всіх $\{z_i, z_j\} \notin R_0$ (нагадаємо, що $d(z_i, z_j) = \hat{d}(z_i, z_j)$ передбачає $\{z_i, z_j\} \in R_0$).

Для всіх $\varepsilon > 0$ формула

$$d_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} d(u, v) + \min\{\delta, \varepsilon\}, & u \in C, v \in C, d(u, v) = \theta, \{u, v\} \notin R_0, \\ d(u, v) & \text{інакше}, \end{cases} \quad u, v \in X,$$

визначає функцію так, що $d \leqslant d_\varepsilon \leqslant \hat{d}$, $d_\varepsilon(u,v) \leqslant d(u,v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$ і $d_\varepsilon(x,y) > d(x,y)$ (ми припустили раніше $\{x,y\} \notin R_0$). Вона невід'ємна, симетрична і задовольняє $d_\varepsilon(u,u) \equiv 0$, тому, щоб довести, що d_ε є псевдоультраметрикою, достатньо,показати, що (підсилена) нерівність трикутника не може не виконуватися.

Єдина можливість зазнати невдачі — це існування $u, v, w \in C$ що

$$d_\varepsilon(u,v) = \theta,\ d_\varepsilon(v,w) \leqslant \theta,\ d_\varepsilon(u,w) > \theta.$$

Якщо $d_\varepsilon(u,v) = d_\varepsilon(v,w) = \theta$, то $\{u,v\} \in R_0$, $\{v,w\} \in R_0$, отже $d(u,v) = d(v,w) = \theta \implies d(u,w) \leqslant \theta$. З урахуванням $d_\varepsilon(u,w) > \theta$ отримуємо $\{u,w\} \notin R_0$, що суперечить (c).

Якщо $d_\varepsilon(u,v) = \theta$, $d_\varepsilon(v,w) < \theta$, то $\{u,v\} \in R_0$, $d(v,w) < d(u,v)$, тому $\{u,w\} \in R_0$ за (b), що передбачає $d(u,w) = d(u,v) = \theta$ і $d_\varepsilon(u,w) = \theta$, і ми знову прийшли до протиріччя.

Таким чином d_ε є компактною псевдоультраметрикою (компактність випливає з $d_\varepsilon \leqslant \hat{d}$), а це суперечить $(d,\hat{d})$-жорсткості $\{x,y\}$.

Ми показали, що не існує $(d,\hat{d})$-жорсткої пари, яка б не була в R_0, отже, найменшим класом, який задовольняє (a), (b), (c), є саме клас усіх $(d,\hat{d})$-жорстких пар у X. □

Тепер ми готові описати відношення "значно вище" в $\hat{d}\downarrow \subset (CPsU(X), \leqslant)$.

Теорема 3.9. *Для компактних ультрапсевдометрик $d, d_0 \in \hat{d}\downarrow$, $d_0 \gg d$ в $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$ тоді і тільки тоді*

— *$d \leqslant d_0$;*

— *існує $\theta > 0$ таке, що $d_0(x,y) \geqslant \min\{\theta, \hat{d}(x,y)\}$ для всіх $x, y \in X$;*

— *для всіх $x, y \in X$, якщо пара x, y є $(d,\hat{d})$-розтягуваною, тоді $d(x,y) < d_0(x,y)$.*

Доведення. *Необхідність.* Очевидно, $d \leqslant d_0$ необхідно для $d_0 \gg d$.

Припустимо, $d_0 \gg d$ у $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$ і покладемо $d^\theta(x, y) = \min\{\theta, \hat{d}(x, y)\}$ для $\theta > 0$ і всіх $x, y \in X$. Тоді d^θ є компактною псевдоультраметрикою, множина $F = \{d^\theta \mid \theta > 0\}$ фільтрована, а її точна нижня грань дорівнює $0 \leqslant d$, отже за припущенням $d^\theta \leqslant d_0$ для деякого $\theta > 0$. Таким чином

$$\min\{\theta, \hat{d}(x, y)\} \leqslant d_0(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y)$$

для всіх $x, y \in X$.

Доведення, що третя умова необхідна, можна "витягнути" з доведення попередньої теореми. Якщо пара x, y є $(d, \hat{d})$-розтягуваною, але $d(x, y) = d_0(x, y)$, тоді ми можемо побудувати, як описано вище, для всіх $\varepsilon > 0$ компактну псевдоультраметрику d_ε таку, що $d \leqslant d_\varepsilon \leqslant \hat{d}$, $d_\varepsilon(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$ і $d_\varepsilon(x, y) > d(x, y) = d_0(x, y)$. Очевидно, що сім'я $F = \{d_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ відфільтрована, $\inf F = d$, а $d_\varepsilon \leqslant d_0$ не виконується для всіх $\varepsilon > 0$, що суперечить $d_0 \gg d$.

Достатність. Припустимо, що сформульовані умови задовольняються для d, d_0 і θ, і нехай $\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ буде фільтрованою сім'єю в $\hat{d}\downarrow$ такою, що її точна нижня грань d' в $CPsU(X)$ існує і передує d.

Існує лише скінченна кількість неперетинних куль $B_1 = B_\theta(x_1)$, $B_2 = B_\theta(x_2), \ldots, B_k = B_\theta(x_k)$ радіуса θ щодо $\hat{d}$.

Будь-яка куля радіуса $r \geqslant \theta$ відносно псевдоультраметрики $\rho \in \hat{d}\downarrow$ є об'єднанням деяких із цих B_i.

Відповідно до твердження 3.2.6, для всіх $i \neq j$ $d'(x_i, x_j) = \inf\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \leqslant d(x_i, x_j)$ є вірним.

Знову позначимо через R клас усіх $(d, \hat{d})$-жорстких пар у X.

Якщо $d(x_i, x_j) = d_0(x_i, x_j)$, то $d_0(x_i, x_j) = \hat{d}(x_i, x_j)$, отже, усі $d_\alpha(x_i, x_j)$ менші або дорівнюють $d_0(x_i, x_j)$. Інакше $d'(x_i, x_j) \leqslant d(x_i, x_j) < d_0(x_i, x_j)$, отже, є $\alpha_{ij} \in \mathcal{A}$ таке, що $d_{\alpha_{ij}}(x_i, x_j) < d_0(x_i, x_j)$. Завдяки фільтрації ми можемо вибрати d_γ, що передує всім $d_{\alpha_{ij}}$, тоді $d_\gamma(x_i, x_j) < d_0(x_i, x_j)$ для всіх $i \neq j$.

Тепер ми покажемо, що $d_\gamma(u, v) \leqslant d_0(u, v)$ для всіх $u, v \in X$. Якщо вони в одній кулі B_i, то $\hat{d}(u, v) \leqslant \theta$, тому $d_\gamma(u, v) \leqslant \min\{\theta, \hat{d}(u, v)\} \leqslant d_0(u, v)$. Припустимо, $d_\gamma(u, v) > d_0(u, v)$ для деяких $u \in B_i$, $v \in B_j$, $i \neq j$. Беручи до уваги $d_\gamma(u, v) \leqslant \hat{d}(u, v)$ та $d_0(u, v) \geqslant \min\{\theta, \hat{d}(u, v)\}$, отримати $\theta < d_0(u, v) < d_\gamma(u, v) \leqslant \hat{d}(u, v)$. За припущенням і нерівністю трикутника

$$d_0(u, x_i) \leqslant \hat{d}(u, x_i) \leqslant \theta, \quad d_0(v, x_j) \leqslant \hat{d}(v, x_j) \leqslant \theta$$
$$\implies d_0(x_i, x_j) = d_0(u, v) > \theta.$$

Аналогічно,

$$d_\gamma(u, x_i) \leqslant \hat{d}(u, x_i) \leqslant \theta, \quad d_\gamma(v, x_j) \leqslant \hat{d}(v, x_j) \leqslant \theta$$
$$\implies d_\gamma(x_i, x_j) = d_\gamma(u, v) > \theta,$$

отже $d_\gamma(x_i, x_j) > d_0(x_i, x_j)$, що суперечить способу вибору γ.

Таким чином, ми приходимо до необхідної нерівності $d_\gamma(u, v) \leqslant d_0(u, v)$ для всіх $u, v \in X$ і деякого $\gamma \in \mathcal{A}$, що завершує доведення, що d_0 значно вище за d. □

З доведення останньої теореми ми можемо отримати метод для побудови псевдоультраметрики значно вище за d у $\hat{d}\downarrow \subset CPsU(X)$.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.4.3. *Для всіх компактних псевдоультраметрик $d \leqslant \hat{d}$ на множині X і $\varepsilon > 0$ існує компактна псевдоультраметрика d_0 така, що $d_0 \gg d$ в $\hat{d}\downarrow$ і $d_0(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$.*

ДОВЕДЕННЯ. Існує лише скінченна кількість неперетинних куль $B_1 = B_\varepsilon(z_1)$, $B_2 = B_\varepsilon(z_2)$, ..., $B_k = B_\varepsilon(z_k)$ щодо $\hat{d}$. Тоді:

— $\hat{d}(u, v) = \hat{d}(z_i, z_j)$ для всіх $u \in B_i$, $v \in B_j$, $i \neq j$;

— якщо $u \in B_i$, $v \in B_j$, $i \neq j$ і $d(z_i, z_j) \geqslant \varepsilon$, то $d(u, v) = d(z_i, z_j)$ і пари $\{u, v\}$ і $\{z_i, z_j\}$ або обидва $(d, \hat{d})$-розтяжні, або обидві $(d, \hat{d})$-жорсткі.

Розглянемо множину $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ з псевдоультраметрикою

$$\rho(z_i, z_j) = \begin{cases} d(z_i, z_j), & d(z_i, z_j) \geqslant \varepsilon, \\ 0, & d(z_i, z_j) < \varepsilon, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant k,$$

і з обмеженням $\breve{d}$ псевдоультраметрики $\hat{d}$. Тоді пари $\{z_i, z_j\}$ такі, що $\rho(z_i, z_j) > 0$ є $(d, \hat{d})$-жорсткі у X тоді і тільки тоді, коли вони є $(\rho, \breve{d})$-жорсткі у Z. Можна знайти клас R усіх $(\rho, \breve{d})$-жорстких пар у скінченній множині Z за скінченну кількість кроків, застосовуючи циклічно (a), (b), і (c) до всіх пар $\{z_i, z_j\} \notin R$, доки жодна нова пара не приєднається до R протягом усього циклу.

Тепер виберемо θ так, щоб:

— $0 < \theta < \varepsilon$;

— якщо $\{i_j, z_j\} \in R$, то немає компактної ультрапсевдометрики ρ' на Z такої, що $\rho \leqslant \rho' \leqslant \breve{d}$, $\rho'(z_p, z_q) \leqslant \rho(z_p, z_q) + \theta$ для всіх $1 \leqslant p,q \leqslant k$, і $\rho'(z_i, z_j) > \rho(z_i, z_j)$;

— природна відстань між усіма різними значеннями d або $\hat{d}$, що більша або дорівнює ε, більша ніж θ.

Тепер для всіх $\{z_i, z_j\} \notin R$ виберемо компактну псевдоультраметрику ρ_{ij} на Z таку, що $\rho \leqslant \rho_{ij} \leqslant \breve{d}$, $\rho_{ij}(z_p, z_q) \leqslant \rho(z_p, z_q) + \theta$ для всіх $1 \leqslant p,q \leqslant k$ і $\rho_{ij}(z_i, z_j) > \rho(z_i, z_j)$. Тоді поточковий супремум ρ' усіх ρ_{ij} є псевдоультраметрикою на Z, що задовольняє $\rho \leqslant \rho' \leqslant \breve{d}$, $\rho(z_i, z_j) < \rho'(z_i, z_j) \leqslant \rho(z_i, z_j) + \theta$ для всіх $\{z_i, z_j\} \notin R$ і $\rho'(z_i, z_j) = \rho(z_i, z_j)$ для всіх $\{z_i, z_j\} \in R$.

Використовуючи попередню теорему, легко перевірити, що формула

$$d_0(u, v) = \begin{cases} \min\{\varepsilon, \hat{d}(u, v)\}, & d(u, v) < \varepsilon, \\ \rho'(z_i, z_j), & d(u, v) \geqslant \varepsilon, u \in B_i, v \in B_j, \end{cases} \qquad u, v \in X,$$

визначає псевдоультраметрику $d_0 \gg d$ у $\hat{d}\downarrow$ таку, що $d_0(u,v) \leqslant d(u,v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$. $\square$

Тепер для фіксованого $d \leqslant \hat{d}$ і всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$ ми можемо знайти псевдоультраметрики d_n такі, що $d \leqslant d_n \leqslant \hat{d}$, $d_n \gg d$ і $d_n(u,v) \leqslant d(u,v) + \frac{1}{n}$ для всіх $u, v \in X$. Тоді псевдоультраметрики d_1, $d_1 \vee d_2$, $d_1 \vee d_2 \vee d_3$, ..., розташовані значно вище за d в $\hat{d}$, утворюють нестрого спадну послідовність, а їх нижня грань дорівнює d. Таким чином, ми отримали:

Теорема 3.10. *Частково впорядкована множина $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$ для компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на множині X є двоїсто неперервною.*

Враховуючи теорему 3.6, отримуємо *двонеперервність* $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі дисертації:

(1) Описано граткові операції у поточково впорядкованій множині всіх псевдоультраметрик на фіксованій множині X і доведено, що підмножини всіх компактних псевдоультраметрик і всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X не є напрямленими вгору.

(2) Доведено, що у множині компактних псевдоультраметрик на довільній множині X інфімум двох елементів дистрибутивний щодо супремума довільної кількості елементів, а для множин всіх псевдоультраметрик на зліченній множині X та всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X ця властивість не виконана.

(3) Доведено, що некомпактну псевдоультраметрику на довільній множині X у множині всіх псевдоультраметрик на X чи у множині всіх локально компактних псевдоультраметрик на X апроксимує знизу тільки тривіальна псевдометрика.

(4) За допомогою допоміжного відношення “бути слабко значно нижче” отримано необхідні і достатні умови того, що компактна псевдоультраметрика d_0 апроксимує знизу компактну псевдоультраметрику d_1, і доведено, що кожна компактна псевдоультраметрика є точною верхньою гранню напрямленої вгору множини компактних псевдоультраметрик, що апроксимують її знизу.

(5) Доведено, що жодна компактна псевдоультраметрика на нескінченній множині X не апроксимує згори компактну псевдоультраметрику на цій множині.

(6) Отримано опис відношення апроксимації згори і алгоритм побудови апроксимуючих згори елементів у множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, з чого випливає двонеперервність цієї частково впорядкованої множини.

Результати третього розділу опубліковано в статтях [35, 40, 67], а також доповідалися на конференціях [36, 37] і наукових семінарах.

РОЗДІЛ 4
ПРОСТОРИ КОМПАКТНИХ ПСЕВДОУЛЬТРАМЕТРИК ТА ЇХ ВКЛАДЕННЯ У НОРМОВАНІ ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

У попередньому розділі виявилось, що поточково впорядкована множина всіх псевдоультраметрик, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, на фіксованій множині X, є двоїсто неперервною. Це спонукає дослідити топології, що визначаються частковим порядком, зокрема, з'ясувати їх метризовність.

Ми запровадимо метрики двома способами і покажемо, що вони компактні і топологічно еквівалентні. Один цих способів — через підграфіки — успішно застосовувався Олегом Никифорчином у дослідженні неадитивних мір. Інший, більш традиційний — метрика рівномірної збіжності. Ми доведемо, що ці метрики задають ту саму компактну топологію, яка одночасно задовольняє вимоги до топології Лоусона і двоїстої топології Лоусона. Як наслідок, буде показано, що розглядувана частково впорядкована множина є зв'язано двонеперервною.

Одночасно ми запропонуємо дуальний у певному сенсі метод метризації через надграфіки і покажемо, що граничним значенням є метрика у стилі Гартоґа-де Вінка, яка, однак, не узгоджується з розглядуваним порядком.

Оскільки буде обґрунтовано адекватність метрики рівномірної збіжності при досліженні множин псевдоультраметрик, ми перейдемо до вивчення вкладень цих множин у простори функцій з нормами рівномірної збіжності. Головні результати у цьому напрямку стосуються породжених множинами псевдоультраметрик замкнених конусів і замкнених підпросторів у банахових просторах неперервних функцій двох змінних.

Ми також розглянемо ідемпотентні узагальнення нормованих векторних просторів і покажемо, що псевдоультраметрики утворюють замкнений підпростір повного нормованого ідемпотентного векторного простору, породжений псевдоультраметриками досить простої будови.

4.1. Підграфіки та надграфіки обмеженої псевдоультраметрики

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.1. Підграфіком (або гіпографом) псевдоультраметрики d на множині X називаємо множину

$$\operatorname{sub} d = \big\{(x, y, a) \bigm| x, y \in X,\ 0 \leqslant a \leqslant d(x, y)\big\}.$$

ОЗНАЧЕННЯ 4.1.2. Надграфіком (або епіграфом) псевдоультраметрики d на множині X називаємо множину

$$\operatorname{epi} d = \big\{(x, y, a) \bigm| x, y \in X,\ d(x, y) \leqslant a\big\}.$$

Тоді $\operatorname{sub} d, \operatorname{epi} d \subset X \times X \times [0, +\infty)$, а для обмеженої d маємо $\operatorname{sub} d \subset X \times X \times [0, M]$ та $\operatorname{epi} d \supset X \times X \times [M, +\infty)$ для всіх $M \geqslant \max d$. Зокрема, обмеженими є всі компактні псевдоультраметрики. Очевидно, для всіх $d_1, d_2 \in PsU(X)$ нерівність $d_1 \leqslant d_2$ еквівалентна $\operatorname{sub} d_1 \subset \operatorname{sub} d_2$ та $\operatorname{epi} d_1 \supset \operatorname{epi} d_2$.

Зафіксуємо на X обмежену псевдоультраметрику $\hat{d}$, і нехай усі псевдоультраметрики d відтепер будуть у цьому розділі знаходитися в $\hat{d}\downarrow$, тобто $d \leqslant \hat{d}$ (отже, $\operatorname{sub} d \subset \operatorname{sub} \hat{d}$), отже, теж будуть обмеженими.

Надалі для кожної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на множині X розглядаємо псевдометрику ρ на множині $X \times X \times [0, +\infty)$, визначену формулою:

$$\rho((x_1, y_1, a_1), (x_2, y_2, a_2)) = \max\{\hat{d}(x_1, x_2), \hat{d}(y_1, y_2), |a_1 - a_2|\}.$$

ЛЕМА 4.1.3. *Для кожної псевдоультраметрики* $d \in \hat{d}\downarrow$ *множини* $\operatorname{sub} d$, $\operatorname{epi} d$ *замкнені в* $X \times X \times [0, +\infty)$.

Доведення. Розглянемо доповнення до $\mathrm{sub}\, d$ у $X \times X \times [0, +\infty)$. Покажемо, що це відкрита множина. Нехай $(x_0, y_0, a_0) \in X \times X \times [0, +\infty) \setminus \mathrm{sub}\ d$, тобто $a_0 > d(x_0, y_0)$. Тоді $\varepsilon = \frac{a_0 - d(x_0, y_0)}{2} > 0$.

Переконаємося, що куля щодо ρ з центром (x_0, y_0, a_0) і радіусом ε міститься в $X \times X \times [0, +\infty) \setminus \mathrm{sub}\, d$. Якщо $\rho((x_0, y_0, a_0), (x, y, a)) < \varepsilon$, тоді $d(x_0, x) \leqslant \hat{d}(x_0, x) < \varepsilon$, $d(y_0, y) \leqslant \hat{d}(y_0, y) < \varepsilon$, отже $d(x, y) < d(x_0, y_0) + \varepsilon$, $a > a_0 - \varepsilon$. Беручи до уваги рівність $d(x_0, y_0) + \varepsilon = a_0 - \varepsilon$, отримуємо $d(x, y) < a$, тобто $(x, y, a) \notin \mathrm{sub}\, d$, що завершує доведення замкненості $\mathrm{sub}\, d$. Замкненість $\mathrm{epi}\, d$ доводиться аналогічно. □

Лема 4.1.4. *Для псевдоультраметрики $d \in \hat{d}\downarrow$ істинне наступне:*

1) $X \times X \times \{0\} \subset \mathrm{sub}\, d$;

2) для всіх $(x, y, b) \in \mathrm{sub}\, d$ і $a \in [0, b]$ ми маємо $(x, y, a) \in \mathrm{sub}\, d$;

3) якщо $(x, y, a) \in \mathrm{sub}\, d$, то $(y, x, a) \in \mathrm{sub}\, d$;

4) якщо $(x, x, a) \in \mathrm{sub}\, d$, то $a = 0$;

5) для всіх $x, y, z \in X$, якщо $(x, z, a) \in \mathrm{sub}\, d$, то $(x, y, a) \in \mathrm{sub}\, d$ або $(y, z, a) \in \mathrm{sub}\, d$.

Доведення. 1) За означенням $d(x, y) \geq 0$ для всіх $x, y \in X$, тому $(x, y, 0) \in \mathrm{sub}\, d$.

2) Якщо $a \in [0, b]$ і $(x, y, b) \in \mathrm{sub}\, d$, то $0 \leqslant a \leq b \leq d(x, y) \in \mathrm{sub}\, d$, отже, $(x, y, a) \in \mathrm{sub}\, d$.

3) З рівності $d(x, y) = d(y, x)$ випливає $a \leq d(x, y) \iff a \leq d(y, x)$, тому $(x, y, a) \in \mathrm{sub}\, d$ еквівалентне до $(y, x, a) \in \mathrm{sub}\, d$.

4) За означенням $(x, x, a) \in \mathrm{sub}\, d \iff 0 \leqslant a \leqslant d(x, x) = 0$, тобто $a = 0$.

5) Нехай $(x, y, a) \notin \mathrm{sub}\, d$ і $(y, z, a) \notin \mathrm{sub}\, d$, тоді $d(x, y) < a$, $d(y, z) < a$, і, за нерівністю трикутника, $d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, z)\} < \max\{a, a\} = a$, що суперечить припущенню $(x, z, a) \in \mathrm{sub}\, d$, тобто $a \leqslant d(x, z)$. □

Зауважимо, що 1)–5) істинні і для самого підграфіка $\hat{d}$, і виконано $\mathrm{sub}\, d \subset \mathrm{sub}\, \hat{d}$ для всіх $d \in \hat{d}\downarrow$.

Тепер опишемо підмножини, які є підграфіками псевдоультраметрик, що передують фіксованій обмеженій псевдоультраметриці $\hat{d}$, обмеженій згори числом M.

Твердження 4.1.5. *Нехай псевдоультраметрика $\hat{d}$ обмежена згори числом M, $F \subset X \times X \times [0, M]$. Множина F задовольняє умови:*

1) F міститься в $\mathrm{sub}\, \hat{d}$ і замкнена в $X \times X \times [0, M]$ відносно ρ;

2) $X \times X \times \{0\} \subset F$;

3) якщо $(x, x, a) \in F$, то $a = 0$;

4) якщо $(x, y, b) \in F$, то $(x, y, a) \in F$ для всіх $a \in [0, b]$;

5) якщо $(x, y, a) \in F$, то $(y, x, a) \in F$;

6) для всіх $x, y, z \in X$, якщо $(x, z, a) \in F$, то виконано $(x, y, a) \in F$ або $(y, z, a) \in F$;

тоді і тільки тоді, коли існує псевдоультраметрика $d \le \hat{d}$ така, що $F = \mathrm{sub}\, d$.

Доведення. Необхідність 1)–6) була доведена вище. Тепер покажемо достатність.

Маючи підграфік $\mathrm{sub}\, d$, можна відновити псевдоультраметрику наступним чином: $d(x, y) = \max\{a \in [0; +\infty) \mid (x, y, a) \in \mathrm{sub}\, d\}$. Отже, єдина d із підграфіком F (якщо вона існує) має бути рівною:

$$d(x, y) = \sup\{a \in [0; M] | (x, y, a) \in F\}.$$

Покажемо, що така d справді є псевдоультраметрикою. Перевіримо означення.

Існування та невід'ємність супремуму гарантується $X \times X \times \{0\} \subset F$, отже $\{a \in [0; M] \mid (x, y, a) \in F\} \supset \{0\}$, а множина, про яку йде мова, непорожня і обмежена зверху M.

З замкненості F випливає замкненість $F \cap \big(\{x\} \times \{y\} \times [0; M]\big)$, тому множина $\{a \in [0; M]|(x, y, a) \in F\} \subset \mathbb{R}$ теж замкнена, непорожня, обмежена, і містить найбільший елемент $b = \sup\{a \in [0; M]|(x, y, a) \in F\}$. Оскільки $(x, y, b) \in F$, то тут досягнуто найменшої верхньої грані, тому ми можемо написати $d(x, y) = \max\{a \in [0; M]|(x, y, a) \in F\}$.

Обчислимо $d(x, x) = \sup\{a \in [0; M]|(x, x, a) \in F\}$. З 3) єдиним a тут є $a = 0$, отже $d(x, x) = 0$.

Щоб перевірити симетрію, зауважимо, що з 5) випливає

$$d(x, y) = \sup\{a \in [0; M]|(x, y, a) \in F\} = \{a \in [0; M]|(y, x, a) \in F\} = d(y, x).$$

Щоб показати нерівність трикутника, покладемо $a = d(x, y), b = d(y, z)$, $c = d(x, z)$. Згідно 6) з $(x, z, c) \in F$ випливає $(x, y, c) \in F$ або $(y, z, c) \in F$, звідки $c \leqslant a$ або $c \leqslant b$. Таким чином, $c \leqslant \max\{a, b\}$, що завершує доведення того, що d є псевдоультраметрикою.

За припущенням леми $d(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y)$ для всіх $x, y \in X$.

З побудови d маємо $(x, y, d(x, y)) \in F$ для всіх $x, y \in X$, і з 4) випливає $(x, y, a) \in F$ для всіх $a \in [0, d(x, y)]$. Тому $\operatorname{sub} d \subseteq F$.

З іншого боку, з означення $d(x, y) = \sup\{a \in [0; M]|(x, y, a) \in F\}$ і 4) маємо $F \subseteq \operatorname{sub} d$.

Це завершує доведення того, що у припущеннях 1–6) множина F є підграфіком псевдоультраметрики d, що передує $\hat{d}$. □

Зауваження 4.1.6. Пункт 3) вище є наслідком $F \subset \operatorname{sub} \hat{d}$ у 1) і 3) для $\operatorname{sub} \hat{d}$, тому його перевірку можна опустити.

Зрозуміло, що, якщо псевдоультраметрика $\hat{d}$ є компактною, то d є неперервною відносно $\hat{d}$, отже теж є компактною псевдоультраметрикою. Надалі нас переважно цікавитиме саме цей випадок.

Аналогічно можемо описати підмножини, які є надграфіками псевдоультраметрик, що передують псевдоультраметриці $\hat{d}$.

Твердження 4.1.7. *Нехай псевдоультраметрика $\hat{d}$ обмежена згори числом M, $F \subset X \times X \times [0, +\infty)$. Множина F задовольняє умови:*

1) F містить $\operatorname{epi} \hat{d}$ *і замкнена в $X \times X \times [0, +\infty)$ відносно ρ;*

2) $X \times X \times [M, +\infty) \subset F$;

3) $(x, x, 0) \in F$ для довільного $x \in X$;

4) якщо $(x, y, a) \in F$, то $(x, y, b) \in F$ для всіх $b \geqslant a$;

5) якщо $(x, y, a) \in F$, то $(y, x, a) \in F$;

6) для всіх $x, y, z \in X$, якщо $(x, y, a) \in F$, $(y, z, a) \in F$, то виконано $(x, z, a) \in F$;

тоді і тільки тоді, коли існує псевдоультраметрика $d \leq \hat{d}$ така, що $F =$ $\operatorname{sub} d$.

Тут теж пункт 2) випливає з $X \times X \times [0, +\infty) \supset \operatorname{epi} \hat{d}$ та 1), тому його перевірку можна опустити.

4.2. Метризація через підграфіки

Нагадаємо, що множина всіх непорожніх замкнених підмножин (псевдо)метричного простору (X, d) називається гіперпростором цього простору і позначається $\exp X$. Її можна наділити метрикою Гаусдорфа

$$d_H(A, B) = \max\bigl\{\sup\{d(a, B) \mid a \in A\}, \sup\{d(b, A) \mid b \in B\}\bigr\}$$

для кожних $A, B \in \exp X$.

Зафіксуємо псевдоультраметрику $\hat{d}$ на X, обмежену згори числом M, тоді формула

$$\rho((x_1, y_1, a_1), (x_2, y_2, a_2)) = \max\{\hat{d}(x_1, x_2), \hat{d}(y_1, y_2), |a_1 - a_2|\}$$

визначає псевдометрику на добутку $X \times X \times [0, M]$. Відповідно на множині $\exp(X \times X \times [0, M])$ непорожніх замкнених підмножин $X \times X \times [0, M]$ маємо метрику Гаусдорфа ρ_H.

Оскільки було показано, що існує однозначна відповідність між компактними псевдоультраметриками та їх підграфіками, ми можемо визначити відстань (метрику) між $d_1, d_2 \in \hat{d}\downarrow$ як відстань Гаусдорфа між їхніми підграфіками: $D_H^{\hat{d}}(d_1, d_2) = \rho_H(\mathrm{sub}\, d_1, \mathrm{sub}\, d_2)$, тобто

$$D_H^{\hat{d}}(d_1, d_2) = \max\{\sup_{u \in \mathrm{sub}\, d_1} \rho(u, \mathrm{sub}\ d_2), \sup_{v \in \mathrm{sub}\, d_2} \rho(v, \mathrm{sub}\, d_1)\}$$

де $\rho(u, \mathrm{sub}\, d_2) = \inf_{v \in \mathrm{sub}\, d_2} \rho(u, v)$, і аналогічно для $\rho(v, \mathrm{sub}\, d_1)$.

Лема 4.2.1. *Множина*

$$S = \left\{\mathrm{sub}\, d \;\middle|\; d \text{ — псевдоультраметрика на } X,\ d \le \hat{d}\right\}$$

замкнена в гіперпросторі $\exp(X \times X \times [0, M])$.

Доведення. Ми збираємося довести, що множина всіх $F \in \exp(X \times X \times [0, M])$, які задовольняють умови останнього твердження, замкнена.

Якщо $F \not\subset \mathrm{sub}\, \hat{d}$, то є точка $(x_0, y_0, a_0) \in (X \times X \times [0, M]) \setminus \mathrm{sub}\, \hat{d}$, а через замкненість $\mathrm{sub}\, \hat{d}$ існує куля $B_\delta\big((x_0, y_0, a_0)\big)$ з порожнім перетином з $\mathrm{sub}\, \hat{d}$. Тому для будь-якого $G \in \exp(X \times X \times [0, M])$ такого, що $\rho_H(G, F) < \delta$, маємо $G \cap B_\delta\big((x_0, y_0, a_0)\big) \neq \varnothing$, отже $G \not\subset \mathrm{sub}\, \hat{d}$. Таким чином, множина всіх $F \in \exp(X \times X \times [0, M])$ таких, що $F \subset \mathrm{sub}\, \hat{d}$, тобто виконується 1), є замкненою. Нагадаємо, що 3) також істинне для всіх цих F.

Аналогічно, якщо $X \times X \times \{0\} \not\subset F$, то існує $(x_0, y_0, 0) \in (X \times X \times [0, M]) \setminus F$ і тому куля $B_\delta\big((x_0, y_0, a_0)\big)$, яка має порожній перетин з F. Тоді для $G \in$

$\exp(X \times X \times [0, M])$ нерівність $\rho_H(G, F) < \delta$ випливає $(x_0, y_0, 0) \notin G$, отже, G також не задовольняє 2). Таким чином, 2) виділяє замкнену підмножину в $\exp(X \times X \times [0, M])$.

Якщо 4) не виконується для $F \in \exp(X \times X \times [0, M])$, то є $0 \leqslant a_0 < b_0 \leqslant M$ і $x_0, y_0 \in X$ так, що $(x_0, y_0, b_0) \in F$, але $(x_0, y_0, a_0) \notin F$. Виберемо $\delta > 0$ таке, що $B_\delta\big((x_0, y_0, a_0)\big)$, який має порожній перетин з F. Якщо $G \in \exp(X \times X \times [0, M])$ і $\rho_H(G, F) < \delta/2$, то існує $(x, y, b) \in G$ така що $\rho\big((x, y, b), (x_0, y_0, b_0)\big) < \delta/2$. Позначимо $a = \max\{0, a_0 + (b - b_0)\}$, і зауважимо, що $0 \leqslant a \leqslant b$ і $\rho\big((x, y, a_0), (x_0, y_0, a)\big) \leqslant \rho\big((x, y, b), (x_0, y_0, b_0)\big)$, отже $\rho\big((x, y, a), (x_0, y_0, a_0)\big) < \delta/2$. Звідси

$$\rho\big((x, y, a), F\big) \geqslant \rho\big((x, y, a), (X \times X \times [0, M]) \setminus B_\delta((x_0, y_0, a_0))\big) > \delta/2,$$

отже $(x, y, a) \notin G$. Беручи до уваги $(x, y, b) \in G$, ми бачимо, що всі $G \in \exp(X \times X \times [0, M])$ такі, що $\rho_H(G, F) < \delta/2$, не задовольняють 4).

Припустимо, що множина F не задовольняє 5), тобто $(x_0, y_0, a_0) \in F$, але $(y_0, x_0, a_0) \notin F$. З замкненості F випливає, що існує $\delta > 0$ таке, що $B_\delta((y_0, x_0, a_0)) \bigcap F = \varnothing$. Нехай $G \in \exp(X \times X \times [0, M])$ буде таким, що $\rho_H(G, F) < \delta/2$. Далі, з одного боку, існує точка $(x, y, a) \in G$ така, що $\rho\big((x, y, a), (x_0, y_0, a_0)\big) < \delta/2$. З іншого боку, з $\rho\big((y, x, a), (y_0, x_0, a_0)\big) < \delta/2$ маємо

$$\rho\big((y, x, a), F\big) \geqslant \rho\big((y, x, a), (X \times X \times [0, M]) \setminus B_\delta((y_0, x_0, a_0))\big) > \delta/2,$$

отже $(y, x, a) \notin G$. Таким чином, 5) не виконується для всіх G таких, що $\rho_H(G, F) < \delta/2$, і множина усіх $F \in \exp(X \times X \times [0, M])$ таких, що 5) виконується, є замкненою.

Нехай $F \in \exp(X \times X \times [0, M])$ не задовольняє 6), тобто є $x_0, y_0, z_0 \in X$ і $c_0 \in [0, M]$ такі, що $(x_0, z_0, c_0) \in F$, але $(x_0, y_0, c_0) \notin F$, $(y_0, z_0, c_0) \notin F$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб $B_\delta(x_0, y_0, c_0)) \bigcap F = B_\delta(y_0, z_0, c_0)) \bigcap F = \varnothing$.

Якщо $G \in \exp(X \times X \times [0, M])$, $\rho_H(G, F) < \delta/2$, то є $(x, z, c) \in G$ така, що $\rho\big((x, z, c), (x_0, z_0, c_0)\big) < \delta/2$. Звідси випливає

$$\rho\big((x, y_0, c), (x_0, y_0, c_0)\big) < \delta/2, \quad \rho\big((y_0, z, c), (y_0, z_0, c_0)\big) < \delta/2,$$

тому

$$\rho\big((x, y_0, c), G\big) > \delta/2, \quad \rho\big((y_0, z, c), G\big) > \delta/2,$$

отже $(x, y_0, c) \notin G$, $(y_0, z, c) \notin G$. Таким чином, такі G не задовольняють 6), що завершує доведення того, що родина S є замкненою множиною в $\exp(X \times X \times [0, M])$. □

Відомо, що для компактної (псевдо)метрики d метричний простір $(\exp X, d_H)$ також є компактним. Отже, для будь-якого $\hat{d} \in CPsU(X)$ і числа $M \geqslant \max \hat{d}$, з компактності добутку $X \times X \times [0, M]$ відносно введеної вище псевдометрики

$$\rho((x_1, y_1, a_1), (x_2, y_2, a_2)) = \max\{\hat{d}(x_1, x_2), \hat{d}(y_1, y_2), |a_1 - a_2|\}$$

випливає, що множина $\exp(X \times X \times [0, M])$ непорожніх замкнених підмножин $X \times X \times [0, M]$ з метрикою ρ_H є компактною.

Замкнена підмножина метричного компакта також є метричним компактом, тому ми відразу отримуємо:

Наслідок 4.2.2. *Для компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на X множина $\hat{d}{\downarrow} \subset CPsU(X)$ з метрикою $D_H^{\hat{d}}$ є компактним метричним простором.*

Надалі вважаємо $\hat{d}$ компактною. Ми отримали компактну метрику на підмножині $\hat{d}{\downarrow}$. Покажемо, що точні верхні грані в гратці $\hat{d}{\downarrow}$ є неперервними відносно цієї метрики.

Зрозуміло, що $\operatorname{sub} \sup\{d_1, d_2\} = \operatorname{sub} d_1 \cup \operatorname{sub} d_2$ для будь-яких $d_1, d_2 \in \hat{d}{\downarrow}$. Крім того:

Лема 4.2.3. *Якщо множина* $\{d_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \hat{d}{\downarrow}$ *є непорожньою, то* $\sup\{d_\alpha \mid \alpha \in A\}$ *існує, і рівність* $\operatorname{sub}\sup\{d_\alpha \mid \alpha \in A\} = \operatorname{Cl}\bigcup_{\alpha\in A}\operatorname{sub} d_\alpha$ *виконується для його підграфіку.*

Доведення. За наведеним вище спостереженням ми можемо припустити без втрати загальності, що множина $\{d_\alpha|\alpha \in A\}$ напрямлена, тоді множина $\{\operatorname{sub} d_\alpha|\alpha \in A\} \subset \exp(X \times X \times [0, M])$ підграфіків також напрямлена, і всі її елементи $F_\alpha = \operatorname{sub} d_\alpha$ задовольняють умови 1)–6) вище. Тоді легко перевірити, що множина $F = \operatorname{Cl}(\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha)$ задовольняє 1)–6), отже, це підграфік єдиної компактної псевдоультраметрики $d \in \hat{d}{\downarrow}$. Очевидно, для будь-якого $d' \in \hat{d}{\downarrow}$:

$$\begin{aligned} d' \geqslant d_\alpha \text{ для всіх } \alpha \in A &\iff \operatorname{sub} d' \supset \operatorname{sub} d_\alpha \text{ для всіх } \alpha \in A \\ &\iff \operatorname{sub} d' \supset \operatorname{Cl}\bigcup_{\alpha\in A}\operatorname{sub} d_\alpha = \operatorname{sub} d \\ &\iff d' \geqslant d, \end{aligned}$$

тобто d є найменшою верхньою гранню всіх d_α. □

Зауваження 4.2.4. Якщо множина $\{d_\alpha|\alpha \in A\}$ непорожня і замкнена в $\hat{d}{\downarrow}$ щодо $D_H^{\hat{d}}$, тобто множина відповідних підграфіків є замкненою відносно відстані Гаусдорфа, то об'єднання $\bigcup_{\alpha\in A}\operatorname{sub} d_\alpha$ замкнене і є є підграфіком супремуму d, про який йдеться.

Отже, ми отримуємо відображення $\sup : \exp(\hat{d}{\downarrow}) \to \hat{d}{\downarrow}$, яке при переході до підграфіків діє просто як об'єднання замкненої сім'ї замкнених множин. Добре відомо і легко перевірити, що така операція об'єднання є неперервною відносно метрики Гаусдорфа. Нагадаємо, що компактна гаусдорфова (отже, повна) топологічна верхня півгратка S така, що відображення $\sup : \exp S \to S$ є незперервною щодо топології Вієторіса на гіперпросторі $\exp S$, називається компактною гаусдорфовою верхньою напівграткою Лоусона [13]. З того, що топологія Вієторіса на гіперпросторі метричного компакта індукується метрикою Гаусдорфа, ми доходимо до висновку.

Наслідок 4.2.5. *Напівґратка $\hat{d}\downarrow$ з топологією, індукованою $D_H^{\hat{d}}$ є компактною гаусдорфовою верхньою напівґраткою Лоусона.*

Запропонований метод метризації має суттєвий недолік: він залежить від вибору псевдоультраметрики $\hat{d}$ вибраної "вище" псевдоультраметрики. Пізніше ми покажемо, що для будь-яких $\hat{d}, \bar{d} \in CPsU(X)$ відстані $D_H^{\hat{d}}$ і $D_H^{\bar{d}}$ індукують ту саму топологію на $\hat{d}\downarrow \cap \bar{d}\downarrow$.

4.3. Метрика рівномірної збіжності

Усі $d_1, d_2 \in \hat{d}\downarrow \subset CPsU(X)$ є обмеженими функціями на X, тому ми можемо використовувати метрику рівномірної збіжності

$$D_u(d_1, d_2) = \sup\big\{|d_1(x, y) - d_2(x, y)| \;\big|\; x, y \in X\big\}.$$

Крім того, завдяки компактності тут досягається найменша верхня грань, тому ми можемо написати $\max$ замість $\sup$. Ця функція виявляється тісно пов'язаною з раніше визначеною метрикою на основі метрики Гаусдорфа.

Твердження 4.3.1. *Нехай d, d_1, d_2 — компактні псевдоультраметрики на множині X, і $d_1 \leqslant d$, $d_2 \leqslant d$. Тоді*

$$D_H^d(d_1, d_2) \leqslant D_u(d_1, d_2) \leqslant 2 \cdot D_H^d(d_1, d_2).$$

Доведення. Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ нерівність $D_H^d(d_1, d_2) \leqslant \varepsilon$ еквівалентна до наступного: для кожної точки $(x, y, \alpha) \in \operatorname{sub} d_1$ існує точка $(x', y', \alpha') \in \operatorname{sub} d_2$ така, що $d(x, x') \leqslant \varepsilon$, $d(y, y') \leqslant \varepsilon$, $|\alpha - \alpha'| \leqslant \varepsilon$, і навпаки — для усіх точок $(x', y', \alpha') \in \operatorname{sub} d_2$.

Тоді першу умову можна сформулювати еквівалентно як $\mathbf{A_1}(\varepsilon)$: для всіх $x, y \in X$ існують $x', y' \in X$ такі, що

$$\begin{cases} d(x, x') \leqslant \varepsilon,\ d(y, y') \leqslant \varepsilon, \\ d_2(x', y') \geqslant d_1(x, y) - \varepsilon, \end{cases}$$

і аналогічно $\mathbf{A_2}(\varepsilon)$ для другої: для всіх $x', y' \in X$ є такі $x, y \in X$, що

$$\begin{cases} d(x, x') \leqslant \varepsilon,\ d(y, y') \leqslant \varepsilon, \\ d_1(x, y) \geqslant d_2(x', y') - \varepsilon, \end{cases}$$

Лишилося показати, що для будь-якого фіксованого $\varepsilon \geqslant 0$ з виконання нерівності $D_u(d_1, d_2) \leqslant \varepsilon$, тобто $|d_1(x, y) - d_2(x, y)| \leqslant \varepsilon$ для всіх $x, y \in X$, що ми позначимо $\mathbf{B}(\varepsilon)$, випливає наведена вище пара умов $\mathbf{A_1}(\varepsilon)$, $\mathbf{A_2}(\varepsilon)$, з яких, у свою чергу, випливає $\mathbf{B}(2\varepsilon)$.

Якщо $\mathbf{B}(\varepsilon)$ виконано, то для всіх $x, y \in X$ можна покласти $x' = x$, $y' = y$ і, очевидно, істинне $\mathbf{A_1}(\varepsilon)$ (та аналогічно $\mathbf{A_2}(\varepsilon)$).

Припустимо $\mathbf{A_1}(\varepsilon)$+$\mathbf{A_2}(\varepsilon)$, тоді існують $x, y \in X$ такі, що $d_2(x, y) < d_1(x, y) - 2\varepsilon$, отже $d_1(x, y) > 2\varepsilon$. Використовуючи $\mathbf{A_1}(\varepsilon)$, виберемо $x', y' \in X$ такі, що

$$\begin{cases} d(x, x' \leqslant \varepsilon,\ d(y, y') \leqslant \varepsilon, \\ d_2(x', y') \geqslant d_1(x, y) - \varepsilon > \varepsilon. \end{cases}$$

Беручи до уваги $d_2(x, x') \leqslant \varepsilon$, $d_2(y, y') \leqslant \varepsilon$, за нерівністю трикутника для псевдоультраметрики ми отримуємо

$$d_2(x', y') = d_2(x', y) = d_2(x, y) \implies d_2(x, y) \geqslant d_1(x, y) - \varepsilon,$$

що суперечить $d_2(x, y) < d_1(x, y) - 2\varepsilon$. Отже, остання нерівність неможлива для всіх $x, y \in X$ і $d_2(x, y) \geqslant d_1(x, y) - 2\varepsilon$.

Аналогічно можна вивести $d_1(x, y) \geqslant d_2(x, y) - 2\varepsilon$ з $\mathbf{A_2}(\varepsilon)$, і отримаємо $|d_1(x, y) - d_2(x, y)| \leqslant 2\varepsilon$, тобто $\mathbf{B}(2\varepsilon)$. □

Зауваження 4.3.2. Коефіцієнт 2 у наведеній вище нерівності неможливо зменшити, що показано наступним прикладом: розглянемо множину $X = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, і для всіх $x, y \in X$ задамо компактні псевдоультраметрики формулами

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & \{x,y\} = \{a_1,a_2\} \text{ або } \{x,y\} = \{b_1,b_2\}, \\ 2 & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ або } \{x,y\} = \{a_1,b_1\}, \\ 1 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Очевидно $d_2 \leqslant d_1$, $D_u(d_1,d_2) = d_1(a_1,b_1) - d_2(a_1,b_1) = 2 - 0 = 2$, але легко перевірити, що $D_H^d(d_1,d_2) = 1$.

З останнього твердження випливає, що метрики D_u і D_H^d індукують ту саму топологію на підмножині $d\!\downarrow\, \subset CPsU(X)$. Крім того, ми легко отримуємо:

Наслідок 4.3.3. *Якщо $\hat{d} \leq \bar{d}$ виконується для компактної псевдоультраметрики на X, то включення $(\hat{d}\!\downarrow, D_H^{\hat{d}})$ в $(\bar{d}\!\downarrow, D_H^{\bar{d}})$ є топологічним вкладенням.*

Тому для всіх $\hat{d}, \bar{d} \in CPsU(X)$ топології індуковані $D_H^{\hat{d}}$ і $D_H^{\bar{d}}$ на $\hat{d}\!\downarrow \cap\, \bar{d}\!\downarrow$ узгоджуються, і всі $(\hat{d}\!\downarrow, D_H^{\hat{d}}) \cong (\hat{d}\!\downarrow, D_u)$ є топологічними підпросторами $(CPsU(X), D_u)$.

Розглянемо простір $(\hat{d}\!\downarrow, D_u)$ для конкретного $\hat{d} \in CPsU(X)$.

Лема 4.3.4. *Будь-який елемент $d \in \hat{d}\!\downarrow$ є нерозтягуючою функцією $X \times X \to \mathbb{R}$ відносно псевдометрики $\hat{d}_\times$ на $X \times X$, яка визначена за допомогою формули*

$$\hat{d}_\times\big((x,y),(x',y')\big) = \max\{\hat{d}(x,x'), \hat{d}(y,y')\}.$$

Доведення. Нехай $\hat{d}_\times\big((x,y),(x',y')\big) \leqslant \varepsilon$, тоді $\hat{d}(x,x') \leqslant \varepsilon$, $\hat{d}(y,y') \leqslant \varepsilon$. Беручи до уваги $d(x,x') \leqslant \hat{d}(x,x')$, $d(y,y') \leqslant \hat{d}(y,y')$, отримуємо $d(x,x') \leqslant \varepsilon$, $d(y,y') \leqslant \varepsilon$. З нерірності трикутника

$$d(x',y') \leqslant \max\{d(x',x), d(x,y), d(y,y')\} \leqslant \max\{d(x,y), \varepsilon\} \leqslant d(x,y) + \varepsilon,$$

і, аналогічно, $d(x,y \leqslant d(x',y') + \varepsilon$, що дає $|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant \varepsilon$. Це завершує доведення. □

Нагадаємо, що за теоремою Арцела-Асколі множина $\mathcal{F}$ неперервних функцій на компактному (псевдо)метричному просторі є відносно компактною щодо метрики рівномірної збіжності (тобто її замикання є компактним) тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{F}$ є рівноступенево неперервною і поточково обмеженою. Елементи $\hat{d}\!\downarrow$ є нерозтягуючими функціями на $(X \times X, \hat{d}_\times)$, отже $\hat{d}\!\downarrow$ рівноступенево неперервна. Вона обмежена деяким $M \geqslant \max \hat{d}$, і легко перевірити, що границя рівномірно збіжної послідовності d_n в $\hat{d}\!\downarrow$ є псевдоультраметрикою в $\hat{d}\!\downarrow$. Таким чином $\hat{d}\!\downarrow$ замкнена, і ми отримуємо альтернативне доведення того, що $(\hat{d}\!\downarrow, D_H^{\hat{d}}) \cong (\hat{d}\!\downarrow, D_u)$ є компактною.

Нехай $\hat{d} \leqslant \bar{d}$, тоді ми маємо псевдометрику на $X \times X \times [0, M]$, де $M \geqslant \sup \bar{d} \geqslant \sup \hat{d}$:

$$\hat{\rho}((x_1,y_1,a_1),(x_2,y_2,a_2)) = \max\{\hat{d}(x_1,x_2), \hat{d}(y_1,y_2), |a_1 - a_2|\}$$

і

$$\bar{\rho}((x_1,y_1,a_1),(x_2,y_2,a_2)) = \max\{\bar{d}(x_1,x_2), \bar{d}(y_1,y_2), |a_1 - a_2|\}.$$

Очевидно $\hat{\rho} \leqslant \bar{\rho}$, отже $\hat{\rho}_H \leqslant \bar{\rho}_H$, що означає для всіх $d_1, d_2 \in \hat{d}\!\downarrow \subset \bar{d}\!\downarrow$:

$$D_H^{\hat{d}}(d_1,d_2) = \hat{\rho}_H(\operatorname{sub} d_1, \operatorname{sub} d_2) \leqslant \bar{\rho}_H(\operatorname{sub} d_1, \operatorname{sub} d_2) = D_H^{\bar{d}}(d_1,d_2),$$

отже, чим більша $\hat{d}$, тим більша метрика $D_H^{\hat{d}}$.

Нагадаємо, що напрямленість — це сукупність $(x_\alpha)_{\alpha \in (A,\preceq)}$ елементів x_α, індексованих напрямленою вгору частково впорядкованою множиною $(A, \preceq)$. Якщо всі x_α самі є елементами деякої частково впорядкованої множини, то ми називаємо напрямленість $(x_\alpha)_{\alpha\in(A,\preceq)}$ неспадною, якщо з $\alpha \preceq \beta$ в A випливає $x_\alpha \leqslant x_\beta$.

ОЗНАЧЕННЯ 4.3.5. Ми кажемо, що неспадна напрямленість $(d_\alpha)_{\alpha\in(A,\preceq)}$ в $CPsU(X)$ подрібнює компактну псевдоультраметрику d на X, якщо для всіх $x_0 \in X$ і $r > 0$ діаметри відносно d куль $B_r^\alpha(x_0) = \{x \in X \mid d_\alpha(x, x_0) < r\}$ збігаються до 0.

Це еквівалентно твердженню, що для всіх $x_0 \in X$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$ існує $\alpha \in A$ таке, що $d(x, x_0) < \varepsilon$ для всіх $x \in X$ таких, що $d_\alpha(x, x_0) < r$.

Легко помітити, що звідси випливає $\lim_{\alpha\in(A,\preceq)} \sup d_\alpha = +\infty$.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.3.6. *Нехай $(d_\alpha)_{\alpha\in(A,\preceq)}$ — неспадна напрямленість в $CPsU(X)$ яка подрібнює обидві $d, d' \in CPsU(X)$, і припустимо, що існує $\beta \in A$ таке, що $d \leqslant d_\beta$, $d' \leqslant d_\beta$. Тоді $\lim_{\alpha\in(A,\preceq)} D_H^{d_\alpha}(d, d') = D_u(d, d')$.*

Тут ми ігноруємо "відсутні" елементи напрямленості для $\alpha \not\succeq \beta$, беручи границю.

ДОВЕДЕННЯ. Без втрати загальності можна вважати, що $d \leqslant d_\alpha$, $d' \leqslant d_\alpha$ для всіх $\alpha \in A$. Напрямленість $(D_H^{d_\alpha}(d, d'))_{\alpha\in(A,\preceq)}$ у $\mathbb{R}$ є неспадною і обмежена зверху $D_u(d, d')$, отже має границю, яку позначимо C. Очевидно, що $C \leqslant D_u(d, d')$, і залишилося показати, що $C < D_u(d, d')$ неможливе.

Припускаючи протилежне, ми отримуємо існування таких $x, y \in X$, що

$$|d(x, y) - d'(x, y)| > C \geqslant D_H^{d_\alpha}(d, d')$$

для всіх $\alpha \in A$. Нехай, наприклад, $d(x, y) = a$, $d'(x, y) = b$, $b - a > C$. Тоді $(x, y, b) \in \operatorname{sub} d_2 \setminus \operatorname{sub} d$, і для псевдометрики ρ_α на $X \times X \times [0, \sup d_\alpha]$, означеної за допомогою d_α способом, описаним вище, $\rho_\alpha((x, y, b), \operatorname{sub} d) \leqslant C$ для всіх $\alpha \in A$. Звідси випливає існування $(x_\alpha, y_\alpha, a_\alpha) \in \operatorname{sub} d$ таких, що

$$\max\{d_\alpha(x_\alpha, x), d_\alpha(y_\alpha, y), |a_\alpha - b|\} \leqslant C,$$

отже $d_\alpha(x_\alpha, x) \leqslant C$, $d_\alpha(y_\alpha, y) \leqslant C$, $a_\alpha \geqslant b - C$, тому $d(x_\alpha, y_\alpha) \geqslant d'(x, y) - C = b - C$.

З іншого боку, існує таке $\alpha \in A$, що для всіх $x', y' \in X$ нерівності $d_\alpha(x, x') < C$, $d_\alpha(y, y') < C$ означають $d(x, x') < b - C$, $d(y, y') < b - C$. Отже $d(x_\alpha, x) \leqslant b - C$, $d(y_\alpha, y) \leqslant b - C$, і, враховуючи нерівність $d(x_\alpha, y_\alpha) \geqslant b - C$ і нерівність трикутника, отримуємо $d(x, y) = a \geqslant b - C$, що суперечить припущенню $b - a > C$. Це завершує доведення. □

Зауваження 4.3.7. Ймовірно, найпростіший спосіб отримати напрямленість, яка задовольняє вищезазначені вимоги для заданих d, d', це вибрати довільну компактну псевдоультраметрику $\hat{d} \geqslant d$, $\hat{d} \geqslant d'$ (наприклад, $\sup\{d, d'\}$, якщо вона компактна), і покласти $A = \mathbb{N}$, $d_n(x, y) = n \cdot \hat{d}(x, y)$.

4.4. Метризація простору псевдоультраметрик через надграфіки у стилі Гартоґа-де Вінка

Для довільних компактних псевдоультраметрик d, d' на множині X, як було показано, поточковий супремум $\hat{d} = \sup\{d, d'\}$ є псевдоультраметрикою, однак не обов'язково компактною. Тим не менш, d і d' є неперервними щодо $\hat{d}$, тому їх підграфіки $\operatorname{sub} d, \operatorname{sub} d' \subset X \times X \times [0, +\infty)$ та надграфіки $\operatorname{epi} d, \operatorname{epi} d' \subset X \times X \times [0, +\infty)$ є замкненими щодо псевдометрики ρ, означеної раніше як

$$\rho((x_1, y_1, a_1), (x_2, y_2, a_2)) = \max\{\hat{d}(x_1, x_2), \hat{d}(y_1, y_2), |a_1 - a_2|\}.$$

Щобільше, для довільного $k \in \mathbb{R}_+$ функції $k \cdot d$ і $k \cdot d'$ є компактними псевдоультраметриками на множині X, неперервними щодо $\hat{d}$, тому їх підграфіки та надграфіки теж замкнені щодо ρ. Отже, можна застосувати відстань Гаусдорфа ρ_H до множин $\operatorname{epi}(k \cdot d)$ і $\operatorname{epi}(k \cdot d')$.

Лема 4.4.1. *Відстань* $\rho_H\big(\mathrm{epi}(k\cdot d), \mathrm{epi}(k\cdot d')\big)$ *неспадна при зростанні* $k \in \mathbb{R}_+$, *і виконано*

$$\lim_{k\to\infty} \rho_H\big(\mathrm{epi}(k\cdot d), \mathrm{epi}(k\cdot d')\big) = \max_{0\leqslant a\leqslant \sup \hat{d}} D_H(d_{\leqslant a}, d'_{\leqslant a}),$$

де D *є псевдоультраметрикою на* $X\times X$, *заданою як*

$$D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{\hat{d}(x_1,x_2), \hat{d}(y_1,y_2)\},$$

а множини $d_{\leqslant a}, d_{\leqslant a'} \subset X\times X$ *є “зрізами”*

$$d_{\leqslant a} = \big\{(x,x')\in X\times X \;\big|\; d(x,x')\leqslant a\big\},\; d'_{\leqslant a} = \big\{(x,x')\in X\times X \;\big|\; d'(x,x')\leqslant a\big\}$$

надграфіків на висоті $a\geqslant 0$.

Доведення є прямолінійним. Позначимо границю вище як $D_{HV}(d,d')$ (мотиви такого позначення пояснимо пізніше).

Отже, детально вивчимо відстань $D_H(d_{\leqslant a}, d'_{\leqslant a})$. З компактності псевдоультраметрик d і d' випливає, що відносно кожної з них існує тільки скінченна кількість замкнених куль радіуса $a > 0$:

$$X = \underset{\bar{K}_1}{\underset{\shortparallel}{\bar{B}_a(x_1)}} \sqcup \underset{\bar{K}_2}{\underset{\shortparallel}{\bar{B}_a(x_2)}} \sqcup \ldots \sqcup \underset{\bar{K}_m}{\underset{\shortparallel}{\bar{B}_a(x_m)}} = \underset{\bar{K}'_1}{\underset{\shortparallel}{\bar{B}'_a(x'_1)}} \sqcup \underset{\bar{K}'_2}{\underset{\shortparallel}{\bar{B}'_a(x'_2)}} \sqcup \ldots \sqcup \underset{\bar{K}'_n}{\underset{\shortparallel}{\bar{B}'_a(x'_n)}},$$

де $\bar{B}_a(x_i)$ означає замкнену кулю щодо псевдоультраметрики d, а $\bar{B}'_a(x'_j)$ замкнену кулю щодо псевдоультраметрики d'. Тоді

$$d_{\leqslant a} = (\bar{K}_1\times\bar{K}_1)\sqcup(\bar{K}_2\times\bar{K}_2)\sqcup\ldots\sqcup(\bar{K}_m\times\bar{K}_m),$$

$$d'_{\leqslant a} = (\bar{K}'_1\times\bar{K}'_1)\sqcup(\bar{K}'_2\times\bar{K}'_2)\sqcup\ldots\sqcup(\bar{K}'_n\times\bar{K}'_n).$$

Розглянемо відстань від точки $(x,y)\in d_{\leqslant a}\setminus d'_{\leqslant a}$ до $d'_{\leqslant a}$, тобто точну нижню грань відстаней до точок $(x',y')\in d'_{\leqslant a}$. За припущенням виконано $d(x,y)\leqslant a$, $d'(x,y) > a$, а з посиленої нерівності трикутника випливає $d'(x,y)\leqslant \max\{d'(x,x'), d'(x',y'), d'(y',y)\}$. Отже, для кожної точки

$(x', y') \in d'_{\leqslant a}$ матимемо $\max\{d'(x, x'), d'(y', y)\} \geqslant d'(x, y) > a$, звідки випливає $D\big((x, y), (x', y')\big) \geqslant d'(x, y)$. З іншого боку, $(x, x) \in d'_{\leqslant a}$, і

$$D\big((x, x), (x, y)\big) = \max\{d(x, x), d'(x, x), d(x, y), d'(x, y)\} = d'(x, y).$$

Цим показано, що відстань від точки $(x, y) \in d_{\leqslant a} \setminus d'_{\leqslant a}$ до $d'_{\leqslant a}$ дорівнює $d'(x, y)$. Аналогічно, якщо точка (x', y') належить до $d'_{\leqslant a} \setminus d_{\leqslant a}$, то відстань від неї до до $d_{\leqslant a}$ дорівнює $d(x', y')$.

Наслідок 4.4.2. Нехай псевдоультраметрика $\hat{d}$ на X є поточковим супремумом компактних псевдоультраметрик d і d', а ρ є псевдометрикою на $X \times X \times [0, +\infty)$, заданою як

$$\rho((x_1, y_1, a_1), (x_2, y_2, a_1)) = \max\{\hat{d}(x_1, x_2), \hat{d}(y_1, y_2), |a_1 - a_2|\}.$$

Тоді границя $D_{HV}(d, d')$ відстані Гаусдорфа ρ_H між надграфіками $\mathrm{epi}(k \cdot d)$ і $\mathrm{epi}(k \cdot d')$ при $k \to +\infty$ дорівнює

$$\max\Big\{\sup\{d'(x, y) \mid x, y \in X,\ d'(x, y) > d(x, y)\},$$
$$\sup\{d(x', y') \mid x', y' \in X,\ d(x', y') > d'(x', y')\}\Big\}.$$

Інакше кажучи, для всіх пар точок, для яких значення d і d' відрізняються, беремо більше з них, а тоді знаходимо точну верхню грань таких значень, яка на підставі компактності досягається. Отримуємо:

Теорема 4.1. *Формула*

$$D_{HV}(d, d') = \max\Big\{\sup\{d'(x, y) \mid x, y \in X,\ d'(x, y) > d(x, y)\},$$
$$\sup\{d(x', y') \mid x', y' \in X,\ d(x', y') > d'(x', y')\}\Big\}$$

визначає повну ультраметрику на множині $CPsU(X)$ компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X.

Доведення. Зауважимо, що відстань між d та d' — це найменше таке $\varepsilon \geqslant 0$, що для кожних точок $x, y \in X$, $d(x, y) \neq d'(x, y)$, маємо $d(x, y) \leqslant \varepsilon$, $d'(x, y) \leqslant \varepsilon$. Тоді виконання означення ультраметрики очевидне.

Для доведення повноти розглянемо фундаментальну щодо D_{HV} послідовність (d_n) компактних псевдоультраметрик. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що для кожних $x, x' \in X$ маємо або $d_m(x, x') = d_n(x, x')$ для всіх $m, n \geqslant n_0$, або $d_n(x, x') < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$. Задамо $d_0(x, x')$ так :

$$d(x, x') = \begin{cases} a, & \text{якщо існують } a > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}, \text{ що } d_n(x, x') = a \text{ для всіх } n \geqslant 0, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Неважко перевірити, що d_0 є компактною псевдоультраметрикою на X, до якої d_n збігаються щодо D_{HV}. □

Зауваження. Хоча відстань $D_{HV}(d, d')$ є граничним значенням топологічно еквівалентних між собою метрик з формулами $\rho_H(\mathrm{epi}(k\cdot d), \mathrm{epi}(k\cdot d'))$, вона не є топологічно еквівалентною до них, наприклад, псевдоультраметрики $(1 - \frac{1}{n})d$ при $n \to \infty$ вже не збігаються до d щодо D_{HV}, зате на відміну від них є ультраметрикою.

Ультраметрика D_{HV} є аналогом ультраметрики Гартоґа-де Вінка [15], означеної на не обов'язково адитивних мірах на ультраметричних просторах: відстань між мірами μ і μ' є найменшим таким $\varepsilon \geqslant 0$, що $\mu(B) = \mu'(B)$ для кожної множини B, яка є об'єднанням куль радіуса ε. Цей підхід виявився плідним і для інших конструкцій на ультраметричних просторах — ідемпотентних мір, ймовірнісних мір, ємностей, вільних груп тощо, див. [5, 16, 17, 50, 52, 53] та ін. Тому ми називаємо $D_{HV}(d, d')$ *відстанню Гартоґа-де Вінка* між псевдоультраметриками d і d'. На жаль, вона не узгоджується з розглядуваним порядком на $CPsU(X)$, тому стоїть дещо осторонь теми нашого дослідження.

4.5. Метризація, топологія та зв'язана двонеперервність

Ми використаємо відому ФУНДАМЕНТАЛЬНУ ТЕОРЕМУ ПРО КОМПАКТНІ НАПІВҐРАТКИ, навівши лише необхідну нам частину. Як вже було сказано у вступному розділі, *неперервна напівґратка* — це напрямлено повна нижня напівгратка, яка є неперервною як частково впорядкована множина. Топологічна напівґратка *має малі напівґратки*, якщо в кожній точці вона має базу околів, які є підпівґратками [28].

ТЕОРЕМА 4.2 (Теорема VI-3.4, [13]). *(i) Нехай S — повна неперервна напівґратка. Тоді відносно топології Лоусона S є компактною топологічною напівграткою з малими напівґратками.*

(ii) І навпаки, якщо S є компактною топологічною напівграткою з малими напівгратками, тоді відносно своєї напівґраткової структури S є повною неперервною напівграткою. Крім того, топологія S є топологією Лоусона.

За теоремою III-1.10 [13] топологія Лоусона на неперервній напівгратці є гаусдорфовою.

Подібні твердження вірні для *двоїсто неперервних напівграток*, тобто на фільтровано повних верхніх напівграток, які є двоїсто неперервними, і для двоїстих топологій Лоусона.

Тепер ми покажемо, що для кожної фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ існує компактна гасдорфова топологія на множині $\hat{d}\downarrow$, що робить її топологічною ґраткою з малими підґратками (в очевидному сенсі). Ця топологія визначається за допомогою розглянутої вище *метрики рівномірної збіжності* D_u, яка дорівнює $D_u(d_1, d_2) = \sup\{|d_1(x, y) - d_2(x, y)| \mid x, y \in X\}$ для всіх $d_1, d_2 \in \hat{d}\downarrow$. Усі $d \in \hat{d}\downarrow$ є нерозтягуючими функціями на l_∞-добутку

$(X, \hat{d}) \times (X, \hat{d})$, а їхні значення знаходяться між 0 і значеннями $\hat{d}$. За теоремою Арцела-Асколі множина $\hat{d}\!\downarrow$ функцій є передкомпактною відносно D_u і є повною як метричний простір, тому є компактною.

Нехай $d_1, d_1', d_2, d_2' \in \hat{d}\!\downarrow$, $D_u(d_1, d_1') \leqslant \varepsilon$, $D_u(d_2, d_2') \leqslant \varepsilon$, тобто

$$d_1(x,y) - \varepsilon \leqslant d_1'(x,y) \leqslant d_1(x,y) + \varepsilon, \qquad d_2(x,y) - \varepsilon \leqslant d_2'(x,y) \leqslant d_2(x,y) + \varepsilon,$$

для всіх $x, y \in X$. Звідси

$$\begin{aligned} d_1 \vee d_2(x,y) - \varepsilon &= \max\{d_1(x,y) - \varepsilon, d_2(x,y) - \varepsilon\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{d_1'(x,y), d_2'(x,y)\} = d_1' \vee d_2'(x,y) \leqslant \\ &\leqslant \max\{d_1(x,y) + \varepsilon, d_2(x,y) + \varepsilon\} = d_1 \vee d_2(x,y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

отже $|d_1 \vee d_2(x,y) - d_1' \vee d_2'(x,y)| \leqslant \varepsilon$ для всіх $x, y \in X$, тобто $D_u(d_1 \vee d_2, d_1' \vee d_2') \leqslant \varepsilon$. Таким чином, супремум двох елементів в $(\hat{d}, D_u)$ є неперервним і навіть нерозтягуючим відносно своїх аргументів.

Аналогічно

$$\begin{aligned} d_1 \wedge d_2(x,y) - \varepsilon &= \inf\bigl\{\max\nolimits_{i=1}^n \min\{d_1(x_{i-1}, x_i) - \varepsilon, d_2(x_{i-1}, x_i) - \varepsilon\} \bigm| \\ &\qquad n \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_n = y, x_1, \ldots, x_{n-1} \in X\bigr\} \\ \leqslant d_1' \wedge d_2'(x,y) &= \inf\bigl\{\max\nolimits_{i=1}^n \min\{d_1'(x_{i-1}, x_i), d_2'(x_{i-1}, x_i)\} \bigm| \\ &\qquad n \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_n = y, x_1, \ldots, x_{n-1} \in X\bigr\} \\ \leqslant d_1 \wedge d_2(x,y) + \varepsilon &= \inf\bigl\{\max\nolimits_{i=1}^n \min\{d_1(x_{i-1}, x_i) + \varepsilon, d_2(x_{i-1}, x_i) + \varepsilon\} \bigm| \\ &\qquad n \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_n = y, x_1, \ldots, x_{n-1} \in X\bigr\}, \end{aligned}$$

тобто $D_u(d_1, d_1') \leqslant \varepsilon$, $D_u(d_2, d_2') \leqslant \varepsilon$ означає, що $D_u(d_1 \wedge d_2, d_1' \wedge d^2) \leqslant \varepsilon$. Тому $\hat{d}\!\downarrow$ із топологією, визначеною D_u — компактна гаусдорфова топологічна гратка. Це також означає, що якщо $D_u(d_0, d_1) \leqslant \varepsilon$ і $D_u(d_0, d_2) \leqslant \varepsilon$, то $D_u(d_0, d_1 \vee d_2) \leqslant \varepsilon$ і $D_u(d_0, d_1 \wedge d_2) \leqslant \varepsilon$, отже замкнена куля $B_\varepsilon(d_0) = \{d \in \hat{d}\!\downarrow \mid D_u(d, d_0) \leqslant \varepsilon\}$ є підграткою. Сім'я $\{B_\varepsilon(d_0) \mid \varepsilon > 0\}$ є базою околів в d_0, отже (ii) в Фундаментальній теоремі про компактні напівгратки виконується для $\hat{d}\downarrow$ і як нижньої напівгратки, і (у дуальній версії) як верхньої напівгратки. Звідси топологія Лоусона і двоїста топологія Лоусона на $\hat{d}\downarrow$ узгоджується, і ми приходимо до основного результату розділу.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на множині X гратка $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$ є зв'язано двонеперервною, а топологія Лоусона ($\equiv$ двоїста топологія Лоусона) на ній є метризованою метрикою рівномірної збіжності.*

На жаль, було доведено у першому розділі, цій гратці бракує дистрибутивності, тому вона не належить до "ідеального" з погляду властивостей класу цілком дистрибутивних граток [11, 47]. Тим не менш, отримані результати дозволяють змістовно розглядати проблему існування продовжень псевдо(ультра)метрик [2, 3, 55, 59], неперервних у метричному та/чи порядковому сенсах і таких, що зберігають корисні властивості, як повнота чи компактність.

4.6. Замкнена лінійна оболонка та замкнений конус, породжені множиною псевдоультраметрик

Як ми показали вище, найприроднішою і найзручнішою є метризація множини $\hat{d}\downarrow$ псевдоультраметрик, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на множині X, метрикою рівномірної збіжності. Ця метрика отримується ізометричним вкладенням $\hat{d}\downarrow$ у банахів простір $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ неперервних щодо $\hat{d}$ (тому обмежених) дійснозначних функцій на $X \times X$ з нормою рівномірної збіжності. Норми елементів множини $\hat{d}\downarrow$ обмежені згори

$\max \hat{d}$, і легко довести, що ця множина замкнена. Тим не менш, вона не є опуклою, оскільки для псевдоультраметрик d_1, d_2 опукла комбінація $\frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2$ не обов'язково є псевдоультраметрикою, хоча є псевдометрикою.

Отже, виникає природне запитання про найменші (замкнений) конус та (замкнений) підпростір у $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$, породжені множиною $\hat{d}\downarrow$.

Почнемо з випадку скінченної множини X та довільної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на X, що розрізняє точки цієї множини (тобто улььтраметрики). Тоді всі псевдометрики на X утворюють замкнений конус $Ps(X) \subset C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$, а псевдоультраметрики на X — замкнену підмножину $PsU(X) \subset Ps(X)$, яка не є конусом, хоча і замкнена щодо множення на невід'ємні числа. Виникає природне припущення, що $Ps(X)$ як конус породжується множиною $PsU(X)$. Це рівносильне до того, що кожна псевдометрика на X є сумою псевдоультраметрик.

Представлення псевдометрик у вигляді суми (чи композиції з невід'ємними коефіцієнтами, що є ріносильним) псевдоультраметрик має практичне значення у функціональному аналізі. Це дозволяє спростити складні проблеми, працюючи з добре зрозумілими псевдоультраметричними компонентами та отримати краще розуміння структури та властивостей функціональних просторів.

ПРИКЛАД 4.6.1. При вивченні функціональних просторів, таких, як $L^p[0, 1]$, значну роль відіграють системи Хаара. Ієрархічна природа псевдоультраметрик відповідає побудові функцій Хаара, що має застосування у комп'ютерних науках [33].

Подібна задача розглядалася у [30], однак у загальнішому формулюванні — досліджувалось, чи можна подати псевдометрику на скінченній множині як суму псевдометрик, непропорційних до вихідної. Результати [30] сформульовані у термінах лінійних систем (фактично лінійного програмування), тому громіздкі і незручні для практичного використання.

Отже, запропонуємо більш геометричний підхід. У псевдометричному просторі (X, d) кажемо, що точка b розташована між точками a і c, якщо виконано рівність $d(a,b) + d(b,c) = d(a,c)$ (строго між цими точками, якщо, крім того, точки a, b, c різні). Очевидно, що при $d(a,b) = 0$ чи $d(b,c) = 0$ точка b розташована між a і c.

Називаємо множину $C \subset X$ опуклою щодо метрики d на X, якщо кожна точка b, розташована між довільними точками $a, c \in C$, теж належить до C.

Зауважимо, що у літературі трапляється і інше поняття метричної опуклості, яке вимагає, щоб строго між кожними різними точками $a, c \in C$ була розташована точка $b \in C$. Це неможливо для скінченної множини C з більш, ніж з однією точкою, тому така версія означення опуклості не становить для нас інтересу.

Якщо ρ — псевдоультраметрика зі значеннями

$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{k-1} < r_k,$$

то ρ є сумою ненульових (тобто не рівних тотожно нулю) псевдоультраметрик $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_k$, де

$$\rho_i(x,y) = \begin{cases} 0, & \rho(x,y) < r_i, \\ r_i - r_{i-1}, & \rho(x,y) \geqslant r_i, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$

Далі, кожна псевдоультраметрика з тільки одним ненульовим значенням a розбиває простір X на скінченну кількість класів $F_1, F_2, \ldots, F_m$, таких, що псевдовідстань між двома точками рівна 0, якщо вони в одному класі, і a, якщо в різних. Вона є сумою m псевдометрик, j-та з яких для $j = 1, 2, \ldots, m$ має для точок x, y значення 0, якщо вони лежать в одній з множин F_j і $X \setminus F_j$, і $\dfrac{a}{m}$, якщо у різних.

Звідси випливає, що псевдометрику на скінченній множині можна подати як суму псевдоультраметрик тоді і тільки тоді, коли її можна подати як суму псевдоультраметрик, визначених розбиттями X на дві підмножини, тобто вигляду

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x,y \in A \text{ або } x,y \in B, \\ a & \text{— інакше}, \end{cases} \qquad x,y \in X,$$

де $X = A \sqcup B$, $a > 0$.

Тому дослідимо, коли псевдометрику d можна подати як $\rho + d'$, де ρ має вигляд вище, а d' — довільна псевдометрика. Нехай $x, z \in A$, $y \in B$, тоді

$$\begin{aligned} d(x,z) = d'(x,z) &\leqslant d'(x,y) + d'(y,z) \\ &= d(x,y) - a + d(y,z) - a = d(x,y) + d(y,z) - 2a \\ &< d(x,y) + d(y,z), \end{aligned}$$

тобто жодна точка $y \in B$ не може бути розташованою щодо d між точками $x, z \in A$, і аналогічно жодна точка множини A не може бути між двома точками множини B. Інакше кажучи, множини A і B є опуклими щодо d. Зауважимо, що тоді відстані між точками A і точками B додатні.

Виявляється, що ця вимога є і достатньою для існування описаного подання $d = \rho + d'$.

Твердження 4.6.2. *Нехай d — псевдометрика на скінченній множині X. Якщо X не можна подати як об'єднання непорожніх неперетинних опуклих щодо d підмножин A, B, то d не можна подати як $\rho + d'$, де ρ — псевдоультраметрика, не рівна тотожно нулю, а d' — довільна псевдометрика.*

Якщо ж розбиття X на непорожні опуклі щодо d підмножини A і B існує, то можна подати d як $\rho + d'$, де ρ — ненульова псевдоультраметрика, а d' — деяка псевдометрика, для якої множина трійок (x, y, z), у яких y є між x і z, строго більша від аналогічної множини трійок для d.

Доведення. Необхідність існування відповідного розбиття $X = A \sqcup B$ доведено вище. Припустимо, що воно існує. Позначимо δ найменше серед чисел $d(x, y) + d(y, z) - d(x, z)$, де $x, z \in A$, $y \in B$ чи $x, z \in B$, $y \in A$. За припущенням воно додатне. Крім того, серед цих чисел є всі значення $2d(x, y)$ для x, y з різних множин A, B (якщо покласти $z = x$).

Розглянемо псевдоультраметрику

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in A \text{ або } x, y \in B, \\ \dfrac{\delta}{2} & \text{— інакше,} \end{cases} \qquad x, y \in X,$$

і покажемо, що різниця $d' = d - \rho$ невід'ємна. Вона відрізняється від d тільки для аргументів x, y з різних множин A, B, а тоді $d(x, y) \geqslant \frac{\delta}{2} = \rho(x, y)$.

Симетричність функції d' і рівність нулю при однакових аргументах очевидна, а нерівність трикутника перевіряється прямолінійно.

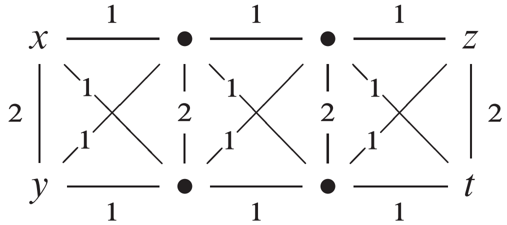
Нехай $|X| \geqslant 3$ і (x_0, y_0, z_0) — трійка точок, для якої досягається описане мінімальне значення δ, тоді $d(x_0, y_0) + d(y_0, z_0) - d(x_0, z_0) = \delta$, звідки

$$\underbrace{d(x_0, y_0) - \frac{\delta}{2}}_{\substack{\parallel \\ d'(x_0, y_0)}} + \underbrace{d(y_0, z_0) - \frac{\delta}{2}}_{\substack{\parallel \\ d'(y_0, z_0)}} = \underbrace{d(x_0, z_0)}_{\substack{\parallel \\ d'(x_0, z_0)}}.$$

Це означає, що y_0 щодо d' є між x_0 і z_0, що не виконано щодо d. $\square$

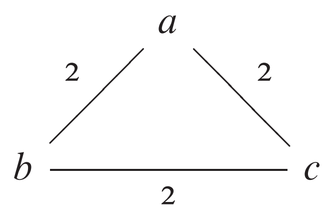
Тепер для спростування нашої гіпотези залишається знайти псевдометричний простір, для якого не існує описаного вище розбиття на непорожні опуклі щодо псевдометрики множини.

Приклад 4.6.3. Розглянемо зважені графи, у яких відстанню між кожними вершинами вважаємо довжину найкоротшого маршруту між ними. Граф



як метричний простір має властивість: якщо у ньому опукла щодо метрики множина містить точки x, y, то вона містить і точки z, t та всі інші (непозначені) вершини, і навпаки.

Два екземпляри такої стрічки приклеїмо до графа



(вершин правильного трикутника зі стороною 2). Першу стрічку вершинами x, y приклеюємо відповідно до a, b, а вершинами z, t до b, c. Другу стрічку — вершинами x, y відповідно до b, c, а вершинами z, t до c, a.

Припустимо, що множину X вершин утвореного графа розбито на неперетинні непорожні опуклі щодо метрики множини A і B. Принаймні в одній з них, наприклад, в A, є дві з трьох вершин a, b, c, тоді стрічкою можна дійти до третьої вершини, яка теж є у A, звідки всі елементи X містяться у A, що суперечить непорожньості B.

Звідси випливає, що метрику на отриманому просторі X не можна подати як суму псевдоультраметрик. Цей простір має 15 елементів. Нижче ми надамо приклад такого простору з меншою кількістю точок, однак нерозкладність для нього є менш наочною.

Як наслідок, для цієї множини X конус псевдометрик $Ps(X)$ не породжується множиною $PsU(X)$ псевдоультраметрик.

Навіть якщо псевдометрику d *можна* подати як суму псевдоультраметрик, останнє твердження не надає можливості будувати цю суму "по кроках", відщеплюючи їх по одній.

ПРИКЛАД 4.6.4. Розглянемо дискретну ультраметрику d на множині $X = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$. Опуклі щодо d множини $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$

утворюють розбиття X, тому згідно з останнім твердженням d є сумою псевдоультраметрики

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in A \text{ або } x, y \in B, \\ \frac{1}{2} & \text{— інакше,} \end{cases} \qquad x, y \in X,$$

та псевдометрики d', яка тоді має формулу

$$d'(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \text{ і } x, y \in A \text{ або } x, y \in B, \\ \frac{1}{2} & \text{— інакше,} \end{cases} \qquad x, y \in X.$$

Припустимо, що X можна розбити на непорожні опуклі щодо d' множини F і G, тоді в одній з них, наприклад, у F, містяться принаймні дві з точок a_1, a_2, a_3. Оскільки кожна з точок b_1, b_2 лежить щодо d' між кожними двома з точок a_1, a_2 та a_3, точки b_1, b_2 теж належать до опуклої множини F, а тоді між ними лежить кожна з точок a_1, a_2, a_3. Отже, і вони належать до F, що суперечить непорожньості G.

Ми цим показали, що d' не можна подати у вигляді суми псевдоультраметрик.

Зрозуміло, що скінченна кількість точок b_i у прикладі вище може бути довільною, не меншою від 2. Тому одночасно ми отримали загальніший наслідок.

Твердження 4.6.5. *Конус псевдометрик на скінченній множин з не менш, ніж п'ятьма точками не породжується підмножиною з усіх псевдоультраметрик на цій множині.*

Розглянемо скінченні множини з меншою кількістю точок. На порожній, одно- та двоелементній множині всі псевдометрики є і псевдоультраметриками, тому задача стає тривіальною. До три- і чотириелементних множин ми застосуємо підхід, запропонований у [30].

На множині $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ кожна псевдометрика d визначається вектором — трійкою невід'ємних чисел

$$(d_{12}, d_{13}, d_{23}) = (d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)),$$

що задовольняють нерівність трикутника, тобто кожне з них не перевищує суми двох інших. Зокрема, трійки $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ відповідають псевдоультраметрикам ρ_1, ρ_2, ρ_3, визначеним відповідно розбиттями на пари множин $(\{1\}, \{2, 3\})$, $(\{2\}, \{1, 3\})$ та $(\{3\}, \{1, 2\})$.

Відповідно, щоб подати псевдометрику d як $k_1 \cdot \rho_1 + k_2 \cdot \rho_2 + k_3 \cdot \rho_3$, потрібно підібрати коефіцієнти k_1, k_2, k_3, для яких

$$(d_{12}, d_{13}, d_{23}) = k_1 \cdot (1, 1, 0) + k_1 \cdot (1, 0, 1) + k_1 \cdot (0, 1, 1),$$

звідки отримуємо $k_1 = \frac{d_{12}+d_{13}-d_{23}}{2}$, $k_2 = \frac{d_{12}+d_{23}-d_{13}}{2}$, $k_3 = \frac{d_{13}+d_{23}-d_{12}}{2}$. З нерівностей трикутника випливає невід'ємність k_1, k_2, k_3. Ми показали, що множина $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ псевдоультраметрик породжує конус псевдометрик на триелементній множині X.

На чотириелементній множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ довільна псевдометрика d представляється вектором — шісткою невід'ємних чисел

$$\begin{aligned}&(d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34})\\ &\qquad = (d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_1, x_4), d(x_2, x_3), d(x_2, x_4), d(x_3, x_4)),\end{aligned}$$

що задовольняють зрозумілі нерівності трикутника, наприклад, $d_{23} \leqslant d_{24} + d_{34}$.

Покажемо, що кожну таку псевдометрику d можна отримати як комбінацію з невід'ємними коефіцієнтами псевдоультраметрик, визначених векторами і розбиттями

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &\leftrightarrow (1,1,1,0,0,0) &&\leftrightarrow (\{1\},\{2,3,4\})\\
\rho_2 &\leftrightarrow (1,0,0,1,1,0) &&\leftrightarrow (\{2\},\{1,3,4\})\\
\rho_3 &\leftrightarrow (0,1,0,1,0,1) &&\leftrightarrow (\{3\},\{1,2,4\})\\
\rho_4 &\leftrightarrow (0,0,1,0,1,1) &&\leftrightarrow (\{1\},\{1,2,3\})\\
\rho_{12} &\leftrightarrow (0,1,1,1,1,0) &&\leftrightarrow (\{1,2\},\{3,4\})\\
\rho_{13} &\leftrightarrow (1,0,1,1,0,1) &&\leftrightarrow (\{1,3\},\{2,4\})\\
\rho_{14} &\leftrightarrow (1,1,0,0,1,1) &&\leftrightarrow (\{1,4\},\{2,3\})
\end{aligned}
$$

Серед сум $d_{12}+d_{34}$, $d_{13}+d_{24}$, $d_{14}+d_{23}$, виберемо найбільшу (чи одну з найбільших), нехай для визначеності це остання, і покажемо, що d є комбінацією вказаних вище псевдоультраметрик, крім ρ_{14}. Тоді тотожність

$$d = k_1 \cdot \rho_1 + k_2 \cdot \rho_2 + k_3 \cdot \rho_3 + k_4 \cdot \rho_4 + k_{12} \cdot \rho_{12} + k_{13} \cdot \rho_{13}$$

рівносильна до матричної рівності

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\\ k_{12}\\ k_{13} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_{12}\\ d_{13}\\ d_{14}\\ d_{23}\\ d_{24}\\ d_{34} \end{bmatrix},
$$

яка, у свою, чергу, є рівносильною до

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_{12} \\ k_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \\ d_{23} \\ d_{24} \\ d_{34} \end{bmatrix}.$$

Звідси $k_1 = \dfrac{d_{12} + d_{12} - d_{23}}{2}$, і чисельник невід'ємний за нерівністю трикутника. Отже, k_1, і аналогічно k_2, k_3, k_4 є невід'ємними. Коефіцієнти

$$k_{12} = \frac{(d_{14} + d_{23}) - (d_{12} + d_{34})}{2}, \qquad k_{13} = \frac{(d_{14} + d_{23}) - (d_{13} + d_{24})}{2}$$

невід'ємні за вибором суми $d_{14} + d_{23}$ як найбільшої. Інші випадки аналогічні.

Ми отримали наступне твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.6.6. *Конус псевдометрик на скінченній множин з не більш, ніж чотирма точками породжується підмножиною з усіх псевдоультраметрик на цій множині.*

Отже, задача характеризації псевдометрик, які можна подати у вигляді суми (або, що рівносильне, у вигляді лінійної комбінації з невід'ємними коефіцієнтами) псевдоультраметрик, а тоді ефективного знаходження такого подання, є складнішою, ніж очікується, навіть для скінченних просторів, і ми звернемось до неї у подальших дослідженнях. Нижче ми знімемо вимогу невід'ємності коефіцієнтів і розглянемо лінійну оболонку множини псевдоультраметрик на фіксованій скінченній множині X.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.6.7. *Функцію $f : X \times X \to \mathbb{R}$, де X — скінченна множина, можна подати у вигляді лінійної комбінації псевдоультраметрик на X, якщо і тільки якщо f задовольняє тотожності $f(x, x) = 0$ та $f(x, y) = f(y, x)$ для всіх $x, y \in X$.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Для доведення достатності припустимо, що $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ і функція f має вказані властивості. Тоді її можна подати як лінійну комбінацію

$$f(a,b) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f(x_i, x_j) \cdot \varphi_{ij}(a,b) \text{ для кожних } a, b \in X,$$

де функції $\varphi_{ij} : X \times X \to \mathbb{R}$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$ визначаються формулами

$$\varphi_{ij}(a,b) = \begin{cases} 1, & a = x_i, b = x_j \text{ або } a = x_j, b = x_i, \\ 0 & \text{— інакше,} \end{cases} \qquad a, b \in X.$$

Отже, залишається показати, що кожну з функцій φ_{ij} можна отримати у вигляді лінійної комбінації псевдоультраметрик.

Розглянемо псевдоультраметрики ρ_i, ρ_j та ρ_{ij}, задані відповідно розбиттями X на пари множин $A_i = \{x_i\}$, $B_i = X \setminus \{x_i\}$, $A_j = \{x_j\}$, $B_j = X \setminus \{x_j\}$, $A_{ij} = \{x_i, x_j\}$, $B_{ij} = X \setminus \{x_i, x_j\}$, тобто

$$\rho_i(a,b) = \begin{cases} 0, & a = x_i, b = x_i \text{ або } a \neq x_i, b \neq x_i, \\ 1 & \text{— інакше,} \end{cases}$$

$$\rho_j(a,b) = \begin{cases} 0, & a = x_j, b = x_j \text{ або } a \neq x_j, b \neq x_j, \\ 1 & \text{— інакше,} \end{cases}$$

$$\rho_{ij}(a,b) = \begin{cases} 0, & a, b \in \{x_i, x_j\} \text{ або } a, b \notin \{x_i, x_j\}, \\ 1 & \text{— інакше,} \end{cases}$$

для всіх $a, b \in X$. Тоді неважко перевірити, що

$$\varphi_{ij}(a,b) = \frac{1}{2}\rho_i(a,b) + \frac{1}{2}\rho_j(a,b) - \frac{1}{2}\rho_{ij}(a,b),$$

що завершує доведення. □

Перейдемо до загальнішого випадку множини X довільної потужності з зафіксованою компактною псевдоультраметрикою.

Теорема 4.4. *Нехай $\hat{d}$ — компактна псевдоультраметрика на множині X. Замкненою лінійною оболонкою множини $\hat{d}\downarrow$ всіх компактних псевдоультраметрик на X, що не перевищують $\hat{d}$, у просторі $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ неперервних щодо $\hat{d}$ дійснозначних функцій на $X \times X$ з нормою рівномірної збіжності є множина всіх неперервних щодо $\hat{d}$ по сукупності аргументів функцій $f : X \times X \to \mathbb{R}$ з властивостями $f(x,x) \equiv 0$ та $f(x,y) \equiv f(y,x)$ для всіх $x, y \in X$.*

Доведення. Очевидно, що згадана у формулюванні множина є замкненим векторним підпростором у просторі $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$, який містить всі псевдоультраметрики з $\hat{d}$. Залишається довести, що кожну функцію f з вказаними властивостями можна наблизити лінійною комбінацією елементів $\hat{d}$.

Оскільки простір $(X, \hat{d})$ компактний, то неперервна функція f є рівномірно неперервною, і для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що з $\hat{d}(x, x') \leqslant \delta$, $\hat{d}(y, y') \leqslant \delta$ випливає $|f(x,y) - f(x', y')| \leqslant \varepsilon$. Нагадаємо, що X розбивається на скінченну кількість диз'юнктних замкнених куль $B_1 = \bar{B}_\delta(x_1)$, $B_2 = \bar{B}_\delta(x_2), \ldots, B_n = \bar{B}_\delta(x_n)$. Відстані між елементами різних куль більші за δ, тому $\hat{d}$ не менша від псевдоультраметрики d на X, рівної δ для пар точок з різних куль і 0 для пар точок з однієї кулі. Псевдоультраметрика d компактна і виконано $d\downarrow \subset \hat{d}\downarrow$.

Її d_0 обмеження на скінченний простір $X_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ є дискретною ультраметрикою, помноженою на коефіцієнт δ. Згідно з попереднім твердженням обмеження f на $X_0 \times X_0$ можна подати як лінійну комбінацію $\alpha_1 \cdot \rho_1 + \alpha_2 \cdot \rho_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \rho_k$ псевдоультраметрик $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ на X_0, які автоматично є неперервними щодо d_0. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що вони не перевищують d_0. Продовжимо їх на X, вважаючи, що $d_l(a,b) = \rho_l(x_i, x_j)$, якщо $a \in B_i$, $b \in B_j$, тоді кожна з псевдоультраметрик d_l є компактною і не перевищує $\hat{d}$. Згідно з вибором δ маємо

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geqslant |f(a,b) - f(x_i, x_j)| \\ &= |f(a,b) - \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \cdot d_l(x_i, x_j)| = |f(a,b) - \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \cdot d_l(a,b)|,\end{aligned}$$

тобто норма рівномірної збіжності різниці між функцією f і лінійною комбінацією $\sum_{l=1}^{k} \alpha_l \cdot d_l$ елементів $\hat{d}\downarrow$ не перевищує ε. Цим доведення закінчено. □

4.7. Ідемпотентний нормований простір компактних псевдоультраметрик

Вище ми розглянули властивості множин компактних псевдоультраметрик у класичних просторах неперервних функцій. Однак значно природніше вони вписуються у контекст ідемпотентного функціонального аналізу, огляд якого виконано у однойменній статті [27]. Основна ідея ідемпотентної математики полягає у заміні поля $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ дійсних чисел структурою $(I, \oplus, \otimes)$, яка є не полем, в ідемпотентним напівкільцем з нулем і одиницею, тобто:

(1) $\alpha \oplus \beta \equiv \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \alpha \equiv \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) $\alpha \oplus \alpha \equiv \alpha$;

(4) $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma \equiv \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$;

(5) існує елемент $0 \in I$, для якого $\alpha \otimes 0 \equiv 0 \otimes \alpha \equiv 0$ (нуль);

(6) існує елемент $1 \in I$, для якого $\alpha \otimes 1 \equiv 1 \otimes \alpha \equiv \alpha$ (одиниця);

(7) $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma \equiv (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)$;

(8) $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) \equiv (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$.

Зауважимо, що існування протилежних щодо $\oplus$ елементів не вимагається (звідки і “напів-”), натомість ця операція є ідемпотентною (четверта тотожність). Тоді 0 є нейтральним елементом для додавання, тобто $\alpha \oplus 0 \equiv 0 \oplus \alpha \equiv \alpha$. Переважно розглядають комутативні напівкільця, у яких $\alpha \otimes \beta \equiv \beta \otimes \alpha$.

Неважко помітити, що вище $(I, \oplus)$ — верхня напівгратка, якщо порядок означити як $\alpha \leqslant \beta \iff \alpha \oplus \beta = \beta$. Тоді $\alpha \oplus \beta$ є точною верхньою гранню α та β, а 0 — найменшим елементом I. З означення випливає, що множення "$\otimes$" монотонне за обома аргументами.

Ідемпотентним аналогом векторного простору є ідемпотентний напівмодуль [27] над ідемпотентним напівкільцем $(I, \oplus, \otimes)$ з нулем і одиницею, тобто трійка $(X, \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$, де операції $\bar{\oplus} : X \times X \to X$ і $\bar{\otimes} : I \times X \to X$ задовольняють тотожності (зрозуміло, з яких множин довільні аргументи):

(1) $x \bar{\oplus} y \equiv y \bar{\oplus} x$;

(2) $(x \bar{\oplus} y) \bar{\oplus} z \equiv x \bar{\oplus} (y \bar{\oplus} z)$;

(3) існує елемент $\bar{0} \in X$, для якого $x \bar{\oplus} \bar{0} \equiv \bar{0} \bar{\oplus} x \equiv x$;

(4) $x \bar{\oplus} x \equiv x$;

(5) $(\alpha \otimes \beta) \bar{\otimes} x \equiv \alpha \bar{\otimes} (\beta \bar{\otimes} x)$;

(6) $1 \bar{\otimes} x \equiv x$;

(7) $(\alpha \oplus \beta) \bar{\otimes} x \equiv (\alpha \bar{\otimes} x) \bar{\oplus} (\beta \bar{\otimes} x)$;

(8) $\alpha \bar{\otimes} (x \bar{\oplus} y) \equiv (\alpha \bar{\otimes} x) \bar{\oplus} (\alpha \bar{\otimes} y)$.

Вище $(X, \bar{\oplus})$ теж є верхньою напівграткою з найменшим елементом $\bar{0}$ і аналогічно означеним порядком і супремумом двох елементів.

Вживаємо позначення $\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i$ і $\bar{\bigoplus\limits_{i \in \mathcal{I}}} x_i$ для точних верхніх граней відповідно множин $\{\alpha_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subset I$ та $\{x_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subset X$, якщо вони існують.

Називаємо ідемпотентний напівмодуль $(X, \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ над ідемпотентним напівкільцем $(I, \oplus, \otimes)$ з одиницею ідемпотентним векторним простором, якщо

(1) $(I, \oplus)$ обмежено повна, тобто всі обмежені згори множини у ній мають точні верхні грані ;

(2) якщо множина $\{\alpha_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subset I$ обмежена згори, $\beta \in I$, то виконано

$$\Big(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i\Big) \otimes \beta = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} (\alpha_i \otimes \beta)$$

і

$$\beta \otimes \Big(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i\Big) = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} (\beta \otimes \alpha_i);$$

(3) для довільного x і обмеженої згори множини $\{\alpha_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subset I$ виконано

$$\Big(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i\Big) \bar{\otimes}\, x = \bar{\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}} (\alpha_i \,\bar{\otimes}\, x);$$

(4) якщо множина $\{x_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subset X$ має точну верхню грань і $\alpha \in I$, то виконано

$$\alpha \,\bar{\otimes}\, \Big(\bar{\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}} x_i\Big) = \bar{\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}} (\alpha \,\bar{\otimes}\, x_i),$$

зокрема, точна верхня грань справа існує.

У [27] для щойно означеного поняття вживається термін “ідемпотентний b-простір”. Враховуючи природні рівності $\bigoplus \varnothing = 0$, $\bar{\bigoplus} \varnothing = \bar{0}$, отримуємо $0 \,\bar{\otimes}\, x \equiv \beta \,\bar{\otimes}\, \bar{0} \equiv \bar{0}$.

Різні ідемпотентні напівкільця розглянуто у [27], однак нас цікавитиме випадок $(\mathbb{R}_+, \vee, \cdot)$, де $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\}$, а “$\cdot$” — звичайне множення дійсних чисел. Нулем і одиницею у ньому є числа 0 і 1, що узгоджується з позначеннями вище.

Тоді множина $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}_+)$ неперервних щодо фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ (і тоді обмежених) невід’ємних дійснозначних функцій на $X \times X$ стає ідемпотентним векторним простором над $(\mathbb{R}_+, \vee, \cdot)$, якщо операції над функціями означаються поточково, тобто для $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\varphi, \psi \in C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}_+)$ покладаємо $(\varphi \,\bar{\oplus}\, \psi)(x, y) = \varphi(x, y) \vee \psi(x, y)$, $(\alpha \,\bar{\otimes}\, \varphi)(x, y) = \alpha \cdot \varphi(x, y)$ для всіх $x, y \in X$.

На ідемпотентні векторні простори тривіально переноситься поняття підпростору як непорожньої множини, замкненої щодо операцій "$\bar{\oplus}$" та "$\bar{\otimes}$". Оминаємо прямолінійне доведення наступного твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 4.7.1. *Множини всіх компактних псевдометрик та всіх компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на довільній множині X, є підпросторами ідемпотентного векторного простору $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}_+)$ над $(\mathbb{R}_+, \vee, \cdot)$.*

Нагадаємо, що простір $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ є нормованим і повним щодо породженої нормою метрики. Нижче нашою метою є перенесення поняття (повного) нормованого простору на ідемпотентні векторні простори. Звернемо увагу, що для їх елементів не означена різниця, тому вважати відстанню між елементами x та y ідемпотентного векторного простору норму різниці $x - y$ неможливо. Очевидно, що метрика D на дійсному векторному просторі породжується нормою, якщо і тільки якщо вона має властивості $D(x + x', y + y') \leqslant D(x, y) + D(x', y')$ та $D(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) \leqslant |\alpha| \cdot D(x, y)$, і відповідна норма однозначно визначена.

Тому ми за аналогією всупереч традиції означимо норму на ідемпотентному векторному просторі як метрику (тобто функцію двох аргументів) з певними властивостями.

Нормою на ідемпотентному векторному просторі $(X, \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ над $(\mathbb{R}_+, \vee, \cdot)$ називаємо метрику $D : X \times X \to \mathbb{R}$, для якої нерівність

$$D(\alpha_1 \bar{\otimes} x_1 \mathbin{\bar{\oplus}} \alpha_2 \bar{\otimes} x_2 \mathbin{\bar{\oplus}} \ldots \mathbin{\bar{\oplus}} \alpha_n \bar{\otimes} x_n,\ \alpha_1 \bar{\otimes} y_1 \mathbin{\bar{\oplus}} \alpha_2 \bar{\otimes} y_2 \mathbin{\bar{\oplus}} \ldots \mathbin{\bar{\oplus}} \alpha_n \bar{\otimes} y_n)$$
$$\leqslant \alpha_1 \cdot D(x_1, y_1) \vee \alpha_2 \cdot D(x_2, y_2) \vee \ldots \vee \alpha_n \cdot D(x_n, y_n)$$

істинна для всіх $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$.

Зауважимо, що ця нерівність рівносильна до виконання пари нерівностей $D(x \mathbin{\bar{\oplus}} x', y \mathbin{\bar{\oplus}} y') \leqslant \max\{D(x, y), D(x', y')\}$ та $D(\alpha \mathbin{\bar{\otimes}} x, \alpha \mathbin{\bar{\otimes}} y) \leqslant \alpha \cdot D(x, y)$

для всіх $x, y, x', y' \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, причому друга з них насправді рівносильна до рівності $D(\alpha \bar{\otimes} x, \alpha \bar{\otimes} y) = \alpha \cdot D(x, y)$.

Тоді даний простір з зафіксованою нормою називаємо нормованим ідемпотентним векторним простором. Замкненість і повноту у ньому розуміємо у звичайному для метричних просторів сенсі.

Останнє твердження можна посилити.

Теорема 4.5. *Множина $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}_+)$ неперервних щодо фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ невід'ємних дійснозначних функцій на $X \times X$ з операціями поточкового множення на невід'ємні числа та поточкового максимуму і метрикою рівномірної збіжності є повним нормованим ідемпотентним векторним простором над $(\mathbb{R}_+, \vee, \cdot)$. Її підмножина усіх компактних псевдоультраметрик на X, неперервних щодо $\hat{d}$, є найменшим замкненим підпростором, що містить всі псевдоультраметрики вигляду*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in A \text{ або } x, y \in B, \\ 1 & \text{— інакше}, \end{cases} \qquad x, y \in X,$$

де $X = A \sqcup B$, а множини A та B непорожні і відкрито-замкнені щодо $\hat{d}$.

Доведення отримується модифікацією доведення Теореми 4.4.

4.8. Симетричні функціонали на просторах, породжених псевдометриками

Для фіксованого компактного псевдоультраметричного простору $(X, \hat{d})$ всі ізометрії X на себе (бієкції, що зберігають псевдовідстань) утворюють групу $Iso(X, \hat{d})$ щодо композиції. Зафіксуємо ізометрію $\varphi \in Iso(X)$, тоді для кожної неперервної функції $f : X \times X \to \mathbb{R}$ функція $f \circ (\varphi \times \varphi) : X \times X \to \mathbb{R}$, тобто $(x, y) \mapsto f(\varphi(x), \varphi(y))$, теж є неперервною. Відповідність $f \mapsto f \circ (\varphi \times \varphi)$

є біекцією $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}) \to C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$, яку позначимо $C_{\hat{d}}(\varphi \times \varphi, \mathbb{R})$. Вона зберігає метрику рівномірної збіжності, і множини

$$\begin{aligned}\bigl\{d \in PsU(X) \bigm| d \leqslant \hat{d}\bigr\} &\subset \bigl\{d \in PsU(X) \bigm| d \text{ неперервна щодо } \hat{d}\bigr\} \\ &\subset \bigl\{d \in Ps(X) \bigm| d \text{ неперервна щодо } \hat{d}\bigr\} \\ &\subset \bigl\{f : X \times X \to \mathbb{R} \bigm| f \text{ неперервна щодо } \hat{d},\ f(x,x) = 0 \text{ і} \\ &\qquad f(x,y) = f(y,x) \text{ для всіх } x, y \in X\bigr\}\end{aligned}$$

є інваріантними щодо неї. Остання множина, яку позначимо $S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$, є замкненим підпростором банахового простору $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$. Позначимо $S_{\hat{d}}(\varphi \times \varphi, \mathbb{R}) : S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}) \to S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ звуження відображення $C_{\hat{d}}(\varphi \times \varphi, \mathbb{R})$. Ми отримали дію групи $Iso(X, \hat{d})$ на підпросторі $S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ та згаданих вище його підмножинах, що складаються з псевдоультраметрик та псевдометрик.

Нижче ми дослідимо $Iso(X, \hat{d})$-симетричні неперервні функціонали $\Phi : S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, тобто функціонали, що задовольняють тотожність $\Phi(f) = \Phi(f \circ (\varphi \times \varphi))$ для кожної ізометрії $\varphi \in Iso(X, \hat{d})$ [38].

Розглянемо найпростіший випадок — скінченного $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, де $n \geqslant 2$, з дискретною ультраметрикою

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$

Тоді $Iso(X, \hat{d})$ — це група перестановок множини X. Як було показано при доведенні Твердження 4.6.7, підпростір $S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ породжується множиною псевдоультраметрик вигляду

$$\rho_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x,y) = \begin{cases} 0, & x, y \in \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\} \text{ або } x, y \notin \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}, \\ 1 & \text{— інакше,} \end{cases}$$

де $x, y \in X$, $0 < k < n$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Очевидно, що для довільних $x_i, x_j \in X$ існує бієкція $\varphi \in Iso(X, \hat{d})$, для якої $\varphi(x_i) = x_j$. Тоді $\rho_j \circ (\varphi \times \varphi) = \rho_i$, звідки для $Iso(X, \hat{d})$-симетричного функціонала Φ випливає $\Phi(\rho_i) = \Phi(\rho_j)$. Аналогічно доводиться, що всі значення $\Phi(\rho_{i_1 i_2 \dots i_k})$ для фіксованого k збігаються.

Розглянемо суму

$$f_k(x, y) = \sum \left\{ \rho_{x_{i_1} i_2 \dots i_k}(x, y) \;\middle|\; 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n \right\}$$

для всіх $x, y \in X$. Ця сума містить C_n^k доданків, є нульовою при $x = y$ і дорівнює $2C_{n-2}^{k-1}$ при $x \neq y$, тобто збігається зі значеннями ультраметрики $2C_{n-2}^{k-1} \cdot \hat{d}$. Отже,

$$\Phi(f_k) = C_n^k \Phi(\rho_{i_1 i_2 \dots i_k}) = 2C_{n-2}^{k-1} \Phi(\hat{d}),$$

звідки

$$\Phi(\rho_{i_1 i_2 \dots i_k}) = \frac{2C_{n-2}^{k-1}}{C_n^k} \Phi(\hat{d}) = \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} \Phi(\hat{d}).$$

Зокрема,

$$\Phi(\rho_{i_1}) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} \Phi(\hat{d}), \qquad \Phi(\rho_{i_1 i_2}) = \frac{4(n-2)}{n(n-1)} \Phi(\hat{d}).$$

Твердження 4.8.1. *Якщо $\hat{d}$ — дискретна ультраметрика на скінченній множині $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, де $n \geqslant 2$, а $\Phi : S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — $Iso(X, \hat{d})$-симетричний функціонал, то його значення для довільної $f \in S_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ визначене формулою*

$$\Phi(f) = \frac{2}{n(n-1)} \Phi(\hat{d}) \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f(x_i, x_j)$$

Доведення. Використаємо означені раніше функції $\varphi_{ij} : X \times X \to \mathbb{R}$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$, задані формулами

$$\varphi_{ij}(a, b) = \begin{cases} 1, & a = x_i, b = x_j \text{ або } a = x_j, b = x_i, \\ 0 & \text{— інакше,} \end{cases} \qquad a, b \in X.$$

Нагадаємо, що ці функції можна подати як лінійні комбінації ультрапсевдометрик: $\varphi_{ij}(a,b) = \frac{1}{2}(\rho_i(a,b) + \rho_j(a,b) - \rho_{ij}(a,b))$, звідки маємо

$$\Phi(\varphi_{ij}) = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{2(n-1)}{n(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n(n-1)}\right)\Phi(\hat{d}) = \frac{2}{n(n-1)}\Phi(\hat{d}).$$

Це узгоджується з рівністю $\hat{d} = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varphi_{ij}$, у якій справа маємо $\frac{n(n-1)}{2}$ доданків.

Тепер досить врахувати рівність

$$f(a,b) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f(x_i, x_j) \cdot \varphi_{ij}(a,b) \text{ для кожних } a, b \in X$$

та лінійність функціонала Φ. □

Висновки до розділу 4

(1) Охарактеризовано множини, які є підграфіками і надграфіками компактних псевдоультраметрик, і запроваджено відстані між компактними псевдоультраметриками як відстань Гаусдорфа між їх підграфіками та відстань Гаусдорфа між їх надграфіками.

(2) Доведено, що множина всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що передують фіксованій компактній псевдометриці на X, з введеною через підграфіки метрикою є метричним компактом, і ця метрика топологічно еквівалентна до метрики рівномірної збіжності.

(3) Доведено співвідношення між метрикою на основі метрики Гаусдорфа і метрикою рівномірної збіжності на множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, і показано, що метрика рівномірної збіжності є граничним випадком метрик, означених через підграфіки.

(4) Введено аналог ультраметрики Гартоґа-де Вінка між компактними ультрапсевдометриками, і доведено, що ця ультраметрика є граничним випадком метрик, означених через надграфіки.

(5) Показано, що множина всіх псевдоультраметрик, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, у банаховому просторі неперервних щодо неї функцій двох змінних з нормою рівномірної збіжності у загальному випадку не породжує замкнений конус псевдометрик, але породжує замкнений підпростір симетричних функцій, що перетворюються у нуль при рівних аргументах.

(6) Показано, що множина невід'ємних функцій двох змінних, неперервних щодо даної компактної псевдоультраметрики, є повним нормованим ідемпотентним векторним простором, у якому компактні псевдоультраметники, неперервні щодо даної, утворюють замкнений підпростір, породжений множиною псевдометрик, заданих розбиттями на дві відкрито-замкнені підмножини.

Результати четвертого розділу опубліковано в статтях [38, 39], а також доповідалися на конференціях [36, 37] і наукових семінарах.

ВИСНОВКИ

У цій дисертаційній роботі отримані наступні наукові результати:

— Доведено, що множина всіх псевдометрик на довільній фіксованій множині X з поточковим впорядкуванням є умовно повною недистрибутивною граткою, а множина всіх метрик на $X = [0, 1]$ не є напрямленою вниз, тому не є нижньою напівграткою, а тим більше граткою.

— Описано відношення апроксимації знизу на множині всіх псевдометрик на скінченній множині X і доведено, що, якщо нетривіальна псевдометрика d_0 на нескінченній множині X апроксимує знизу псевдометрику d на X, то d обмежена, а d_0 розбиває X на скінченну кількість класів еквівалентності, які щодо d є відкрито-замкненими.

— Доведено, що жодні дві псевдометрики на нескінченній множині X не перебувають у відношенні апроксимації згори у множині всіх псевдометрик на X, а у підмножині всіх псевдометрик на X, значення яких не перевищують фіксованого $a > 0$, кожний елемент є точною нижньою гранню напрямленої вниз множини елементів, що апроксимують його згори.

— Описано граткові операції у поточково впорядкованій множині всіх псевдоультраметрик на фіксованій множині X і доведено, що підмножини всіх компактних псевдоультраметрик і всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X не є напрямленими вгору.

— Доведено, що у множині компактних псевдоультраметрик на довільній множині X інфімум двох елементів дистрибутивний щодо супремума довільної кількості елементів, а для множин всіх псевдоультраметрик на зліченній множині X та всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X ця властивість не виконана.

— Доведено, що некомпактну псевдоультраметрику на довільній множині X у множині всіх псевдоультраметрик на X чи у множині всіх локально компактних псевдоультраметрик на X апроксимує знизу тільки тривіальна псевдометрика.

— За допомогою допоміжного відношення "бути слабко значно нижче" отримано необхідні і достатні умови того, що компактна псевдоультраметрика d_0 апроксимує знизу компактну псевдоультраметрику d_1, і доведено, що кожна компактна псевдоультраметрика є точною верхньою гранню напрямленої вгору множини компактних псевдоультраметрик, що апроксимують її знизу.

— Доведено, що жодна компактна псевдоультраметрика на нескінченній множині X не апроксимує згори компактну псевдоультраметрику на цій множині.

— Отримано опис відношення апроксимації згори і алгоритм побудови апроксимуючих згори елементів у множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, з чого випливає двонеперервність цієї частково впорядкованої множини.

— Охарактеризовано множини, які є підграфіками компактних псевдоультраметрик, і запроваджено відстань між компактними псевдоультраметриками як відстань Гаусдорфа між їх підграфіками.

— Доведено, що множина всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що передують фіксованій компактній псевдометриці на X, з введеною метрикою є метричним компактом, і ця метрика топологічно еквівалентна до метрики рівномірної збіжності.

— Доведено співвідношення між метрикою на основі метрики Гаусдорфа і метрикою рівномірної збіжності на множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, і метрика рівномірної збіжності є граничним випадком метрик, означених через підграфіки.

— Показано, що визначена вказаними метриками топологія на множині всіх псевдоультраметрик, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, є повною граткою, на якій топологія Лоусона і двоїста топологія Лоусона збігаються.
— Доведено, що граничним випадком означених через надграфіки метрик на множині компактних псевдоультраметрик є ультраметрика Гартоґа-де Вінка.
— Показано, що у загальному випадку множина компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо даної компактної псевдоультраметрики, у банаховому просторі неперервних функцій двох змінних не породжує конус псевдометрик, але породжує замкнений підпростір симетричних функцій, що перетворюються у нуль при двох однакових аргументах.
— Показано, що множина компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо даної компактної псевдоультраметрики, є замкненим підпростором у ідемпотентному нормованому просторі невід'ємних неперервних функцій двох змінних, породженим множиною псевдоультраметрик, визначених розбиттями на дві відкрито-замкнені множини.

Результати роботи є внеском у дослідження метричних структур та утворених ними просторів і дозволяють поєднувати порядкові підходи та вибір метризації при наближеному розв'язанні задач класифікації. У подальшому можливі дослідження у напрямку послаблень властивостей псевдометрик (з переходом до квазіметрик, метаметрик, преметрик, тощо) та розгляду симетричних функціоналів на банахових просторах, породжених множинами псевдометрик.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alimov A., Tsarkov I. Geometric Approximation Theory, Springer Monographs in Mathematics// London: Springer.— 2022.
2. Banakh T. *AE(0)-spaces and regular operators extending (averaging) pseudometrics* // Bull. Polon. Acad. Sci. Ser. Sci. Math. — 1994. — 42, 197–206.
3. Banakh T., Bessaga Cz. *On linear operators extending [pseudo]metrics*// Bull. Polish Acad. Sci. Math. — 2000. — 48(1), 35—49.
4. Birkhoff G. Lattice theory// Providence, R.I.: AMS. — 1940.
5. Cencelj M., Repovš D., Zarichnyi M. *Max-min measures on ultrametric spaces*// Topology Appl. — 2013. — 160(5), 673–681.
6. Collatz L. Functional Analysis and Numerical Mathematics// New York, San Francisco, London: Academic Press.— 1966.
7. Dijkstra E.W. *Guarded commands, non-determinacy and formal derivation of programs*// Comm. of the ACM.— 1975.— 18(8), 453–457.
8. Edalat A. *Domains for computation in mathematics, physics and exact real arithmetic*// Bull. Symb. Logic.— 1997. — 3(4), 401–452.
9. Engelking, R. General Topology// Warsaw: PWN.— 1977.
10. Erker T., Escardó M.H., Keimel K. *The way-below relation of function spaces over semantic domains*// Topology Appl. — 1998.— 89(1–2), 61–74.
11. Erné M. *Z-distributive function spaces*// Hannover: Leibnitz University. — 1998. (Preprint / Leibnitz University Hannover).
12. Gau W.L., Buehrer D.J. *Vague sets*// IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1993. — 23, 610–614.

13. Gierz G. Continuous Lattices and Domains / Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S. London: Cambridge University Press. — 2003.
14. de Groot J. *Non-archimedean metrics in topology*// Proc. Amer. Math. Soc.— 1956.— 7, 948–953.
15. Hartog J.I., de Vink E.P. *Building metric structures with the Meas functor*// Liber Americorum Jaco de Bakker, F. de Boer, M. van der Heijden, P. Klint and J. Rutten (eds.). Amsterdam: CWI. — 2002.— 93-–108.
16. Hubal O. *Capacity functor on the category of ultrametric spaces*// Mat. Stud. — 2009.— 32, 132–139.
17. Hubal O., Zarichnyi M. *Probability measure monad on the category of ultrametric spaces*// Appl. Gen. Topol. — 2008.— 9(2), 229-237.
18. Kelley J. L. *General Topology*// New York: Van Nostrand. — 1955.
19. Krötzsch M. *Generalized ultrametric upaces in quantitative domain theory*// Theor. Comput. Sci. — 2006. — 368, 30–49.
20. Kurepa Đ. *Tableaux ramifiés d'ensembles, espaces pseudodistanciés*// C. R. Acad. Sci. Paris. —1934.— 198, 1563–1565.
21. Lawson J.D. *Topological semilattices with small semilattices*// J. Lond. Math. Soc. —1969.— 11, 719–724.
22. Lawson J.D. *Idempotent analysis and continuous semilattices*// Theor. Comp. Sci. — 2004— 316, 75–87.
23. Legendre P., Legendre L. *Numerical Ecology, 3rd ed.*// Developments in Environmental Modelling 24. Amsterdam: Elsevier.— 2012.
24. Lemin A.J. *Spectral decomposition of ultrametric spaces and topos theory*// Topol. Proc. —2001–2002.— 26, 721–739.
25. Li T.J. *Rough approximation operators on two universes of discourse and their fuzzy extensions* // Fuzzy Sets and Systems.— 2008.— 159, 3033–3050.

26. Lin T.Y. *Neighborhood systems: a qualitative theory for fuzzy and rough sets*// Advances in Machine Intelligence and Soft Computing. 1997, 4, 132–155.
27. Litvinov G.L. *Idempotent functional analysis: An algebraic approach* // Mat. Zametki. — 2001. — 69(5). — 758–797.
28. McWaters M.M. *A note on topological semilattices*// J. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1969, 1(4), 64–66.
29. Michael E. *Topologies on spaces of subsets*// Trans. Amer. Math. Soc. — 1951.— 71, 152–182.
30. Mikhailov M.E. *Decompositions of finite pseudometric spaces*// Mathematical Notes. — 1998.— 63(2), 225–234.
31. Monna A.F. *Remarques sur les metriques non-archimediennes*// II. (French) Nederl. Akad. Wetensch. Proc.— 1950.— 53, 625–637 = Indagationes Math. 1950, 179–191.
32. Murtagh F. *Ultrametric model of mind, I: Review*// p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. — 2012.— 1–3, 207–221.
33. Murtagh F. *Ultrametric and generalized ultrametric in logic and in data analysis* // in T.S. Clary, Ed., *Horizons in Computer Science*, Volume 2, pp. 251-267, Nova Science Publishers. – 2011.
34. Naylor A.W., Sell G.R. *Linear Operator Theory in Engineering and Science*// Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. — 1982.
35. Nykorovych S.I. *Approximation relations on the posets of pseudometrics and of pseudoultrametrics* // Carpathian Math. Publ. — 2016. — 8(1) — C. 150–157. Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.15330/cmp.8.1.150-157
36. Nykorovych S. *Approximation relations on the posets of pseudoultrametrics*// Сучасні проблеми механіки та математики, 23 – 25 травня, 2023, Львів: тези доп. 2023, 8(1), 425.

37. Nykorovych S. *Approximation in Partially Ordered Sets of Pseudoultrametrics* // International Workshop On Current Trends In Analysis And Approximation Theory, July 18, Rome, Italy: Proc. Book. — Rome, 2023. — P. 79.
38. Nykorovych, S. I., Vasylyshyn, T. V. *Symmetric linear functionals on the Banach space generated by pseudometrics*// Matematychni Studii — 62(1), 2024. — 81-92.

    Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.30970/ms.62.1.81-92
39. Nykorovych S., Nykyforchyn O. *Metric and Topology on the Poset of Compact Pseudoultrametrics* //Carpathian Math. Publ. — 2023. — Vol. 15 (2) — P. 321-330.

    Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.15330/cmp.15.2.321-330
40. Nykorovych S.I., Nykyforchyn O.R., Zagorodnyuk, A.V. *Approximation Relations on the Posets of Pseudoultrametrics*// Axioms, 2023. – 12(5). – P.438.

    Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.3390/axioms12050438.
41. Nykyforchyn O.R. *A monad for the inclusion hyperspace functor is unique*. Mat. Stud. 2007, 27, 3–18.
42. Nykyforchyn, O.R. *Capacities with values in compact Hausdorff lattices*// Appl. Categ. Struct. — 2011.— 15, 243–257.
43. Nykyforchyn O.R., Repovš D. *Ambiguous fuzzy representations of sets*// Fuzzy Sets Syst. — 2011.— 173, 25–44.
44. Pawlak Z. *Rough sets*// Int. J. Computer and Information Sciences. — 1982.— 5, 341–356.
45. Pikhurko O. *Extending metrics in compact pairs* // Mat. Studii. — 1994. — 3, 103–106.
46. Radul T. *A functional representation of the hyperspace monad*// Comment. Math. Univ. Carol.— 1997.— 38, 165–168.

47. Raney G.N. *Completely distributive complete lattices*// Proc. Amer. Math. Soc. —1952.— 3, 677–680.

48. van Rooij A.C.M. *Non-Archimedean uniformities*// Kyungpook Math. J. — 1970. — 10, 21–30.

49. Rudin W. Functional Analysis// New York, St. Louis, San Francicso: McGrow-Hill.— 1973.

50. Savchenko A. *Normal functors in the category of ultrametric spaces*// Mathematical bulletin.— 2008.— 5, 274–283.

51. Savchenko A. *Normal functors in the category of non-Archimedean uniform spaces*// Matematychni Studii. — 2009.— 31(2), 165–171.

52. Savchenko A., Zarichnyi M. *Metrization of free groups on ultrametric spaces*// Topology and its Applications. — 2010.— 157(4), 724-729.

53. Savchenko A., Zarichnyi M. *Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces*// Azerbaijan Journal of Mathematics. — 2011.— 1(1), 114-121.

54. Scott D.S., Strachey C. Towards a mathematical semantics for computer languages // Proc. Symp. on Computers and Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, 21. — 1971. — pp. 19—46.

55. Sennott L.I. *Extending complete continuous pseudometrics*// Colloq. Math. — 1979. — 41(2), 237–241.

56. Steen, L.A., Seebach, J.A. Counterexamples in Topology, 2nd ed// New York: Springer-Verlag.— 1978.

57. Sukhorukova Kh., Zarichnyi M. *On spaces of *-measures on ultrametric spaces*// Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math.— 202.— 90, 76–83.

58. Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces// Math. Studies Monograph Series, Vol. 5. Lviv: VNTL Publishers.— 1999.

59. Tymchatyn E.D, Zarichnyi M. *A note on operators extending partial ultrametrics*// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 2005.— 46(3), 515–524.
60. Uglešić N., *On ultrametrics and equivalence relations — duality*// International Mathematical Forum. — 2010.— 5(21), 1037–1048.
61. Vickers S. Topology via Logic// London: Cambridge University Press.— 1996.
62. Vulikh B.Z. Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists// Reading: Addison-Wesley and Pergamon Press. — 1963.
63. Willard S. General Topology// Reading, Menlo Park, London, Don Mills: Addison-Wesley.— 1970.
64. Wyler O. *Algebraic theories of continuous lattices*// Lect. Notes Math. — 1981.— 871, 390–413.
65. Гуран І.Й., Зарічний М.М. Елементи теорії топологічних груп// К.: НМК ВО.— 1996.
66. Никифорчин О.Р. Елементи загальної топології// Івано-Франківськ: Плай. — 2003.
67. Никифорчин О.Р., Никорович С.І., Копорх К.М. *Компактні ультрапсевдометрики та зворотні спектри* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2022. — Вип. 17(64), С. 299–314.

    Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.31471/2304-7399-2022-17(64)-65-74.
68. Никорович С. І., *Порядкові властивості множин псевдометрик*// IXth Summer School. Algebra, Topology and Analysis. Abstracts of Lectures and Report 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези доп.— 2014.— 59-60.
69. Савченко О.Г. *Функтори і розмиті ультраметрики*// Вісник Львівського університету, серія механіко-математична. — 2010.— 72, 255–262.
70. Савченко О. Г. *Ідемпотентні міри і K-ультраметричні простори*// Праці міжнародного геометричного центру. — 2011,— 4(1), 42–49 .

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Никорович С.І. *Порядкові властивості множин псевдометрик* // IXth Summer School. Algebra, Topology and Analysis. Abstracts of Lectures and Report, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези доп. – Поляниця.— 2014. – С. 59-60.
2. Nykorovych S.I. *Approximation relations on the posets of pseudometrics and of pseudoultrametrics*// Carpathian Math. Publ. — 2016. — 8(1), p. 150–157.
3. Никифорчин О.Р., Никорович С.І., Копорх К.М. *Компактні ультрапсевдометрики та зворотні спектри* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2022. — Вип. 17(64), С. 299–314.
4. Nykorovych S.I., Nykyforchyn O.R., Zagorodnyuk, A.V. *Approximation Relations on the Posets of Pseudoultrametrics*// Axioms.— 2023. – 12(5), p.438.
5. Nykorovych S., Nykyforchyn O. *Metric and Topology on the Poset of Compact Pseudoultrametrics* // Carpathian Math. Publ. — 2023. — Vol. 15 (2), p. 321-330.
6. Nykorovych S. *Approximation relations on the posets of pseudoultrametrics* // Сучасні проблеми механіки та математики, 23 – 25 травня, 2023, Львів: тези доп. – Львів. — 2023. – С. 425.
7. Nykorovych S. *Approximation in Partially Ordered Sets of Pseudoultrametrics* // International Workshop On Current Trends In Analysis And Approximation Theory, July 18, Rome, Italy: Proc. Book. — Rome, 2023. — P. 79.
8. Nykorovych, S. I., Vasylyshyn, T. V. *Symmetric linear functionals on the Banach space generated by pseudometrics*// Matematychni Studii — 62(1), 2024. — 81-92.

ДОДАТОК Б

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких конференціях та семінарах:

1. IX-ій літній школі “Алгебра, топологія і аналіз ” (с. Поляниця, Івано-Франківська обл., 7–18 липня 2014 р.);
2. Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, (м. Львів, 23–25 травня 2023 р.);
3. Міжнародному семінарі з сучасних тенденцій в аналізі і теорії наближень (м. Рим, Італія, 18 липня 2023 р.);
4. Звітних науково-практичних конференціях Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2014 – 2016, 2022 – 2024);
5. Наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2012 – 2016, 2021 – 2024);
6. Наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2012 – 2016, 2021 – 2024);
7. Розширеному засіданні кафедри алгебри та геометрії, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 21 жовтня 2024 р.).