Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Никорович Святослав Ігорович

УДК 517.982.272

АПРОКСИМАЦІЇ В ПРОСТОРАХ ПСЕВДОМЕТРИК

01.01.01 — математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Івано-Франківськ – 2024

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, доцент
Никифорчин Олег Ростиславович,
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника,
завідувач кафедри алгебри та геометрії.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Банах Тарас Онуфрійович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри алгебри, топології і основ математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Савченко Олександр Григорович,
Херсонський державний університет,
професор кафедри алгебри, геометрії та
математичного аналізу .

Захист відбудеться 26 лютого 2025 року о 12^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 20.051.09 у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника за адресою: 76000, м. Івано-Франківськ, вул. Чорновола, 88, Науковий парк “Прикарпатський університет”.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за адресою: 76000, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57.

Автореферат розісланий 23 січня 2025 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Роман ДМИТРИШИН

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Основними об'єктами дисертаційного дослідження є псевдометрики, які виникають у різних галузях математики, передусім у функціональному аналізі, зокрема, у теорії топологічних векторних просторів. Вони забезпечують ширшу основу для вивчення просторів із поняттями відстані. Зокрема, псевдометрики є загальнішим випадком метрик - від них не вимагається невиродженості. Згідно з [1] вперше псевдометричні простори були введені югославським математиком Джуро Курепою у 1934 році [2]. Вже у 1955 році Джон Л. Келлі вживає цей термін у своєму підручнику "Загальна топологія" [3]. У 1970 році Стефан Віллард наводить приклади псевдоультраметрик у своїй монографії "Загальна топологія" [4]. Більше прикладів можна знайти у книзі 1978 року Лінна Стіна та Дж. Артура Сібаха молодшого "Контрприклади в топології" [5].

У функціональному аналізі псевдометрики використовуються для означення топологічних векторних просторів, зокрема в контексті теорії локально опуклих просторів. Коли топологія генерується з використанням сімейства псевдометрик, простір називається калібрувальним простором [6]. Часто вживану так звану метрику Мінковського, яка насправді є псевдометрикою, у фізиці називають метрикою Лоренца. У теорії відносності псевдометрики використовуються, щоб визначити N-вектори енергії та імпульсу [7].

Псевдоультраметрики [8], з одного боку, є частковим випадком псевдометрик з посиленою нерівністю трикутника, а, з іншого, є узагальненням ультраметрик (чи не-

---

[1] Collatz L. *Functional Analysis and Numerical Mathematics*/San Francisco, London: Academic Press, — 1966. — P. 51.

[2] Kurepa Đ. *Tableaux ramifiés d'ensembles, espaces pseudodistanciés.*// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1934. — 198, — P. 1563–1565

[3] Kelley J. L. *General Topology.*// New York: Van Nostrand. — 1955

[4] Willard S. *General Topology.*// Reading, Menlo Park, London, Don Mills: Addison-Wesley. — 1970

[5] Steen, L.A., Seebach, J.A. *Counterexamples in Topology, 2nd ed.*// New York: Springer-Verlag. — 1978

[6] Naylor A.W., Sell G.R. *Linear Operator Theory in Engineering and Science*// Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. — 1982.

[7] Vulikh B.Z. *Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists.*// Reading: Addison-Wesley and Pergamon Press. — 1963.

[8] Uglešić N. *On ultrametrics and equivalence relations — duality*// International Mathematical Forum. — 1978 —5(21)—P. 1037–1048.

архімедових метрик [9], [10], яке послаблює вимогу невиродженості. Псевдо(ультра)-метрика на множині може розглядатися як деревоподібна класифікація її елементів, що призводить до застосувань у таких галузях, як таксономія та побудова філогенетичних дерев [11]. Ультраметрики довели свою корисність при аналізі складних систем, таких як мережі та соціальні структури [12]. Їх можна розглядати як засіб зображення "багаторівневих" грубих множин [13], [14]. Вони природно пов'язані з неархімедовими рівномірними структурами [15], [16].

Корені теорії ультраметричних просторів знаходяться в комп'ютерних науках, тому зрозуміло, що псевдоультраметричні простори мають застосування в дослідженні абстрактних типів даних та алгоритмів. Як було вказано М. Кроцшем [17], "Теорія областей та теорія метричних просторів - це два центральні інструменти у вивченні денотаційної семантики в комп'ютерних науках."

Інший згаданий у тому ж джерелі інструмент денотаційної семантики є розділом теорії порядку. Виявилося [18], що часткові порядки тісно пов'язані з топологіями. Для того, щоб ці топології мали гарні властивості, вихідний порядок повинен відповідати певним вимогам, головним чином пов'язаним з відносинами наближен-

---

[9] Monna A.F. *Remarques sur les metriques non-archimediennes*// II. (French) Nederl. Akad. Wetensch. Proc. — 1950 —53—P. 625–637.

[10] Савченко О. Г. *Ідемпотентні міри і K-ультраметричні простори*// Праці міжнародного геометричного центру. — 2011 — 4(1)—P. 42–49.

[11] Legendre P., Legendre L. *Numerical Ecology, 3rd ed.*// Developments in Environmental Modelling 24. Amsterdam: Elsevier,. — 2012.

[12] Murtagh F. *Ultrametric model of mind, I: Review*// p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. — 2012 — 1–3 —P. 207–221.

[13] Gau W.L., Buehrer D.J. *Vague sets*// IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1993 — 23 —P. 610–614.

[14] Pawlak Z. *Rough sets.*// Int. J. Computer and Information Sciences. — 1982 — 5 —P. 341–356.

[15] van Rooij A.C.M. *Non-Archimedean uniformities*// Kyungpook Math. J. — 1970 — 10 —P. 21–30.

[16] Savchenko A. *Normal functors in the category of non-Archimedean uniform spaces.*// Matematychni Studii. — 2009 — 31(2) —P. 165–171.

[17] Krötzsch M. *Generalized ultrametric upaces in quantitative domain theory*// Theor. Comput. Sci. — 2006 — 368 —P. 30–49.

[18] Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S. *Continuous Lattices and Domains*// London: Cambridge University Press — 2003.

ня і названими “неперервністю” в теорії областей. Наприклад, було обгрунтовано [19] , [20] , чому множини інформаційних станів повинні бути частково впорядкованими і неперервними. Ці вимоги виконуються багатьма природними частковими порядками, наприклад, на множинах замкнених підмножин фіксованих топологічних просторів [21], [22], на множинах гіперпросторів включення [23], на множинах ємностей [24] і т.д. Це мало плідні наслідки для топологічних та алгебраїчних властивостей цих множин.

Для нас є цінним, що теорія областей пропонує гармонійний “порядковий” підхід до апроксимації, що доповнює традиційний, опертий на метричні структури [25]. Хоча у функціональному аналізі, зокрема, у теорії просторів Ріса (векторних граток) розглядаються збіжності, означені через порядок [26], теорія областей нарешті надає порядковій збіжності завершений вигляд. Зокрема, саме вона є природною для опису наближення (псевдо-)метричних структур, якщо ми розуміємо їх як засіб класифікації.

Практично важливими є не тільки окремі псевдометрики, а й їх множини, наділені додатковою структурою (метрикою та/чи порядком) і вкладені у нормовані або топологічні векторні простори, що вписує їх у контекст функціонального ана-

---

[19] Dijkstra E.W. *Guarded commands, non-determinacy and formal derivation of programs.*// Comm. of the ACM. — 1975 — 18(8) —P. 453–457.

[20] Edalat A. *Domains for computation in mathematics, physics and exact real arithmetic..*// Bull. Symb. Logic. — 1997 — 3(4) —P. 401–452.

[21] Michael, E. *Topologies on spaces of subsets.*// . Trans. Amer. Math. Soc. — 1951 — 71 —P. 152–182.

[22] Radul T. *A functional representation of the hyperspace monad.*// Comment. Math. Univ. Carol. — 1997 — 38 —P. 165–168.

[23] Nykyforchyn, O.R. *Capacities with values in compact Hausdorff lattices.*// Appl. Categ. Struct.— 2011 — 15 —P. 243–257.

[24] Nykyforchyn, O.R. *A monad for the inclusion hyperspace functor is unique.*// Mat. Stud.— 2007 — 27 —P. 3–18.

[25] Alimov A., Tsarkov I. *Geometric Approximation Theory, Springer.*// Monographs in Mathematics. London: Springer — 2022.

[26]Vulikh B.Z. *Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists..*// Reading: Addison-Wesley and Pergamon Press, — 1963.

лізу. Т. Банах, Ч. Бессага [27], О. Піхурко [28], Е. Тимчатин і М. Зарічний [29] та інші отримали серію результатів про лінійні неперервні оператори, що продовжують чи усереднюють псевдометрики.

Тому логічним є застосування апарату функціонального аналізу та теорії областей до природно (тобто поточково) упорядкованих множин метрик або структур, схожих на метрики. Обґрунтовано, що найбільш підходящим класом для цього підходу є псевдоультраметрики. Категорії ультраметрик вже досліджувалися [30]але властивості порядку, особливо з точки зору апроксимації, та властивості множин (псевдо-)ультраметрик, природно вкладених у нормовані простори, ще не були вивчені, як і замкнені конуси та замкнені векторні підпростори, породжені цими вкладеннями.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, що увійшли в основу дисертації, проводились на кафедрі математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національний університет імені Василя Стефаника в рамках науково-дослідної теми «Дослідження алгебр, породжених симетричними поліноміальними та раціональними відображеннями у банахових просторах» (номер державної реєстрації 0123U101791).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження пов'язаних з відношеннями апроксимації метричних, топологічних та порядкових властивостей частково впорядкованих множин псевдометрик на фіксованих множинах та вкладень цих множин у нормовані векторні простори.

Досягнення поставленої мети пов'язане із розв'язанням наступних *завдань*:

– дослідження відношень апроксимації (неперервність, двоїста неперервність) у просторі псевдометрик $Ps(X)$;
– дослідження відношень апроксимації (неперервність, двоїста неперервність) у просторі псевдоультраметрик $PsU(X)$ та його підпросторах;
– дослідження властивостей топологій на псевдоультраметрик, що визначаються частковим порядком, та їх зв'язків з нормою рівномірної збіжності та метрикою Гаусдорфа;
– дослідження породжених множинами псевдоультраметрик замкнених підпросторів і конусів у нормованих просторах неперервних функцій.

---

[27] Banakh T., Bessaga Cz. *On linear operators extending [pseudo]metrics*// Bull. Polish Acad. Sci. Math. — 2000. — 48(1), 35—49.

[28] Pikhurko O. *Extending metrics in compact pairs* // Mat. Studii. — 1994. — 3, 103–106.

[29]Tymchatyn E.D, Zarichnyi M. *A note on operators extending partial ultrametrics*// Comment. Math. Univ. Carolinae. — 2005.— 46(3), 515–524.

[30] Lemin A.J. *Spectral decomposition of ultrametric spaces and topos theory.*// Topol. Proc. — 2001–2002 — 26 —P. 721–739.

Об'єктом дослідження є підмножини з заданими властивостями простору псевдометрик.

Предметом дослідження є властивості частково впорядкованих підмножин простору псевдометрик, а також відображень та відношень між цими об'єктами.

Методи дослідження. У процесі виконання дисертаційної роботи використані методи функціонального аналізу та теорії неперервних областей.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, є новими. У дисертації вперше:

- Описано порядкові властивості множини $Ps(X)$ усіх псевдометрик на фіксованій множині X та множини $PsU(X)$ усіх псевдоультраметрик на фіксованій множині X.

- Доведено, що частково впорядковані множини $Ps(X)$ і $PsU(X)$ не мають нетривіальних апроксимаційних відношень, отже, не є неперервними або двоїсто неперервними, а множина $Ps(X)$ навіть не є browse граткою.

- Доведено, що частково впорядкована множина $CPsU(X)$ (множина усіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X) неперервна.

- Встановлено, що наближення псевдоультраметрик (в сенсі теорії порядку) ефективне тільки у випадку компактних псевдоультраметрик.

- Встановлено, які класи псевдометрик на фіксованих множинах є неперервними та двоїсто неперервними.

- Отримано спосіб побудови компактних псевдоультраметрик значно нижче або значно вище заданої і як завгодно близьких до неї.

- Для фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на множині X запропоновано методи метризації множини $\hat{d}\uparrow$ усіх компактних псевдоультраметрик на X, менших або рівних $\hat{d}$, і доведено, що вони (за винятком метрики Гартоґа-де Вінка) є топологічно еквівалентними.

- Встановлено, що компактні псевдоультраметрики, неперервні щодо даної компактної псевдоультраметрики на фіксованій множині, утворюють повний нормований ідемпотентний векторний простір, породжують банахів простір симетричних неперервних функцій двох змінних, рівних нулю на діагоналі, але у загальному випадку не породжують додатній конус у цьому просторі.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати у теорії наближень та денотаційній семантиці мов програмування.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. У статті [3] співавторам належить огляд літератури, постановка задачі та участь у редагуванні статті. У статті [4] співавторам належить огляд літератури, постановка задачі та участь у редагуванні і перегляді статті. У статтях [5,8] співавтору належить огляд літератури та постановка задачі.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації апробовано на таких наукових конференціях та семінарах:

1. IX-ій літній школі “Алгебра, топологія і аналіз ” (с. Поляниця, Івано-Франківська обл., 7–18 липня 2014 р.);
2. Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, (м. Львів, 23–25 травня 2023 р.);
3. Міжнародному семінарі з сучасних тенденцій в аналізі і теорії наближень (м. Рим, Італія, 18 липня 2023 р.);
4. Звітних науково-практичних конференціях Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2014 – 2016, 2022 – 2024);
5. Наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2012 – 2016, 2021 – 2024);
6. Наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2012 – 2016, 2021 – 2024);
7. Розширеному засіданні кафедри алгебри та геометрії, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 21 жовтня 2024 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 8 наукових працях: 5 статтях [2,3,4,5,8], з яких 3 ([4,5,8]) включені до наукометричних баз Scopus та Web of Science Core Collection (1 стаття [4] у періодичному закордонному виданні і 1 стаття [5] у періодичному вітчизняному виданні, віднесених відповідно до третього квартиля (Q3) та другого квартиля (Q2) згідно класифікації SCImago Journal Rank), та 3 тезах конференцій різного рівня ([1,6,7]).

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 70 найменувань, та додатків на 2 сторінках. Обсяг основного тексту дисертації – 130 сторінок, обсяг списку використаних джерел – 6 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, встановлено зв’язок роботи з науковими темами. Сформульовано мету та завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів. Подано список публікацій та інформацію про апробації результатів дисертаційної роботи.

У **першому розділі** наведено необхідні відомості з теорії областей та метричних просторів, зокрема, означення топологій Скотта та Лоусона, відношення апроксимації, тощо згідно джерел [31], [32], [33].

Означення 1.1.1. *Відображення* $d : X \times X \to \mathbb{R}$, *яке задовольняє умови:*

(1) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geqslant 0$ *(невід'ємність);*
(2) $\forall x \in X \quad d(x, x) = 0$ *(тотожність);*
(3) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ *(симетрія);*
(4) $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leqslant d(y, z) + d(z, x)$ *(нерівність трикутника),*

називаємо псевдометрикою на множині X, *а пару* (X, d) — *псевдометричним простором.*

Якщо друга умова виконана у сильнішій формі

(2^+) $\forall x, y \in X \quad \big(d(x, y) = 0 \iff x = y\big)$,

то d *називаємо метрикою на* X, *а* (X, d) — *метричним простором.*

Означення 1.1.2. *Метрику* $d : X \times X \to \mathbb{R}$, *для якої виконано посилену нерівність трикутника*

(4^+) $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leqslant \max\{d(y, z), d(z, x)\}$,

називаємо ультраметрикою.

Одними з центральних об'єктів дослідження будуть псевдоультраметрики (які також називають ультрапсевдометриками) — "гібриди" псевдометрик та ультраметрик:

Означення 1.1.3. *Відображення* $d : X \times X \to \mathbb{R}$, *яке задовольняє умови:*

(1) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geqslant 0$ *(невід'ємність);*
(2) $\forall x \in X \quad d(x, x) = 0$ *(тотожність);*
(3) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ *(симетрія);*
(4^+) $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leqslant \max\{d(y, z), d(z, x)\}$ *(посилена нерівність трикутника),*

називаємо псевдоультраметрикою на множині X, *а пару* (X, d) — *псевдоультраметричним простором.*

Означення 1.2.11. *Частково впорядковану множину* $(X, \leqslant)$ *називаємо повною нижньою (верхньою) напівграткою, якщо існує* $\inf$ $(\sup)$ *для будь-якої непорожньої підмножини* $A \subset X$.

---

[31] Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S. *Continuous Lattices and Domains*// London: Cambridge University Press — 2003.

[32] Krötzsch M. *Generalized ultrametric upaces in quantitative domain theory*// Theor. Comput. Sci. — 2006 — 368 —P. 30–49.

[33] Uglešić N. *On ultrametrics and equivalence relations — duality*// International Mathematical Forum. — 1978 —5(21)—P. 1037–1048.

Означення 1.2.12. *Частково впорядкована множина, яка одночасно є повною нижньою напівграткою і повною верхньою напівграткою, називається умовно повною граткою.*

Дещо слабші поняття:

Означення 1.2.13. *Частково впорядковану множину* $(X, \leqslant)$ *називаємо умовно повною нижньою (верхньою) напівграткою, якщо існує* $\inf$ ($\sup$) *для будь-якої непорожньої обмеженої знизу (згори) підмножини* $A \subset X$.

Означення 1.2.14. *Частково впорядкована множина, яка одночасно є умовно повною нижньою напівграткою і умовно повною верхньою напівграткою, називається умовно повною граткою.*

Означення 1.2.15. *Піднапівграткою нижньої (верхньої) напівгратки* $(S, \leqslant)$ *називається довільна така її підмножина* S_0, *що для кожних* $x, y \in S_0$ *інфімум* $x \wedge y$ *(відповідно супремум* $x \vee y$*) теж належить до* S_0.

Означення 1.2.16. *Підграткою гратки* $(L, \leqslant)$ *називається довільна її підмножина* L_0, *що є нижньою і верхньою піднапівграткою* L.

Означення 1.2.17. *Кажемо, що частково впорядкована множина* $(D, \leqslant)$ *напрямлена (чи спрямована) вгору (вниз), якщо для для будь-яких* $d_1, d_2 \in D$ *знайдеться таке* $d \in D$, *що* $d_1, d_2 \leqslant d$ *(відповідно* $d_1, d_2 \geqslant d$*).*

Напрямлені вниз множини також називають “фільтрованими” (filtered), тоді напрямлені вгору називають просто “напрямленими” (directed).

Означення 1.2.18. *Нехай* $d_1, d_2 \in Ps(X)$ *і* $d_1 \leqslant d_2$. *Тоді кажемо, що* d_1 *перебуває у відношенні way below (значно нижче) з* d_2 *(пишемо* $d_1 \ll d_2$ *і кажемо також, що* d_1 *апроксимує чи наближає* d_2 *знизу), якщо будь-якої напрямленої вгору множини* $D \subset Ps(X)$, *такої, що* $d_2 \leqslant \sup D$, *знайдеться таке* $d \in D$, *що* $d_1 \leqslant d$.

Означення 1.2.19. *Нехай* $d_1, d_2 \in Ps(X)$ *і* $d_2 \geqslant d_1$. *Тоді кажемо, що* d_1 *перебуває у відношенні way above (значно вище) з* d_2 *(пишемо* $d_2 \gg d_1$ *і кажемо також, що* d_2 *апроксимує чи наближає* d_1 *згори), якщо будь-якої напрямленої вниз множини* $D \subset Ps(X)$, *такої, що* $d_1 \geqslant \inf D$, *знайдеться таке* $d \in D$, *що* $d_2 \geqslant d$.

Зрозуміло, що і з $d_1 \ll d_2$, і з $d_2 \gg d_1$ випливає $d_1 \leqslant d_2$, але у загальному зворотна імплікація є хибною.

Означення 1.2.20. *Частково впорядковану множину* $(X, \leqslant)$ *називаємо неперервною, якщо для кожного елемента* $x \in X$ *множина* $x \Downarrow$ *всіх елементів, що апроксимують* x *знизу, є напрямленою вгору, і її точна верхня грань дорівнює* x.

Означення 1.2.21. *Частково впорядковану множину $(X, \leqslant)$ називаємо двоїсто неперервною, якщо для кожного елемента $x \in X$ множина $x \Uparrow$ всіх елементів, що апроксимують x згори, є напрямленою вниз, і її точна нижня грань дорівнює x.*

Означення 1.2.22. *Частково впорядковану множину $(X, \leqslant)$, яка одночасно є неперервною і двоїсто неперервною, називаємо двонеперервною.*

У **другому розділі** розглянуто порядкові властивості множини псевдометрик.

На множині $\mathbf{Ps}(X)$ всіх псевдометрик на множині X введемо відношення нестрогого порядку природним чином (поточково): псевдометрика d_1 передує (менша або рівна) псевдометриці d_2, якщо для будь-яких двох точок $x, y \in X$ виконано $d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)$.

Лема 2.1.1. *Нехай $d_1, d_2 \in Ps(X)$. Тоді наступна функція є псевдометрикою:*

$$d_*(x, y) = \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} \min\{d_1(t_k, t_{k+1}), d_2(t_k, t_{k+1})\} | n \in \mathbb{N},$$
$$x = t_0,\ t_1, ..., t_{n-1} \in X,\ t_n = y\} \in Ps(X).$$

Лема 2.1.2. *Нехай $d_1, d_2 \in Ps(X)$. Тоді побудована вище псевдометрика d_* є інфімумом для d_1, d_2 у $\mathbf{Ps}(X)$.*

У **підрозділі 2.1** доведено, що множина всіх псевдометрик на довільній фіксованій множині X з поточковим впорядкуванням є умовно повною недистрибутивною граткою, а множина всіх метрик на $X = [0, 1]$ не є напрямленою вниз, тому не є нижньою напівграткою, а тим більше граткою.

У **підрозділі 2.2** описано відношення апроксимації знизу на множині всіх псевдометрик на скінченній множині X і доведено, що, якщо нетривіальна псевдометрика d_0 на нескінченній множині X апроксимує знизу псевдометрику d на X, то d обмежена, а d_0 розбиває X на скінченну кількість класів еквівалентності, які щодо d є відкрито-замкненими.

Теорема 2.2. *Для того, щоб псевдометрики d_0 і d на деякій скінченній множині X перебували у відношенні "значно нижче" у $Ps(X)$, необхідно і достатньо, щоб для кожних $x, y \in X$ було виконано або $d_0(x, y) = d(x, y) = 0$, або $d_0(x, y) < d(x, y)$.*

На жаль, умови Теореми 2.3 недостатні (хоча й необхідні) для випадку псевдометрик на *нескіченній* множині.

Теорема 2.3. *Нехай X — нескінченна множина. Якщо псевдометрики d_0, d на X перебувають у відношенні "значно нижче" у $Ps(X)$, і d_0 є нетривіальною, то виконано:*

1) класи еквівалентності щодо псевдометрики d_0 є відкрито-замкненими щодо d, і їх кількість є скінченною;

2) існує таке $\delta > 0$, що для кожних $x, y \in X$ виконано або $d_0(x, y) = 0$, або $d(x, y) \geqslant d_0(x, y) + \delta$;

3) псевдометрика d є обмеженою.

Наслідок 2.2.18. *Якщо простір X з псевдометрикою d є зв'язним, то єдиною псевдометрикою значно нижче d є антидискретна (тривіальна).*

Наприклад, нульова псевдометрика є єдиною, яка на $\mathbb{R}$ є значно нижче від стандартної метрики.

Опис відношення "значно вище" на $\mathbf{Ps}(X)$ для *скінченної* множини X тривіальний і аналогічний до Теореми 2.2 для відношення "значно нижче". Однак для нескінченної множини ситуація суттєво змінюється.

Теорема 2.4. *Жодні псевдометрики d, d_1 на нескінченній множині X не перебувають у відношенні "значно вище" у* $\mathbf{Ps}(X)$.

Теорема 2.5. *Множина $\mathbf{Ps}_a(X)$ всіх псевдометрик на множині X, значення яких не перевищують фіксованого додатного числа a, є двоїсто неперервною.*

Часткові порядки на множинах псевдометрик мають досить бідні відношення апроксимації і не становлять значного інтересу з погляду теорії областей. Для існування нетривіального наближення знизу псевдометрика повинна бути обмеженою, а верхньою гранню своїх апроксимацій знизу вона може бути тільки тоді, коли визначає цілком незв'язну топологію. Тому в подальшому ми знайдемо класи з цікавішими властивостями.

У **третьому розділі** розглядються псевдоультраметрики, зокрема, у підрозділі 3.2 описано граткові операції (точну верхню та точну нижню грані.

Позначимо $\mathbf{Psu}(X)$ множину всіх псевдоультраметрик на множині X. Її підмножини $\mathbf{Cpsu}(X)$ та $\mathbf{Lcpsu}(X)$ складаються з усіх компактних псевдоультраметрик та усіх локально компактних псевдоультраметрик відповідно, тобто $\mathbf{Cpsu}(X)$ є множиною всіх псевдоультраметрик, які роблять X компактним простором.

Часткові порядки на множині $\mathbf{Psu}(X)$ всіх псевдоультраметрик на X і її підмножинах $\mathbf{Cpsu}(X)$ і $\mathbf{Lcpsu}(X)$ визначаються, як і раніше, поточково: псевдоультраметрика d_1 передує псевдоультраметриці d_2 (позначається $d_1 \leqslant d_2$ або $d_2 \geqslant d_1$), якщо $d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)$ виконується для всіх точок $x, y \in X$. Тривіальна псевдометрика $d \equiv 0$ є найменшим елементом $\mathbf{Psu}(X)$, $\mathbf{Cpsu}(X)$ та $\mathbf{Lcpsu}(X)$. Ми позначаємо $d_1 < d_2$ або $d_2 > d_1$, якщо $d_1 \leqslant d_2$ і $d_1 \neq d_2$ (це не означає, що $d_1(x, y) < d_2(x, y)$ для всіх x, y).

Найменшою верхньою гранню псевдоультраметрик d_1, d_2 в $\mathbf{Psu}(X)$ є поточковий максимум $d^*(x, y) = \max(d_1(x, y), d_2(x, y)$ для всіх $x, y \in X$.

Доведено, що підмножини всіх компактних псевдоультраметрик і всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X не є напрямленими вгору.

Частково упорядковані множини $\mathbf{Psu}(X)$ та $\mathbf{Lcpsu}(X)$ не є meet continuous (попарний інфімум не є дистрибутивним щодо супремума).

Доведено, що у множині $\mathbf{Cpsu}(X)$ – компактних псевдоультраметрик на довільній множині X інфімум двох елементів дистрибутивний щодо супремума довільної кількості елементів, тобто виконано meet continuity.

У **розділі 3.3** показано, що некомпактну псевдоультраметрику на довільній множині X у множині всіх псевдоультраметрик на X чи у множині всіх локально компактних псевдоультраметрик на X апроксимує знизу тільки тривіальна псевдометрика.

Означення 3.3.1. *Елемент x_0 називається “слабко значно нижчим” (weakly way below) за елемент x_1 в частково впорядкованій множині $(X, \leq)$ (позначається $x_0 \prec\prec x_1$), якщо для кожної непорожньої напрямленої підмножини $D \subset X$, для якої $x_1 = \sup D$, існує елемент $d \in D$ такий, що $x_0 \leqslant d$.*

Теорема 3.2. *Нехай d, d_0 — псевдоультрометрика на X, причому d_0 не належить $\mathbf{Cpsu}(X)$. Тоді d_0 не «значно нижче» за d (і, отже, не «не слабко значно нижче» за d), ні в $\mathbf{Psu}(X)$, ні в $\mathbf{Lcpsu}(X)$.*

Теорема 3.3. *Якщо псевдоультраметрика (локально компактна псевдоультраметрика) d не є компактною, то $d_0 \equiv 0$ є єдиною псевдоультраметрикою, що є слабко значно нижчою за d' в $\mathbf{Psu}(X)$ (відповідно, в $\mathbf{Lcpsu}(X)$).*

Теорема 3.4. *Відношення “слабко значно нижче” і “значно нижче” на частково впорядкованій множині $\mathbf{Cpsu}(X)$ співпадають.*

Теорема 3.5. *Нехай $d_0, d_1 \in \mathbf{Cpsu}(X)$, $d_0 \leq d_1$. Тоді $d_0 \ll d_1$ тоді й тільки тоді, коли виконується наступне:*

(1) *якщо $d_0(x, y) = d_1(x, y)$ для деяких $x, y \in X$, то $d_1(x, y) = 0$;*
(2) *існують $k \in 0, 1, 2, \ldots$ і $z_1, \ldots, z_k \in X$ такі, що для всіх $x \in X$ виконується рівність $d_0(x, z_i) = 0$ для деякого $1 \leq i \leq k$.*

Теорема 3.6. *Для будь-якої $d \in \mathbf{Cpsu}(X)$ існує напрямлена множина компактних псевдоультраметрик, які є слабко нижчими за d, і $\sup D = d$.*

Ми довели, що множина $\mathbf{Cpsu}(X)$ є неперервною. Вона не є повною, тому не є областю, але кожна підмножина вигляду $d{\downarrow} = \{\rho \in \mathbf{Cpsu}(X) \mid \rho \leq d\}$ для $d \in \mathbf{Cpsu}(X)$ є областю, а саме повною неперервною нижньою напівграткою.

У **розділі 3.4** описано відношення "значно вище"у просторі $\mathbf{Cpsu}(X)$.

Теорема 3.7. *Для компактних ультрапсевдометрик d, d_0 на множині X виконано $d_0 \gg d$, якщо і тільки якщо:*

— *X скінченний;*
— *$d_0(x, y) > d(x, y)$ для всіх $x \neq y$ в X.*

Це означає, що $\mathbf{Cpsu}(X)$ є двоїсто неперервним тоді і тільки тоді X є скінченним, тобто «майже ніколи». Ми виявили, що обмеження зверху змінює результат. Отже, розглянемо підмножину $\hat{d}{\downarrow} \subset \mathbf{Cpsu}(X)$ для деякого фіксованого $\hat{d} \in \mathbf{Cpsu}(X)$.

Теорема 3.9. *Для компактних ультрапсевдометрик $d, d_0 \in \hat{d}\downarrow$, $d_0 \gg d$ в $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$ тоді і тільки тоді*

— $d \leqslant d_0$;

— *існує $\theta > 0$ таке, що $d_0(x, y) \geqslant \min\{\theta, \hat{d}(x, y)\}$ для всіх $x, y \in X$;*

— *для всіх $x, y \in X$, якщо пара x, y є $(d, \hat{d})$-розтягуваною, тоді $d(x, y) < d_0(x, y)$.*

Отримано алгоритм побудови апроксимуючих згори елементів у множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, з чого випливає двонеперервність цієї частково впорядкованої множини.

Твердження 3.4.3. *Для всіх компактних псевдоультраметрик $d \leqslant \hat{d}$ на множині X і $\varepsilon > 0$ існує компактна псевдоультраметрика d_0 така, що $d_0 \gg d$ в $\hat{d}\downarrow$ і $d_0(u, v) \leqslant d(u, v) + \varepsilon$ для всіх $u, v \in X$.*

Теорема 3.10. *Частково впорядкована множина $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$ для компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на множині X є двоїсто неперервною.*

У **четвертому розділі** досліджено топології, що визначаються частковим порядком, зокрема, з'ясувано їх метризовність.

У **підрозділі 4.1** описано підмножини, які є підграфіками компактної псевдоультраметрики.

Означення 4.1.1. *Підграфіком (або гіпографом) псевдоультраметрики d на множині X називаємо множину*

$$\operatorname{sub} d = \{(x, y, a) \mid x, y \in X,\ 0 \leqslant a \leqslant d(x, y)\}.$$

Означення 4.1.2. *Надграфіком (або епіграфом) псевдоультраметрики d на множині X називаємо множину*

$$\operatorname{epi} d = \{(x, y, a) \mid x, y \in X,\ d(x, y) \leqslant a\}.$$

У **підрозділі 4.2** введена метризація через підграфіки.

Визначимо відстань (метрику) між $d_1, d_2 \in \hat{d}\downarrow$ як відстань Гаусдорфа між їхніми підграфіками: $D_H^{\hat{d}}(d_1, d_2) = \rho_H(\operatorname{sub} d_1, \operatorname{sub} d_2)$, тобто

$$D_H^{\hat{d}}(d_1, d_2) = \max\{\sup_{u \in \operatorname{sub} d_1} \rho(u, \operatorname{sub} d_2), \sup_{v \in \operatorname{sub} d_2} \rho(v, \operatorname{sub} d_1)\}$$

де $\rho(u, \operatorname{sub} d_2) = \inf_{v \in \operatorname{sub} d_2} \rho(u, v)$, і аналогічно для $\rho(v, \operatorname{sub} d_1)$.

Лема 4.2.1. *Множина*

$$S = \{\operatorname{sub} d \mid d \text{ — компактна псевдоультраметрика на } X,\ d \leq \hat{d}\}$$

замкнена в гіперпросторі $\exp(X \times X \times [0, M])$.

Показано, що множина $\hat{d}\downarrow \subset \mathbf{Cpsu}(X)$ з метрикою $D_H^{\hat{d}}$ є компактним метричним простором.

Відображення $\sup : \exp(\hat{d}\downarrow) \to \hat{d}\downarrow$ є неперервим відносно метрики Гаусдорфа. Нагадаємо, що компактна гаусдорфова (отже, повна) топологічна верхня півгратка S така, що відображення $\sup : \exp S \to S$ є неперервною щодо топології Вієторіса на гіперпросторі $\exp S$, називається компактною гаусдорфовою верхньою напівграткою Лоусона. З того, що топологія Вієторіса на гіперпросторі метричного компакта індукується метрикою Гаусдорфа, ми доходимо до висновку, що напівгратка $\hat{d}\downarrow$ з топологією, індукованою $D_H^{\hat{d}}$ є компактною гаусдорфовою верхньою напівґраткою Лоусона.

Запропонований метод метризації має суттєвий недолік: він залежить від вибору псевдоультраметрики $\hat{d}$ вибраної "вище" псевдоультраметрики. Пізніше ми покажемо, що для будь-яких $\hat{d}, \bar{d} \in \mathbf{Cpsu}(X)$ відстані $D_H^{\hat{d}}$ і $D_H^{\bar{d}}$ індукують ту саму топологію на $\hat{d}\downarrow \cap \bar{d}\downarrow$.

У **підрозділі 4.4** описана метризація простору псевдоультраметрик через надграфіки у стилі Гартоґа-де Вінка.

Теорема 4.1. *Формула*

$$D_{HV}(d, d') = \max\big\{\sup\{d'(x,y) \mid x, y \in X,\ d'(x,y) > d(x,y)\},$$
$$\sup\{d(x',y') \mid x', y' \in X,\ d(x',y') > d'(x',y')\}\big\}$$

визначає повну ультраметрику на множині $\mathbf{Cpsu}(X)$ *компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині* X.

Хоча відстань $D_{HV}(d, d')$ є граничним значенням топологічно еквівалентних між собою метрик з формулами $\rho_H(\mathrm{epi}(k \cdot d), \mathrm{epi}(k \cdot d'))$, вона не є топологічно еквівалентною до них, наприклад, псевдоультраметрики $(1 - \frac{1}{n})d$ при $n \to \infty$ вже не збігаються до d щодо D_{HV}, зате на відміну від них є ультраметрикою.

Ультраметрика D_{HV} є аналогом ультраметрики Гартоґа-де Вінка [34], означеної на не обов'язково адитивних мірах на ультраметричних просторах. На жаль, вона не узгоджується з розглядуваним порядком на $\mathbf{Cpsu}(X)$, тому стоїть дещо осторонь теми нашого дослідження.

У **підрозділі 4.5** показано, що для кожної фіксованої компактної псевдоультраметрики існує компактна гаусдорфова топологія на множині її тіні, що робить її топологічною ґраткою з малими підґратками. Ця топологія визначається за допомогою метрики рівномірної збіжності.

Теорема 4.3. *Для компактної псевдоультраметрики* $\hat{d}$ *на множині* X *гратка* $(\hat{d}\downarrow, \leqslant)$ *є зв'язано двонеперервною, а топологія Лоусона (≡ двоїста топологія Лоусона) на ній є метризованою метрикою рівномірної збіжності.*

Отримані результати дозволяють змістовно розглядати проблему існування продовжень псевдо(ультра)метрик, неперервних у метричному та/чи порядковому сенсах і таких, що зберігають корисні властивості, як повнота чи компактність.

[34] Hartog J.I., de Vink E.P. *Building metric structures with the Meas functor.*// Liber Americorum Jaco de Bakker, F. de Boer, M. van der Heijden, P. Klint and J. Rutten (eds.). Amsterdam: CWI. — 2002 — P. 93-–108.

У **підрозділі 4.6** розглянуто розклад псевдометрики, як як суми псевдоультраметрик та описано замкнений конус та (замкнений) підпростір у $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$, породжені множиною $\hat{d}\downarrow$.

Твердження 4.6.2. *Нехай d — псевдометрика на скінченній множині X. Якщо X не можна подати як об'єднання непорожніх опуклих щодо d підмножин A, B, то d не можна подати як $\rho + d'$, де ρ — псевдоультраметрика, не рівна тотожно нулю, а d' — довільна псевдометрика.*

Якщо ж розбиття X на непорожні опуклі щодо d підмножини A і B існує, то можна подати d як $\rho + d'$, де ρ — ненульова псевдоультраметрика, а d' — деяка псевдометрика, для якої множина трійок (x, y, z), у яких y є між x і z, строго більша від аналогічної множини трійок для d.

Твердження 4.6.5. *Конус псевдометрик на скінченній множин з не менш, ніж п'ятьма точками не породжується підмножиною з усіх псевдоультраметрик на цій множині.*

Твердження 4.6.6. *Конус псевдометрик на скінченній множин з не більш, ніж чотирма точками породжується підмножиною з усіх псевдоультраметрик на цій множині.*

Твердження 4.6.7. *Функцію $f : X \times X \to \mathbb{R}$, де X — скінченна множина, можна подати у вигляді лінійної комбінації псевдоультраметрик на X, якщо і тільки якщо f задовольняє тотожності $f(x, x) = 0$ та $f(x, y) = f(y, x)$ для всіх $x, y \in X$.*

Теорема 4.4. *Нехай $\hat{d}$ — компактна псевдоультраметрика на множині X. Замкненою лінійною оболонкою множини $\hat{d}\downarrow$ всіх компактних псевдоультраметрик на X, що не перевищують $\hat{d}$, у просторі $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R})$ неперервних щодо $\hat{d}$ дійснозначних функцій на $X \times X$ з нормою рівномірної збіжності є множина всіх неперервних щодо $\hat{d}$ по сукупності аргументів функцій $f : X \times X \to \mathbb{R}$ з властивостями $f(x, x) \equiv 0$ та $f(x, y) \equiv f(y, x)$ для всіх $x, y \in X$.*

У **підрозділі 4.7** описано ідемпотентний нормований простір компактних псевдоультраметрик.

Ідемпотентним аналогом векторного простору є ідемпотентний напівмодуль [35] над ідемпотентним напівкільцем з нулем і одиницею. Відмінність — тільки у ідемпотентності додавання і неіснуванні протилежних векторів. Якщо також виконано вимоги порядкової повноти і нескінченної дистрибутивності, то отримуємо означення ідемпотентного векторного простору.

[35] Litvinov G.L. *Idempotent functional analysis: An algebraic approach* // Mat. Zametki. — 2001. — 69(5). — 758–797.

Твердження 4.7.1. *Множини всіх компактних псевдометрик та всіх компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ на довільній множині X, є підпросторами ідемпотентного векторного простору $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}_+)$ над $(\mathbb{R}_+, \vee, \cdot)$.*

Теорема 4.5. *Множина $C_{\hat{d}}(X \times X, \mathbb{R}_+)$ неперервних щодо фіксованої компактної псевдоультраметрики $\hat{d}$ невід'ємних дійснозначних функцій на $X \times X$ з операціями поточкового множення на невід'ємні числа та поточкового максимуму і метрикою рівномірної збіжності є повним нормованим ідемпотентним векторним простором над $(\mathbb{R}_+, \vee, \cdot)$. Її підмножина усіх компактних псевдоультраметрик на X, неперервних щодо $\hat{d}$, є найменшим замкненим підпростором, що містить всі псевдоультраметрики вигляду*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in A \text{ або } x, y \in B, \\ 1 & \text{— інакше}, \end{cases} \qquad x, y \in X,$$

де $X = A \sqcup B$, а множини A та B непорожні і відкрито-замкнені щодо $\hat{d}$.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано наступні результати :

— Доведено, що множина всіх псевдометрик на довільній фіксованій множині X з поточковим впорядкуванням є умовно повною недистрибутивною граткою, а множина всіх метрик на $X = [0, 1]$ не є напрямленою вниз, тому не є нижньою напівграткою, а тим більше граткою.

— Описано відношення апроксимації знизу на множині всіх псевдометрик на скінченній множині X і доведено, що, якщо нетривіальна псевдометрика d_0 на нескінченній множині X апроксимує знизу псевдометрику d на X, то d обмежена, а d_0 розбиває X на скінченну кількість класів еквівалентності, які щодо d є відкрито-замкненими.

— Доведено, що жодні дві псевдометрики на нескінченній множині X не перебувають у відношенні апроксимації згори у множині всіх псевдометрик на X, а у підмножині всіх псевдометрик на X, значення яких не перевищують фіксованого $a > 0$, кожний елемент є точною нижньою гранню напрямленої вниз множини елементів, що апроксимують його згори.

— Описано граткові операції у поточково впорядкованій множині всіх псевдоультраметрик на фіксованій множині X і доведено, що підмножини всіх компактних псевдоультраметрик і всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X не є напрямленими вгору.

— Доведено, що у множині компактних псевдоультраметрик на довільній множині X інфімум двох елементів дистрибутивний щодо супремума довільної кількості елементів, а для множин всіх псевдоультраметрик на зліченній множині X та всіх локально компактних псевдоультраметрик на зліченній множині X ця властивість не виконана.

— Доведено, що некомпактну псевдоультраметрику на довільній множині X у множині всіх псевдоультраметрик на X чи у множині всіх локально компактних псевдоультраметрик на X апроксимує знизу тільки тривіальна псевдометрика.
— За допомогою допоміжного відношення "бути слабко значно нижче" отримано необхідні і достатні умови того, що компактна псевдоультраметрика d_0 апроксимує знизу компактну псевдоультраметрику d_1, і доведено, що кожна компактна псевдоультраметрика є точною верхньою гранню напрямленої вгору множини компактних псевдоультраметрик, що апроксимують її знизу.
— Доведено, що жодна компактна псевдоультраметрика на нескінченній множині X не апроксимує згори компактну псевдоультраметрику на цій множині.
— Отримано опис відношення апроксимації згори і алгоритм побудови апроксимуючих згори елементів у множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, з чого випливає двонеперервність цієї частково впорядкованої множини.
— Охарактеризовано множини, які є підграфіками компактних псевдоультраметрик, і запроваджено відстань між компактними псевдоультраметриками як відстань Гаусдорфа між їх підграфіками.
— Доведено, що множина всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що передують фіксованій компактній псевдометриці на X, з введеною метрикою є метричним компактом, і ця метрика топологічно еквівалентна до метрики рівномірної збіжності.
— Доведено співвідношення між метрикою на основі метрики Гаусдорфа і метрикою рівномірної збіжності на множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, і метрика рівномірної збіжності є граничним випадком метрик, означених через підграфіки.
— Показано, що визначена вказаними метриками топологія на множині всіх псевдоультраметрик, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, є повною граткою, на якій топологія Лоусона і двоїста топологія Лоусона збігаються.
— Доведено, що граничним випадком означених через надграфіки метрик на множині компактних псевдоультраметрик є ультраметрика Гартоґа-де Вінка.
— Показано, що у загальному випадку множина компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо даної компактної псевдоультраметрики, у банаховому просторі неперервних функцій двох змінних не породжує конус псевдометрик, але породжує замкнений підпростір симетричних функцій, що перетворюються у нуль при двох однакових аргументах.
— Показано, що множина компактних псевдоультраметрик, неперервних щодо даної компактної псевдоультраметрики, є замкненим підпростором у ідемпотентному нормованому просторі невід'ємних неперервних функцій двох

змінних, породженим множиною псевдоультраметрик, визначених розбиттями на дві відкрито-замкнені множини.

Результати роботи є внеском у дослідження метричних структур та утворених ними просторів і дозволяють поєднувати порядкові підходи та вибір метризації при наближеному розв'язанні задач класифікації. У подальшому можливі дослідження у напрямку послаблень властивостей псевдометрик (з переходом до квазіметрик, метаметрик, преметрик, тощо) та розгляду симетричних функціоналів на банахових просторах, породжених множинами псевдометрик.

СПИСОК ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Никорович С.І. *Порядкові властивості множин псевдометрик* // IXth Summer School. Algebra, Topology and Analysis. Abstracts of Lectures and Report, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези доп. – Поляниця, 2014. – С. 59-60.
2. Nykorovych S.I. *Approximation relations on the posets of pseudometrics and of pseudoultrametrics*. Carpathian Math. Publ. — 2016. — 8(1) — С. 150–157. Режим доступу до журналу: https://journals.pnu.edu.ua/index.php/cmp/article/view/1420
3. Никифорчин О.Р., Никорович С.І., Копорх К.М. *Компактні ультрапсевдометрики та зворотні спектри* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2022. — Вип. 17(64), С. 299–314. Режим доступу до журналу: http://lib.pnu.edu.ua:8080/bitstream/123456789/16692/1/document.pdf
4. Nykyforchyn O., Nykorovych S., Zagorodnyuk A. *Approximation Relations on the Posets of Pseudoultrametrics* // Axioms. – 2023. – 12(5). – P.438. Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.3390/axioms12050438.
5. Nykorovych S., Nykyforchyn O. *Metric and Topology on the Poset of Compact Pseudoultrametrics* //Carpathian Math. Publ. — 2023. — Vol. 15 (2) — P. 321-330. . Режим доступу до журналу: https://journals.pnu.edu.ua/index.php/cmp/article/view/6869/7290.
6. Nykorovych S. *Approximation relations on the posets of pseudoultrametrics* // Сучасні проблеми механіки та математики, 23 – 25 травня, 2023, Львів: тези доп. – Львів, 2023. – С. 425.
7. Nykorovych S. *Approximation in Partially Ordered Sets of Pseudoultrametrics* // International Workshop On Current Trends In Analysis And Approximation Theory, July 18, Rome, Italy: Proc. Book. — Rome, 2023. — P. 79.
8. Nykorovych, S. I., Vasylyshyn, T. V. *Symmetric linear functionals on the Banach space generated by pseudometrics*// Matematychni Studii — 62(1), 2024. — 81-92.

АНОТАЦІЯ

Никорович С. І. Апроксимації в просторах псевдометрик. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню пов'язаних з відношеннями апроксимації метричних та порядкових властивостей частково впорядкованих множин всіх псевдометрик на фіксованих множинах та їх підмножин, у першу чергу складених з псевдоультраметрик.

У першому розділі наведено необхідні відомості з теорії метричних просторів та неперервних областей.

У другому розділі розглянуто порядкові властивості множини псевдометрик. Описано відношення апроксимації знизу на множині всіх псевдометрик на скінченній множині X і отримано необхідні умови апроксимації знизу для нескінченної множини X. Доведено, що відношення апроксимації згори на множині псевдометрик на нескінченній множині X є тривіальним.

У третьому розділі розглядаються частково впорядковані множини псевдоультраметрик. Показано, що некомпактну псевдоультраметрику на довільній множині X у множині всіх псевдоультраметрик на X чи у множині всіх локально компактних псевдоультраметрик на X апроксимує знизу тільки тривіальна псевдометрика. Запропоновано алгоритм побудови апроксимуючих згори елементів у множині всіх компактних псевдоультраметрик на фіксованій множині X, що не перевищують даної компактної псевдоультраметрики, з чого отримано двонеперервність цієї частково впорядкованої множини.

Четвертий розділ присвячено метричним просторам псевдоультраметрик та їх вкладенням у нормовані векторні простори. Введено і досліджено відстані між компактними псевдоультраметриками як відстань Гаусдорфа між їх підграфіками та відстань Гаусдорфа між їх надграфіками, а також метрику у стилі Гартоґа-де Вінка. Досліджено зв'язки цих метрик з метрикою рівномірної збіжності та топологією Лоусона, а також замкнені конуси і замкнені підпростори, породжені множинами псевдоультраметрик у банахових просторах неперервних функцій.

Ключові слова: псевдометрики, псевдоультраметрики, апроксимація, двонеперервність, норма рівномірної збіжності, ідемпотентний векторний простір.

ABSTRACT

Nykorovych S. I. Approximations in pseudometric spaces. — Qualifying scientific work, manuscript. Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 - mathematical analysis. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2024.

This thesis is devoted to the study of approximation relations involving metric and order properties of partially ordered sets of all pseudometrics on fixed sets and their subsets. In particular, considerable attention is paid to pseudoultrametrics, or non-Archimedean ultrametrics, for which the requirement of non-degeneracy is relaxed.

The first chapter provides necessary information from the theory of metric spaces and continuous domains, including the definitions of Scott and Lawson topologies, approximation relations, etc.

The second chapter discusses the order properties of the set of pseudometrics. In particular, it is proven that the set of all pseudometrics on any given set X with pointwise order is a conditionally complete non-distributive lattice, and the set of all metrics on $X = [0, 1]$ is not filtered, therefore it is not a lower semi-lattice, much less a lattice. The relations of approximation from below and from above on the set of all pseudometrics on a fixed set X are described, and they appear to be very poor.

The third chapter deals with pseudoultrametrics, including a description of lattice operations (exact upper and lower bounds) in the pointwise ordered set of all pseudoultrametrics on a fixed set X. It is proven that meet continuity holds for the set of compact pseudoultrametrics on a fixed set X but fails for wider sets of all pseudoultrametrics and of all locally compact pseudoultrametrics on a countable set X. Moreover, in the latter two sets the approximation from below relations are trivial.

Necessary and sufficient conditions are obtained for a compact pseudoultrametric d_0 to approximate from below a compact pseudoultrametric d_1, and it is proven that every compact pseudoultrametric is the least upper bound of a directed set of compact pseudoultrametrics that approximate it from below. Similarly approximation from above is characterized in the set of all compact pseudoultrametrics on a fixed set X, which do not exceed a given compact pseudoultrametric, are described.

This has resulted in continuity and dual continuity of this partially ordered set. We propose algorithms for approximation from below and from above.

The fourth chapter is devoted to metric spaces of pseudoultrametrics and to their embeddings into normed vector spaces. Metrics induced by Hausdorff distance on hypographs/epigraphs, uniform convergence metrics and Hartogs-de Vink style metrics are studied and compared. It is proven that all of them except the last one are compatible with the Lawson topology, and the lower shadow of a certain fixed compact pseudoultrametric with the topology induced by the Hausdorff metric is a compact Hausdorff upper Lawson semilattice.

It is proven that the set of all pseudoultrametrics on a finite set generates the cone of pseudoultrametrics if ans only if the cardinality of the set is not greater than four. It is shown that the set of all compact pseudoultrametrics not exceeding a given one, generates in the Banach space of the continuous functions of two variables the closed subset of all symmetric functions that are equal to zero for each pair of equal arguments.

It is proven the set of all compact pseudoultrametrics not exceeding a given one, is a closed subset of the complete normed idempotent vector space of nonnegative continuous functions of two variables, which is generated by the set of the pseudometrics corresponding to the partitions consisting of two clopen sets.

Keywords: pseudometrics, pseudoultrametrics, approximation, bicontinuity, uniform convergence norm, idempotent vector space.