

ВІДГУК

офіційного опонента члена-кореспондента НАН України,
доктора фізико-математичних наук, професора
Шевчука Ігоря Олександровича на дисертаційну роботу
Куриляка Андрія Олеговича "Асимптотичні властивості
і розподіл значень випадкових степеневих рядів", яку
подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора
фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.01 — математичний аналіз.

1. Актуальність теми дослідження. Однією з основних проблем сучасної теорії функцій є проблема дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій, яка займає важливе місце, як з точки зору можливих подальших застосувань отримуваних при цьому результатів, так і з точки зору власних потреб розвитку теорії функцій. Задачі, які при цьому розглядаються на початковому етапі розвитку цього напрямку наприкінці XIX – на початку XX ст., умовно можна віднести до пошуку аналітичних функцій, властивості яких є подібними до властивостей многочленів чи раціональних функцій. У зв'язку з цим сто років тому виникла теорія Вімана-Валірона основні асимптотичні співвідношення якої відразу знайшли різноманітні застосування. Характерною особливістю, отримуваних у цій теорії результатів є те, що отримуваних асимптотичні співвідношення виконуються зовні виняткових множин.

Зрозуміло, що як описання величин виняткових множин, так і самі асимптотичні співвідношення, можна істотно уточнити і доповнити, якщо розглядати природні загальні підкласи аналітичних функцій, зокрема, цілі функції, які можна подати у вигляді лакунарного степеневих ряду, функції, аналітичні в полікурузі чи, що більш загально, аналітичні в областях Рейнхарда, випадкові цілі та аналітичні функції, цілі ряди Діріхле. Цим спричинений подальший розвиток теорії в роботах багатьох видатних вчених. Серед них М. М. Шеремета та О. Б. Скасків. В процесі розвитку теорії виникли нерозв'язані проблеми.

Саме тому дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій відомі та від багатьох комплексних змінних є важливим науковим завданням, що обумовлює актуальність та мету дисертаційного дослідження Куриляка Андрія Олеговича.

В дисертації для кожного із вказаних підкласів розв'язані відомі проблеми про знаходження оцінок величин відповідних виняткових множин і в більшості випадків доведена точність, отриманих асимптотичних співвідношень, що виконуються зовні виняткових множин. У цілому ряду випадків у дисертації встановлено остаточність знайдених умов, тобто, доведена їхня необхідність.

2. Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків, сформульованих у дисертації. У дисертації Куриляка Андрія Олеговича чітко визначено мету та завдання дослідження, обґрунтовано підходи щодо шляхів їх досягнення. Дисертаційна

робота характеризується логічністю та послідовністю виконання дослідження. Висновки містять стислий підсумок виконаного дослідження. В них у повній мірі відображені основні положення роботи. Автор провів детальний аналіз вітчизняних та зарубіжних наукових статей, що стосуються теми дисертації. Список використаних джерел містить 218 найменувань.

Результати дисертаційної роботи А.О. Куриляка строго доведені на сучасному математичному рівні і тому їхня справедливність не викликає сумніву.

3. Наукова новизна отриманих результатів, що представлені в дисертації та рефераті. Основний зміст дисертаційної роботи міститься у розділах 2–6.

У першому розділі наведено огляд праць, що стосуються асимптотичних властивостей та розподілу значень аналітичних та випадкових аналітичних функцій однієї і багатьох комплексних змінних, а також формулюються основні результати дисертації.

Нерівність типу Вімана та співвідношення типу Бореля для аналітичних та випадкових аналітичних функцій від однієї змінної розглядається у другому розділі. Основними у цьому розділі є теореми 2.1, 2.2 та 2.4. З теореми 2.1, як наслідок, випливають твердження про класичну нерівність Вімана для цілих функцій і нерівність Кева для аналітичних в одиничному крузі функцій. Як наслідок з теореми 2.1 також можна отримати твердження 2.1 про співвідношення типу Бореля для аналітичних функцій зображуваних степеневими рядами з довільним скінченним чи нескінченним радіусом збіжності, що виконується зовні деякої виняткової множини скінченної логарифмічної h -міри. У цих твердженнях встановлено найбільш загальний опис виняткових множин. Встановлено наявність ефекту типу Леві істотного уточнення нерівності типу Вімана для випадкових субгаусових цілих функцій, які можна подати у вигляді лакунарного степеневого ряду (теорема 2.2) та для аналітичних функцій від однієї комплексної змінної (теорема 2.2). Слід зауважити, що вперше перевірено наявність ефекту Леві у випадку коли послідовність незалежних випадкових величин, які є множникам Тейлорових коефіцієнтів аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою. Побудовано приклади, які вказують на необхідність скінченності супремуму послідовності дисперсій цих випадкових величин.

Дослідження аналогів нерівності типу Вімана для аналітичних функцій від декількох комплексних змінних проводиться у третьому розділі. Основною в цьому розділі можна вважати теорему 3.1. У цьому розділі в класі аналітичних функцій, зображуваних в довільній фіксованій кратно-круговій області Рейнхарда кратними степеневими рядами вперше розвинуто підхід типу методу Вімана-Валірона і також вперше отримано в найбільш загальному вигляді аналоги класичної нерівності Вімана (теорема 3.1). При цьому, встановлено явні залежності між виглядами отриманих аналогів нерівності Вімана і довільною наперед заданою мірою (h -мірою), скінченність якої дає описання величини виняткової множини в отриманій нерівності. З доведеного у третьому розділі твердження, як наслідок, випливають, як відомі нерівності, отримані попередниками для цілих функцій від декількох змінних, так і для аналітичних функцій від однієї змінної. Точність отриманих нерівностей встановлена у випадку коли область збіжності кратного степеневого ряду є одна з множин \mathbb{C}^p (зауваження 1.4), $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$ (теорема 3.17 та 3.18), де $l, p \in \mathbb{N}$, $p > l$, $p \geq 2$. У цьому розділі також розглянуто випадкові аналітичні функції, областю збіжності яких майже напевно є кратно-кругова область Рейнхарда. Для цих функцій встановлено наявність ефекту Леві і побудовано приклади на точність отриманих тверджень у випадку коли область збіжності кратного степеневого ряду є одна з множин \mathbb{C}^p (теорема 3.10), \mathbb{D}^p (теорема 3.15), $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$ (теорема 3.21) де $l, p \in \mathbb{N}$, $p > l$, $p \geq 2$. Результати цього розділу повністю висвітлюють, сформульовану проф. А.А. Гольдбергом і проф. М.М. Шереметом проблему, про наявність ефекту типу Леві у випадку кратних степеневих рядів.

У четвертому розділі доведено аналоги нерівності Бітліана-Гольдберга та нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками. Основними теоремами на думку автора відгуку є теореми 4.2 та 4.9. Об'єктом

дослідження є цілі функції, представлені лакунарними рядами однорідних поліномів. Вичерпання \mathbb{C}^p відбувається довільною однопараметричною системою подібних повни кратно-кругових областей з центром у початку координат. Оцінка максимуму модуль проводиться через діагональний максимальний член ряду. Доведено аналогі нерівності Бітляна-Гольдберга (теорема 4.2), а також побудовано приклад на точність цієї нерівності (теорема 4.3). У другому підрозділі встановлено аналогі нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками. А саме, розглянуті ряди Діріхле абсолютно збіжні у всьому комплексному просторі \mathbb{C}^p . Доведено багатовимірний аналог нерівності типу Вімана (теорема 4.9), який є узагальненням одновимірної теореми (теорема 4.6), до якої було побудовано приклад на точність (теорема 4.7).

Дослідження асимптотичних властивостей ймовірності відсутності нулів у гауссових аналітичних функцій в крузі з центром у початку координат проводиться у п'ятому розділі. Основними теоремами цього розділу є теореми 5.5 та 5.12. У першому підрозділі дано відповідь на питання про точність асимптотичних оцінок ймовірності відсутності нулів в довільному крузі з центром у початку координат у випадку коли Тейлорові коефіцієнти цілої функції домножаються на добуток гауссових випадкових величин та випадкових величин Штейнгауса. При цьому відомо раніше оцінку знизу істотно посилено (теорема 5.4). Використовуючи деякі результати з теорії Вімана-Валірона для цілих трансцендентних функцій, отримано асимптотичні оцінки згори (теорема 5.1) і знизу (теорема 5.4) згаданої ймовірності зовні множини скінченної логарифмічної міри та побудовано приклади на точність отриманих оцінок (теореми 5.6 та 5.7). У другому підрозділі отримано асимптотичні співвідношення для ймовірності відсутності нулів зовні множини скінченної логарифмічної міри для класу випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі (теорема 5.12). При цьому у порівнянні з випадком цілих функцій цей клас визначається ще додатковою умовою на мінімальну допустиму швидкість зростання аналітичної функції при наближенні до межі одиничного круга. Побудовано приклади на точність отриманих верхньої (теорема 5.13) та нижньої оцінок (теорема 5.14).

У шостому розділі на думку автора відгуку основною є теорема 6.1. А саме у цьому розділі: встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'еса (теорема 6.1) і побудовано приклад на точність цього співвідношення (теорема 6.2); доведено аналогі теорем Келіса для інтегралів Лапласа-Стілт'еса (теореми 6.9 та 6.11); досліджено банахів простір інтегралів Лапласа-Стілт'еса (теорема 6.14) та рядів Діріхле (наслідок 6.10). Також отримано твердження про узагальнені та модифіковані узагальнені порядки зростання інтегралів Лапласа-Стілт'еса (теореми 6.7 та 6.8) та досліджено простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку (теорема 6.15).

Зазначимо, що у відгуку зосереджено увагу тільки на результатах, які утворюють ядро дисертаційної роботи і в достатній мірі характеризують новизну і силу дисертації. Зі сказаного вище у цьому пункті, а також в актуальності, впливає, що всі основні результати дисертаційної роботи А.О. Куриляка є новими і мають важливе значення як для розвитку теорії аналітичних функцій, так і для можливих застосувань. Розвиток методу Вімана-Валірона для аналітичних функцій у кратно-круговій області Рейнхарда відкриває новий напрямок дослідження асимптотичних властивостей цих функцій.

4. Повнота викладу у наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації. Наукові положення, висновки і рекомендації дисертаційної роботи повною мірою викладено в опублікованих 52 наукових працях; 30 статей, серед яких 18 проіндексовано у міжнародних наукометричних базах Scopus та Web of Science, 10 — у наукових фахових виданнях України; 22 тези доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях. Наукові результати дисертаційного дослідження апробовані на всеукраїнських та міжнародних науково-практичних конференціях. Публікації достатньо повно відображають основні положення роботи та отримані в ході дослідження

результати. Обсяг і статус публікацій відповідає встановленим вимогам. В публікаціях, виконаних у співавторстві, особистий внесок Куриляка А.О. відображений повною мірою.

5. Оцінка мови і стилю дисертації, відповідність дисертації паспорту спеціальності та змісту реферату, вимогам МОН України. Текст дисертаційної роботи Куриляка Андрія Олеговича викладено науковим стилем, українською мовою. Дисертація виконана на достатньому науковому рівні, є самостійно виконаною роботою та має цілісний, завершений характер. Дисертація чітко та логічно структурована та складається з анотації, вступу, шести розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку, що викладені на 288 сторінках, у т. ч. основний текст займає 267 сторінки. Представлена робота відповідає паспорту спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз. В рефераті в повній мірі відображено зміст дисертації та основні положення й результати, отримані під час дослідження. За обсягом та оформленням реферат відповідає вимогам Міністерства освіти і науки України.

6. Дискусійні положення та зауваження.

- Хоча результати розділу 5, що стосуються асимптотичних оцінок ймовірностей відсутності нулів у випадкових цілих і аналітичних в одиничному крузі функцій, точними і принципово більш загальними, ніж результати попередників, проте ця загальність дещо втрачається через присутність серед випадкових множників, крім гаусових випадкових величин, випадкових величин Штейнгауза. Обговорення цієї обставини у дисертації присутнє лише у вигляді сформульованої автором дисертації гіпотези про правильність результатів автора за відсутності у вигляді множників випадкових величин Штейнгауза. Автору варто було би навести у тексті приклад на підтвердження своєї гіпотези.

Оформлення дисертаційної роботи у деяких моментах залишає бажати кращого — вона містить певну кількість описок, стилістичних огріхів і прикрих недоглядів. Наприклад

- Після нерівності (1.5), доведеної в [79] у 1974, написано: "Точність нерівності (1.5) доведена у [156]." Зрозуміло, що метою роботи [156], опублікованої в 1925 році, не було доведення точності нерівності, отриманої в 1974 році. Мабуть краще "Точність нерівності (1.5) зумовлена результатом роботи [156]."
- На стор. 61,62, 107 написано "дисперсій послідовності" замість "послідовності дисперсій". Схоже, це невдалий переклад з англійської, який спотворює смисл.
- Перед (4.21) є посилання на (4.33) та (4.34).
- Доволі значний список пропущених або зайвих символів переданий автору.

Наведені зауваження жодним чином не спотворюють змісту і сприйняття тексту дисертації.

7. Загальна оцінка дисертації та її відповідність встановленим вимогам. Результати перевірки роботи, аналізу публікацій здобувача, аналізу тексту дисертаційного дослідження та використання джерел, свідчать про відсутність порушення академічного плагиату, фабрикації, фальсифікації, академічної доброчесності автором дисертаційної роботи.

В дисертаційній роботі вперше ефективно застосовується метод типу Вімана-Валірона для аналітичних функцій представлених кратними рядами, область збіжності яких може бути довільною кратною-круговою областю Рейнхарда, а також перевірено наявність ефекту типу Леві для цих функцій. Все це дозволяє стверджувати, що дисертаційна робота А.О. Куриляка є завершеним виконанням на актуальну тематику науковим дослідженням, у якому розроблено теоретичні положення, які відкривають новий напрямок

у теорії аналітичних функцій — дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій представлених кратними рядами, область збіжності яких може бути довіл на кратно-кругова область Рейнхарда, що можна кваліфікувати як вагомий внесок теорію аналітичних функцій.

Основні результати дисертації опубліковано і анонсовано в 30 наукових статтях (1 в українських та закордонних виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз Web of Science або Scopus). Досить точний опис результатів дисертаційної роботи дано у рефераті дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота Куриляка Андрія Олеговича на тему “Асимптотичні властивості і розподіл значень випадкових аналітичних функцій” має теоретичний характер, а її результати мають вагоме теоретичне значення. Дисертація є самостійною завершеною науковою працею, має логічну будову, характеризується науковим стилем викладені висновки і рекомендації є результатом власних досліджень автора. Основні результати роботи, які виносяться на захист характеризуються науковою новизною. Структура і обсяг роботи відповідають встановленим вимогам. Дисертаційне дослідження відповідає паспорту спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз. За змістом оформленням, новизною наукових положень, теоретичним і практичним значенням дисертаційна робота відповідає вимогам “Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 119 від 17 листопада 2021 року щодо докторських дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

Офіційний опонент,
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка


Ігор ШЕВЧУК

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР НАЧ
КАРАУЛЬНА Н.В.
29.04. 2024р.



Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Відділ аспірантури і докторантури
Вх. № 0304-30/03
« 01 » 05 2024р.