Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Куриляк Андрій Олегович

УДК 517.55

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ І РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ВИПАДКОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

РЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Івано-Франківськ — 2024

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій та функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, професор
Скасків Олег Богданович,
завідувач кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти:
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор,
Шевчук Ігор Олександрович,
професор кафедри математичного аналізу
Київського національного
університету імені Тараса Шевченка,

доктор фізико-математичних наук, професор;
Фаворов Сергій Юрійович,
професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна,

доктор фізико-математичних наук, професор
Філевич Петро Васильович,
завідувач кафедри вищої математики
Національного університету “Львівська політехніка”.

Захист відбудеться “16” травня 2024 року о 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 20.051.09 за спеціальністю 01.01.01 “Математичний аналіз” у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника за адресою: 76000, м. Івано-Франківськ, вул. Чорновола, 88, Науковий парк «Прикарпатський університет».

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57) та на офіційному сайті університету (https://svr.pnu.edu.ua/).

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Роман ДМИТРИШИН

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним з напрямків теорії аналітичних функцій є вивчення асимптотичних властивостей цих функцій. До перших результатів у цьому напрямку можна вважати праці таких відомих математиків, як Ж. Адамара, Е. Бореля, А. Вімана, Ж. Валірона, Г. Пойя, які було опубліковано наприкінці XIX — початку XX століть. Надалі у цій тематиці слід відзначити роботи У. Хеймана, Г. В. Віттіха, Й. В. Островського і А. А. Гольдберга.

Значна кількість досліджень з початку XX століття пов'язана з використанням техніки максимального члена ряду та оцінок загального члена ряду через максимальний, які можна отримати методом Вімана-Валірона. Розвитку різних аспектів цього підходу присвятили свої роботи А. Макінтайр, П. Ердеш, Т. Кевconfigured, І. Ф. Бітлян, Л. Сонс, У. Хейман, В. Фукс, П. Фентон, А. Шиміцкі, М. Струмія, Дж. Россі, Ш. І. Штреліц, П. Розенблум та інші автори. М. М. Шеремета та О. Б. Скасків та їхні учні застосовували для отримання аналогів теорем Вімана-Валірона у різних класах степеневих рядів, рядів Діріхле, регулярно збіжних функціональних рядів, інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса, різні модифікації методу, в основі яких лежать праці Т. Кеварі, В. Хеймана, П. Фентона та П. Розенблума.

Зацікавленість до досліджень асимптотичними властивостями аналітичних функцій спричинена внутрішніми проблемами теорії аналітичних функцій. З іншого боку, такий інтерес пояснюється також і тим, що деякі класи аналітичних функцій природно виникають в інших галузях математики, а саме у теорії ймовірностей, теорії крайових задач, аналітичної теорії чисел та проблемах трансцендентності, теорії інтегральних та диференціальних рівнянь, так і в ряді важливих прикладних областей науки: гідродинаміці, аеродинаміці, аналітичній механіці, радіофізиці, фізиці високих енергій, теорії керованого вибуху. Протягом останніх років активно проводяться дослідження властивостей аналітичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, в основі яких переважно є оцінки логарифмічної похідної, які можна отримати методами теорії розподілу значень або методу Вімана-Валірона. Перевага методу Вімана-Валірона полягає в тому, що його застосування дає двосторонні оцінки числових характеристик зростання аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь.

Не зважаючи на велику кількість праць, багато важливих запитань, які стосуються вивчення асимптотичних властивостей аналітичних функцій, залишаються відкритими та недослідженими. Зупинимося коротко на деяких з них.

Дослідження задачі про встановлення асимптотичних співвідношень між характеристиками аналітичних функцій, які виконуються зовні деякої виняткової множини, почалося з робіт А. Вімана та Ж. Валірона. Виникає природна проблема знаходження непокращуваного опису величини виняткової множини у різних асимптотичних оцінках. Перший приклад такої цілої функції, що у класичній нерівності Вімана існує необмежена виняткова множина, побудував у 1975 році А. А. Гольдберг, а в 1999 році О. Б. Скасків і П. В. Філевич знайшли близький до непокращуваного опис величини виняткової множини у цій нерівності.

Хоча перші багатовимірні аналоги результатів для цілих функцій були отримані ще на початку XX століття Е. Борелем, проте через відмінності властивостей, наприклад в характері нульових множин цілих функцій в одновимірному і багатовимірному випадках, і у цьому зв'язку через потребу залучення нових методів з інших розділів математики, розвиток багатовимірної теорії відбувався з деяким запізненням. Інтенсивне дослідження аналогів класичних підходів у багатовимірному випадку почалася у 60–70-тих роках. Відомі різні аналоги нерівності Вімана у класі цілих функцій від декількох комплексних змінних встановлені П. Фентоном, А. Шиміцкі, О. Б. Скасківим та О. М. Тракало. Також повністю відкритою залишалася проблема отримання такого типу нерівностей для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області Рейнхарда. В актуальності цих проблем не повинно виникати сумніву.

Ще один напрямок досліджень полягає у вивченні асимптотичних властивостей випадкових аналітичних функцій. Тут слід відзначити праці Г. Штейнгауза, Р. Пелі й А. Зигмунда щодо асимптотичного поводження випадкових аналітичних функцій, П. Леві та П. Ердеша про встановлення асимптотичних співвідношень між максимумом модуля і максимальним членом випадкових цілих функцій зовні виняткових множин, М. Содіна про розподіл значень випадкових аналітичних функцій.

П. Леві для випадкових цілих функцій спеціального вигляду за умов правильного зростання їх максимуму модуля встановив, що класичну нерівність Вімана майже напевно (м.н.) можна істотно покращити (ефект Леві). У подальшому П. В. Філевич (1997 р.) поширив цей результат на дуже широкий клас випадкових цілих і аналітичних в одиничному крузі функцій, а вслід за М. Стілом на клас цілих функцій з швидко коливними тейлоровими коефіцієнтами. О. Б. Скасків і О. В. Зрум (2005–2006 рр.) виявили, що ефект Леві справджується і у випадку встановленого П. Фентоном аналогу нерівності типу Вімана для цілих функцій від двох змінних; при цьому вони розглядали як випадкові цілі функції, так і цілі функції з швидко коливними коефіцієнтами. Наявність подібних ефектів виявив П. В. Філевич і стосовно деяких аналогів нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі. Тому природно виникає актуальна проблема встановлення ефекту типу Леві у класах аналітичних функцій від декількох змінних. Проте, на відміну від випадку цілих функцій, залишився цілий перелік відкритих питань.

Праці А. К. Оффорда та Дж. Е. Літлвуда можна вважати класичними у дослідженні розподілу значень випадкових аналітичних функцій. Зокрема, у 2000-х роках дослідженню асимптотичних співвідношень для ймовірності відсутності у достатньо великому крузі нулів з центром у початку координат випадкових гаусових функцій присвятили свої праці Ф. Назаров, М. Содін, А. Волберг, Ю. Перез, Б. Віраґ, М. Хрішнапур та Б. Цірелсон. Проте ця задача ще далека від повного розв'язання, навіть для випадкових цілих функцій від однієї комплексної змінної.

Описані задачі, а також багато інших задач, є предметом досліджень у цій дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень за держбюджетними темами Мг–58Ф "Асимптотичні методи дослідження гармонійних та аналітичних функцій, зображених випадковими рядами, інтегралами Лапласа–Стільтьєса та їх узагальненнями” (номер держреєстрації 0110 U 001365), Мг–145Ф “Нові комплексно–ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами” (номер держреєстрації 0113 U 003051), Мг–159Ф “Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій в банахових просторах” (номер держреєстрації 0113 U 000184), “Нові ймовірнісно-аналітичні методи у комплексному аналізі та теорії операторів”, що виконувались на кафедрі теорії функцій і функціонального аналізу.

Мета і завдання дослідження. *Мета дослідження* — доведення точних аналогів нерівності типу Вімана для аналітичних функцій від багатьох комплексних змінних, областю збіжності яких може бути довільна повна кратно-кругова область Рейнхарда; перевірити наявність ефекту Леві для цих функцій та у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою; отримати аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга для цілих функцій від багатьох комплексних змінних і для інтергалів; довести точні оцінки ймовірності відсутності нулів для гаусових аналітичних функцій; дослідити простори Фреше інтегралів Лапласа-Стілт’єса та рядів Діріхле.

Завдання дослідження: отримати аналоги нерівності Вімана для аналітичних та випадкових аналітичних функцій багатьох комплексних змінних, областю збіжності яких є кратно-кругові області Рейнхарда та побудувати приклади на точність цих нерівностей; встановити аналоги співвідношення Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт’єса; довести точні оцінки для ймовірності відсутності нулів для аналітичних функцій від однієї змінної; дослідити банахів простір інтегралів Лапласа-Стілт’єса та рядів Діріхле; отримати твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки інтегралів Лапласа-Стілт’єса; дослідити властивості просторів Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Об’єкт дослідження: аналітичні і випадкові аналітичні функції від однієї та багатьох змінних, областю збіжності яких може бути довільна кратно-кругова область Рейнхарда, лакунарні ряди однорідних поліномів, цілі кратні ряди Діріхле, інтеграли Лапласа-Стілт’єса.

Предмет дослідження: асимптотичні властивості деяких характеристик функцій з розглядуваних класів.

Методи дослідження: використовуються методи теорії функцій, багатовимірного комплексного аналізу, теорії ймовірностей, а також певні прийоми з праць А. А. Гольдберга, М. М. Шеремети, О. Б. Скасківа, М. Л. Содіна та їх учнів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У дисертаційній роботі вперше отримано такі результати:

1. отримано аналоги співвідношення Бореля та нерівності Вімана для аналітичних функцій від однієї змінної, які можна подати у вигляді степеневого ряду з радіусом збіжності $R \in (0; +\infty]$;
2. перевірено наявність ефекту Леві для цілих та аналітичних у крузі функцій у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейло-

ровох коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою;

3. встановлено аналоги нерівності типу Вімана та перевірено наявність ефекту Леві для аналітичних функцій з областями збіжності $\mathbb{C}^p$; $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$; $\mathbb{D}^p$; де $l, p \in \mathbb{N},\ p > l,\ p \geq 2$, та побудовані приклади на їх точність у кожній з цих множин;
4. отримано аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області Рейнхарда, а також перевірено наявність ефекту Леві для цих функцій;
5. отримано аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга для цілих функцій та побудовано приклади на їх точність;
6. доведено точні аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками;
7. отримано оцінки зверху та знизу для ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих функцій та деяких аналітичних функцій та побудовано приклади на їх точність;
8. встановлено точні співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса;
9. досліджено властивості банахового простору інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле;
10. отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки інтегралів Лапласа-Стілт'єса;
11. досліджено простір Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та є вагомим внеском у теорію аналітичних функцій від однієї та декількох змінних. Вони можуть бути застосовані в аналітичній теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, а також їхніх систем. Результати можуть бути використані для подальших досліджень в Інституті математики НАН України, Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур імені Б. І. Вєркіна НАН України.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені з повними доведеннями лише результати, які належать авторові дисертації. Доведення кількох тверджень допоміжного характеру, отриманих співавторами здобувача, наводяться для повноти картини у рукописі дисертації з люб'язного дозволу співавторів. У статтях, виконаних у співавторстві з науковим консультантом, [11–15, 18, 20, 21] О. Б. Скасківу належать постановка задач, визначення загальної схеми дослідження та обговорення отриманих результатів.

У спільних статтях: з М. М. Шереметою [8, 16] співавтору належать постановка задач, обговорення і аналіз отриманих результатів, а здобувачу — доведення отриманих тверджень; [3] М. М. Шереметі та М. С. Добушовському належать постановка проблем та обговорення отриманих результатів, А. О. Куриляку — доведення тверджень; [1, 32, 35] Скасківу О. Б. та здобувачу належать постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів, Шаповаловській Л. О. доведення теорем; з Л. О. Шаповаловською [36] співавтору належить доведення теорем, здобувачу — постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів; [33] О. Б. Скасківу належать постановка задач і обговорення отриманих результатів, І. Є. Овчару — доведення теореми 1, здобувачу і І. Є. Овчару — доведення теореми 2 в однаковій мірі; у [34] здобувачу і Скасківу О. Б. належать теорема 1 в однаковій мірі, а І. Є. Овчару — теорема 2; у статтях з Н. Ю. Стасів та О. Б. Скасківом здобувачу належать: остаточні варіанти доведень наслідків 10 і 13 з [4]; твердження 5 з [39]; доведення твердження 10 з [6] та в однаковій мірі всім авторам твердження 7 з цієї статті; доведення твердження 1.4 з [40]; О. Б. Скасківу — постановка задач, обговорення і аналіз отриманих результатів, Н. Ю. Стасів — доведення решти тверджень; [5, 7, 38] О. Б. Скасківу та В. Л. Цвігуну належать постановка задач і обговорення отриманих результатів, здобувачу — доведення отриманих тверджень; [9, 37] О. Б. Скасківу та С. Р. Скасківу належать постановка проблем та визначення загальної схеми досліджень, А. О. Куриляку — доведення отриманих тверджень; [19] О. Б. Скасківу та Д. Ю. Зікрачу постановка проблем та визначення загальної схеми досліджень, здобувачу — доведення отриманих тверджень; [10] О. Б. Скасківу та С. І. Панчук належать постановка задач і обговорення отриманих результатів, А. О. Куриляку — доведення тверджень.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних та всеукраїнських конференціях, літніх школах та міжнародних семінарах:

1. International conference "Complex analysis and related topics" (Lviv, 23–28 September, 2013).
2. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей" (Ворохта, 24 лютого – 2 березня, 2014 року).
3. Міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня, 2014 року).
4. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015 року).
5. Наукова конференція присвячена 100-річчю К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1–4 липня, 2015 року).
6. International V. Skorobohatko mathematical conference (Drohobych, 25–28 August, 2015).
7. Complex Analysis and Related Topics (Lviv, 30 May – 4 June, 2016).
8. Друга Всеукраїнська наукова конференція "Прикладні задачі математики" (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня, 2016 р).

9. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року).
10. International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September, 2017).
11. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ, 27 лютого – 2 березня, 2018 року).
12. The IV conference in mathematics and computer science “Congresio-mathematica”, Abstracts, (Olstun, Poland, 20–23 September, 2018)
13. Complex analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A.A. Gol’dberg (Lviv, 28 June – 1 July, 2020).
14. The international online conference “Current trends in abstract and applied analysis” (Ivano-Frankivsk, 12–15 May, 2022).
15. International conference “Theory of approximation of functions and its applications” dedicated to the 80th Anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007) (Lutsk, 28 May – 3 June, 2022).
16. Міжнародна наукова конференція “Математика та інформаційні технології” присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, (Чернівці, 28–30 вересня, 2023 року).

Про результати дисертації доповідалося на семінарі з комплексного аналізу в Ягелонському університеті (Краків, Польща, керівник проф. Січак), на семінарі з теорії апроксимації в Ягелонському університеті (Краків, Польща, керівник проф. Плєсняк), неодноразово доповідалося на Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А. А. Кондратюк, проф. О. Б. Скасків у 2012–2016, тепер проф. М. В. Заболоцький, проф. О. Б. Скасків, проф. П. В. Філевич, проф. І. Е. Чижиков у 2017–2023) та на семінарі з теорії потенціалу та застосувань (керівники проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков, 2012–2016), семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник — проф. А. С. Романюк, 2023), семінарі кафедри математичного та функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (керівник проф. А. В. Загороднюк, 2023), семінарі “Сучасний аналіз” у Київському національному університеті ім. Т. Г. Шевченка (керівники — проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко, 2023).

Публікації. Усі результати дисертації опубліковано в 52 роботах, в тому числі 22 тези конференцій та 30 різних статей в українських та закордонних фахових виданнях з математичних наук [1–21,32–40]. Серед статей дві статті опубліковано без співавторів [2, 17], 18 статей надруковано в українських та закордонних виданнях [1–18], що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus), а серед них 10 статей [1,4,7,9,11–14,16,18], опубліковано у 3 періодичних виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України, та у 3 закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus. З врахуванням квартилів у класифікації SCImago

Journal and Country Rank або Journal Citation Reports маємо, що зазначені 10 статей [1, 4, 7, 9, 11–14, 16, 18] прирівнюються до 21 публікації, а з врахуванням 8 публікацій у вітчизняних виданнях [2,3,5,6,8,10,15,17], що індексуються у Scopus, однак не містяться у категорії „А“, отримуємо додаткові 14 публікацій, тобто загалом 35 прирівняних публікацій. Разом з тезами конференцій та іншими статтями у фахових виданнях з категорії „Б“ та закордонних виданнях не зі Scopus/Web of Science отримуємо 69 прирівняних публікацій, в яких опубліковано основні результати роботи.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 288 сторінки. Основний текст дисертації викладено на 267 сторінках. Список використаних джерел містить 218 найменувань та займає 14 сторінок.

Основний зміст дисертації

У **вступі** обгрунтовується актуальність теми, дається короткий огляд результатів, що мають безпосереднє відношення до теми роботи, та загальна характеристика дисертації.

У **першому розділі** наведено огляд праць, що стосуються асимптотичних властивостей та розподілу значень аналітичних та випадкових аналітичних функцій однієї і багатьох комплексних змінних, а також формулюються основні результати дисертації.

Нерівність типу Вімана для аналітичних та випадкових аналітичних функцій від однієї змінної розглядається у **другому розділі**. Розглянемо $\mathcal{E}_R$, $0 < R \leq +\infty$, — клас необмежених аналітичних функцій у $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Позначимо через $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$ та $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n\colon n \geq 0\}$, $r \in [0, R)$, максимум модуля та максимальний член ряду (1), відповідно.

Нехай $\mathcal{H}_R$ клас неперервних додатних неспадних на $[0; R), 0 < R \leq +\infty$, функцій таких, що $\int_{r_0}^{R} \frac{h(r)}{r} dr = +\infty$ для деякого $r_0 \in (0, R)$. Позначимо через $\mathcal{W}$ клас додатних неперервних зростаючих на $[0; +\infty)$ функцій $\psi(x)$ таких, що $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$ для деякого $x_0 \in (0; +\infty)$.

Для аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $0 < R \leq +\infty$, узагальнено і посилено твердження теореми про нерівність типу Вімана, що виконується зовні деякої виняткової множини скінченної логарифмічної h-міри, встановленої в [1] у випадку $R = +\infty$ (за додаткової умови $\ln_2^+ h(r) = o(\ln\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$). При цьому узагальнення стосується не лише перенесення результату на ширший клас аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $0 < R \leq +\infty$, але й відсутності будь-яких додаткових умов на функцію h, за якою будується h-міра. З цього твердження, як наслідок, випливають твердження про класичну нерівність для цілих функцій і нерівність Кевapplicationарі для аналітичних в одиничному крузі функцій. У процесі доведення нам

---

[1] Скасків, О.Б., Зрум, О.В.: Про виняткову множину в нерівностях Вімана для цілих функцій. Мат. Студ. **21**(1), 13–24 (2004)

вдалося отримати таке твердження про співвідношення типу Бореля для аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $0 < R \leq +\infty$, що виконується зовні деякої виняткової множини скінченної логарифмічної h-міри.

Твердження 2.1. *Нехай $h \in \mathcal{H}_R$ і $f \in \mathcal{E}_R$ — довільна необмежена аналітична функція, представлена степеневим рядом вигляду* (1) *з радіусом збіжності $R(f) = R \in (0; +\infty]$. Тоді існує множина $E_0 := E(f, h) \subset (0, R)$ така, що нерівність*

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \leq (1 + o(1)) \ln \bigl(h(r)\mu_f(r)\bigr) \tag{2}$$

виконується при $r \to R$ $(r \notin E_0)$, де $E = E(f, h) \subset [1; +\infty)$ — множина скінченної h-логарифмічної міри (тобто $h\text{-}meas\, E := \int_E h(r) d \ln r < +\infty$).

З твердження 2.1 випливає, що якщо функції $h \in \mathcal{H}_R$ і $f \in \mathcal{E}_R$ такі, що $\ln h(r) = o(\ln \mathfrak{M}_f(r))$ $(r \uparrow R)$, то

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(r), \quad r \uparrow R, \ (r \notin E), \quad h\text{-} \operatorname{meas} E < +\infty,$$

а у випадку $\ln h(r) = O(\ln r)$ $(r \uparrow R = +\infty)$ у вигляді наслідку отримаємо одне твердження зі статті [2]. Зазначимо, що у випадку класу всіх цілих функцій там встановлено, що умову $\ln h(r) = O(\ln r)$, $r \uparrow R = +\infty$ в описанні величини виняткової множини у класичному співвідношенні Бореля зняти не можна.

Теорема 2.1. *Нехай $h \in \mathcal{H}_R$, $R \in (0; +\infty]$. Для кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{E}_R$, для кожної функції $\psi_j \in \mathcal{W}$ $(j \in \{1; 2\})$ і для будь-якого $\delta > 0$ існують множина $E := E(\delta, f, h) \subset (0, R)$ і $r_0 \in (0, R))$ такі, що $h-\text{meas} E = \int_E h(r) d \ln r < +\infty$ та*

$$(\forall\ r \in (r_0, R) \setminus E)\colon\ \mathfrak{M}_f(r) \leq \mu_f(r) \sqrt{h(r)\psi_2\Bigl(h(r)\psi_1\bigl(\ln\bigl(\mu_f(r)h(r)\bigr)\bigr)\Bigr)},$$

зокрема,

$$(\forall\ r \in (r_0, R) \setminus E)\colon\ \mathfrak{M}_f(r) \leq h(r)\mu_f(r)\bigl(\ln h(r) \ln(h(r)\mu_f(r))\bigr)^{1/2+\delta}. \tag{3}$$

З попередньої нерівності при $h(r) \equiv 2$ випливає класична теорема Вімана-Валірона для цілих функцій: для будь-яких $\delta > 0$ і для кожної необмеженої цілої функції нерівність Вімана $\ln M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r)$ виконується для довільного $r \in (r_0; +\infty) \backslash E$. Для $h(r) \equiv 2/(1 - r)$ з цього твердження випливає теорема про нерівність типу Кевари для аналітичних функцій у одиничному крузі $\mathbb{D}$.

Розглянемо цілу функцію f, яку можна подати у вигляді лакунарного степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}, \tag{4}$$

де $\mathcal{N} = (n_k)$ — послідовність цілих чисел таких, що $n_0 = 0$, $n_k < n_{k+1}$ $(k \geq 0)$,

$$(\exists \Delta \in (0; +\infty))(\exists \rho \in [1/2; 1])(\exists D > 0)\colon\ |n(t) - \Delta t^\rho| \leq D \ \ (t \geq t_0),\ n(t) = \sum_{n_k \leq t} 1$$

і $\bigl(Z_n(t)\bigr)$ — послідовність дійсних випадкових величин задана на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тут $\Omega = [0; 1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевих підмножин $[0; 1]$ і P — міра Лебега на Ω.

---

[2] Філевич, П.В.: Точна оцінка величини виняткової множини у відношенні Бореля для цілих функцій. Укр. мат. журн. **53**(2), 286–288 (2001)

Розглянемо клас випадкових функцій

$$K(f,\mathcal{Z},\mathcal{N})=\left\{f(z,\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kZ_k(\omega)z^{n_k}\colon \omega\in[0;1]\right\}.$$

Припустимо, що Z є послідовністю дійсних незалежних субгаусових випадкових величин, тобто таких, що існує таке $D>0$, що для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ і всіх $\lambda_0\in\mathbb{R}$ маємо $\mathbf{E}(e^{\lambda_0 Z_k})\le e^{D\lambda_0^2}$.

Клас таких випадкових величин позначимо через Ξ. Для $Z\in\Xi$ і будь-якого $k\in\mathbb{N}$: $\mathbf{E}(Z_k)=0$ та

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{E}(Z_k^2)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{D}(Z_k)\le 2D.$$

Надалі вираз “майже напевно” будемо використовувати у сенсі, що відповідна властивість виконується майже скрізь відносно міри Лебега P на $\Omega=[0;1]$. Будемо говорити, що деяке співвідношення виконується майже напевно у певному класі випадкових аналітичних функцій, якщо воно виконується для всіх аналітичних функцій з цього класу майже скрізь по ω.

Для субгаусових цілих лакунарних степеневих рядів маємо таке твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $Z\in\Xi$. Тоді існує така множина $E(\delta)$ скінченної логарифмічної міри, що для всіх $r\in(r_0(\omega);+\infty)\backslash E$ майже напевно в $K(f,\mathcal{Z},\mathcal{N})$ виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega)\le\mu_f(r)\ln^{(2\rho-1)/4}\mu_f(r)\ln^{3/2+\delta}\ln\mu_f(r). \tag{5}$$

Наведено приклад, який вказує на необхідність скінченності супремуму дисперсій послідовності випадкових величин Z. А саме, існує $Z\notin\Xi$ така, що $(\forall n\in\mathbb{Z}_+)$ $\mathbf{E}Z_n=0$, $\sup_n\mathbf{D}Z_n=+\infty$ і нерівність (5) не виконується. Це випливає з наступного твердження.

Теорема 2.3. *Для будь-якого $\alpha>0$ існують послідовність дійсних незалежних випадкових величин, яка задовольняє умови $(\forall n\in\mathbb{Z}_+)$ $\mathbf{E}Z_n=0$, $\sup_n\mathbf{D}Z_n=+\infty$, та ціла функція $f(z)$ і стала $C>0$ така, що майже напевно в $K(f,\mathcal{Z},\mathcal{N})$ маємо*

$$M_f(r,\omega)=\max\{|f(z,\omega)|\colon |z|=r\}\ge C\mu_f(r)\ln^{1/4+\alpha}\mu_f(r),\ r>r_0(\omega).$$

Розглянемо тепер клас випадкових аналітичних функцій

$$K(f,\mathcal{Z})=\left\{f(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nZ_n(\omega)z^n\colon \omega\in[0;1]\right\},$$

де $Z=(Z_n)$ — послідовність дійсних центрованих незалежних субгаусових випадкових величин ($Z\in\Xi$), для яких виконується умова

$$(\exists\beta>0)(\exists n_2\in\mathbb{N})\colon\ \inf\{\mathbf{E}|Z_n|^{-\beta}\colon\ n\ge n_2\}<+\infty.$$

Клас таких випадкових величин позначимо через Ξ_0.

Доведено наявність ефекту Леві для аналітичних функцій у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою.

Теорема 2.4. *Нехай* $Z \in \Xi_0, f \in \mathcal{E}_R, h \in \mathcal{H}_R, \delta > 0$. *Тоді існує множина* $E(\delta)$ *скінченної* h*-логарифмічної міри така, що для всіх* $r \in (r_0(\omega), R)\backslash E$ *майже напевно в* $K(f, \mathcal{Z})$ *виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega) \le \sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln^3 h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+\delta}.$$

Побудовано приклади, які вказують на необхідність скінченності супремуму дисперсій послідовності випадкових величин Z.

Теорема 2.5. *Для будь-якого* $\alpha > 0$ *існують послідовність дійсних незалежних випадкових величин, що задовольняє умови* $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n = 0,\ \sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty$, *ціла функція* $f \in \mathcal{E}_{+\infty}$ *та* $h \in \mathcal{H}_{+\infty}$ *такі, що майже напевно в* $K(f, \mathcal{Z})$ *виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega) \ge \sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln^3 h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+\alpha},\ r \in (r_0(\omega); +\infty).$$

Теорема 2.6. *Для будь-якого* $\alpha > 0$ *існують послідовність дійсних незалежних випадкових величин, що задовольняє умови* $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n = 0,\ \sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty$, *аналітична функція* $f \in \mathcal{E}_1$ *та* $h \in \mathcal{H}_1$ *такі, що майже напевно в* $K(f, \mathcal{Z})$ *маємо*

$$M_f(r,\omega) \ge \sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^\alpha \mu_f(r)(\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4},\ r \in (r_0(\omega); 1).$$

У **третьому розділі** доведено нерівність Вімана для аналітичних функцій у кратно-кругових областях Рейнхарда та перевірено наявність ефекту Леві для цих функцій.

Доведено також аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій $f \in \mathcal{A}^p_0(\mathbb{G})$, які можна представити рядом

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{6}$$

областю збіжності якого є довільна повна кратно-кругова область Рейнхарда $\mathbb{G}$. Через $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ ми позначаємо підклас функцій $f \in \mathcal{A}^p_0(\mathbb{G})$ такий, що

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0$$

у $\mathbb{G}$ для будь-якого $j \in \{1, \ldots, p\}$. Через $\mathcal{E}_R := \mathcal{A}^1_0(\mathbb{D}_R)$ $(0 < R \le +\infty)$ позначимо клас аналітичних функцій від однієї комплексної змінної у крузі $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$. Зокрема, $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{+\infty} = \mathcal{E}^1$ — це клас цілих функцій від однієї комплексної змінної.

Для функції $f \in \mathcal{A}^p_0(\mathbb{G})$ вигляду (6) з областю збіжності $\mathbb{G}$ та

$$r = (r_1, \ldots, r_p) \in G :=$$
$$:= \{r = (r_1, \ldots, r_p)\colon r_j = |z_j|, z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G},\ j \in \{1, \ldots, p\}\}$$

позначимо

$$\Delta_{r_0} = \{t \in G\colon t_j \ge r_j^0,\ j \in \{1, \ldots, p\}\}, \quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p}\colon n \in \mathbb{Z}^p_+\},$$

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}, \quad \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

Область $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$ є *повною областю Рейнгарда*, якщо:

а) $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G} \implies (\forall R = (R_1, \dots, R_p) \in [0;1]^p)\colon Rz = (R_1 z_1, \dots, R_p z_p) \in \mathbb{G}$ (*повна область*);

б) $(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G} \implies (\forall (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p)\colon (z_1 e^{i\theta_1}, \dots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbb{G}$ (*кратно-кругова область*).

Нехай $\mathcal{H}^p$ — клас функцій $h\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ таких, що h є неспадною по кожній змінній та

$$\int_{G\cap\Delta_\varepsilon}\!\!\cdots\int h(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{dr_j}{r_j} = +\infty$$

для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ такого, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $\mathbb{R}^p_+$.

Для $h \in \mathcal{H}^p$ вважатимемо, що $E \subset G$ є множиною *скінченної логарифмічної h-міри на G*, якщо існує $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ таке, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $G \subset \mathbb{R}^p_+$ і

$$\nu_h(E \cap \Delta_\varepsilon) := \int_{E\cap\Delta_\varepsilon}\!\!\cdots\int h(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо $\mathcal{S}_h$.

Теорема 3.1. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$. Тоді для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ та $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{j=1}^{p}\left(\prod_{k=1,k\ne j}^{p} \ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{2}+\delta}. \qquad (7)$$

Зауважимо, якщо вибрати $p = 1$ і $\mathbb{G} = \mathbb{D}_R$ у теоремі 3.1, то ми отримаємо нерівність (3).

Теорема 3.2. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $\mathbb{G}$ є обмеженою. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}.$$

Якщо додатково припустити, що

$$h(r) = \prod_{j=1}^{p} h_j(r_j), \qquad (8)$$

то отримаємо таке твердження.

Теорема 3.4. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$ задовольняє умову* (8). *Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує така множина $E \in \mathcal{S}_h$, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \le \mu_f(r)(h(r))^{1+\delta} \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{j=1}^{p}\left(\prod_{k=1,k\ne j}^{p} \ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{2}+\delta}.$$

Перейдемо тепер до результатів для випадкових аналітичних функцій, областю збіжності яких може бути довільна повна область Рейнхарда.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір Штейнгуаза. Нехай $X = (X_n(t))$ — послідовність випадкових величин заданих на цьому просторі. Через $\mathcal{K}(f, X)$ позначимо клас випадкових функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n. \tag{9}$$

Під "майже напевно" будемо розуміти, що деяка властивість виконується майже скрізь за мірою Лебега P. Будемо говорити, що деякі співвідношення виконується майже напевно у класі $\mathcal{K}(f, X)$, якщо воно виконується для кожної цілої функції $f(z,t)$ вигляду (9) майже напевно за t. Для таких функцій і $t \in [0;1]$ також позначимо $M_f(r,t) = \max\{|f(z,t)|\colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}$.

Послідовність випадкових величин $X = (X_n(t)), n \in \mathbb{Z}^p_+$ є мультиплікативною системою (МС), якщо

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall (n_j), n_j \in \mathbb{Z}^p_+, n_j \neq n_s (s \neq j))\colon\ \mathbf{E}(X_{n_1} X_{n_2} \cdots X_{n_k}) = 0,$$

де $\mathbf{E}\xi$ — математичне сподівання випадкової величини ξ.

Нехай комплекснозначна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ утворює мультиплікативну систему, якщо обидві $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС.

Доведено таку теорему.

Теорема 3.5. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н., $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.*
a) Для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ та $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leq$$

$$\leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r) h(r)\big) \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{4}+\delta}. \tag{10}$$

b) Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ та $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r) h(r)\big)$$

виконується м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$.

Зауважимо, що нерівність (10) можна записати у наступному вигляді

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r) h(r)\big) \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{p-1}{2}+\delta}.$$

У випадку $\mathbb{G} = \mathbb{C}^p$ з нерівності (7) при $h(r_1, \ldots, r_p) \equiv 10$ випливає, що м.н.

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{p}{2}+\delta} \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{p-1}{4}+\delta} \tag{11}$$

для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \subset \mathbb{R}^p_+$ зовні деякої множини E такої, що

$$\int \cdots \int\limits_{E \cap \Delta_\varepsilon} \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Наступне твердження є наслідком з теореми 3.5 і дає для заданої функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$ м.н. істотно сильніший опис виняткової множини у нерівності (11).

Наслідок 3.1. *Нехай* $Z = (Z_n(t))$ — *МС рівномірно обмежена числом 1 м.н.,* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$. *Для кожних* $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ *існує множина* $E = E(\delta, f, t) \in \mathcal{S}_h$ *з* $h(r) = (\ln \mu_f(r))^{p/(p+1)}$ *така, що для всіх* $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ *м.н. в* $\mathcal{K}(f, Z)$ *виконується нерівність* (11).

У випадку $p = 1$ з теореми 3.5 маємо такий наслідок.

Наслідок 3.2. *Нехай* $Z = (Z_n(t))$ — *МС рівномірно обмежена числом 1 м.н.,* $h \in \mathcal{H}^1$, $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}_R), 0 < R \leq +\infty$. *Для кожного* $\delta > 0$ *існують множина* $E = E(\delta, f, t) \in \mathcal{S}_h$ *і стала* $C > 0$ *такі, що для всіх* $r \in (r_0; R) \setminus E$ *м.н. в* $\mathcal{K}(f, Z)$ *маємо*

$$M_f(r, t) \leq C\mu_f(r)\sqrt{h(r)} \ln^{\frac{5}{4}+\delta} h(r) \ln^{\frac{1}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big).$$

Розглянемо клас $\mathcal{K}(f, \theta)$ аналітичних функцій вигляду

$$f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n$$

з $X = \theta = (e^{2\pi i \theta_n t})$, $t \in \mathbb{R}$. Тут (θ_n) — послідовність натуральних чисел така, що її впорядкування (θ^*_k) за зростанням $\{\theta_n \colon n \in \mathbb{Z}^p_+\} = \{\theta^*_k \colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \theta^*_{k+1} > \theta^*_k$, задовольняє умову Адамара

$$\theta^*_{k+1}/\theta^*_k \geq q > 1, k > 0. \tag{12}$$

У випадку $q \geq 2$ система $X = \theta = (e^{2\pi i \theta_n t})$ є МС, а за умови $q > 1$ послідовність випадкових величин $(\cos \theta_n t)_{n \in \mathbb{Z}^p_+}$ може не бути МС. Тому природно виникає питання: *чи виконується ефект Леві для класу* $\mathcal{K}(f, \theta)$ *з* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ *і довільною послідовністю* (θ_n), *впорядкування якої за зростанням* (θ^*_k) *є послідовністю Адамара?*

Відповідь на це питання знаходимо у такій теоремі.

Теорема 3.6. *Нехай* $\theta = (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}^p_+}$ — *послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову* (12), $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.
a) Тоді майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ *і для кожних* $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ *існує множина* $E \in \mathcal{S}_h$ *така, що для всіх* $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ *виконується нерівність* (10).
b) Якщо область $\mathbb{G}$ *обмежена, то майже напевно для* $t \in \mathbb{R}$ *для кожних* $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$, $\delta > 0$ *існує множина* $E \in \mathcal{S}_h$ *така, що для всіх* $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ *нерівність*

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big).$$

Зауваження 1. Точність нерівності (10) доведено у випадках: $\mathbb{C}^p$ з $h(r) \equiv 10$; $\mathbb{D}^p$ з $h(r) = \prod_{j=1}^p \frac{r_j}{1-r_j}$; $\mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}$ з $h(r) = \prod_{j=1}^\ell \frac{r_j}{1-r_j}$, де $p, \ell \in \mathbb{N}$, $p \geq \ell$, $p \geq 2$.

Розглянемо цілі функції від p комплексних змінних вигляду

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{13}$$

де $z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, $p \in \mathbb{N}$, $n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\|n\| = \sum_{j=1}^p n_j$. Для $r = (r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}_+^p$ позначимо $r^\wedge = \min\limits_{1\le i\le p} r_i$.

Через Λ^p позначимо клас цілих функцій вигляду (13) таких, що $\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}^p$ для кожного $j \in \{1, \dots, p\}$. Будемо казати, що підмножина E з $\mathbb{R}_+^p$ є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри, якщо E є вимірною за Лебегом в $\mathbb{R}_+^p$ та існує $R \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що $E \cap \Delta_R$ є множиною скінченної логарифмічної міри, тобто

$$\int\limits_{E\cap\Delta_R}\cdots\int \prod_{j=1}^p \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Теорема 3.8. *Нехай $f \in \mathcal{E}^p$ і $\delta > 0$. Існують $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E \subset \Delta_R$ асимптотично скінченної логарифмічної міри такі, що нерівність*

$$M_f(r) \le \mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^p \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r)\right)^{1/2} \cdot \ln^{5/2+\delta}\left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^p \ln^{p-1} r_i\right) \qquad (14)$$

виконується для всіх $r \in \Delta_R \setminus E$.

Зауваження 2. Існує множина E асимптотично нескінченної логарифмічної міри така, що для цілої функції $g(z) = \exp\{\sum_{j=1}^p z_i\}$, кожного $\varepsilon > 0$ і $r \in E$ маємо

$$M_g(r) \ge \mu_g(r)\left(\prod_{i=1}^p \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_g(r)\right)^{1/2-\varepsilon}.$$

Тому показник 1/2 у нерівності (14) не можна замінити числом, меншим за 1/2. У зв'язку з цим природно виникає таке запитання: *як можна описати "кількість" тих цілих функцій, для яких нерівність* (14) *можна покращити?*

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплекснозначна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ задана на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ така, що обидві $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС.

Для цілої функції вигляду (13) через $\mathcal{K}_1(f, X)$ позначимо клас випадкових цілих функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}. \qquad (15)$$

Уточнено нерівність типу Вімана для випадкових цілих функцій багатьох комплексних змінних. А саме, доведено таку теорему.

Теорема 3.9. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС, рівномірно обмежена числом 1, $\delta > 0$, $f \in \mathcal{E}^p$.*

a) *Тоді майже напевно в $\mathcal{K}_1(f, Z)$ існують $R \in \mathbb{R}^p$ та множина $E^* \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри такі, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E^*$ маємо*

$$M_f(r,t) = \max_{|z|=r} |f(z,t)| \le \mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^p \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r)\right)^{1/4+\delta}.$$

b) Якщо для деякого $\alpha \in \mathbb{R}^p_+$ $\mathfrak{M}_f(r) \geq \exp(r^\alpha) = \exp(r_1^{\alpha_1} \dots r_p^{\alpha_p})$ *при* $r^\wedge \to +\infty$ *або більш загально, для кожного* $\beta > 0$ *виконується нерівність*

$$\int \cdots \int\limits_{\Delta_R} \frac{1}{\ln^\beta \mathfrak{M}_f(r)} \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty, \text{ при } R^\wedge \to +\infty,$$

то майже напевно в $\mathcal{K}_1(f, Z)$ *існує* $R \in \mathbb{R}^p_+$ *і множина* $E^* \subset \Delta_R$ *скінченної логарифмічної міри така, що для всіх* $r \in \Delta_R \backslash E$ *виконується нерівність*

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r) \ln^{p/4+\delta} \mu_f(r). \tag{16}$$

Також доведено, що показник степеня $p/4 + \delta$ в нерівності (16) не може бути замінено числом, меншим за $p/4$. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.10. *Для* $f(z) = \exp\{\sum_{i=1}^p z_i\}$ *майже напевно у* $\mathcal{K}_1(f, H)$ *для* $r \in E$ *виконується нерівність*

$$M_f(r, t) \geq \frac{1}{4^p p} \mu_f(r) \ln^{p/4} \mu_f(r),$$

де E *— множина асимптотично нескінченної логарифмічної міри та* $H = \{e^{2\pi i \omega_n}\}$, $\{\omega_n\}$ *є послідовністю незалежних випадкових величин рівномірно розподілених на* $[0; 1]$.

Перейдемо до аналітичних функцій, які можна подати у вигляді (13) з областю збіжності $\mathbb{D}^p = \{z \in \mathbb{C}^p \colon |z_j| < 1, j \in \{1, \dots, p\}\}$. Через $\mathcal{A}^p$ позначимо клас таких аналітичних функцій.

Будемо казати, що $E \in [0; 1)^p$ є *множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0; 1)^p$, якщо існує $r_0 \in [0; 1)^p$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}) := \int \cdots \int\limits_{E \cap \triangle_{r_0}} \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1 - r_i} < +\infty,$$

тобто $E \cap \triangle_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0; 1)^p$.

Через Υ_1 позначимо сім'ю множин асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0; 1)^p$.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплексна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ така, що $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС й для $f \in \mathcal{A}^p$ через $\mathcal{K}_2(f, Z)$ позначимо клас випадкових аналітичних функцій вигляду (15).

Для таких функції маємо наступне твердження.

Теорема 3.14. *Нехай* $f \in \mathcal{A}^p$, Z *— МС, рівномірно обмежена числом 1,* $\delta > 0$. *Тоді майже напевно в* $\mathcal{K}_2(f, Z)$ *існує множина* $E = E(f, t, \delta), E \in \Upsilon_1$, *така, що для всіх* $r \in [0; 1)^p \backslash E$ *виконується нерівність*

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r) \left(\prod_{j=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1 - r_j}} \cdot \ln^{p/4} \left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1 - r_j} \right\} \right)^{1+\delta}.$$

Доведено, що показник $1 + \delta$ в попередній нерівності не можна замінити числом, меншим за 1. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.15. *Нехай Z — послідовність випадкових величин така, що $|Z_n| \geq 1$ для майже всіх $t \in [0;1]$. Тоді існують аналітична функція $f \in \mathcal{A}^p$, стала $C > 0$ і множина $E = E(f,t,\delta) \subset [0;1)^p$, $E \notin \Upsilon_1$, такі, що майже напевно в $\mathcal{K}_2(f,Z)$ для всіх $r \in E$ маємо*

$$M_f(r,t) \geq C\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{1-r_j}}\cdot\ln^{p/4}\left\{\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j}\right\}.$$

Через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{T})$, $l,p \in \mathbb{N}$, $p > l$, $p \geq 2$, позначимо клас аналітичних функцій вигляду (13) з областю збіжності

$$\mathbb{T} = \{z = (z_1,\dots,z_p) \in \mathbb{C}^p \colon |z_k| < 1, z_j \in \mathbb{C}, k \in \{1,\dots,l\}, j \in \{l+1,\dots,p\}\} = \\ = \mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l},$$

Позначимо через $\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ підклас функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{T})$ таких, що

$$\frac{\partial}{\partial z_j}f(z_1,\dots,z_p) \not\equiv 0 \ (\forall z \in \mathbb{T} \ \text{ та } \ \forall j \in \{l+1,\dots,p\})$$

і існує $r_0 \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що для кожного $k \in \{1,\dots,l\}$ виконується умова

$$r_k\frac{\partial}{\partial r_k}\ln\mathfrak{M}_f(r) + \ln r_k > 1 \ \big(\forall r \in (r_1^0;1)^l \times (r_2^0;+\infty)^{p-l}\big).$$

Нехай $T{:=}[0;1)^l \times [0;+\infty)^{p-l}$, $I = \{1,\dots,l\}$, $J = \{l+1,\dots,p\}$.

Будемо казати, що $E \subset T$ є множиною *асимптотично скінченної логарифмічної міри на T*, якщо існує $r_0 \in T$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}){:=}\int\limits_{E\cap\triangle_{r_0}}\!\!\cdots\int\prod_{i\in I}\frac{dr_i}{1-r_i}\prod_{j\in J}\frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо через Υ.

Теорема 3.16. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(\delta,f) \subset T$, $E \in \Upsilon$ така, що для всіх $r \in T \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta}}\ln^{p/2+\delta}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\left(\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{p+\delta}. \qquad (17)$$

Зауважимо, що показник $1+\delta$ при $\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}$ у нерівності (17) не можна замінити на менше число ніж 1.

Теорема 3.17. *Для довільного $\varepsilon \in (0;1)$ існує функція $g \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ така, що*

$$E = \left\{r \in T \colon M_f(r) > \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{\varepsilon}}\ln^{p/2}\Big(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\Big)\prod_{j\in J}\Big(\ln r_j\Big)^p\right\}$$

має асимптотично нескінченну логарифмічну міру.

Також жоден з показників $1+\delta$ і $p/2+\delta$ у нерівності теореми 3.16 не можна одночасно замінити на числа менші за 1 та $p/2$, відповідно. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.18. *Існують функція* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ *і стала* $C > 0$ *такі, що*

$$E = \left\{ r \in T \colon M_f(r) > C\mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \ln^{p/2} \left(\mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \right) \right\}$$

має асимптотично нескінченну логарифмічну міру.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — послідовність комплексних випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ задана на ймовірнісному просторі Штейнгауза $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, така, що як $X = X_n(t)$, так і $Y = Y_n(t)$ утворюють дійсну МС, рівномірно обмежену числом 1.

Для аналітичної функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ вигляду (13) через $\mathcal{K}_3(f, Z)$ позначимо клас випадкових аналітичних функцій вигляду (15). Для цього класу доведено таке твердження.

Теорема 3.19. *Нехай* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$, Z — *МС, рівномірно обмежена числом 1,* $\delta > 0$. *Тоді майже напевно по* t *існує множина* $E = E(f, t, \delta), E \subset \Upsilon$ *така, що для всіх* $r \in T \setminus E$ *маємо*

$$M_f(r, t) \le \mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{(1 - r_i)^{1/2+\delta}} \ln^{p/4+\delta} \left(\mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \right) \left(\prod_{j \in J} \ln r_j \right)^{p/2+\delta}. \tag{18}$$

Доведено точність теореми 3.19. А саме, що показники $p/4 + \delta$ і $1/2 + \delta$ в нерівності (18) не можна одночасно замінити числами, меншими за $p/4$ і $1/2$, відповідно.

Теорема 3.21. *Нехай* $Z = (Z_n(t))$ *така послідовність випадкових величин, що* $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\colon |Z_n(t)| \ge 1$ *м.н.* $t \in [0; 1]$. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існують аналітична функція* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$, *стала* $C > 0$ *і* $r_0 \in T$ *такі, що м.н. по* t *для всіх* $r \in \Delta_{r_0}$ *виконується нерівність*

$$M_f(r, t) \ge$$

$$\ge \mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{\sqrt{1 - r_i}} \ln^{p/4} \left(\mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \right) \left(\prod_{j \in J} \ln r_j \right)^{p/2} (\ln \ln \mu_f(r))^{-p(p-l)/2-\varepsilon}.$$

Нерівність Бітляна–Гольдберга для лакунарних рядів за однорідними поліномами та нерівність Вімана для кратних рядів Діріхле досліджена в **четвертому розділі**.

Через $\mathcal{E}^p(\lambda)$ позначимо клас цілих функцій $f \colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, (тобто, цілих функцій від p комплексних змінних), які можна подати у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(z), \quad z \in \mathbb{C}^p. \tag{19}$$

Тут $P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C}$, $P_k(z) = \sum_{\|n\| = \lambda_k} a_n z^n$ — однорідні поліноми степеня $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$, і $0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$, $\lambda = (\lambda_k)$. У випадку $\lambda_k \equiv k$ $(k \ge 0)$ ми отримаємо клас усіх цілих функцій від p комплексних змінних, який позначимо через $\mathcal{E}^p$; через $\mathcal{E}^1$ та $\mathcal{E}^1(\lambda)$ позначаємо класи всіх цілих функцій від однієї змінної і цілих функцій, представлених лакунарними степеневими рядами вигляду

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{\lambda_k}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

Розглянемо *вичерпання простору* $\mathbb{C}^p$ системою $(\mathbf{G}_r)_{r\geq 0}$ обмежених повних кратно-кругових областей з центром у точці $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{C}^p$. Така система задовольняє умови:
i) $\bigcup\limits_{r\geq 0}\mathbf{G}_r=\mathbb{C}^p$; *ii)* $(\forall r_1<r_2)\colon \mathbf{G}_{r_1}\subset\mathbf{G}_{r_2}$;
iii) $(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbf{G}_1\iff(\forall\ r>0)\colon(rz_1,\ldots,rz_p)\in\mathbf{G}_r$;
iv) $(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbf{G}_r\Longrightarrow(\forall\ \theta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)\in\mathbb{R}^p)\colon(z_1e^{i\theta_1},\ldots,z_pe^{i\theta_p})\in\mathbf{G}_r$.

Через $\mathbb{G}=\{\mathbf{G}=(\mathbf{G}_r)_{r\geq 0}\colon \text{i)—iv)}\}$ позначимо клас систем таких областей.

Для $r>0$ і цілої функції $f\in\mathcal{E}^1(\lambda)$ позначимо через $M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z|=r\}$ — максимум модуля і через $\mu_f(r)=\max\{|a_k|r^{\lambda_k}\colon k\geq 0\}$ — максимальний член степеневого ряду (20). Для $r>0$ і цілої функції $f\in\mathcal{E}^p(\lambda)$ вигляду (19) позначимо

$$M(r,f)=\max\{|f(z)|\colon z\in\overline{\mathbf{G}}_r\},\quad m_k(r,f)=\max\{|P_k(z)|\colon z\in\overline{\mathbf{G}}_r\}\quad(k\geq 0).$$

Визначимо тепер *діагональний максимальний член ряду* (19)

$$m(r,f)\overset{def}{=}\max\{m_k(r,f)\colon k\geq 0\}=\max\{r^{\lambda_k}m_k(1,f)\colon k\geq 0\}.$$

Зауважимо, що $m(r,f)\equiv\mu_f(r)$ у випадку коли $p=1$.

Нехай $n(t)=\sum_{\lambda_k\leq t}1$ — *лічильна функція* послідовності $\lambda=(\lambda_k)$ і $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних функцій $\psi\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ таких, що $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\psi(x)}<+\infty$.

Теорема 4.2. *Якщо послідовність* $\lambda=(\lambda_k)$ *задовольняє умову*

$$(\exists p_1\in(0;+\infty))(\exists t_0>0)(\forall t\geq t_0)\colon\quad n(t+\sqrt{\psi(t)})-n(t-\sqrt{\psi(t)})\leq t^{p_1}$$

для деякої функції $\psi\in\mathcal{L}$, *тоді для кожної цілої функції* $f\in\mathcal{E}^p(\lambda)$, $p\geq 2$ *і для будь-якого* $\varepsilon>0$ *існують стала* $C=C(\varepsilon,f)>0$ *та множина* $E=E(\varepsilon,f)\subset[1;+\infty)$ *скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$M(r,f)\leq Cm(r,f)(\ln m(r,f))^{p_1}(\ln\ln m(r,f))^{p_1+\varepsilon}$$

для всіх $r\in[1,+\infty)\setminus E$.

Про точність теореми 4.2 йдеться у наступному твердженні.

Теорема 4.3. *Нехай* $\psi\in\mathcal{L}$ *— зростаюча на* $[0;+\infty)$ *функція така, що* $\psi(t)=O(t\ln t\ln^2\ln t)$ $(t\to+\infty)$, *і для послідовності* $\lambda=(\lambda_k)$ *виконується умова*

$$(\exists p_1>0)(\exists C_1>0)(\exists t_0>0)(\forall t\geq t_0)\colon\ n(t+\sqrt{\psi(t)})-n(t-\sqrt{\psi(t)}]\geq C_1t^{p_1}.$$

Тоді для кожного $\varepsilon\in(0,p_1)$ *існує ціла функція* $f\in\mathcal{E}^p(\lambda)$ *така, що*

$$\frac{M(r,f)}{m(r,f)\ln^{p_1}m(r,f)\ln^{p_1-\varepsilon}\ln m(r,f)}\to+\infty\quad(r\to+\infty).$$

Розглянемо $\mathcal{I}(\nu)$ — клас функцій $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ визначається інтегралом вигляду

$$F(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+}a(u)e^{xu}\nu(du),$$

де ν є зліченною адитивною мірою на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ борелівських множин на $\mathbb{R}_+$ (борелівська міра) така, що $\nu(\{x\colon 0\leq x\leq b\})<+\infty$ для кожного $b>0$,

$a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ додатна вимірна функція. Позначимо через $\operatorname{supp}\nu$ носій міри ν, тобто замкнена множина $E =\colon \operatorname{supp}\nu$ така, що $\nu(\mathbb{R}\setminus E) = 0$, $\nu(\{u\in\mathbb{R}\colon |u-u_0|<r\})>0$ для кожного $u_0\in E$ і $r>0$. Для $x\in\mathbb{R}$ й $F\in\mathcal{I}(\nu)$ позначимо $\mu_*(x)=\sup\{a(u)e^{xu}\colon u\in\operatorname{supp}\nu\}$.

Отримано твердження, що містить нову оцінку виняткової множини для функцій з класу $\mathcal{I}(\nu)$.

Теорема 4.4. *Нехай $F\in\mathcal{I}(\nu)$ та ν — міра Бореля така, що*

$$(\exists t_0\geq 0)(\exists c_2,c_3>0)(\forall T\geq t_0)(\forall t\in[t_0,T])\colon \nu(T-t,T+t]\leq c_2t+c_3.$$

Якщо h — додатна функція така, що

$$\int\limits_0^{+\infty} h(x)dx=+\infty,\quad \ln_2^+ h(x)=o(\ln\ln F(x))\ (x\to+\infty),$$

тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує множина $E_3(\varepsilon,F,h)\equiv E_3$ така, що h-meas $E_3 := \int_{E_3}h(x)dx<+\infty$ та виконується нерівність

$$F(x)\leq h(x)\mu_*(x)(\ln\mu_*(x))^{1/2+\varepsilon}$$

для кожного $x\in[0;+\infty)\setminus E_3$.

Тепер ми розглянемо загальний випадок цілих функцій з класу $\mathcal{E}^p := \mathcal{E}^p(\lambda)$ з $\lambda_k\equiv k\in\mathbb{Z}_+$.

З теореми 4.4 випливає такий наслідок.

Теорема 4.5. *Нехай $f\in\mathcal{E}^p$. Якщо додатна локально інтегровна на $[1;+\infty)$ функція h_0 така, що*

$$\int\limits_1^{+\infty} h_0(r)d\ln r=+\infty,\quad \ln^+\ln h_0(r)=o(\ln\ln m(r,f))\ (r\to+\infty),$$

тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує множина $E_4(\varepsilon,f,h)\equiv E_4$ така, що h_0-log-meas $E_4 := \int_{E_4}h_0(r)d\ln r<+\infty$ і виконується нерівність

$$M(r,f)\leq h_0(r)m(r,f)(\ln m(r,f))^{1/2+\varepsilon}$$

для всіх $r\in[1;+\infty)\setminus E_4$.

Виберемо $h_0(r)=\ln^\varepsilon m(r,f)$ у теоремі 4.5.

Наслідок 1. *Якщо $f\in\mathcal{E}^p$, тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує множина $E_5(\varepsilon,f,h)\equiv E_5$ така, що $\int_{E_5}\ln^\varepsilon m(r,f)d\ln r<+\infty$ і для всіх $r\in[1;+\infty)\setminus E_5$ маємо*

$$M(r,f)\leq m(r,f)(\ln m(r,f))^{1/2+\varepsilon}.$$

Перейдемо до нерівність типу Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками.

Для $z=(z_1,\dots,z_p)\in\mathbb{C}^p$, $w=(w_1,\dots,w_p)\in\mathbb{C}^p$ позначимо

$$(z,w)=\sum_{j=1}^p z_pw_p,\ \|n\|=\sum_{j=1}^p n_j,\ \operatorname{Re}z=(\operatorname{Re}z_1,\dots,\operatorname{Re}z_p).$$

Для $R=(r_1,\dots,r_p)\in\mathbb{R}^p$ позначимо $\Pi_R=\{z\in\mathbb{C}^p\colon\ \operatorname{Re} z<R\}$.

Через $\mathcal{D}$ позначимо клас абсолютно збіжних у всьому комплексному просторі $\mathbb{C}^p$ рядів Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)} \tag{21}$$

з такою послідовністю показників (λ_n), що $\{\lambda_n\colon n\in\mathbb{Z}^p\}\subset\mathbb{C}^p$ та $\lambda_n\neq\lambda_m$ для всіх $n\neq m$. Через $\mathcal{D}^+$ позначимо клас цілих рядів Діріхле з послідовністю показників $\Lambda^p=(\lambda_n)$ таких, що $\lambda_n=(\lambda^{(1)}_{n_1},\dots,\lambda^{(p)}_{n_p})$, $n=(n_1,\dots,n_p)$ та $0=\lambda^{(j)}_0<\lambda^{(j)}_k\uparrow+\infty$ $(1\le k\uparrow+\infty)$, $1\le j\le p$. Для $F\in\mathcal{D}$ і $z\in\mathbb{C}^p$ позначимо

$$\mathfrak{M}(z,F):=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}|a_n|e^{\operatorname{Re}(z,\lambda_n)},\quad \mu(z,F):=\sup\{|a_n|e^{\operatorname{Re}(z,\lambda_n)}\colon n\in\mathbb{Z}^p_+\},$$

і $\mathcal{N}_*:=\bigcup_z\mathcal{N}_*(z)$, де $\mathcal{N}_*(z)$ — множина таких мультиіндексів $\nu=\nu(z,F)\in\mathbb{Z}^p_+$, що $|a_\nu|e^{\operatorname{Re}(z,\lambda_\nu)}=\mu(z,F)$ для даного z. Позначимо

$$\beta(z):=\sup\{\operatorname{Re}(z,\lambda_n)\colon n\in\mathbb{Z}_+\}\colon\mathbb{C}^p\to\mathbb{R}.$$

Нехай $\mathcal{D}_1$ — клас абсолютно збіжних для цілих рядів Діріхле в $\mathbb{C}$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}$$

з послідовністю показників (λ_n) таких, що $\lambda_n\ge 0$ $(n\ge 0)$ і $\sup\{\lambda_n\colon\ n\ge 0\}=+\infty$.

Для функції $F\in\mathcal{D}_1$ позначимо через $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ послідовність $(-\ln|a_k|)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ впорядкована за неспаданням.

Нехай L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій на $[0;+\infty)$ і L_1 — клас функції $\Phi\in L$ таких, що $\varphi(2t)=O(\varphi(t))$ $(t\to+\infty)$, де φ — обернена функція до Φ.

Для вимірної за Лебегом множини $E\subset\mathbb{C}^p$ та $\alpha>0$ позначимо

$$V_\alpha(E):=\iint\limits_{E\cap\{z\colon\ |z|\ge 1\}}\frac{dxdy}{|z|^\alpha},\quad z=x+iy\in\mathbb{C}^p.$$

Для кулі $\mathbb{D}^p_R=\{z\in\mathbb{C}^p\colon |z|\le R\}$, $R>0$, $V_{2p}(\mathbb{D}^p_R)=C_p\ln R$, $(R\ge 1)$, $V_{2p}(\mathbb{C}^p)=+\infty$, де C_p — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^{2p}$.

Нехай $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних функцій $\psi\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$, а $\mathcal{L}_0$ — клас таких функцій $\Phi\in\mathcal{L}$, що $\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi(t)}{t}dt=O(\Phi(x))$ $(x\to+\infty)$.

Позначимо через $\mathcal{D}_0$ клас функцій $F\in\mathcal{D}$ таких, що $\mu(z,F)=1$ $(z\in\mathbb{D}^p_1)$, де $\mathbb{D}^p_1=\{z\in\mathbb{C}^p\colon |z|\le 1\}$. Для функції $F\in\mathcal{D}_0$ і заданого $z\in\mathbb{C}^p$ визначимо $\Phi_z(t)=\frac{1}{t}\ln\mu(tz,F)\colon\ [0;+\infty)\to[0;+\infty)$.

Для функції $F\in\mathcal{D}$ визначимо такі множини

$$\gamma(F)\overset{\text{def}}{=}\Big\{z\in\mathbb{C}\colon\ \lim_{t\to+\infty}\Phi_z(t)=+\infty\Big\},\quad \gamma_+(F)\overset{\text{def}}{=}\{z\in\gamma(F)\colon\ \Phi_z\in\mathcal{L}_0\}$$

і для $z\in\gamma_F$

$$K(z)=K_F(z):=\sup\left\{\frac{1}{\Phi_z(t)}\int\limits_0^t\frac{\Phi_z(u)}{u}du\colon\ t\ge t_0\right\},$$

де $\Phi_z(t) = \frac{1}{t}\ln\mu(tz, F)$, та $t_0 = t_0(z) = \max\{t \in \mathbb{R}\colon \mu(tz, F) = 1\}$. Очевидно, що $\gamma_+(F) = \{z \in \gamma(F)\colon K_F(z) < +\infty\}$.

Для $R \in (0; +\infty)$ також визначимо $\gamma_R = \gamma_+(F, R) := \{z\colon\ K_F(z) \le R\}$.

Доведено теорему, що містить верхню оцінку загального члена ряду $F \in \mathcal{D}_0$ через його максимальний член.

Теорема 4.8. *Нехай $F \in \mathcal{D}_0$, $v(u)\colon [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ — така функція, що $v(u) > 0$ $(u \ge u_0)$ і $\int_0^{+\infty} v(u)du < +\infty$. Якщо $\ln k = o(\mu_k)$ $(k \to +\infty)$, то існує функція*

$$c_1(u) \uparrow +\infty\ (u \to +\infty),\ \int\limits_0^{+\infty} c_1(u)v(4u)du < +\infty,$$

та множина $E \subset \gamma_+(F)\colon V_{2p}(E \cap \gamma_+(F)) \le C_p$, такі, що для кожного $R > 0$, для всіх $n \ge 0$ і $t > 0$, $tz \in \gamma_R \setminus E$ виконується нерівність

$$|a_n|e^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_n)} \le \mu(tz, F)\exp\biggl\{ -t\int\limits_{\mu_{k_\nu}}^{\mu_{k_n}} (\mu_{k_n} - u)\frac{c_z^*(u)}{\varphi_z^*(u)}v(4u)du \biggr\},$$

де $\mu_{k_n} = -\ln|a_n|$, $c_z^*(u) = e^{-2K(z)}c_1(u)$, $\nu = \nu(tz, F)$:

$$\|\nu(tz)\| = \max\{\|n\|\colon |a_n|e^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_n)} = \mu(tz, F)\}$$

є центральним мультиіндексом ряду (21), а $\varphi_z^*(u)$ є оберненою функцією до $\Phi_z^*(t) = \ln\mu(tz, F)$.

З попередньої теореми випливає таке твердження.

Теорема 4.9. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо*

$$(\exists\alpha > 0)\colon \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^\alpha}{t^2}dt < +\infty, \quad n_1(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\mu_n \le t} 1,\ t_0 > 0, \tag{22}$$

тоді існує множина $E \subset \gamma_+(F)$ така, що $V_{2p}(E \cap \gamma_+(F)) \le C_p$ і співвідношення

$$\mathfrak{M}(z, F) = o(\mu(z, F)\ln^{1/\alpha}\mu(z, F)) \tag{23}$$

виконується при $z \to \infty$ $(z \in \gamma_R \setminus E)$ для кожного $R > 0$.

Асимптотичні властивості ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих та аналітичних функцій розглядаються в **розділі 5**.

Нехай $\mathcal{E}$ — клас випадкових цілих функцій вигляду

$$f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_nz^n, \tag{24}$$

де $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0 \ne 0,\ \ \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,\ \ \#\{n \in \mathbb{N}\colon a_n \ne 0\} = +\infty;$$

$\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi, \pi)$, $\bigl(\xi_n(\omega_2)\bigr) \in \mathcal{N}_\mathbb{C}(0; 1)$, тобто незалежних випадкових комплексних величин зі стандартним гаусовим розподілом у комплексній площині зі щільністю

$$p_{\xi_n}(z) = \frac{1}{\pi}e^{-|z|^2},\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для $r > 0$ і $\delta \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mathcal{N}(r) = \{n\colon \ln(|a_n|r^n) > 0\}, \quad N(r) = \#\mathcal{N}(r),$$

$$s(r) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^+(|a_n|r^n) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}(r)} \ln(|a_n|r^n),$$

$$P_0(r) = P\{\omega\colon n_f(r,\omega) = 0\}, \quad p_0(r) = \ln^- P_0(r), \quad \ln^- x := -\min\{\ln x; 0\},$$

де $n_f(r,\omega)$ — лічильна функція нулів функції $f(z,\omega)$ в $r\mathbb{D} = \{z\colon |z| < r\}$.

Отримано оцінки зверху і знизу для $\ln^- P_0(r)$. А саме, доведено такі два твердження.

Теорема 5.1. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f \in \mathcal{E}$. Тоді існує множина $E \subset (1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що*

$$p_0(r) \le s(r) + N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{\ln N(r)}\}$$

для всіх $r \in (1; +\infty) \setminus E$.

Теорема 5.4. *Нехай $f \in \mathcal{E}$. Тоді P-майже напевно існує $r_0(\omega) > 0$ таке, що для всіх $r \in (r_0(\omega); +\infty)$ маємо*

$$p_0(r) \ge s(r) + N(r)\ln N(r) - 4N(r).$$

З теорем 5.1 і 5.4 випливає таке твердження.

Теорема 5.5. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f \in \mathcal{E}$. Тоді існує множина $E \subset (1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри та P-майже напевно $r_0(\omega) > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0(\omega); +\infty) \setminus E$ виконується нерівність*

$$(1-\varepsilon)N(r)\ln N(r) \le p_0(r) - s(r) \le N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{\ln N(r)}\}, \tag{25}$$

а саме,

$$0 \le \varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)}, \quad \varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} \le \frac{1}{2} \tag{26}$$

та

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

На точність нерівностей (26) вказують наступні дві теореми.

Теорема 5.6. *Існують $f \in \mathcal{E}$ і множина $E \subset (1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.7. *Існують $f \in \mathcal{E}$ та множина $E \subset (1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = 0.$$

Розглянемо тепер випадкові аналітичні функції вигляду (24). Тут $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0 \neq 0, \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \sup\{|a_n| \colon n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Позначимо клас таких випадкових аналітичних функцій через $\mathcal{A}$.

Нехай

$$p_0(r) = \ln^- P\{\omega \colon n_f(r,\omega) = 0\}$$

для випадкових аналітичних функцій $f \in \mathcal{A}$.

Теорема 5.8. *Нехай* $f \in \mathcal{A}$ *та*

$$\alpha = \underline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4.$$

Існує множина $E \subset [0;1)$ *скінченної логарифмічної міри* ($\int_E (1-r)^{-1}dr < +\infty$) *така, що для всіх* $r \in [0;1)\backslash E$ *маємо*

$$p_0(r) \leq s(r) + (1+e)N(r)\ln N(r) + C_0 N(r),$$

де $C_0 = 3 + 9/|a_0|$.

Теорема 5.11. *Нехай* $f \in \mathcal{A}$. *Тоді* P*-майже напевно існує* $r_0(\omega) > 0$ *таке, що для всіх* $r \in (r_0(\omega);1)$ *маємо*

$$p_0(r) \geq s(r) + N(r)\ln N(r) - 4N(r).$$

З теорем 5.8 та 5.11 випливає таке твердження.

Теорема 5.12. *Нехай* $\varepsilon > 0$ *і* $f \in \mathcal{A}$ *такі, що*

$$\alpha = \underline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4. \tag{27}$$

Тоді існують множина $E \subset [0;1)$ *скінченної логарифмічної міри та* P*-майже напевно* $r_0(\omega) > 0$ *такі, що для всіх* $r \in (r_0(\omega);1) \setminus E$ *виконується нерівність*

$$(1-\varepsilon)N(r)\ln N(r) \leq p_0(r) - s(r) \leq (1+e+\varepsilon)N(r)\ln N(r),$$

а саме,

$$0 \leq \underline{\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)}, \quad \overline{\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} \leq \frac{1}{2 - \frac{1}{\alpha}} \tag{28}$$

та

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

Якщо послідовність (a_n) є логарифмічно ввігнутою, то умову (27) у теоремі 5.12 можна замінити на

$$\underline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4.$$

Точність нерівностей (28) у випадку $\alpha = +\infty$ випливає з таких двох тверджень.

Теорема 5.13. *Існують випадкова аналітична функція* $f \in \mathcal{A}$: $\alpha = +\infty$ *і множина* $E \subset [0;1)$ *скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.14. *Існують випадкова аналітична функція* $f \in \mathcal{A}$: $\alpha = +\infty$, *множина* $E \subset [0;1)$ *нульової щільності, тобто (тут* meas *— міра Лебега на прямій)*

$$DE = \overline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{1}{1-r}\mathrm{meas}(E \cap [r;1)) = 0,$$

такі, що

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = 0.$$

У **розділі 6** досліджуються асимптотичні властивості інтегралів Лапласа-Стілт'єса.

Нехай ν є невід'ємною мірою на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм $\mathrm{supp}\,\nu$ і $f(x)$ — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du).$$

Для $F \in \mathcal{I}(\nu)$ та $x \in \mathbb{R}$ визначимо $\mu_*(x,F) = \sup\{f(u)e^{xu}\colon u \in \mathrm{supp}\ \nu\}$.

Нехай $\mathbb{L}$ клас невід'ємних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для яких $\psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ і через $\mathbb{L}^+$ підклас функцій

$$\psi \in \mathbb{L}\colon \psi(t) \nearrow +\infty,\ t \to +\infty.$$

Припустимо, що $\Phi \in \mathbb{L}^+$. Через $\mathcal{I}(\nu,\Phi)$ ми позначимо клас функцій $F \in \mathcal{I}(\nu)$ таких, що

$$(\exists c > 0)\colon\ \ln F(x) \le \Phi(cx)\ (x \ge x_0),$$
$$\mathcal{I}^*(\nu,\Phi) := \{F \in \mathcal{I}(\nu)\colon (\exists c>0)(\exists x_j \to +\infty)[\,\ln F(x) \le \Phi(cx)\ (x = x_j,\ j \ge 1)]\}.$$

Доведено теорему про аналог співвідношення Бореля.

Теорема 6.1. *Нехай* $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, $\Phi \in \mathbb{L}^+$, $F \in \mathcal{I}(\nu,\Phi_0)$. *Якщо умови*

$$(\forall \eta > 0)\colon \quad \ln \nu_0(\eta\Phi(t)) = o(t\Phi(t))\ (t \to +\infty)$$

та

$$(\forall\ \eta > 0)\colon\ \ \underline{\lim}_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln\nu_0(t)}{t} = 0, \quad \nu_0(t) := \nu((0,t]) \tag{29}$$

виконуються, то

$$\ln F(x) \le (1+o(1))\ln\mu_*(x,F), \quad x \to +\infty\ (x \notin E),$$

де E *— множина нульової лінійної нижньої щільності, тобто*

$$\underline{D}E = \underline{\lim}_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\mathrm{meas}(E \cap [0,R]) = 0.$$

Наступна теорема вказує, що (29) є необхідною умовою теореми 6.1.

Теорема 6.2. *Нехай* $\Phi \in \mathbb{L}^+$. *Якщо умови*

$$(\exists \eta > 0)(\exists b > 0)\colon \quad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln\nu_0(t)}{t} > b, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta t} d\nu_0(t) < +\infty$$

виконуються, то для кожного $h > 0$ *існує функція* $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$, $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, *така, що для всіх* $x \geq x_0$ *виконується нерівність*

$$\ln F(x) \geq (1+h)\ln\mu_*(x, F).$$

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ — така послідовність, що

$$0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty \ \ (1 \leq n \uparrow +\infty), \quad \nu(E) := \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E)$$

для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$, де

$$\delta_\lambda(E) = \begin{cases} 1, & \text{при } \lambda \in E; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді для функції $F \in \mathcal{I}(\nu)$ та $x \geq 0$ маємо цілий ряд Діріхле

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n)e^{x\lambda_n}.$$

Позначимо $H(\lambda, \Phi)$ клас цілих рядів Діріхле з фіксованою послідовністю показників λ вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n},$$

таких, що

$$(\exists c > 0)\colon \ \ln\mathfrak{M}(x, F) \leq \Phi(cx) \quad (x \geq x_0), \ \mathfrak{M}(x, F) := \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|e^{z\lambda_n}.$$

Нехай $M(x, F) = \sup\{|F(x+iy)|\colon y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n \geq 0\}$. З теореми 6.1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 6.1. *Нехай* $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, $\Phi \in \mathbb{L}^+$, $F \in H(\lambda, \Phi_0)$. *Якщо умови*

$$(\forall \eta > 0)\colon \ \ln n(\eta\Phi(t)) = o(t\Phi(t)) \ (t \to +\infty) \tag{30}$$

та

$$(\forall\ \eta > 0)\colon \quad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln n(t)}{t} = 0, \quad n(t) := \sum_{\lambda_n \leq t} 1,$$

виконуються, то

$$\ln M(x, F) = (1 + o(1))\ln\mu(x, F), \quad x \to +\infty, \ (x \notin E),$$

при де E — множина нульової нижньої лінійної щільності, тобто $\underline{D}E = 0$.

З теореми 6.2 маємо наступний наслідок.

Наслідок 6.2. *Нехай $\Phi \in \mathbb{L}^+$. Якщо умови*

$$(\exists \eta > 0)(\exists b > 0)\colon \quad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln n(t)}{t} > b, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta t} dn(t) < +\infty$$

виконуються, то для кожного $h > 0$ існує функція $F \in H(\lambda, \Phi)$ така, що для всіх $x \geq x_0$ виконується нерівність $\ln M(x, F) \geq (1 + h)\ln \mu(x, F)$.

Нехай V — клас невід'ємних неспадних необмежених та неперервних справа на $[0; +\infty)$ функцій F.

Перетворення Лапласа–Стілт'єса дійсної функції g зазвичай задається інтегралом Лебега–Стілт'єса у вигляді $\int_0^{+\infty} e^{zx} dg(x)$. Запишемо це перетворення в іншій формі. Інтегралом Лапласа–Стілт'єса називаємо

$$I(\sigma) = \int\limits_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma} dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

для невід'ємної на $[0; +\infty)$ функції f.

Нехай $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, I) = \sup\{f(x)e^{x\sigma}\colon x \geq 0\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, — максимум підінтегральної функції, σ_c — абсциса збіжності інтегралу (31) та σ_μ — абсциса існування максимуму підінтегральної функції. Власне, $\mu(\sigma, I) = \max\{f(x)e^{x\sigma}\colon x \geq 0\} < +\infty$ для $\sigma < \sigma_\mu$ і $\mu(\sigma, I) = +\infty$ для всіх $\sigma > \sigma_\mu$. Тоді

$$\sigma_\mu = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}$$

і якщо $\ln F(x) = o(x)$ або $\ln F(x) = o(\ln f(x))$ при $x \to +\infty$, то $\sigma_c \leq \sigma_\mu$. Також зауважимо, що якщо $\ln F(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$ та $\sigma_\mu = +\infty$, то $\sigma_c = +\infty$.

Якщо додатна функція f*має регулярне зростання відносно* F, тобто, якщо існують $a \geq 0$, $b \geq 0$ та $h > 0$ такі, що для всіх $x \geq a$

$$\int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \geq hf(x),$$

то $\sigma_c \leq \sigma_\mu$. Таким чином, якщо $F \in V$ та f мають регулярне зростання відносно F і якщо або $\ln F(x) = o(x)$, або $\ln F(x) = o(\ln f(x)))$ при $x \to +\infty$, то $\sigma_c = \sigma_\mu$.

Надалі припускаємо, що $\sigma_c = \sigma_\mu = +\infty$.

Для цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ позначимо через $\varrho(f)$ її порядок, а $\sigma(f)$ її тип.

Нехай L — клас неперервних зростаючих функцій α таких, що $\alpha(x) \geq 0$ для $x \geq x_0$, $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $x \leq x_0$, і на $[x_0; +\infty)$ функція α зростає до $+\infty$. Нехай $\alpha \in L, \beta \in L$ та G — довільна функція на $[\sigma_0; +\infty)$. Значення

$$\varrho_{\alpha\beta}(G) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(G(\sigma))}{\beta(\sigma)}, \quad \lambda_{\alpha\beta}(G) = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(G(\sigma))}{\beta(\sigma)} \tag{32}$$

називаються *узагальненим порядком* і *узагальненим нижнім порядком* G, відповідно. Якщо ми виберемо $G(\sigma) = \ln I(\sigma)$, то з (32) ми отримаємо означення узагальнених порядків $\varrho_{\alpha\beta}(I)$ і $\lambda_{\alpha\beta}(I)$ інтегралу Лапласа-Стілт'єса (31). Також визначимо

$$k_{\alpha\beta}(f)=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)},\quad \varkappa_{\alpha\beta}(f)=\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)}.$$

В теоремах 6.5 і 6.6 встановлено достатні умови на функції α, β, F для того, щоб для кожної f такої, що має регулярне зростання відносно F, виконувались рівності $\varrho_{\alpha\beta}(I)=k_{\alpha\beta}(f)$, $\lambda_{\alpha\beta}(I)=\varkappa_{\alpha\beta}(f)$.

Теореми 6.7 і 6.8, які також встановлені у цьому розділі, подібні на щойно згадані теореми 6.5 і 6.6 і стосуються *модифікованого узагальненого порядку і модифікованого нижнього узагальненого порядку* I

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I)=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right),\quad \lambda^M_{\alpha\beta}(I)=\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right)$$

та характеристик $k_{\alpha\beta}(f)$, $\varkappa_{\alpha\beta}(f)$, відповідно.

Припустимо, що дійсна функція f на $[0;+\infty)$ така, що інтеграл Лебега-Стілт'єса $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ існує для кожного $A\in[0;+\infty)$ та $\sigma\in\mathbb{R}$. Нехай

$$I(\sigma)=\int\limits_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x),\quad \sigma\in\mathbb{R}. \tag{33}$$

Нехай

$$M(\sigma,I):=\int\limits_0^\infty |f(x)|e^{x\sigma}dF(x),\quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{34}$$

та $\mu(\sigma,I):=\max\{|f(x)|e^{x\sigma}\colon x\geq 0\}$ $(\sigma\in\mathbb{R})$.

Нехай h — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ функція. Тут будемо досліджувати властивості інтегралів (33), для яких

$$|f(x)|\exp\{xh(x)\}\to 0,\ x\to+\infty. \tag{35}$$

Через LS_h ми позначаємо клас інтегралів вигляду (33) з дійсними функціями f, для яких виконується (35). На LS_h ми визначимо дії

$$(I_1+I_2)(x)=\int\limits_0^\infty (f_1(x)+f_2(x))e^{x\sigma}dF(x),\ (\lambda I)(\sigma)=\int\limits_0^\infty \lambda f(x)e^{x\sigma}dF(x),$$

де $I_j(\sigma)=\int_0^\infty f_j(x)e^{x\sigma}dF(x)$ для $j\in\{1;2\}$, і нехай

$$\|I\|_h=\sup\{|f(x)|\exp\{xh(x)\}\colon x\geq 0\}.$$

LS_h з цими діями є нормованим лінійним простором.

Теорема 6.14. *Якщо* $F\in V$ *і* $\ln F(x)=o(x)$ *при* $x\to+\infty$, *то* $(LS_h,\|\cdot\|_h)$ *є нерівномірно опуклим банаховим простором.*

Наступне твердження стосується рівномірної збіжності (I_m).

Твердження 6.9. *Нехай* $F\in V$ *і* $\ln F(x)=o(x)$ *при* $x\to+\infty$. *Якщо* $(I_m)\subset LS_h$ *збігається до* $I\in LS_h$ *за* $\|\cdot\|_h$, *то* $I_m(\sigma)$ *рівномірно збігається до* $I(\sigma)$ *на компактній підмножині* $\mathbb{R}$.

Повернемося до розгляду дуальних просторів. Для $(LS_h, \|\cdot\|_h)$ через LS_h^* ми позначимо дуальний простір, тобто LS_h^* — сім'я всіх неперервних лінійних функціоналів на $(LS_h, \|\cdot\|_h)$. Нехай $\Lambda(I) = \int_1^\infty f(x)g(x)dF(x)$, де g — дійсна функція на $(1, +\infty)$ така, що $\int_1^\infty |f(x)g(x)|dF(x) < +\infty$. Тоді Λ є лінійним функціоналом.

Твердження 6.10. *Для того, щоб* $\Lambda \in LS_h^*$, *достатньо збіжності інтегралу* $\int_1^\infty |g(x)| \exp\{-xh(x)\}dF(x) < +\infty$.

Нехай Ω — клас додатних необмежених функцій Φ на $(-\infty; +\infty)$ таких, що похідна Φ' додатна неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ позначимо через φ обернену функцію до Φ' і $\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ — функція, асоційована з Φ у сенсі Ньютона. Відомо, що якщо $\Phi \in \Omega$, то $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$ тоді і тільки тоді, коли $\ln |f(x)| \le -x\Psi(\varphi(x))$ для всіх $x \ge x_0$. З огляду на це твердження розглянемо клас LS_Φ інтегралів (33) з дійсними функціями f такими, що $|f(x)| \exp\{x\Psi(\varphi(x))\} \to 0$ при $x \to +\infty$ і на LS_Φ визначено

$$\|I\|_\Phi = \sup\{|f(x)| \exp\{x\Psi(\varphi(x))\} \colon x \ge 0\}.$$

Якщо ми виберемо $h(x) = \Psi(\varphi(x))$, то $LS_h = LS_\Phi$ і отримаємо наступне твердження.

Наслідок 6.8. *Нехай* $\Phi \in \Omega$, $F \in V$ *і* $\ln F(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$. *Тоді* $(LS_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ *є нерівномірно опуклим банаховим простором. Якщо* $(I_m) \subset LS_\Phi$ *збігається до* $I \in LS_\Phi$ *за нормою* $\|\cdot\|_\Phi$, *то* $I_m(\sigma)$ *рівномірно збігається до* $I(\sigma)$ *на компактній підмножині* $\mathbb{R}$. *Якщо*

$$\int\limits_1^\infty |g(x)| \exp\{-x\Psi(\varphi(x))\}dF(x) < +\infty,$$

то функціонал $\Lambda(I) = \int_1^\infty f(x)g(x)dF(x)$ *належить дуального простору* LS_Φ^*.

Розглянемо банахові простори інтегралів Лапласа-Стілт'єса скінченного узагальненого порядку. Будемо казати, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = 1 + o(1))\alpha(x),\ x \to +\infty$. Тоді, $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного фіксованого $c \in (0; +\infty)$, тобто α є повільно зростаючою функцією.

Наслідок 6.9. *Нехай* $\alpha \in L$, $\beta \in L^0$, $F \in V$ *і* $\ln F(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$. *Тоді* $(LS_{(\alpha,\beta;k)}, \|\cdot\|_{(\alpha,\beta;k)})$ *є нерівномірно опуклим банаховим простором для кожного* $k \in (\varkappa_{\alpha,\beta}[I]; +\infty)$. *Якщо* $(I_m) \subset LS_{(\alpha,\beta;k)}$ *збігається до* $I \in LS_{(\alpha,\beta;k)}$ *за* $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta;k)}$, *то* $I_m(\sigma)$ *рівномірно збігається до* $I(\sigma)$ *на компактній підмножині* $\mathbb{R}$. *Якщо*

$$\int\limits_1^\infty |g(x)| \exp\Big\{-x\beta^{-1}\Big(\frac{\alpha(x)}{k}\Big)\Big\}dF(x) < +\infty,$$

то функціонал $\Lambda(I) = \int_1^\infty f(x)g(x)dF(x)$ *належить до дуального простору* $LS_{(\alpha,\beta;k)}^*$.

Розглянемо випадок, коли $I(\sigma) = D(\sigma)$ є рядом Діріхле з дійсними коефіцієнтами d_n. Припустимо, що цей ряд абсолютно збігається для всіх $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ і будемо вважати, що $D \in S_h$, якщо

$$\lim_{n\to+\infty} |d_n| \exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\} = 0.$$

Позначимо $\|D\|_h = \sup\{|d_n| \exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\} \colon n \ge 1\}$.

Тоді з теореми 6.14 отримуємо таке твердження.

Наслідок 6.10. *Якщо* $\ln n(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$, *то* $(S_h, \|\cdot\|_h)$ *є нерівномірним банаховим простором.*

Наступне твердження доповнює твердження 6.9.

Твердження 6.11. *Якщо* $\ln n(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$, *то для того, щоб* $(D_m) \in S_h$ *збігався до* $D \in S_h$ *за* $\|\cdot\|_h$ *необхідно і достатньо, щоб* $D_m(\sigma)$ *рівномірно сходилася до* $D(\sigma)$ *на кожній компактній підмножині* $\mathbb{R}$.

Для $D \in (S_h, \|\cdot\|_h)$ через S_h^* ми позначаємо дуальний простір і нехай

$$\Lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n,$$

де g_n — дійсна послідовність така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} < +\infty. \tag{36}$$

Тоді Λ є лінійним функціоналом.

Твердження 6.12. *Кожен обмежений лінійний функціонал* Λ, *визначений для* $(S_h, \|\cdot\|_h)$, *має вигляд*

$$\Lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n, \quad D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp\{\lambda_n \sigma\}, \tag{37}$$

де g_n *— дійсна послідовність, що задовольняє* (36).

У просторах цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку можна ввести іншу метрику. Нагадаємо, що якщо $\alpha \in L$, $\beta \in L$ і ряд Діріхле (37) цілий, то

$$\varrho_{\alpha,\beta}[D] := \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, D))}{\beta(\sigma)},$$

називається *узагальненим* (α, β)*-порядком* D, де $M(\sigma, D) = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| e^{\sigma \lambda_n}$.

Для фіксованого $\varrho < +\infty$ через $\overline{S}_\varrho$ позначимо клас цілих рядів Діріхле (37), для яких $\varrho_{\alpha,\beta}[D] \le \varrho$. Тоді

$$|d_n| \le \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + o(1)}\right)\right\}, \quad n \to \infty.$$

Для $q \in \mathbb{N}$ визначимо

$$\|D\|_{\varrho;q} = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\}.$$

Очевидно, $\|D\|_{\varrho;q} \le \|D\|_{\varrho;q+1}$. Тому сім'я $\|D\|_{\varrho;q} \colon q \in \mathbb{N}$ індукує на $\overline{S}_\varrho$ унікальну топологію таку, що $\overline{S}_\varrho$ стає локальним опуклим векторним простором, і ця топологія задана метрикою d, де

$$d(D_1,\, D_2) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{\|D_1 - D_2\|_{\varrho;q}}{1 + \|D_1 - D_2\|_{\varrho;q}}.$$

Простір з метрикою d позначимо $\overline{S}_{\varrho,d}$.

Теорема 6.15. *Нехай функції* $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ *і* $\beta \in L^0$ *неперервно диференційовні і* $\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $c \in (0;+\infty)$. *Якщо*

$$\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))), \quad n \to \infty$$

для кожного $c \in (0;+\infty)$, *то* $\overline{S}_{\varrho,d}$ *є простором Фреше.*

Також доведено таке твердження.

Твердження 6.13. *Нехай функції* α, β *і послідовність* (λ_n) *задовольняють умови теореми 6.15. Тоді кожен неперервний лінійний функціонал* Λ *на* $\overline{S}_{\varrho,d}$ *має вигляд* (37) *тоді і тільки тоді, коли для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і* $q \in \mathbb{N}$

$$|g_n| \le K \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\}, \quad K = \mathrm{const} > 0.$$

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертації розв’язано ряд актуальних задач теорії аналітичних функцій, а саме, отримано відповіді на декілька відкритих проблем. Серед вагомих здобутків дисертаційної роботи можна віднести наступні:

1. отримано аналоги співвідношення Бореля та нерівності Вімана для цілих і аналітичних функцій від однієї змінної, отримано новий опис виняткової множини у цих співвідношеннях;
2. перевірено наявність ефекту Леві для цілих та аналітичних у крузі функцій у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою;
3. отримано точні аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга для цілих функцій;
4. вперше встановлено аналоги нерівності типу Вімана та перевірено наявність ефекту Леві для аналітичних функцій з областями збіжності $\mathbb{C}^p$; $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$; $\mathbb{D}^p$; де $l, p \in \mathbb{N},\ p > l,\ p \ge 2$, та побудовані приклади на їх точність у кожній з цих множин;
5. вперше отримані аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області Рейнхарда, а також перевірено наявність ефекту Леві для цих функцій;
6. доведено аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками і побудовано приклади на їх точність;
7. отримані оцінки зверху і знизу для ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих функцій та деяких аналітичних функцій, побудовано приклади на точність цих оцінок, як для випадкових цілих функцій, так і для випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі;
8. встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілтьєса і побудовано приклад на точність цього твердження;

9. досліджено банахів простір інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле;
10. отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки інтегралів Лапласа-Стілт'єса;
11. досліджено простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових іноземних та вітчизняних виданнях, що індексуються у міжнародних базах даних Scopus або Web of Science

[1] Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc. *Ukr. Math. J.* 2016. V. 68. № 1. P. 83–93. Режим доступу до журналу: `https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1823` **(Scopus)** *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаютьcя, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[2] Kuryliak A. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *Mat. Stud.* 2017. V. 47. № 1. P. 10–19. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.47.1.10-19` **(Scopus)**.

[3] Sheremeta M.M., Dobushovskyy M.S., Kuryliak A.O.: On a Banach space of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2017. V. 48. № 2. P. 143–149. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.48.2.143-149` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[4] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of Dirichlet series with random exponents. *Int. J. Appl. Math.* 2017. V. 30. № 3. P. 229–238. Режим доступу до журналу: `http://www.diogenes.bg/ijam/contents/2017-30-3/2/index.html` **(Scopus)** *(Особистий внесок: остаточні варіанти доведень наслідків 10 і 13).*

[5] Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's type inequality for multiple power series in an unbounded cylinder domain. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 1. P. 29–51. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.49.1.29-51` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[6] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of random multiple Dirichlet series. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 2. P. 122–137. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.49.2.122-137` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення тверджень 7 і 10).*

[7] Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's inequality for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ with rapidly oscillating coefficients. *Carpathian Math. Publ.* 2018. V. 10. № 1. P. 133–142. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.133-142` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[8] Sheremeta M.M., Kuryliak A.O.: On the growth of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2018. V. 50. № 1. P. 22–35. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.50.1.22-35` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[9] Kuryliak A., Skaskiv O., Skaskiv S. Levy's phenomenon for analytic functions in the polydisc. *Eur. J. Math.* 2020. V. 6. P. 138–152. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.1007/s40879-019-00363-2` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[10] Kuryliak A.O., Panchuk S.I., Skaskiv O.B. Bitlyan-Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term. *Mat. Stud.* 2020. V. 54. № 2. P. 135–145. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.30970/ms.54.2.135-145` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[11] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h-measure of an exceptional sets. *Carpathian Math. Publ.* 2020. V. 12. № 2. P. 492–498. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/cmp.12.2.492-498` **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[12] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *Axioms.* 2021. V. 10. № 4. 348. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.3390/axioms10040348` **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[13] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman-type inequality in a multiple-circular domain: Lévy's phenomenon and exceptional sets. *Ukrainian Math. J.* 2022. V. 74. № 5. P. 743–756. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.37863/umzh.v74i5.7137` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[14] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *Axioms.* 2023. V. 12. № 3. 255. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.3390/axioms12030255` **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[15] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Analytic Gaussian functions in the unit disc: probability of zeros absence. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 1. P. 29–45. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.30970/ms.59.1.29-45` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[16] Куриляк А.О., Шеремета М.М. Про простори Банаха і Фреше інтегралів Лапласа–Стілтьєса. *Нелінійні коливання.* 2021. Т. 24. № 2. С. 185–196. Engl. transl. Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces and Frechet spaces of Laplace–Stieltjes integrals. *J. Math. Sci. (US).* 2023. V. 270. № 2. P. 280–293. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.1007/s10958-023-06346-9` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[17] Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 2. P. 178–186. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.30970/ms.59.2.178-186` **(Scopus)**.

[18] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Sub-Gaussian random variables and Wiman's inequality. *Carpathian Math. Publ.* 2023. V. 15. № 1. P. 306–314. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.306-314` **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

Статті в інших наукових виданнях і збірниках матеріалів конференцій, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[19] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On Borel's type relation for the Laplace–Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2014. V. 42. № 2. P. 134–142. Режим доступу до журналу: `http://matstud.org.ua/texts/2014/42_2/134-142.html` *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[20] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Bukovinian Math. J.* 2021. V. 9. № 1. P. 56–63. Режим доступу до журналу: `https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/1030` *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[21] Куриляк А., Скасків О. Нерівність типу Вімана для степеневих рядів з швидко коливними коефіцієнтами в кратно-кругових областях. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2022. Т. 93. С. 83–96. Режим доступу до журналу: `http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.083-096` *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[22] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zrum O.V. Levy's phenomenon for entire functions of several variables. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 45–46. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[23] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 123–124. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[24] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Tsvigun V.L. On exceptional set in Wiman's type inequality for entire functions of several variables. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 140–141. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[25] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л. Про виняткову множину у нерівності Вімана для випадкових цілих функцій декількох змінних. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми*

теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 27 лютого – 2 березня, 2018 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2018. С. 67–68. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[26] Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain. *The IV conference in mathematics and computer science “Congresio-mathematica”* (Mierki, Poland, 20–23 September, 2018). Abstracts, Olstun, 2018. P. 26.

[27] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality on multiple-circular domain. *International Conference Complex analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A.A. Gol'dberg* (Lviv, 28 June – 1 July, 2020). Abstracts, Lviv, 2021. P. 30–31. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[28] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Levy's phenomenon for analytic functions in multiple-circular domain. *International online conference “Current trends in abstract and applied analysis”* (Ivano-Frankivsk, 12–15 May, 2022). Abstracts, Ivano-Frankivsk, 2022. P. 46–47. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[29] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *International conference “Theory of approximation of functions and its applications” dedicated to the 80th Anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine Professor Alexander Stepanets (1942–2007)* (Lutsk, 6–10 June, 2022). Abstracts, Lutsk, 2022. P. 18–19. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[30] Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces of Laplace-Stieltjes integrals. *International scientific conference “Mathematics and information technologies” dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 83. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[31] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *International scientific conference “Mathematics and information technologies” dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 84. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

Список публікацій, які додатково відображають результати дисертації

[32] Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Mat. Stud.* 2013. V. 39. № 2. P. 134–141. Режим доступу до журналу: `http://matstud.org.ua/texts/2013/39_2/134-141.html` *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[33] Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents. *Mat. Stud.* 2013. V. 40. № 1. P. 108–112. Режим доступу до журналу: `http://matstud.org.ua/texts/2013/40_1/108-112.html` *(Особистий внесок: доведення теореми 2).*

[34] Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman's inequality for the Laplace integrals. *Int. Journal of Math. Analysis.* 2014. V. 8. № 8. P. 381–385. Режим доступу до журналу: `https://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2014/ijma-5-8-2014/ovcharIJMA5-8-2014.pdf` *(Особистий внесок: доведення теореми 1).*

[35] Куриляк А.О., Шаповаловська Л.О., Скасків О.Б. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2014. Т. 2. № 2–3. С. 130–135. Режим доступу до журналу: `https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/80` *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються та обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[36] Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O. Wiman's inequality for entire functions of several complex variables with rapidly oscillating coefficients. *Mat. Stud.* 2015. V. 43. № 1. P. 16–26. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.43.1.16-26` *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються та обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[37] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Скасків С.Р. Аналоги нерівності Вімана і ефект Леві для аналітичних функцій у бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2015. Т. 3. № 3–4. С. 102–110. Режим доступу до журналу: `https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/129` *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[38] Kuryliak A., Skaskiv O., Tsvigun V. Levy's phenomenon for analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. *Mat. Stud.* 2016. T. 46. № 2. P. 121–129. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.46.2.121-129` *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[39] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. *Буковин. мат. журн.* 2017. Т. 5. № 3–4. С. 90–97. Режим доступу до журналу:
`https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/262` *(Особистий внесок: доведення твердження 5).*

[40] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. *Прикарпат. Вісн. НТШ. Число.* 2018. Т. 1. № 45. С. 26–36. Режим доступу до журналу: `https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/10/7` *(Особистий внесок: доведення твердження 1.4).*

[41] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Skaskiv S.R. Wiman's type inequality and Levy's phenomenon for random analytic functions in the unit disc. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 41–42. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).* .

[42] Shapovalovska L.O., Kuryliak A.O., Skaskiv, O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 71. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[43] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей"* (Ворохта, 24 лютого – 2 березня, 2014 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2014. Р. 72–73. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[44] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для функцій аналітичних у полікрузі. *Міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана* (Чернівці, 30 червня – 5 липня, 2014 року). Тези доповідей, Чернівці, 2014. P. 234–235. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[45] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2015. С. 37–38. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[46] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових функцій аналітичних в полікрузі. *Наукова конф. присв. 100-річчю К.М. Фішмана та М.К. Фаге* (Чернівці, 1–4 липня, 2015 року). Тези доповідей, Чернівці, 2015. С. 63–64. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[47] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On the Borel's type relation for Laplace-Stiltjes integrals. *International V. Skorobohatko mathematical conference* (Drohobych, 25–28 August, 2015). Abstracts, Drohobych, 2015. P. 90. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[48] Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Tsvigun V.L. Levy's fenomenon for analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. *International conference "Complex Analysis and Related Topics"* (Lviv, 30 May – 4 June, 2016). Abstracts, Lviv, 2016. P. 53–54. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[49] Куриляк А., Скасків О., Цвігун Л. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Друга Всеукр. наук. конф. "Прикладні задачі математики"* (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня, 2016 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2016. С. 11–12. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

[50] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л., Шаповаловська Л.О. Нерівність Вімана для функцій аналітичних у полікрузі з швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта,

22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 98–99. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[51] Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. The abscissa of absolute convergence of Dirichet series with randon exponents. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 136–137. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

[52] Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 12–13. *(Особистий внесок: доведення наслідку 5).*

АНОТАЦІЯ

Куриляк А. О. Асимптотичні властивості і розподіл значень випадкових аналітичних функцій. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2024.

Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У роботі об'єктом вивчення є класи аналітичних та випадкових аналітичних функцій, областю збіжності яких може бути довільна кратно-кругова область Рейнхарда, а також цілі кратні ряди Діріхле, лакунарні ряди однорідних поліномів та інтеграли Лапласа-Стілт'єса.

У другому розділі вперше було перевірено наявність ефекту Леві для випадкових аналітичних функцій від однієї змінної у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою. А саме, такими послідовностями є послідовності субгаусових випадкових величин. У цьому розділі вперше також отримано з однієї точки зору аналоги співвідношення Бореля та нерівності Вімана, що виконуються зовні виняткової множини скінченної логарифмічної h-міри з довільною зростаючою функцією h, що визначає логарифмічну h-міру, як для аналітичних функцій, так і для цілих функцій від однієї змінної, які задані степеневим рядом з радіусом збіжності $R \in (0;+\infty]$, та отримано найбільш загальний опис виняткових множин у цих твердженнях.

Дослідження аналогів нерівності типу Вімана для аналітичних функцій від декількох комплексних змінних проводиться у третьому розділі. А саме у цьому розділі вперше отримано аналоги цієї нерівності для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області Рейнхарда. Точність отриманих нерівностей встановлена у випадку, якщо область збіжності кратного степеневого ряду має вигляд $\mathbb{C}^p$, $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$, $\mathbb{D}^p$, $l,p \in \mathbb{N},\ p > l,\ p \geq 2$. Також розглянуто випадкові аналітичні функції, областю збіжності яких майже напевно є кратно-кругова область Рейнхарда. Для цих функцій перевірено наявність ефекту Леві і побудовані приклади на точність отриманих тверджень.

Об'єктом дослідження у четвертому розділі є цілі функції, представлені лакунарними рядами однорідних поліномів і цілими кратними рядами Діріхле. Доведено аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга, встановленої у такій постановці питання для цілих функцій від багатьох комплексних змінних. Також побудовано приклад на точність отриманих тверджень. У другому підрозділі встановлено аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками.

Дослідження асимптотичних властивостей ймовірності відсутності нулів у гаусових аналітичних функцій в крузі з центром у початку координат проводиться у п'ятому розділі. Отримано асимптотичні оцінки згори і знизу згаданої ймовірності зовні деякої виняткової множини та побудовано приклади на точність отриманих оцінок. Доведено асимптотичні співвідношення для ймовірності відсутності нулів зовні множини скінченної логарифмічної міри для класу випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі. Цей клас визначається додатковою умовою на мінімально допустиму швидкість зростання аналітичної функції при наближенні до межі одиничного круга. Побудовано приклади на точність отриманих верхньої та нижньої оцінок.

У шостому розділі встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса і побудовано приклад на точність цього твердження, досліджено банахів простір інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле. Також отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки зростання інтегралів Лапласа-Стілт'єса та досліджено простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. Вони мають теоретичний характер і можуть бути використані як в багатовимірному комплексному аналізі, так і в інших розділах аналізу, а також в таких суміжних розділах математики, як диференційні рівняння і теорія ймовірностей.

Ключові слова: аналітичні функції, кратні степеневі ряди, лакунарні ряди однорідних поліномів, кратні ряди Діріхле, максимум модуля, максимальний член, гаусові та субгаусові випадкові величини, нерівність Вімана, співвідношення Бореля, ефект Леві, нерівність Бітляна-Гольдберга, кратно-кругова область Рейнхарда, ймовірність відсутності нулів, інтеграли Лапласа-Стілт'єса, узагальнений порядок.

ABSTRACT

Kuryliak A.O. *Asymptotic properties and value distribution of random analytic functions.* — Manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2024.

The thesis consists of an introduction, 6 sections, conclusions, references. The introduction consists of the relevance of the research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

The object of investigations are classes of analytic and random analytic functions, the domain of convergence of which can be an arbitrary multiply circular Reinhardt domain, entire multiple Dirichlet series, lacunary series of the homogeneous polynomials and Laplace-Stiltjes integrals.

In the second chapter the presence of the Levy effect was verified firstly for random analytic functions of one variable in the case of the sequence of random variables, which are multipliers of the Taylor coefficients of the random analytic function, may not be uniformly bounded. Namely, such sequences are sequences of sub-Gaussian random variables. Also in this section analogues of Borel's relation and Wiman's inequality, which holds outside the exceptional set of a finite logarithmic h-measure are obtained for the first time, as for analytic functions, as well as for entire functions of one variable, which are given by a power series with the radius of convergence $R \in (0; +\infty]$. Here function h is an arbitrary increasing and defines the logarithmic h-measure. Also the most general description of the exceptional sets in these statements is obtained.

The study of analogues of the Wiman's type inequality for analytic functions of several complex variables is considered in the third section. Namely, analogues of this inequality for analytic functions in an arbitrary multiple-circular Reinhardt domain are obtained for the first time. The sharpness of the obtained inequalities is proved if the domain of convergence of a multiple power series is $\mathbb{C}^p$, $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$, $\mathbb{D}^p$, $l, p \in \mathbb{N}$, $p > l,\ p \geq 2$. Furthermore, we consider random analytic functions, the domain of convergence of which is almost surely the multiple-circular Reinhardt domain. For these functions, the presence of the Levy effect was verified and examples of the sharpness of obtained statements were constructed.

The object of the investigations of the fourth chapter is entire functions represented by lacunary series of the homogeneous polynomials and Dirichlet entire multiple series. Analogues of the Bitlyan-Gol'dberg inequality investigated in this formulation of the question for entire functions of many complex variables are proved. An example of the sharpness of the received statements is also constructed. In the second subsection, analogs of Wiman's inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents are investigated.

The investigation of the asymptotic properties of probability of zeros absence of Gaussian analytic functions in the disks with the center at the origin is considered in the fifth chapter. Asymptotic estimates from above and below of the mentioned probability outside some exceptional set were obtained. Examples of the shaprness of this estimates are also constructed. In the second subsection of the thesis asymptotic relations for the probability of zeros absence outside the set of finite logarithmic measure are obtained for the class of random analytic functions in the unit disc.This class is determined by an additional condition of the minimum allowable speed of the growth of the analytical function when approaching the boundary of the unit disk. Examples of the sharpness of the obtained upper and lower estimates are constructed.

In the sixth chapter a Borel-type relation for Laplace-Stieltjes integrals is investigated and the example of the sharpness of this statement is built. The Banach space of Laplace-Stieltjes integrals and Dirichlet series are investigated. Statements about the generalized and modified generalized growth orders of the Laplace-Stieltjes integrals were also obtained. The Fréchet spaces of Dirichlet entire series of finite generalized order were investigated.

All the results of the thesis are new. They have a theoretical meaning and can be used both in multidimensional complex analysis and in other sections of analysis, as well as in such related sections of mathematics as differential equations and probability theory.

Keywords: analytic function, multiple power series, lacunary series of the homogeneous polynomials, multiple Dirichlet series, maximum of modulus, maximal term, Gaussian and sub-Gaussian random variables, Wiman's inequality, Borel's relation, Levy effect, Bitlyan-Gol'dberg inequality, multiple Reinhardt circular domain, probability of absence of zeros, Laplace-Stieltjes integrals, generalized order.