До спеціалізованої вченої ради Д 20.051.09
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника

ВІДГУК

офіційного опонента доктора фізико-математичних наук,
професора **Філевича Петра Васильовича** на дисертаційну роботу
Куриляка Андрія Олеговича "Асимптотичні властивості і розподіл значень випадкових аналітичних функцій",
подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора
фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.01 — математичний аналіз.

1. Актуальність теми дослідження.

Теорія аналітичних функцій, яка зародилася у середині XIX ст., активно розвивалась протягом XX ст. і не менш активно продовжує розвиватись у наш час. Вона знайшла своє застосування як в інших галузях математики, так і в важливих прикладних областях науки, зокрема, у гідродинаміці, аеродинаміці, аналітичній механіці, радіофізиці. Незважаючи на відому завершеність цієї теорії, навіть в класичних випадках залишаються відкритими ряд відомих проблем, при спробі розв'язання яких природно виникають нові проблеми, продиктовані як потребами внутрішнього розвитку теорії, так і проблемами застосувань.

Перші багатовимірні аналоги результатів для цілих функцій було отримано Е. Борелем ще на початку XX ст. Успішне розв'язання за допомогою алгебро-топологічних методів у 40-50-их роках минулого століття цілого ряду базових проблем багатовимірного комплексного аналізу, що не піддавалися розв'язанню у попередні роки, призвело на деякий час до певного зниження зацікавленості аналогами класичних підходів до дослідження аналітичних функцій, що базуються на їхньому зображенні у вигляді тих чи інших інтегралів або функціональних рядів. Проте, поряд з цим, виявило потребу в розробці аналогів таких підходів у багатовимірному випадку. Інтенсивні дослідження і розробка аналогів класичних підходів у багатовимірному випадку відновилися на межі 60-70-их років. Серед проблем, які при цьому розглядаються, важливою є проблема дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій в залежності від властивостей коефіцієнтів їхніх степеневих розвинень. Один з ключових підходів до такого дослідження запропонований в одновимірному випадку у статтях А. Вімана та Ж. Валірона у 1914–1916 роках. В основі цього підходу лежать властивості максимума модуля, максимального члена та центрального індексу степеневого ряду. Розвитку різних аспектів класичного методу Вімана-Валірона присвятили свої дослідження П. Ердеш і А. Макінтайр, Т. Кеварі, І.Ф. Бітлян і А.А. Гольдберг, Й.В. Островський, В. Фукс, У. Хейман, П. Фентон, Р.Р. Лондон, М.М. Шеремета, Н.М. Сулейманов, О.Б. Скасків, Ф.Сунієр-Балагер, Ш.І. Стреліц та багато інших авторів. А. Макінтайр запропонував новий підхід до отримання співвідношень типу Вімана-Валірона, який грунтується на властивості опуклості відносно логарифма логарифмів максимуму модуля суми степеневого ряду та його максимального члена. П. Розенблум узагальнив цей підхід, застосувавши звичайну нерівність Чебишова для випадкової величини. Пізніше Р. Лондон, М. Стіл, Г.Дж. Крішна, Р.Дж. Нагараджа, А. Шуміцкі, Н.М. Сулейманов, О.Б. Скасків та його учні успішно використали підхід, запропонований Розенблумом, до вивчення асимптотичних властивостей цілих функцій, цілих випадкових функцій і цілих функцій з швидко осцилюючими коефіцієнтами, для степеневих рядів із скінченним радіусом збіжності, абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле, регулярно збіжних функціональних рядів, цілих функцій від декількох змінних зображуваних кратними степеневими рядами та рядами Діріхле, функцій зображуваних інтегралами типу Лапласа-Стілт'єса. Власне, підхід Розенблума виявляє особливу ефективність при встановленні різноманітних аналогів класичної нерівності Вімана. Тому, розглянута у дисертаційному дослідженні проблема встановлення точних залежностей зростання максимуму модуля аналітичних і випадкових аналітичних функцій від декількох комплексних змінних у різного типу полікругових областях від їхніх тейлорових коефіцієнтів є безумовно актуальною. Поряд з цим, розгляд випадкових аналітичних функцій дає потужний інструмент встановлення "кількості" аналітичних функцій з тими чи іншими властивостями. Добре дослідженими є випадкові степеневі ряди, коефіцієнти яких утворюють послідовність незалежних випадкових величин, бо тоді, за законом нуля і одиниці Колмогорова, наприклад, радіус збіжності випадкового степеневого ряду є майже напевне сталим.

Викладене вище та аналіз літератури, яка стосується теми дисертації, демонструють важливість обраної теми досліджень та її вагоме значення як для теорії аналітичних функцій, так і для її застосувань, а в актуальності задач, розглянутих у дисертації А.О. Куриляка, не повинно виникнути сумніву.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи.

На думку автора даного відгуку основними результатами дисертаційної роботи є:

1) теорема 2.4 про наявності ефекту Леві для аналітичних функцій від однієї комплексної змінної у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою;

2) теорема 3.5 про розвиток методу Вімана-Валірона для аналітичних функцій, які можна представити кратними степеневими рядами, областю збіжності яких є довільна фіксована кратно-кругова область Рейнхарда;

3) теорема 4.2 про нерівність Бітляна-Гольдберга для лакунарних рядів за однорідними поліномами;

4) теореми 5.5 та 5.12 про отримання точних оцінок для ймовірності відсутності нулів для гаусових цілих та деяких аналітичних функцій в одиничному крузі;

5) теореми 6.1 і 6.2 про необхідні і достатні умови виконання співвідношення типу Бореля зовні деякої виняткової множини нульової нижньої лінійної щільності для додатних інтегралів Лапласа-Стілт'єса.

У *першому розділі* наведено огляд праць, що стосуються теми роботи, а також формулюються основні результати дисертації.

У *другому розділі* доведено нерівність типу Вімана та співвідношення типу Бореля для аналітичних та випадкових аналітичних функцій від однієї змінної. Також отримано співвідношення типу Бореля для аналітичних функцій, зображуваних степеневими рядами з довільним скінченним чи нескінченним радіусом збіжності. Вперше перевірено наявність ефекту Леві у випадку коли послідовність незалежних випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою. Побудовано приклади, які вказують на необхідність скінченності супремуму послідовності дисперсій цих випадкових величин.

Аналоги нерівності типу Вімана для аналітичних функцій від декількох комплексних змінних доведено у *третьому розділі*. У цьому розділі вперше отримано в найбільш загальному вигляді аналоги класичної нерівності Вімана. З доведеного у цьому розділі результату випливають, як відомі нерівності, отримані попередниками для цілих функцій від декількох змінних, так і для аналітичних функцій від однієї змінної. Точність отриманих нерівностей встановлена у випадках, коли область збіжності кратного степеневого ряду є одна з множин $\mathbb{C}^p$, $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$, де $l, p \in \mathbb{N}$, $p > l$, $p \geq 2$. У цьому розділі також розглянуто випадкові аналітичні функції багатьох змінних. Для цих функцій встановлено наявність ефекту Леві і побудовано приклади на точність отриманих тверджень.

У *четвертому розділі* доведено аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга та нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками. Розглядаються цілі функції, представлені лакунарними рядами однорідних поліномів. Доведено точні аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга. У другому підрозділі встановлено аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками. Доведено багатовимірний аналог нерівності типу Вімана.

Дослідження асимптотичних властивостей ймовірності відсутності нулів гаусових аналітичних функцій проводиться у *п'ятому розділі.* Дано відповідь на питання про точність асимптотичних оцінок ймовірності відсутності нулів у випадку, коли тейлорові коефіцієнти цілої функції домножаються на добуток гаусових випадкових величин та випадкових величин Штейнгауса. Також доведено асимптотичні співвідношення для ймовірності відсутності нулів зовні виняткових множин для деякого класу випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі. Побудовано приклади на точність отриманих верхньої та нижньої оцінок.

У *шостому розділі* встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса; доведено аналоги теорем Келіса для інтегралів Лапласа-Стілт'єса. Також отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки зростання інтегралів Лапласа-Стілт'єса та досліджено простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Перелічені основні результати дисертаційної роботи А.О. Куриляка є новими, вони вперше отримані автором дисертаційної роботи, і мають важливе значення як для розвитку теорії функцій в цілому, так і для можливих застосувань.

У списку публікацій автора лише дві статті без співавторів, проте у підрозділі "Особистий внесок здобувача" досить чітко і зрозуміло сказано про внесок автора дисертації.

3. Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків, сформульованих у дисертації.

Доведення всіх основних результатів дисертаційної роботи А.О. Куриляка наведені з достатньою повнотою, на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості і тому в їх обґрунтованості і достовірності не виникає сумніву. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

4. Зауваження.

Дисертаційна робота оформлена загалом добре, проте в ній наявні описки і недогляди. Проілюструємо сказане тільки деякими прикладами:

- с.3^{15}: написано "навявності", має бути "наявності";
- с.3_7: написано "між виглядам", має бути "між виглядами";
- с.4_6: написано "Успішність проведеного у другому розділі дослідження", слід написати "Успішність проведеного у третьому розділі дослідження";
- с.6_8: написано "проведено дослідження одного банахового простору інтегралів Лапласа-Стілт'єса", треба писати "проведено дослідження банахових прострів інтегралів Лапласа-Стілт'єса";
- с.9^9: написано "analytical functions", слід писати "analytic functions";
- с.10_6: написано "Reinhard domain carried out in the second chapter", треба написати "Reinhard domain carried out in the third chapter";
- с.11_{15}: написано "disks", слід писати "disk";
- с.12_9: написано "one Banach space", треба писати "Banach spaces";
- с.20_8: написано "таких, що є", треба писати "таких, що E є";
- с.24_3: плутанина з n_2 і n_1, замість обидвох могло б бути n_0;
- с.58_{12}: написано "f_1 і f_2 з теореми І", а має бути "f_1 і f_2 з теореми 1.24";
- с.82^{14}: немає означення $\nu_0(t)$;
- с.100^2: написано "$r \in (r_0, R) \setminus \big(E \cup E_0\big)$", а має бути "$r \in (r_0, R) \setminus E$";
- с.107_4: написано "послідовність дійсних незалежних випадкових величин така, що яка", має бути "послідовність дійсних незалежних випадкових величин, яка";
- с.228_7: написано "$2 \ln \mu_g(r) \geq \frac{2}{e+1} \ln \mu_g(r)$", а має бути "$2 \ln \mu_g(r) \geq \frac{2}{e+1} \ln \mu_h(r)$";
- с.237_6: написано "f_2 з теореми І", треба писати "f_2 з теореми 6.3".

На цьому зупинимо перелік недоглядів. Відзначимо, що подібних граматичних описок, як у тексті дисертації, так і в рефераті, є доволі багато. Проте, незважаючи на їхню наявність, з контексту завжди зрозуміло, яку саме думку автор намагається донести до читача, а тому виявлені огріхи не спотворюють зміст і сприйняття тексту дисертації.

Зауважимо також, що доведення результатів дисертаційної роботи, які написані іноді занадто конспективно, є чіткими і зрозумілими, а сумнівів у правильності основних положень дисертації у автора відгуку не виникає.

5. Публікації і апробація результатів роботи.

Основні результати дисертаційної роботи з достатньою повнотою відображені у 52 наукових публікаціях, з яких 30 статей — у наукових фахових виданнях, з них 18 статей — в журналах, які входять до міжнародних науково-метричних баз (Scopus або Web of Science). Результати дисертаційної роботи доповідались на багатьох міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах як в Україні, так і за її межами, а тому пройшли належну апробацію.

6. Практичне значення результатів роботи.

Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням. Результати дисертаційної роботи можуть знайти застосування в інших розділах математики, їх можна рекомендувати до використання при читанні спеціальних курсів і проведенні наукових досліджень з математичного аналізу (у широкому розумінні) в наступних наукових і навчальних закладах: Київському, Харківському, Одеському, Дніпровському, Чернівецькому та Львівському національних університетах, Інституті математики НАНУ, Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника (м. Івано-Франківськ), Фізико-технічному інституті низьких температур (м. Харків), Інституті прикладної математики і механіки (м. Слов'янськ).

7. Висновки.

У роботі відсутні факти академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації, що свідчить про дотримання академічної доброчесності автором дисертаційної роботи. Сказане підтверджують результати перевірки роботи, аналізу тексту дисертаційного дослідження, аналізу публікацій здобувача та використання джерел.

Дисертаційна робота А.О. Куриляка є завершеним науковим дослідженням, має теоретичний характер, а її результати мають вагоме значення для теорії аналітичних та випадкових аналітичних функцій. Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичних співвідношень між характеристиками аналітичних і випадкових аналітичних функцій. В ній зокрема вперше отримано нерівність типу Вімана для аналітичних функцій, які подані у вигляді кратного степеневого ряду, областю збіжності якого може бути довільна фіксована кратно-кругова область Рейнхарда. При цьому встановлені явні залежності між виглядом одержаних аналогів нерівності типу Вімана і довільною наперед заданою мірою, скінченність якої дає опис величини виняткової множини у цій нерівності.

Дисертаційна робота виконана на сучасному науковому рівні. Перелічені вище зауваження не применшують хорошого враження від роботи в цілому. Аналізуючи дисертаційну роботу, слід відзначити її ідейну цілісність, а також те, що вона містить остаточний розв'язок цілого ряду задач, важливих для теорії функцій і її застосувань. Результати роботи належно опубліковані. Реферат в цілому правильно і повно відображає зміст дисертації. З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота А.О. Куриляка задовольняє вимоги "Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 1197 від 17 листопада 2021 року щодо докторських дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри вищої математики
Національного університету
"Львівська політехніка" Петро ФІЛЕВИЧ

Підпис професора Філевича П.В.
засвідчую:

Вчений секретар
Національного університету
"Львівська політехніка" Роман БРИЛИНСЬКИЙ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
ЗКПО 02071010

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Відділ аспірантури і докторантури
Вх. № 03.04-30/02
« 01 » 05 2022 р.