Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

На правах рукопису

Куриляк Андрій Олегович

УДК 517.55

ДИСЕРТАЦІЯ
АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ І РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ВИПАДКОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _______ А.О. Куриляк

Науковий консультант:
Скасків Олег Богданович
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів – 2024

АНОТАЦІЯ

Курилляк А. О. Асимптотичні властивості і розподіл значень випадкових аналітичних функцій. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз". — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2024.

Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У роботі об'єктом дослідження є класи аналітичних та випадкових аналітичних функцій, зображуваних збіжними в довільній кратно-круговій області Рейнхарда степеневими рядами, а також цілих кратних рядів Діріхле, лакунарних рядів за однорідними поліномами та інтегралів Лапласа-Стілт'єса.

У другому розділі вперше з однієї точки зору розглядаються аналоги класичних нерівності Вімана та співвідношення Бореля в класі аналітичних функцій від однієї змінної, зображуваних степеневими рядами $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ з довільним скінченних чи нескінченним радіусом збіжності $R \in (0; +\infty]$ та встановлено найбільш загальний опис виняткових множин у цих твердженнях. Отримані тут співвідношення виконуються зовні виняткової множини скінченної логарифмічної h-міри з довільною зростаючою функцією h, що визначає дану h-міру, як для аналітичних функцій, так і для цілих функцій від однієї змінної. Отримані тут твердження містять в собі твердження про класичну нерівність Вімана для цілих функцій та про нерівність типу Кеварі для аналітичних функцій в одиничному крузі, а також істотно доповнюють результати попередників стосовно як аналогів нерівності Вімана, так і співвідношення Бореля, що викону-

ються зовні виняткових множин, величина яких описується в термінах скінченності їхньої логарифмічної h-міри. Встановлено також наявність ефекту типу Леві істотного уточнення нерівності типу Вімана для випадкових субгаусових цілих функцій, які зображаються лакунарними степеневими рядами вигляду $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) z^{n_k},\ n_k \in \mathbb{Z}_+$. Зазначимо, що у всіх результатах попередників (П. Леві, М. Стіла, П.В. Філевича, О.В. Зрума і О.Б. Скасківа) послідовність незалежних випадкових величин $Z_k(\omega)$ є майже напевно рівномірно обмеженою, а послідовність субгаусових випадкових величин $Z_k(\omega)$ може не бути рівномірно обмеженою.

Крім цього у даному розділі встановлено наявність ефекту типу Леві для випадкових аналітичних функцій від однієї змінної $f(z, \omega) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n Z_n(\omega) z^n$ у випадку коли послідовність випадкових величин $Z_n(\omega)$ є послідовністю субгаусових випадкових величин, послідовність дисперсій яких є обмеженою. Також встановлено необхідність умови обмеженості послідовності дисперсій для наявності ефекту типу Леві.

Дослідження аналогів нерівності типу Вімана для аналітичних функцій від декількох комплексних змінних проводиться у третьому розділі. У цьому розділі в класі аналітичних функцій, зображуваних в довільній фіксованій кратно-круговій області Рейнхарда кратними степеневими рядами вигляду $f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n$, вперше розвинуто підхід типу методу Вімана-Валірона і також вперше отримано в найбільш загальному вигляді аналоги класичної нерівності Вімана. При цьому, встановлено явні залежності між виглядам отриманих аналогів нерівності Вімана і довільною наперед заданою мірою (h-мірою), скінченність якої дає описання величини виняткової множини в отриманій нерівності. Використання довільної h-міри для описання величини виняткової множини, з однієї сторони викликано потребами розширення зони застосовності результатів теорії Вімана-Валірона (зокрема, в аналітичній теорії диференційних рівнянь), а з іншого боку продиктовано відомою проблемою Й.В. Островського про відшукання найкраще можливого опису величин виняткових множин, як в класичній нерівності Вімана, так і взагалі в різноманітних асимптотичних співвідношеннях, що розглядаються в цій теорії. У випадку цілих функцій, як від однієї комплексної змінної так і від багатьох змінних для цілого ряду асимптотичних співвідношень, остаточні відповіді знайдені раніше у працях П.В. Філевича, а також О.Б. Скасківа разом зі О.В. Зрумом, Т.М. Сало, О.М. Тракало та Д.Ю. Зікрачем. Успішність проведеного у другому розділі дослідження степеневих рядів у довільній кратно-круговій області Рейнхарда, з одного боку вказує на можливість успішної реалізації підходів типу Вімана-Валірона у цьому випадку, а з іншого боку результати вказують на ефективність і потужність методів, розвинутих у ньому, і на те, що методи як цього розділу, так і розділу 2, безумовно повинні бути застосовані у подальших дослідженнях, оскільки результати про нерівності типу Вімана у певному сенсі можна вважати індикатором можливої успішності подальших досліджень.

З отриманого у третьому розділі твердження, як наслідок, отримуються, як відомі нерівності для цілих функцій від декількох змінних, так і для аналітичних функцій від однієї змінної. Точність отриманих нерівностей встановлена у випадку, якщо область збіжності кратного степеневого ряду є одна з множин $\mathbb{C}^p$, $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$, $\mathbb{D}^p$, де $l, p \in \mathbb{N}$, $p > l,\ p \geq 2$.

У третьому розділі також розглянуто випадкові аналітичні функції $f(z,t) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n$, областю збіжності яких майже напевно є кратно-кругова область Рейнхарда. Для цих функцій встановлено наявність ефекту Леві і побудовано приклади на точність отриманих тверджень. Результати цього розділу в загальному сенсі повністю вичерпують, сформульовану в 1996 р. проф. А.А. Гольдбергом і проф. М.М. Шереметою проблему, про наявність ефекту типу Леві у випадку кратних степеневих рядів.

Об'єктом дослідження у четвертому розділі є цілі функції, представлені лакунарними рядами однорідних поліномів у вигляді $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k(z), z \in \mathbb{C}^p$, де $P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C}, P_k(z) = \sum\limits_{\|n\|=\lambda_k} a_n z^n$ — однорідні поліноми степеня $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$, і

$0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$, $\lambda = (\lambda_k)$. Вичерпання $\mathbb{C}^p$ відбувається не полікругами, а довільною однопараметричною системою подібних повних кратнокругових областей з центром у початку координат. Оцінка максимуму модуля проводиться через діагональний максимальний член ряду. Доведено аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга, встановленої у такій постановці питання для цілих функцій від багатьох комплексних змінних. Також побудовано приклад на точність отриманих тверджень.

У другому підрозділі встановлено аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками. А саме, розглянуто ряди Діріхле абсолютно збіжні у всьому комплексному просторі $\mathbb{C}^p$ вигляду $F(z) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}$ з такою послідовністю показників (λ_n), що $\{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}^p\} \subset \mathbb{C}^p$ та $\lambda_n \ne \lambda_m$ для всіх $n \ne m$. Доведено багатовимірний аналог нерівності типу Вімана, який є узагальненням одновимірної теореми, до якої було побудовано приклад на точність.

Дослідження асимптотичних властивостей ймовірності відсутності нулів у гаусових аналітичних функцій в крузі з центром у початку координат проводиться у п'ятому розділі. Нехай $\big(\xi_n(\omega)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ — послідовність незалежних випадкових комплексних величин зі стандартним гаусовим розподілом у комплексній площині зі щільністю $p_{\xi_n}(z) = \frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для цілих трансцендентних гаусових функцій $f(z,\omega) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n$ раніше в працях А. Нішрі, М. Содіна та інших були відомі асимптотичні оцінки ймовірності відсутності нулів в довільному крузі з центром у початку координат та висловлювались гіпотези стосовно їх точності, оскільки питання про точність цих оцінок залишалися відкритими. У дисертаційні роботі дано відповідь на це питання у випадку коли тейлорові коефіцієнти цілої функції домножаються на добуток гаусових випадкових величин та випадкових величин Штейнгауса. Тобто, для функцій вигляду $f(z,\omega) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2) a_n z^n$, де $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на

$[-\pi, \pi)$, $\big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$. При цьому відому раніше оцінку знизу істотно посилено. Використовуючи деякі результати з теорії Вімана-Валірона для цілих трансцендентних функцій, отримано асимптотичні оцінки згори і знизу згаданої ймовірності зовні деякої виняткової множини та побудовано приклади на точність отриманих оцінок.

На відміну від цілих гаусових функцій, для гаусових аналітичних функцій в одиничному крузі проблема знаходження асимптотичних співвідношень для ймовірності відсутності нулів залишалася практично повністю відкритою у загальному випадку. Були відомі лише оцінки для деяких аналітичних функцій з цілком конкретно заданими тейлоровими коефіцієнтами.

У другому підрозділі цього розділу дисертаційного дослідження отримано асимптотичні співвідношення для ймовірності відсутності нулів зовні множини скінченної логарифмічної міри для класу випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі, що визначається цілком подібно до класу випадкових цілих гаусових функцій, результати стосовно якого описано вище. При цьому у порівнянні з випадком цілих функцій цей клас визначається додатковою умовою $\varliminf\limits_{r\uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4$, $N(r) = \#\{n\colon |a_n|r^n > 1\}$. Побудовано приклади на точність отриманих верхньої та нижньої оцінок.

У шостому розділі встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса $F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du)$. Побудовано приклад на точність цього твердження.

У третьому підрозділі проведено дослідження одного банахового простору інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле вигляду $D(\sigma) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n \sigma}$.

Також у шостому розділі отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки зростання інтегралів Лапласа-Стілт'єса та досліджено певні простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. Вони мають теоретичний характер і можуть бути використані як в багатовимірному комплексному аналізі, так і в інших розділах аналізу, а також в таких суміжних розділах математики, як диференційні рівняння і теорія ймовірностей.

Ключові слова: аналітичні функції, кратні степеневі ряди, лакунарні ряди однорідних поліномів, кратні ряди Діріхле, максимум модуля, максимальний член, гаусові та субгаусові випадкові величини, нерівність Вімана, співвідношення Бореля, ефект Леві, нерівність Бітляна-Гольдберга, кратно-кругова область Рейнхарда, ймовірність відсутності нулів, інтеграли Лапласа-Стілт'єса, узагальнений порядок.

ABSTRACT

Kuryliak A.O. *Asymptotic properties and value distribution of random analytic functions.* — Manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — Mathematical analysis, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2024.

The thesis consists of an introduction, 6 sections, conclusions, references. The introduction consists of the relevance of the research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

The object of investigations are classes of analytic and random analytic functions, represented by convergent power series in an arbitrary multiple-circular Reinhard domain, entire multiple Dirichlet series, lacunary series of the homogeneous polynomials and Laplace-Stiltjes integrals.

In the second chapter, for the first time, analogues of classical Wiman inequalities and Borel relations in the class of analytic functions of one variable, represented by power series $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ with an arbitrary finite or infinite radius of convergence $R \in (0; +\infty]$ and the most general description of exceptional sets in these statements is established. The relations obtained here hold outside the exceptional set of finite logarithmic h-measure with arbitrary increasing function h that defines a given h-measure, both for analytic functions and for entire functions of one variable. This statements obtained here include the assertions of the classical Wiman inequality for entire functions and the Kevari inequality for analytic functions in the unit disk, and also significantly complement the results of the predecessors regarding both Wiman's inequality analogues and Borel's relations, which are fulfilled outside exceptional sets, the value of which is described in terms of the finiteness of their logarithmic h-measure. The existence of a Levy-

type effect of a significant improvement of the Wiman-type inequality for random sub-Gaussian entire functions, which are represented by lacunar power series of the form $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) z^{n_k}$, $n_k \in \mathbb{Z}_+$. Note that in all the results of the predecessors (P. Levy, M. Steel, P.V. Filevych, O.V. Zrum, and O.B. Skaskiv), the sequence of independent random variables $Z_k(\omega)$ is almost surely uniformly bounded, but the sequence of sub-Gaussian random variables $Z_k(\omega)$ may not be uniformly bounded.

In addition, in this section, the existence of a Levy-type effect is established for random analytical functions of one variable $f(z,\omega) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n Z_n(\omega) z^n$ in the case when the sequence of random variables $Z_n(\omega)$ is a sequence of sub-Gaussian random variables, the sequence of variances of which is bounded. The necessity of the condition of the boundedness of the sequence of dispersions for the presence of the Levy-type effect is also proved.

The study of analogues of the Wiman-type inequality for analytic functions of several complex variables is carried out in the third section. In this section, in the class of analytic functions represented in an arbitrary fixed multiple-circular Reinhard domain by multiple power series of the form $f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n$, for the first time, an approach like the Wiman-Valiron method was developed. Also for the first time analogues of the classical Wiman inequality were obtained in the most general form. At the same time, dependencies have been established between the forms of the obtained analogues of Wiman's inequality and an arbitrary predefined measure (h-measure), the finiteness of which gives a description of the value of the exceptional set in the obtained inequality. The use of an arbitrary h-measure to describe the size of the exceptional set is, on the one hand, caused by the need to expand the area of applicability of the results of the Wiman-Valiron theory (in particular, in the analytical theory of differential equations), and on the other hand, it is dictated by the well-known problem of J.V. Ostrovsky about finding the best possible description of the values of exceptional sets, both in the classical Wiman inequality and in general in various asymptotic relations considered in this theory. In the case of entire functions, both from one complex variable and from many variables for many asymptotic relations, the final answers were found earlier in the works of P.V. Filevych, as well as O.B. Skaskiv together with O.V. Zrum, T.M. Salo, O.M. Trakalo and D.Yu. Zikrach. The success of the study of power series in the arbitrary multi-circular Reinhard domain carried out in the second chapter, on the one hand, indicates the possibility of successful implementation of Wiman-Valiron type approaches in this case, and on the other hand, the results indicate the effectiveness and power of the methods developed in it, and that the methods of both this chapter and chapter 2 should certainly be applied in further research, since the results on Wiman-type inequalities can in a certain sense be considered an indicator of the possible success of further research.

From the statement obtained in the third section, as a result, both known inequalities for entire functions of several variables and for analytic functions of one variable are obtained. The sharpness of the obtained inequalities is established in the case of convergence domain of the multiple power series is one of the sets $\mathbb{C}^p$, $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$, $\mathbb{D}^p$, where $l, p \in \mathbb{N}$, $p > l$, $p \geq 2$.

In the third chapter we consider random analytic functions $f(z,t) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n$, the domain of convergence of which is almost surely a multiply-circular Reinhard domain. For these functions, the presence of the Levy effect was established and examples of the sharpness of the statements were constructed. The results of this section in a general sense completely exhaust the idea formulated in 1996 by Prof. A.A. Goldberg and Prof. M.M. Sheremeta the problem of the existence of a Levy-type effect in the case of multiple power series.

The object of the investigations of the fourth chapter is entire functions represented by lacunary series of the homogeneous polynomials and Dirichlet entire multiple series. Here $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$, where $P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C}$, $P_k(z) = \sum\limits_{\|n\|=\lambda_k} a_n z^n$ is homogeneous polynomials of degree $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$, and $0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ $(1 \leq k \uparrow +\infty)$, $\lambda = (\lambda_k)$. The exhaustion of $\mathbb{C}^p$ does not occur by polydiscs but by an arbitrary one-parameter system of similar complete multiple-circular domains centered at the origin. The modulus maximum is evaluated by the diagonal maximum term of this series. Analogues of the Bitlyan-Gol'dberg inequality investigated in this formulation of the question for entire functions of many complex variables are proved. An example of the sharpness of the received statements is also constructed.

In the second subsection, analogs of Wiman's inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents are investigated. Namely, we considered Dirichlet series absolutely convergent in $\mathbb{C}^p$ of the form $F(z) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}$ with a sequence of exponents (λ_n) such that $\{\lambda_n \colon n \in \mathbb{Z}^p\} \subset \mathbb{C}^p$ and $\lambda_n \neq \lambda_m$ for all $n \neq m$. Namely, a multidimensional analogue of the Wiman type inequality is proved. This analogue is generalization of the one-dimensional theorem, to which an example of sharpness is constructed.

The investigation of the asymptotic properties of probability of zeros absence of Gaussian analytic functions in the disks with the center at the origin is considered in the fifth chapter. Let $\big(\xi_n(\omega)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ be a sequence of independent random variables with a standard Gaussian distribution in the complex plane with density $p_{\xi_n}(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. For entire transcendental Gaussian functions $f(z,\omega) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n$ previously, in the works of A. Nishry, M. Sodin and others, asymptotic estimates of the probability of absence were known asymptotic estimates of the probability of zeros absence in an arbitrary disk with the center at the origin were previously known for entire transcendental Gaussian functions. Hypotheses regarding their sharpness were expressed, because questions about the sharpness of these estimates are still open. In the thesis the answer to this question was given in the case when the Taylor coefficients of the entire function are multiplied on the product of Gaussian random variables and Steinhaus random variables. That is, $f(z,\omega) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2) a_n z^n$, where $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) is a sequence of independent random variables uniformly distributed on $[-\pi, \pi)$, $\big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$. At the same time the assessment from below has been significantly strengthened. Using some results from the Wiman-Valiron theory for entire transcendental functions, asymptotic estimates from above and below of the mentioned probability outside some exceptional set were obtained. Examples of the shaprness of this estimates are also constructed.

Unlike the entire Gaussian functions, for Gaussian analytical functions in the unit disc, the problem of finding asymptotic estimates for the probability of zeros absence remained almost completely open in the general case. Only estimates for some analytic functions with quite specifically given Taylor coefficients were known.

In the second subsection of the thesis asymptotic relations for the probability of zeros absence outside the set of finite logarithmic measure are obtained for the class of random analytic functions in the unit disc. This classes are defined quite similarly to the class of random entire Gaussian functions, the results of which are described above. At the same time, in comparison with the case of entire functions, this class is determined by an additional condition $\varliminf\limits_{r\uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4$, $N(r) = \#\{n\colon |a_n|r^n > 1\}$. Examples of the sharpness of the obtained upper and lower estimates are constructed.

In the sixth chapter a Borel-type relation for Laplace-Stieltjes integrals $F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du)$ is investigated. The example of the sharpness of this statement is constructed.

In the third subsection, a study of one Banach space of Laplace-Stiltjes integrals and Dirichlet series of the form $D(\sigma) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n \sigma}$.

Also, in the sixth chapter, statements about the generalized and modified generalized growth orders of Laplace-Stiltjes integrals were obtained and certain Frechet spaces of Dirichlet series of finite generalized order were investigated.

All the results of the thesis are new. They have a theoretical meaning and can be used both in multidimensional complex analysis and in other sections of analysis, as well as in such related sections of mathematics as differential equations and probability theory.

Keywords: analytic function, multiple power series, lacunary series of the homogeneous polynomials, multiple Dirichlet series, maximum of modulus, maximal term, Gaussian and sub-Gaussian random variables, Wiman's inequality, Borel's relation, Levy effect, Bitlyan-Gol'dberg inequality, multiple Reinhardt circular domain, probability of zeros absence, Laplace-Stieltjes integrals, generalized order.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On Borel's type relation for the Laplace–Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2014. V. 42. № 2. P. 134–142.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of Dirichlet series with random exponents. *Int. J. Appl. Math.* 2017. V. 30. № 3. P. 229–238.
3. Kuryliak A. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *Mat. Stud.* 2017. V. 47. № 1. P. 10–19.
4. Sheremeta M.M., Dobushovskyy M.S., Kuryliak A.O. On a Banach space of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2017. V. 48. № 2. P. 143–149.
5. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's type inequality for multiple power series in an unbounded cylinder domain. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 1. P. 29–51.
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of random multiple Dirichlet series. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 2. P. 122–137.
7. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's inequality for analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ with rapidly oscillating coefficients. *Carpathian Math. Publ.* 2018. V. 10. № 1. P. 133–142.
8. Sheremeta M.M., Kuryliak A.O. On the growth of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2018. V. 50. № 1. P. 22–35.
9. Kuryliak A., Skaskiv O., Skaskiv S. Levy's phenomenon for analytic functions in the polydisc. *Eur. J. Math.* 2020. V. 6. P. 138–152.
10. Kuryliak A.O., Panchuk S.I., Skaskiv O.B. Bitlyan-Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term. *Mat. Stud.* 2020. V. 54. № 2. P. 135–145.
11. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h-measure of an exceptional sets. *Carpathian Math. Publ.* V. 12. 2020. № 2. P. 492–498.
12. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Bukovinian Math. J.* 2021. V. 9. № 1. P. 56–63.
13. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *Axioms.* 2021. V. 10. № 4. 348.

14. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman-type inequality in a multiple-circular domain: Lévy's phenomenon and exceptional sets. *Ukrainian Math. J.* 2022. V. 74. № 5. P. 743–756.
15. Куриляк А., Скасків О. Нерівність типу Вімана для степеневих рядів з швидко коливними коефіцієнтами в кратно-кругових областях. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2022. Т. 93. P. 83–96.
16. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *Axioms.* 2023. V. 12. № 3. 255.
17. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Analytic Gaussian functions in the unit disc: probability of zeros absence. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 1. 29–45.
18. Куриляк А.О., Шеремета М.М. Про простори Банаха і Фреше інтегралів Лапласа–Стілтьєса. *Нелінійні коливання.* Т. 24. № 2. С. 185–196 (2021). Engl. transl.: Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces and Frechet spaces of Laplace–Stieltjes integrals. *J. Math. Sci. (US).* 2023. V. 270. № 2. P. 280–293.
19. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 2. P. 178–186.
20. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Sub-Gaussian random variables and Wiman's inequality. *Carpathian Math. Publ.* 2023. V. 15. № 1. P. 306–314.

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zrum O.V. Levy's phenomenon for entire functions of several variables. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 45–46.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 123–124.
3. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Tsvigun V.L. On exceptional set in Wiman's type inequality for entire functions of several variables. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 140–141.
4. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л. Про виняткову множину у нерівності Вімана для випадкових цілих функцій декількох змінних. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 27 лютого – 2 березня, 2018 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2018. С. 67–68.

5. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain. *The IV conference in mathematics and computer science "Congresio-mathematica"* (Mierki, Poland, 20–23 September, 2018). Abstracts, Olstun, 2018. P. 26.
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality on multiple-circular domain. *International Conference Complex analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A.A. Gol'dberg* (Lviv, 28 June – 1 July, 2020). Abstracts, Lviv, 2021. P. 30–31.
7. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Levy's phenomenon for analytic functions in multiple-circular domain. *International online conference "Current trends in abstract and applied analysis"* (Ivano-Frankivsk, 12–15 May, 2022). Abstracts, Ivano-Frankivsk, 2022. P. 46–47.
8. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *International conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 80th Anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007)* (Lutsk, 6–10 June, 2022). Abstracts, Lutsk, 2022. P. 18–19.
9. Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces of Laplace-Stieltjes integrals. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 83.
10. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 84.

Список публікацій, які додатково відображають результати дисертації

1. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Mat. Stud.* 2013. V. 39. № 2. P. 134–141.
2. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents. *Mat. Stud.* 2013. V. 40. № 1. P. 108–112.
3. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman's inequality for the Laplace integrals. *Int. Journal of Math. Analysis.* 2014. V. 8. № 8. P. 381–385.

4. Куриляк А.О., Шаповаловська Л.О., Скасків О.Б. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2014. Т. 2. № 2–3. С. 130–135.
5. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O. Wiman's inequality for entire functions of several complex variables with rapidly oscillating coefficients. *Mat. Stud.* 2015. V. 43. № 1. P. 16–26.
6. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Скасків С.Р. Аналоги нерівності Вімана і ефект Леві для аналітичних функцій у бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2015. Т. 3. № 3–4. С. 102–110.
7. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc. *Ukr. Math. J.* 2016. V. 68. № 1. P. 83–93.
8. Kuryliak A., Skaskiv O., Tsvigun V. Levy's phenomenon for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. *Mat. Stud.* 2016. V. 46. № 2. P. 121–129.
9. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. *Буковин. мат. журн.* 2017. Т. 5. № 3–4. С. 90–97.
10. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. *Прикарпат. Вісн. НТШ. Число.* 2018. Т. 1. № 45. С. 26–36.
11. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Skaskiv S.R. Wiman's type inequality and Levy's phenomenon for random analytic functions in the unit disc. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 41–42.
12. Shapovalovska L.O., Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 71.
13. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей"* (Ворохта, 24 лютого – 2 березня, 2014 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2014. Р. 72–73.
14. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для функцій аналітичних у полікрузі. *Міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана* (Чернівці, 30 червня – 5 липня, 2014 року). Тези доповідей, Чернівці, 2014. Р. 234–235.
15. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2015. С. 37–38.

16. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових функцій аналітичних в полікрузі. *Наукова конф. присв. 100-річчю К.М. Фішмана та М.К. Фаге* (Чернівці, 1–4 липня, 2015 року). Тези доповідей, Чернівці, 2015. С. 63–64.
17. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On the Borel's type relation for Laplace-Stiltjes integrals. *International V. Skorobohatko mathematical conference* (Drohobych, 25–28 August, 2015). Abstracts, Drohobych, 2015. P. 90.
18. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Tsvigun V.L. Levy's fenomenon for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. *International conference "Complex Analysis and Related Topics"* (Lviv, 30 May – 4 June, 2016). Abstracts, Lviv, 2016. P. 53–54.
19. Куриляк А., Скасків О., Цвігун Л. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Друга Всеукр. наук. конф. "Прикладні задачі математики"* (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня, 2016 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2016. С. 11–12.
20. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л., Шаповаловська Л.О. Нерівність Вімана для функцій аналітичних у полікрузі з швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 98–99.
21. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 12–13.
22. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. The abscissa of absolute convergence of Dirichet series with randon exponents. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 136–137.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Для розділів 2–4

1. Числові множини.

- $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множина натуральних чисел;
- $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $\mathbb{Z}_+^p = \underbrace{\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \ldots \times \mathbb{Z}_+}_{p \text{ разів}}$;
- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ — множина дійсних чисел;
- $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$;
- $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{p \text{ разів}}$ — p–вимірний дійсний векторний простір;
- $\mathbb{R}_+^p = \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \ldots \times \mathbb{R}_+}_{p \text{ разів}}$;
- $T = [0; 1)^l \times [0; +\infty)^{p-l},\ l, p \in \mathbb{N}, l < p$;
- $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;
- $\mathbb{C}^p = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{p \text{ разів}}$ — p–вимірний комплексний простір;
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$;
- $r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < r\},\ r \in (0; +\infty)$;
- $\mathbb{D}^p = \underbrace{\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}}_{p \text{ разів}}$ — полікруг;
- $\mathbb{T} = \mathbb{D}^l \times [0; +\infty)^{p-l},\ l, p \in \mathbb{N}, l < p$;
- $\Delta_R = \{t \in \mathbb{R}_+^p \colon t_j \geq R_j,\ j \in \{1, \ldots, p\}\}$;
- $\mathcal{S}_h$ — сім'я множин $E \subset G$ таких, що є множиною скінченної логарифмічної h-міри на G, тобто існує $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $G \subset \mathbb{R}_+^p$ і
$$\int\limits_{E \cap \Delta_\varepsilon} \cdots \int h(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty,$$
для $h \in \mathcal{H}^p$.

Для функції $F \in \mathcal{D}_0$ і заданого $z \in \mathbb{C}^p$ визначимо:

- $\gamma(F) = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \ \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F) = +\infty \right\}$;
- $\gamma_+(F) = \left\{ z \in \gamma(F) \colon \ \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F) \in \mathcal{L}_0 \right\}$.

2. Класи дійсних функцій.

- $\mathcal{W}$ — клас додатних неперервних зростаючих на $[0; +\infty)$ функцій $\psi(x)$ таких, що
$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$$
для деякого $x_0 \in (0; +\infty)$;
- $\mathcal{H}_R$ — клас неперервних додатних неспадних на $[0; R), R \in (0; +\infty]$, функцій таких, що
$$\int\limits_{r_0}^{R} \frac{h(r)}{r} dr = +\infty$$
для деякого $r_0 \in (0, R)$;
- $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{+\infty}$;
- H — клас функцій $h\colon \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+$ таких, що
$$\int\limits_1^{+\infty} \dots \int\limits_1^{+\infty} \frac{du_1 \dots du_p}{h(u)} < +\infty;$$
- $\mathcal{H}^p$ — клас функцій $h\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ таких, що h є неспадною по кожній змінній та
$$\int \cdots \int\limits_{G \cap \Delta_\varepsilon} h(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} = +\infty$$
для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ такого, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $\mathbb{R}_+^p$, де
$$G := \{r = (r_1, \dots, r_p)\colon r_j = |z_j|, z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G}\}$$
і $\mathbb{G}$ — деяка повна кратно-кругова область Рейнхарда;
- L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій на $[0; +\infty)$;
- L_1 — клас функції $\Phi \in L$ таких, що $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ $(t \to +\infty)$, де φ — обернена функція до Φ;
- $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що
$$\psi(t) \to +\infty \ (t \to +\infty);$$
- $\mathcal{L}_0$ — клас таких функцій $\Phi \in \mathcal{L}$, що
$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x)) \ (x \to +\infty).$$

3. Класи рядів Діріхле.

- $\mathcal{D}_1$ — клас абсолютно збіжних для цілих рядів Діріхле в $\mathbb{C}$ вигляду
$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}$$
з послідовністю показників (λ_n): $\lambda_n \geq 0$ $(n \geq 0)$ і $\sup\{\lambda_n \colon n \geq 0\} = +\infty$;
- $\mathcal{D}$ — клас абсолютно збіжних у всьому просторі $\mathbb{C}^p$ цілий ряд Діріхле вигляду
$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}$$
з такою послідовністю показників (λ_n), що $\{\lambda_n \colon n \in \mathbb{Z}^p\} \subset \mathbb{C}^p$ та $\lambda_n \neq \lambda_m$ для всіх $n \neq m$;
- $\mathcal{D}^+$ — клас цілих рядів Діріхле з послідовністю показників $\Lambda^p = (\lambda_n)$ таких, що $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \ldots, n_p)$ та $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \leq k \uparrow +\infty)$, $1 \leq j \leq p$;
- $\mathcal{D}_0$ — клас функцій $F \in \mathcal{D}$ таких, що $\mu(z,F) = 1$ $(z \in \mathbb{D}_1^p)$, де $\mathbb{D}_1^p = \{z \in \mathbb{C}^p \colon |z| \leq 1\}$.

4. Характеристики рядів Діріхле.

Для $F \in \mathcal{D}$ і $z \in \mathbb{C}^p$:

- $\mathfrak{M}(z,F) := \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| e^{\mathrm{Re}(z,\lambda_n)}$;
- $\mu(z,F) := \sup\{|a_n| e^{\mathrm{Re}(z,\lambda_n)} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ — максимальний член;
- $\mathcal{N} := \cup_z \mathcal{N}(z)$, де $\mathcal{N}(z)$ — множина таких мультиіндексів $\nu = \nu(z,F) \in \mathbb{Z}_+^p$, що $|a_\nu| e^{\mathrm{Re}(z,\lambda_\nu)} = \mu(z,F)$ для даного z.

5. Класи аналітичних функцій, зображуваних степеневими рядами.

- $\mathcal{E}_R$, $0 < R \leq +\infty$, — клас аналітичних функцій у $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ вигляду
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n;$$
- $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{+\infty}$ — клас цілих функцій;
- $\mathcal{E}^1(\lambda)$ — клас цілих функцій представлених лакунарним степеневим рядом вигляду
$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{\lambda_k}, \quad z \in \mathbb{C};$$

- $\mathcal{E}^p$ — клас цілих функцій від p комплексних змінних вигляду

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

де $z^n = z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$, $p \in \mathbb{N}$, $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\|n\| = \sum_{j=1}^p n_j$ таких, що $\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}^p$ для кожного $j \in \{1, \ldots, p\}$;

- $\mathcal{E}^p(\lambda)$ — клас цілих функцій $f\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, які можна подати у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(z), \quad z \in \mathbb{C}^p,$$

де $P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C}$,

$$P_k(z) = \sum_{\|n\|=\lambda_k} a_n z^n$$

— однорідний поліном степеня $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$ і $0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$;

- $\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$, $p \ge 1$, $1 \le l \le p$, — клас аналітичних функцій вигляду

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

з областю збіжності $\mathbb{T} = \mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$ таких, що

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0 \ (\forall z \in \mathbb{T} \ \text{ та } \ \forall j \in \{l+1, \ldots, p\})$$

і існує $r_0 \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що для кожного $k \in \{1, \ldots, l\}$ виконується умова

$$r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_k > 1 \ \big(\forall r \in (r_1^0; 1)^l \times (r_2^0; +\infty)^{p-l}\big);$$

- $\mathcal{A}^p$ — клас аналітичних функцій (1) з областю збіжності $\mathbb{D}^p$;
- $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $p \in \mathbb{N}$, — клас аналітичних функцій f у повній кратно-круговій області Рейнхарда $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$, представлених степеневими рядами (1) з областю збіжності $\mathbb{G}$ таких, що існує $n \in \mathbb{N}^p\colon a_n \ne 0$.

6. Характеристики аналітичних функцій, зображуваних степеневими рядами.

Для $f \in \mathcal{E}_R$ та для $r \in [0, R)$:

- $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon \ |z| = r\}$ — максимум модуля;
- $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n\colon n \ge 0\}$ — максимальний член;
- $\nu_f(r) = \max\{n\colon |a_n| r^n = \mu_f(r)\}$ — центральний індекс;
- $\mathfrak{M}_f(r) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$;

- $S_f^2(r) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$;
- $S_N^2(r) = \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n}$.

Для $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, та $r = (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{R}_+^p$:

- $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}$ — максимум модуля;
- $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot r_p^{n_p}\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ — максимальний член;
- $\mathfrak{M}_f(r) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n$.

Для $r > 0$ і цілої функції $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$:

- $M(r, f) = \max\{|f(z)|\colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\}$ — максимум модуля, де $(\mathbf{G}_r)_{r \ge 0}$ — вичерпання простору $\mathbb{C}^p$;
- $m_k(r, f) = \max\{|P_k(z)|\colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\}$ $(k \ge 0)$;
- $m(r, f) = \max\{m_k(r, f)\colon k \ge 0\} = \max\{r^{\lambda_k} m_k(1, f)\colon k \ge 0\}$ — діагональний максимальний член.

7. Класи аналітичних функцій, зображуваних інтегралами.

- $\mathcal{I}(\nu)$ — клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ визначається інтегралом
$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(u) e^{xu} \nu(du),$$
де ν є зліченною адитивною мірою на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ борелівських множин на $\mathbb{R}_+$ така, що $\nu(\{x\colon 0 \le x \le b\}) < +\infty$ для кожного $b > 0$, $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ додатна вимірна функція.

8. Характеристики аналітичних функцій, зображуваних інтегралами.

- $\mu_*(x) = \sup\{a(u) e^{xu}\colon u \in \operatorname{supp} \nu\}$;
- $\mu^*(x) = \sup\{a(u) e^{xu}\colon u \in \mathbb{R}\}$.

9. Класи випадкових величин.

- Ξ — клас дійсних незалежних субгаусових випадкових величин $Z = (Z_n)$, тобто таких, що існує $D > 0$ таке, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і всіх $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $\mathbf{E}(e^{\lambda_0 Z_k}) \le e^{D\lambda_0^2}$;
- Ξ_0 — підклас випадкових величин $Z = (Z_n) \in \Xi$, для яких
$$(\exists \beta > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})\colon \inf\{\mathbf{E}|Z_n|^{-\beta}\colon n \ge n_1\} < +\infty.$$

Для розділу 5

У ньому чинні позначення з розділів 2–4, якщо тут не переозначені.

- $\mathcal{E}$ — клас випадкових цілих функцій вигляду

$$f(z,\omega) = f(z,\omega_1,\omega_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_n z^n, \tag{2}$$

  де $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi,\pi)$, $\big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ і $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0 \neq 0, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \quad \#\{n \in \mathbb{N}\colon a_n \neq 0\} = +\infty;$$

- $\mathcal{A}$ — клас випадкових аналітичних функцій вигляду (2), де $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0 \neq 0, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \sup\{|a_n|\colon n \in \mathbb{N}\} = +\infty;$$

- $p_0(r) = \ln^- P\{\omega\colon f(z,\omega) \neq 0 \text{ в } r\mathbb{D}\}$, де $\ln^- x = \max\{-\ln x, 0\}$.

Для $r > 0,\ \delta \geq 0$ та $f \in \mathcal{E}_R$ позначимо

- $\mathcal{N}' = \{n\colon a_n = 0\}$;
- $\mathcal{N}_\delta(r) = \{n\colon \ln(|a_n|r^n) > -\delta n\}$;
- $N_\delta(r) = \#\mathcal{N}_\delta(r)$ — кількість елементів множини $\mathcal{N}_\delta(r)$;
- $\mathcal{N}(r) = \mathcal{N}_0(r) = \{n\colon |a_n|r^n > 1\}$;
- $N(r) = N_0(r)$;
- $m_\delta(r) = \sum\limits_{n\in\mathcal{N}_\delta(r)} n$;
- $m(r) = m_0(r) = \sum\limits_{n\in\mathcal{N}(r)} n$;
- $S_f^2(r) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$;
- $s(r) = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln^+(|a_n|r^n) = 2\sum\limits_{n\in\mathcal{N}(r)} \ln(|a_n|r^n)$;
- $\mathcal{N}_1(r) = \{n\colon \ln(|a_n|r_1^n) > 0\}$;
- $N_1(r) = \#\mathcal{N}_1(r)$;
- $r_1 = 1 - (1-r)\exp\Big\{-\frac{1}{\ln^2 N(r)}\Big\}$.

Для розділу 6

У ньому чинні позначення з розділів 2–5, якщо тут не переозначені.

1. Класи дійсних функцій.

- $\mathbb{L}$ — клас невід'ємних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$;
- $\mathbb{L}^+$ — підклас функцій $\psi \in \mathbb{L}$ таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ при $t \to +\infty$;

- V — клас невід'ємних неспадних необмежених неперервних справа функцій F на $[0;+\infty)$;
- Ω — клас додатних необмежених на $(-\infty;+\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' — додатна неперервно диференційовна та зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty;+\infty)$;
- L — клас неперервних зростаючих функцій α таких, що $\alpha(x) \geq 0$ для $x \geq x_0$, $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $x \leq x_0$, і на $[x_0;+\infty)$ функція α зростає до $+\infty$;
- L^0 — клас функцій α таких, що $\alpha \in L$ і $\alpha(x(1+o(1))) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$;
- L_{si} — клас повільно зростаючих функцій, тобто функцій α таких, що $\alpha \in L$ і для будь-якого $c > 0$: $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$.

Для цілої функції $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$:

- $\varrho(f) = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ — порядок $f(z)$;
- $\sigma(f) = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\varrho}$ — тип $f(z)$;
- $\mathcal{I}(\nu)$ — клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du),$$

  де ν — невід'ємна міра на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм $\operatorname{supp}\nu$ і $f(x)$ — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$;
- Через $\mathcal{I}(\nu,\Phi)$ ми позначимо клас функцій $F \in \mathcal{I}(\nu)$ таких, що

$$(\exists c > 0)\colon\ \ln F(x) \leq \Phi(cx) \quad (x \geq x_0),$$

- $\mathcal{I}^*(\nu,\Phi) := \{F \in \mathcal{I}(\nu)\colon (\exists c > 0)(\exists x_j \to +\infty)[\,\ln F(x) \leq \Phi(cx)(x = x_j,\ j \geq 1)]\}$;
- $I(\sigma) = \int\limits_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x),\ \sigma \in \mathbb{R},$ — інтеграл Лапласа–Стілт'єса, де функція f — невід'ємна на $[0;+\infty)$.

Для інтеграла $I(\sigma)$:

- $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, I) = \max\{f(x)e^{x\sigma}\colon\ x \geq 0\},\ \sigma \in \mathbb{R},$ — максимум підінтегральної функції;
- $M(\sigma, I) := \int\limits_0^\infty |f(x)|e^{x\sigma}dF(x),\ \sigma \in \mathbb{R}$;
- σ_c — абсциса збіжності інтегралу;
- σ_μ — абсциса існування максимуму підінтегральної функції;
- $\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\big(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\big)$ — модифікованим узагальнений порядок I;

- $\lambda^M_{\alpha\beta}(I)=\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\big(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\big)$ — модифікований нижній узагальнений порядок I;
- $\varrho^M_{\alpha\beta}(I)=T(I)=\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln\sigma}$;
- $\lambda^M_{\alpha\beta}(I)=t(I)=\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln\sigma}$;
- $T_{\alpha\beta}(I)=\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\exp\{\alpha(\ln I(\sigma))\}}{\exp\{\varrho\beta(\sigma)\}}$, $(\varrho=\varrho_{\alpha\beta}(I))$, — узагальнений тип інтеграла I;
- $\varrho_{\alpha,\beta}[I]:=\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(\sigma,I))}{\beta(\sigma)}$ — узагальнений (α,β)-порядок I, де $\alpha\in L$ і $\beta\in L$;
- $\varrho_{\alpha\beta}(I)=\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln I(\sigma)))}{\beta(\sigma)}$ — узагальнений порядок інтегралу Лапласа-Стілт'єса;
- $\lambda_{\alpha\beta}(I)=\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln I(\sigma))}{\beta(\sigma)}$;
- $\lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu)=\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln\mu(\sigma))}{\beta(\sigma)}$;
- $k_{\alpha\beta}(f)=\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\big(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\big)}$;
- $\varkappa_{\alpha\beta}(f)=\varliminf\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\big(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\big)}$;
- $\varrho_{\alpha\beta}(G)=\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(G(\sigma))}{\beta(\sigma)}$ — узагальнений порядок G, де $\alpha\in L,\beta\in L$ та G — довільна функція на $[\sigma_0;+\infty)$.

2. Класи аналітичних функцій, зображуваних інтегралами Лапласа-Стілт'єса.

- $LS(F)$ — клас інтегралів Лапласа-Стілт'єса, для яких $\sigma_c=\sigma_\mu=+\infty$;
- LS_h — клас інтегралів Лапласа-Стілт'єса з дійсними функціями f, для яких виконується $|f(x)|\exp\{xh(x)\}\to 0$, при $x\to+\infty$.

В окремих підрозділах вводяться також додаткові позначення, які дійсні лише в них.

ВСТУП

Актуальність теми. Одним з напрямків теорії аналітичних функцій є вивчення асимптотичних властивостей цих функцій. До перших результатів у цьому напрямку можна вважати праці таких відомих математиків, як Ж. Адамара, Е. Бореля, А. Вімана, Ж. Валірона, Г. Пойя, які було опубліковано наприкінці XIX — початку XX століть. Надалі у цій тематиці слід відзначити роботи У. Хеймана [77–80], Г. В. Віттіха [217], Й. В. Островського і А. А. Гольдберга [1, 73, 74].

Значна кількість досліджень з початку XX століття пов'язана з використанням техніки максимального члена ряду та оцінок загального члена ряду через максимальний, які можна отримати методом Вімана-Валірона. Розвитку різних аспектів цього підходу присвятили свої роботи А. Макінтайр, П. Ердеш, Т. Кеварі, І. Ф. Бітлян, Л. Сонс, У. Хейман, В. Фукс, П. Фентон, А. Шиміцкі, М. Струмія, Дж. Россі, Ш. І. Штреліц, П. Розенблум та інші автори. М. М. Шеремета та О. Б. Скасків та їхні учні застосовували для отримання аналогів теорем Вімана-Валірона у різних класах степеневих рядів, рядів Діріхле, регулярно збіжних функціональних рядів, інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса, різні модифікації методу, в основі яких лежать праці Т. Кеварі, В. Хеймана, П. Фентона та П. Розенблума.

Зацікавленість до досліджень асимптотичними властивостями аналітичних функцій зумовлена внутрішніми проблемами теорії аналітичних функцій. З іншого боку, такий інтерес пояснюється також і тим, що деякі класи аналітичних функцій природно виникають в інших галузях математики, а саме у теорії ймовірностей, теорії крайових задач, аналітичної теорії чисел та проблемах трансцендентності, теорії інтегральних та диференціальних рівнянь, так і в ряді важливих прикладних областей науки: гідродинаміці, аеродинаміці, аналітичній механіці, радіофізиці, фізиці високих енергій, теорії керованого вибуху. Протягом останніх років активно проводяться дослідження властивостей аналітичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, в основі яких переважно є оцінки логарифмічної похідної, які можна отримати методами теорії розподілу значень або методу Вімана-Валірона. Перевага методу Вімана-Валірона полягає в тому, що його застосування дає двосторонні оцінки числових характеристик зростання аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь.

Не зважаючи на велику кількість праць, багато важливих запитань, які стосуються вивчення асимптотичних властивостей аналітичних функцій, залишаються відкритими та недослідженими. Зупинимося коротко на деяких з них.

Дослідження задачі про встановлення асимптотичних співвідношень між характеристиками аналітичних функцій, які виконуються зовні деякої виняткової множини, почалося з робіт А. Вімана [215, 216] та Ж. Валірона [209–214]. Виникає природна проблема знаходження непокращуваного опису величини виняткової множини у різних асимптотичних оцінках. Перший приклад такої цілої функції, що у класичній нерівності Вімана існує необмежена виняткова множина, побудував у 1975 році А. А. Гольдберг, а в 1999 році О. Б. Скасків і П. В. Філевич знайшли близький до непокращуваного опис величини виняткової множини у цій нерівності.

Хоча перші багатовимірні аналоги результатів для цілих функцій були отримані ще на початку XX століття Е. Борелем ([47]), проте через відмінності властивостей, наприклад в характері нульових множин цілих функцій в одновимірному і багатовимірному випадках, і у цьому зв'язку через потребу залучення нових методів з інших розділів математики, розвиток багатовимірної теорії відбувався з деяким запізненням. Інтенсивне дослідження аналогів класичних підходів у багатовимірному випадку почалася у 60–70-тих роках. Відомі різні аналоги нерівності Вімана у класі цілих функцій від декількох комплексних змінних встановлені П. Фентоном, А. Шиміцкі, О. Б. Скасківим та О. М. Тракало. Проте навіть задача встановлення точних аналогів нерівності типу Вімана у класі цілих функцій багатьох змінних залишалася відкритою. Тим більше нерозв'язаною також була проблема отримання такого типу нерівностей для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області. В актуальності цих проблем не повинно виникати сумніву.

Важливим напрямком досліджень є вивчення асимптотичних властивостей випадкових аналітичних функцій. Тут слід відзначити праці Г. Штейнгауза [203], Р. Пелі й А. Зигмунда [151] щодо асимптотичного поводження випадкових аналітичних функцій, П. Леві та П. Ердеша [55] про встановлення асимптотичних співвідношень між максимумом модуля і максимальним членом випадкових цілих функцій зовні виняткових множин, М. Содіна [45, 49, 50, 136, 137, 196–200] про розподіл значень випадкових аналітичних функцій.

П. Леві [130] (див. також статтю [55] П. Ердеша і А. Реньї) для випадкових цілих функцій спеціального вигляду за умов правильного зростання їх максимуму модуля встановив, що класичну нерівність Вімана майже напевно (м.н.) можна істотно покращити (ефект Леві). У подальшому П. В. Філевич (1997 р.) поширив цей результат на дуже широкий клас випадкових аналітичних в одиничному крузі і цілих функцій, а вслід за М. Стілом [204] на клас цілих функцій з швидко коливними тейлоровими коефіцієнтами [40]. О. Б. Скасків і О. В. Зрум (2005–2006 рр.) виявили, що ефект Леві справджується і у випадку встановленого П. Фентоном [61] аналогу нерівності типу Вімана для цілих функцій від двох змінних; при цьому вони розглядали як випадкові цілі функції [3], так і цілі функції з швидко коливними коефіцієнтами [34]. Наявність подібних ефектів виявив П. В. Філевич і стосовно деяких аналогів нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі. Тому природно виникає актуальна проблема встановлення ефекту типу Леві у класах аналітичних функцій від декількох змінних. Проте, на відміну від випадку цілих функцій, залишився цілий перелік відкритих питань.

Праці А. К. Оффорда та Дж. Е. Літлвуда [128, 129, 146–149] можна вважати класичними у дослідженні розподілу значень випадкових аналітичних функцій. Зокрема, у 2000-х роках дослідженню асимптотичних співвідношень для ймовірності відсутності у достатньо великому крузі нулів з центром у початку координат випадкових гаусових функцій присвятили свої праці Ф. Назаров, М. Содін та А. Волберг, Ю. Перез та Б. Віраґ, М. Хрішнапур, М. Содін та Б. Цірелсон [50, 136, 137, 140–144, 196–200]. Проте ця задача ще далека від повного розв'язання, навіть для випадкових цілих функцій від однієї комплексної змінної.

Описані задачі, а також багато інших задач, є предметом досліджень у цій дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка.

Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень за держбюджетними темами Мг–58Ф "Асимптотичні методи дослідження гармонійних та аналітичних функцій, зображених випадковими рядами, інтегралами Лапласа–Стільтьєса та їх узагальненнями" (номер держреєстрації 0110 U 001365), Мг–145Ф "Нові комплексно–ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами" (номер держреєстрації 0113 U 003051), Мг–159Ф "Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій в банахових просторах" (номер держреєстрації 0113 U 000184), "Нові ймовірнісно-аналітичні методи у комплексному аналізі та теорії операторів", що виконувались на кафедрі теорії функцій і функціонального аналізу.

Мета й завдання дослідження. *Мета дослідження* — доведення точних аналогів нерівності типу Вімана для аналітичних функцій від багатьох комплексних змінних, областю збіжності яких може бути довільна повна кратно-кругова область Рейнхарда; перевірити наявність ефекту Леві для цих функцій та у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою; отримати аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга для цілих функцій від багатьох комплексних змінних і для інтергалів; довести точні оцінки ймовірності відсутності нулів для гаусових аналітичних функцій; дослідити простори Фреше інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле.

Завдання дослідження: отримати аналоги нерівності Вімана для аналітичних та випадкових аналітичних функцій багатьох комплексних змінних, областю збіжності яких є кратно-кругові області Рейнхарда та побудувати приклади на точність цих нерівностей; встановити аналоги співвідношення Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса; довести точні оцінки для ймовірності відсутності нулів для аналітичних функцій від однієї змінної; дослідити банахів простір інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле; отримати твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки інтегралів Лапласа-Стілт'єса; дослідити властивості просторів Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Об'єкт дослідження: аналітичні і випадкові аналітичні функції від однієї та багатьох змінних, областю збіжності яких може бути довільна кратно-кругова область Рейнхарда, лакунарні ряди однорідних поліномів, цілі кратні ряди Діріхле, інтеграли Лапласа-Стілт'єса.

Предмет дослідження: асимптотичні властивості деяких характеристик функцій з розглядуваних класів.

Методи дослідження: використовуються методи теорії функцій, багатовимірного комплексного аналізу, теорії ймовірностей, а також певні прийоми з праць А. А. Гольдберга, М. М. Шеремети, О. Б. Скасківа, М. Л. Содіна та їх учнів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У дисертаційній роботі вперше отримано такі результати:

1) отримано аналоги співвідношення Бореля та нерівності Вімана для аналітичних функцій від однієї змінної, які можна представити у вигляді степеневого ряду з радіусом збіжності $R \in (0; +\infty]$;
2) перевірено наявність ефекту Леві для цілих та аналітичних у крузі функцій у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою;
3) уточнено нерівність типу Вімана для цілих функцій від багатьох комплексних змінних, побудовано приклад на точність отриманої нерівності та перевірено наявність ефекту Леві;

4) отримано точні аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга для цілих функцій від багатьох комплексних змінних, заданих лакунарними рядами за однорідними поліномами;
5) встановлено аналоги нерівності типу Вімана та перевірено наявність ефекту Леві для аналітичних функцій з областями збіжності
   (а) $\mathbb{C}^p$;
   (б) $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$;
   (в) $\mathbb{D}^p$;

   де $l, p \in \mathbb{N},\ p > l,\ p \geq 2$, та побудовані приклади на їх точність у кожній з цих множин;
6) отримано аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області Рейнхарда, а також перевірено наявність ефекту Леві для цих функцій;
7) доведено точні аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками;
8) отримано оцінки зверху та знизу для ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих функцій та деяких аналітичних функцій та побудовано приклади на їх точність;
9) встановлено точні співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілтьєса;
10) досліджено властивості банахового простору інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле;
11) отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки інтегралів Лапласа-Стілт'єса;
12) досліджено властивості простору Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та є вагомим внеском у теорію аналітичних функцій від однієї та декількох змінних. Вони можуть бути застосовані в аналітичній теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, а також їхніх систем. Результати можуть бути використані для подальших досліджень в Інституті математики НАН України, Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур імені Б. І. Вєркіна НАН України.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. Зі статей, виконаних у співавторстві, у дисертацію включені з повними доведеннями лише результати, які належать авторові дисертації. Доведення кількох тверджень допоміжного характеру, отриманих співавторами здобувача, наводяться для повноти картини у рукописі дисертації з люб'язного дозволу співавторів. У статтях, виконаних у співавторстві з науковим консультантом, [18, 113, 115–117, 120, 121, 124] О. Б. Скасківу належать постановка задач, визначення загальної схеми дослідження та обговорення отриманих результатів. У спільних статтях:

1) з М. М. Шереметою [122,179] співавтору належать постановка задач, обговорення і аналіз отриманих результатів, а здобувачу — доведення отриманих тверджень;
2) [178] М. М. Шереметі та М. С. Добушовському належать постановка проблем та обговорення отриманих результатів, А. О. Куриляку — доведення тверджень;
3) [6, 91, 99] Скасківу О. Б. та здобувачу належать постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів, Шаповаловській Л. О. доведення теорем;
4) з Л. О. Шаповаловською [97] співавтору належить доведення теорем, здобувачу — постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів;
5) [92] О. Б. Скасківу належать постановка задач і обговорення отриманих результатів, І. Є. Овчару — доведення теореми 1, здобувачу і І. Є. Овчару — доведення теореми 2 в однаковій мірі; у [95] здобувачу і Скасківу О. Б. належать теорема 1 в однаковій мірі, а І. Є. Овчару — теорема 2;
6) у статтях з Н. Ю. Стасів та О. Б. Скасківом здобувачу належать: остаточні варіанти доведень наслідків 10 і 13 з [102]; твердження 5 з [15]; доведення твердження 10 з [108] та в однаковій мірі всім авторам твердження 7 з цієї статті; доведення твердження 1.4 з [16]; О. Б. Скасківу — постановка задач, обговорення і аналіз отриманих результатів, Н. Ю. Стасів — доведення решти тверджень;
7) [100,107,109] О. Б. Скасківу та В. Л. Цвігуну належать постановка задач і обговорення отриманих результатів, здобувачу — доведення отриманих тверджень;
8) [11, 111] О. Б. Скасківу та С. Р. Скасківу належать постановка проблем та визначення загальної схеми досліджень, А. О. Куриляку — доведення отриманих тверджень;

9) [96] О. Б. Скасківу та Д. Ю. Зікрачу постановка проблем та визначення загальної схеми досліджень, здобувачу — доведення отриманих тверджень;
10) [112] О. Б. Скасківу та С. І. Панчук належать постановка задач і обговорення отриманих результатів, А. О. Куриляку — доведення тверджень.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних та всеукраїнських конференціях, літніх школах та міжнародних семінарах:

1) International conference “Complex analysis and related topics” (Lviv, 23–28 September, 2013).
2) Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей” (Ворохта, 24 лютого – 2 березня, 2014 року).
3) Міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня, 2014 року).
4) Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015 року).
5) Наукова конференція присвячена 100-річчю К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1–4 липня, 2015 року).
6) International V. Skorobohatko mathematical conference (Drohobych, 25–28 August, 2015).
7) Complex Analysis and Related Topics (Lviv, 30 May – 4 June, 2016).
8) Друга Всеукраїнська наукова конференція “Прикладні задачі математики” (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня, 2016 р).
9) Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року).
10) International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18–23 September, 2017).
11) Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Івано-Франківськ, 27 лютого – 2 березня, 2018 року).
12) The IV conference in mathematics and computer science “Congresio-mathematica”, Abstracts, (Olstun, Poland, 20–23 September, 2018)
13) Complex analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A.A. Gol’dberg (Lviv, 28 June – 1 July, 2020).
14) International online conference “Current trends in abstract and applied analysis” (Ivano-Frankivsk, 12–15 May, 2022).

15) International conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 80th Anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007) (Lutsk, 28 May – 3 June, 2022).

16) Міжнародна наукова конференція "Математика та інформаційні технології" присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, (Чернівці, 28–30 вересня, 2023 року).

Про результати дисертації доповідалося на семінарі з комплексного аналізу в Ягелонському університеті (Краків, Польща, керівник проф. Січак), на семінарі з теорії апроксимації в Ягелонському університеті (Краків, Польща, керівник проф. Плєсняк), неодноразово доповідалося на Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А. А. Кондратюк, проф. О. Б. Скасків у 2012–2016, тепер проф. М. В. Заболоцький, проф. О. Б. Скасків, проф. П. В. Філевич, проф. І. Е. Чижиков у 2017–2023) та на семінарі з теорії потенціалу та застосувань (керівники проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков, 2012–2016), семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник — проф. А. С. Романюк, 2023), семінарі кафедри математичного та функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (керівник проф. А. В. Загороднюк, 2023), семінарі „Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники — проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко, 2023).

Публікації. Усі результати дисертації опубліковано в 52 роботах [6–18, 91–126, 168, 178, 179], в тому числі 22 тези конференцій [7–10, 12–14, 17, 93, 94, 98, 101, 104–106, 110, 114, 118, 119, 125, 126, 168] та 30 різних статей в українських та закордонних фахових виданнях з математичних наук [6, 11, 15, 16, 18, 91, 92, 95–97, 99, 100, 102, 103, 107–109, 111–113, 115–117, 120–124, 178, 179]. Серед статей дві статті опубліковано без співавторів [103, 123], 18 статей надруковано в українських та закордонних виданнях [99, 102, 103, 107–109, 111–113, 116, 117, 120–124, 178, 179], що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus), а серед них 10 статей [99, 102, 109, 111, 113, 116, 117, 120, 122, 124], опубліковано у 3 періодичних виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України, та у 3 закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus. З врахуванням квартилів у класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports маємо, що зазначені 10 статей [99, 102, 109, 111, 113, 116, 117, 120, 122, 124] прирівнюються до 21 публікації, а з врахуванням 8 публікацій у вітчизняних виданнях [103, 107, 108, 112, 121, 123, 178, 179], що індексуються у Scopus, однак не містяться у категорії „А“, отримуємо додаткові 14 публікацій, тобто загалом 35 прирівняних публікацій. Разом з тезами конференцій та іншими статтями у фахових виданнях з категорії „Б“ та закордонних виданнях не зі Scopus/Web of Science отримуємо 69 прирівняних публікацій, в яких опубліковано основні результати роботи.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 288 сторінок. Основний текст дисертації викладено на 267 сторінках. Список використаних джерел містить 218 найменувань та займає 14 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ВИХІДНІ ПОЛОЖЕННЯ, ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження

На початку XX століття у працях А. Вімана [215, 216] та Ж. Валірона [209–214] було розпочато дослідження асимптотичних властивостей трансцендентних цілих функцій, яке відоме пізніше, як метод Вімана-Валірона. Розвиток цього методу і його модифікацій можна знайти у працях У. Хеймана [79], П. Розенблума [160], Д. Пойя [155, 157], Т. Кеварі [86], П. Ердеша й А. Макінтайра [56], Й. В. Островського [150], В. Віттіха [217], Ш. І. Стреліца [180], Н. М. Сулейманова [206], М. М. Шеремети [43,170–174], О. Б. Скасківа [23–26,181–184], П. Фентона [57–65] і багатьох інших.

А саме, у статті У. Хеймана [79] підсумовані на час її написання результати типу Вімана-Валірона, М. М. Шеремета [43, 170, 171] застосував метод Вімана-Валірона для рядів Діріхле, у статті Й. В. Островського [150] наведено застосування даного методу до дослідження характеристик функцій ймовірнісних розподілів, у працях В. Віттіха [217], Ш. І. Стреліца [180], А. А. Гольдберга, Б. Я. Левіна, І. В. Островського [73] і Н. М. Сулейманова [206] результати типу Вімана-Валірона застосовано до досліджень асимптотичних властивостей розв'язків диференціальних рівнянь.

Нехай $\mathcal{E}_R$, $0 < R \le +\infty$, — клас аналітичних трансцендентних функцій вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

з радіусом збіжності $R(f) = R$. Також позначимо $\mathcal{E}_{+\infty} = \mathcal{E}$.

Почнемо з класичної теореми А. Вімана та Г. Валірона (див., наприклад, [28, 33, 156, 160, 214, 217]). Нехай

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| = r\},\ \mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n \colon n \ge 0\},\ r \in [0, R),$$

— максимум модуля та максимальний член ряду (1.1), відповідно.

Теорема 1.1. *Для кожної трансцендентної цілої функції $f \in \mathcal{E}$ і кожного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r),\ r > 1,\ r \notin E_f(\varepsilon), \tag{1.2}$$

де $E = E_f(\varepsilon)$ — виняткова множина, що має скінченну логарифмічну міру, тобто

$$\int\limits_E d(\ln r) < +\infty. \tag{1.3}$$

Зауважимо, що ця терема є точною у тому сенсі, що сталу $1/2$ загалом не можна замінити на менше число. Справді, для цілої функції $f(z) = e^z$ маємо ([156], с. 177)

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)} = \sqrt{2\pi}.$$

Згодом У. Хейман уточнив нерівність Вімана (1.2). Нехай $\ln_1 x = \ln x$, $\ln_{k+1} x := \ln\ln_k x$ для всіх цілих $k \ge 1$. А саме, була доведена така теорема.

Теорема 1.2 ([79])**.** *Нехай $k \in \mathbb{N}$. Для довільної $f \in \mathcal{E}$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує множина скінченної логарифмічної міри $E = E_f(\varepsilon)$ така, що для $r \in (1; +\infty)\backslash E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \le \mu_f(r)\sqrt{\ln\mu_f(r)}\ln_2\mu_f(r)\cdot\ldots\cdot\ln_k\mu_f(r)(\ln_{k+1}\mu_f(r))^{1+\varepsilon}. \tag{1.4}$$

Подібну нерівність можна знайти у статті П. Розенблума [160]. Питання про точність нерівності (1.4) розглядалася у статті Н. М. Сулейманова [206]. А саме з отриманих у цих статтях результатів випливає таке твердження.

Теорема 1.3. *Нехай $k \in \mathbb{N}$. Існує ціла функція $f \in \mathcal{E}$ і $r_0 > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0; +\infty)$ маємо*

$$M_f(r) \ge \mu_f(r)\sqrt{\ln\mu_f(r)}\ln_2\mu_f(r)\cdot\ldots\cdot\ln_k\mu_f(r).$$

Отже, нерівність (1.4) у класі цілих трансцендентних функцій є непокращуваною. Однак цю нерівність можна уточнити у різних підкласах цілих функцій, а саме:

1) цілих функцій скінченного порядку;
2) цілих функцій, які можна подати у вигляді лакунарного степеневого ряду;
3) випадкових цілих функцій.

Почнемо з класу цілих функцій скінченного порядку

$$\rho_f := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

А саме, у [79] доведено, що для довільної функції $f \in \mathcal{E}$ скінченного порядку ρ і кожного $\varepsilon > 0$ для всіх $r \in (1; +\infty)\backslash E$ виконується нерівність

$$M_f(r) \le (\rho+\varepsilon)\mu_f(r)\sqrt{2\pi\ln\mu_f(r)}, \tag{1.5}$$

де $E = E_f(\varepsilon)$ — виняткова множина така, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\ln r}\int\limits_E \frac{dr}{r} < \frac{\rho}{\rho+\varepsilon}.$$

Точність нерівності (1.5) доведена у [156]. Тобто, для кожного $\rho \in (0; +\infty)$ існує функція $f \in \mathcal{E}$ скінченного порядку ρ, для якої

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\sqrt{2\pi \ln \mu_f(r)}} = \rho.$$

Тепер розглянемо цілі функції f, які можна представити лакунарним степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}, \quad n_k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.6}$$

Для цих функцій нерівність Вімана може бути також уточненою (наприклад, див. [27,170]). Зокрема, з одного результату ([170]), отриманого для цілого ряду Діріхле, випливає, що за умови

$$(\exists \Delta \in (0; +\infty))(\exists \rho \in [1/2; 1])(\exists D > 0)\colon\ |n(t) - \Delta t^{\rho}| \le D \ \ (t \ge t_0), \tag{1.7}$$

(тут $n(t) = \sum_{n_k \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (n_k)), нерівність

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{(2\rho-1)/2+\varepsilon} \mu_f(r) \tag{1.8}$$

виконується для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $r \in [r_0(\varepsilon); +\infty) \setminus E_1$, де E_1 є множиною скінченної логарифмічної міри (для $\rho = 1$ з нерівності (1.8) отримуємо класичну нерівність Вімана). З іншого результату ([27], див. також [36]), отриманого для цілого ряду Діріхле, випливає, що за умови (1.7) існує ціла функція f вигляду (1.6) така, що

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r) \ln^{(2\rho-1)/2} \mu_f(r)} = +\infty.$$

Розглянемо клас випадкових цілих функцій вигляду

$$f(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X_k(\omega) z^k. \tag{1.9}$$

Нехай $\mathcal{N}_* = (n_k)$ — послідовність цілих чисел таких, що $n_0 = 0$, $n_k < n_{k+1}$ $(k \ge 0)$, степеневий ряд вигляду (1.6) буде цілою функцією, і $\big(X_n(\omega)\big)$ *мультиплікативна система* (МС), тобто послідовність дійсних випадкових величин на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ таких, що

$$\mathbf{E}(X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}) = 0$$

для довільних $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $k \ge 1$, де $\mathbf{E}\xi$ математичне сподівання випадкової величини ξ, тобто

$$\mathbf{E}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega).$$

Тут $\Omega = [0; 1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевих підмножин $[0; 1]$ і P — міра Лебега (див. [84, с. 9]). Позначимо

$$\mathcal{K}(f, \mathcal{Z}, \mathcal{N}_*) = \left\{ f(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) z^{n_k} \colon \omega \in [0; 1] \right\},$$

де $\mathcal{Z} = (Z_k(\omega))$ — послідовність комплекснозначних випадкових величин.

Надалі вираз "майже напевно" будемо використовувати у сенсі, що відповідна властивість виконується майже скрізь відносно міри Лебега P на $\Omega = [0;1]$. Будемо говорити, що певне співвідношення виконується майже напевно у класі $K(f, X)$, якщо воно виконується для всіх цілих функцій $f(z,\omega)$ вигляду (1.9) майже скрізь по ω.

Для деяких випадкових цілих функцій (див., наприклад, [33, 55, 66, 130]) майже напевно (м.н.) на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ степінь $1/2$ у нерівності (1.2) може бути замінений на $1/4$, і у нерівності (1.8) (див. [36]) м.н. степінь $(2\rho-1)/2$ може бути замінений на $(2\rho-1)/4$ (*ефект Леві*).

П. В. Філевич у 1997 році ([66], див. також [33]) отримав таке твердження.

Теорема 1.4 ([66])**.** *Якщо $f \in \mathcal{E}_{+\infty}$ є трансцендентною цілою функцією вигляду (1.1), $\mathcal{Z} = (Z_k)$ — послідовність комплексних випадкових величин, така що $\big(\operatorname{Re} Z_k(\omega)\big) \in MC$, $\big(\operatorname{Im} Z_k(\omega)\big) \in MC$ і $|Z_k(\omega)| = 1$ м.н. $(k \geq 0)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ м.н. в $\mathcal{K}(f, \mathcal{Z})$ існує множина $E := E(\varepsilon, \omega, f) \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що нерівність*

$$M_f(r,\omega) := \max\{|f(z,\omega)|\colon |z| = r\} \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/4+\varepsilon} \tag{1.10}$$

виконується для $r \in [1; +\infty) \setminus E$.

У 2008 році О. Б. Скасків довів таку теорему для лакунарних степеневих рядів.

Теорема 1.5 ([36])**.** *Нехай послідовність $\mathcal{N}_* = (n_k)$ задовольняє умову (1.7), f — трансцендентна ціла функція вигляду (1.6), послідовність комплексних випадкових величин $\mathcal{Z} = (Z_k)$ таких, що $\big(\operatorname{Re} Z_k(\omega)\big) \in MC$, $\big(\operatorname{Im} Z_k(\omega)\big) \in MC$ та $|Z_k(\omega)| = 1$ м.н. $(k \geq 0)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ м.н. у $\mathcal{K}(f, \mathcal{Z}, \mathcal{N}_*)$ існує множина $E := E(\varepsilon, \omega, f) \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що нерівність*

$$M_f(r,\omega) := \max\{|f(z,\omega)|\colon\ |z| = r\} \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{(2\rho-1)/4+\varepsilon} \tag{1.11}$$

виконується для $r \in [1; +\infty) \setminus E$.

У випадку $n_k \equiv k$ (тобто $\mathcal{N}_* = \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$) з теореми 1.5 випливає відповідний результат з статті [66] (див. також [33]), і коли ми додатково припустимо, що $\mathcal{Z} = \mathcal{R}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{H}$ або $\mathcal{Z} = \mathcal{S}$, тоді ми отримаємо відповідні результати з [55, 204] та [130], (див. також [40]), відповідно, де $\mathcal{R} = \big(R_k(\omega)\big)$ — *послідовність Радемахера*, тобто послідовність незалежних випадкових величин таких, що $\mathbb{P}\{t\colon R_k(\omega) = -1\} = \mathbb{P}\{t\colon R_k(\omega) = 1\} = 0,5$ $(k \in \mathbb{N})$, та $\mathcal{H} = \big(H_k(\omega)\big)$ — *послідовність Штейнгауса*, тобто послідовність незалежних випадкових величин $H_k(\omega) = \exp\{2\pi i \eta_k(\omega)\}$, де $\{\eta_k(\omega)\}$ — послідовність незалежних рівномірно розподілених випадкових величин на $[0;1]$, $\mathcal{S} = \big(\exp\{2\pi i \theta_k \omega\}\big)$, де (θ_k) — послідовність натуральних чисел таких, що $\theta_{k+1}/\theta_k \geq q > 2$, $k \geq 0$. Зауважимо, що $\big(\cos(2\pi\theta_k\omega)\big) \in \mathrm{MC}$, $\big(\sin(2\pi\theta_k\omega)\big) \in \mathrm{MC}$ у цьому випадку (в [204] $q > 1$).

Зауважимо, що у статті [55] доведено наступне твердження. *Для цілої функції $f(z)=e^z$ і кожного $\varepsilon>0$ м.н. у $\mathcal{K}(f,\mathcal{R},\mathbb{Z}_+)$ і в $\mathcal{K}(f,\mathcal{H},\mathbb{Z}_+)$ виконується співвідношення*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M_f(r,\omega)}{\mu_f(r)\ln^{1/4-\varepsilon}\mu_f(r)}=+\infty. \tag{1.12}$$

З результатів доведених у статті [78, с. 45] випливає таке твердження. *Для цілої функції $f(z)=e^z$ м.н. у $\mathcal{K}(f,\mathcal{R},\mathbb{Z}_+)$ і в $\mathcal{K}(f,\mathcal{H},\mathbb{Z}_+)$ виконується нерівність*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{M_f(r,\omega)}{\mu_f(r)\ln^{1/4}\mu_f(r)}\geq\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Тобто, сталу $1/4$ у нерівності (1.10) замінити меншим числом не можна.

Це ж стосується і показника $(2\rho-1)/4$ у нерівності (1.11).

Теорема 1.6 ([36])**.** *Якщо послідовність $\mathcal{N}_*=(n_k)$ задовольняє умову (1.7), послідовність комплекснозначних випадкових величин $\mathcal{Z}=(Z_k)\in MC$ і $|Z_k(\omega)|=1$ м.н. $(k\geq 0)$, тоді існує ціла функція f вигляду (1.6) така, що*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M_f(r,\omega)}{\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{(2\rho-1)/4}}=+\infty$$

м.н. в $\mathcal{K}(f,\mathcal{Z},\mathcal{N}_*)$.

Більше того, з теореми 1.6 (для $\rho=1$ з умови (1.7)) випливає, що існує ціла функція f така, що співвідношення (1.12) виконується з $\varepsilon=0$, тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M_f(r,\omega)}{\mu_f(r)\ln^{1/4}\mu_f(r)}=+\infty.$$

У всіх наведених вище твердженнях про нерівність типу Вімана для випадкових цілих функцій (теорема 1.5 з [36] та інші подібні результати) математичне сподівання випадкових величин дорівнює нулю. У зв'язку з цим проф. М. М. Шеремета поставив таке **питання**: *Чи можна отримати точнішу нерівність Вімана для класів випадкових цілих функцій вигляду*

$$f(z,\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}Z_k(\omega)a_kz^{n_k}$$

та $\mathbf{E}Z_k=\alpha\neq 0$ $(k\geq 0)$? Негативну відповідь на це запитання можна знайти у статті П. В. Філевича [66].

Теорема 1.7 ([66])**.** *Нехай Ξ_1 клас рівномірно обмежених дійсних випадкових величин X_n таких, що*

$$\mathbf{E}(X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k})=\mathbf{E}X_{i_1}\mathbf{E}X_{i_2}\cdots\mathbf{E}X_{i_k}$$

для кожних $i_1<i_2<\ldots<i_k,\ k\geq 1$. Тоді для послідовності Z_n такої, що

$$\operatorname{Re}Z_n\in\Xi_1,\ \operatorname{Im}Z_n\in\Xi_1,\ |\mathbf{E}Z_n|\geq Cn^{-\alpha},\ \alpha\in[0;1/4),$$

існує ціла функція $f(z)$ така, що майже напевно в $K(f,Z)$ маємо

$$M_f(r,\omega)\geq\frac{C}{8}\mu_f(r)\ln^{1/2-\alpha}\mu_f(r),\ r\geq r_0(\omega).$$

Слід відзначити також, що у наведених вище результатах усі послідовності МС, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ є майже напевно рівномірно обмеженими. У зв'язку з цим проф. О. Б. Скасків поставив таке **запитання**: *чи буде ефект Леві у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою?*

У дисертаційній роботі знайдемо клас випадкових величин, для яких відповідь на це питання позитивна, а також клас випадкових величин, для яких ефект Леві не буде виконуватися.

Характерною особливістю результатів, отримуваних методом Вімана-Валірона, є наявність в них виняткових множин. У деяких випадках це звужує сферу застосовності цих результатів. З огляду на це, професор І. В. Островський у 1995 році сформулював наступну **задачу**: *яким є найкращий опис величини виняткової множини* E? Пізніше розглядалося це ж питання у декількох статтях (наприклад, див. [28, 30, 31, 33, 42, 162, 163, 195]) по відношенню до багатьох інших співвідношень, отриманих у теорії Вімана-Валірона.

Теорема 1.8 ([28]). *Для кожного $\beta > 0$ існує ціла функція така, що при деякому $\varepsilon > 0$ для множини*

$$E = \{r > 1\colon M_f(r) > \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}\}$$

виконується нерівність

$$\int\limits_E \frac{(\ln r)^{1/2+\beta}}{r} dr = +\infty.$$

Тобто, шукана точна оцінка є близькою до класичної (1.3).

Позначимо через $\mathcal{H}_R$ клас неперервних додатних неспадних на $[0; R), R \leq +\infty$, функцій таких, що

$$\int\limits_{r_0}^{R} \frac{h(r)}{r} dr = +\infty$$

для деякого $r_0 \in (0, R)$. Нехай $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{+\infty}$. Наступна теорема доповнює класичне твердження про нерівність Вімана.

Теорема 1.9 ([33]). *Для кожної функції $f \in \mathcal{E}$ і $h \in \mathcal{H}$ такої, що*

$$\ln_2^+ h(r) = o(\ln_2 \mu_f(r)) \ (r \to +\infty),$$

та для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E = E(\varepsilon, f, h) \subset [1; +\infty)$ скінченної h-логарифмічної міри (тобто $h\text{-}\mathrm{meas}\, E := \int_E h(r) d\ln r < +\infty$) така, що $(\forall\ r \in (1; +\infty)\backslash E)$:

$$M_f(r) \leq h(r)\mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}. \tag{1.13}$$

У статті [28] теорема 1.9 була доведена для функції h такої, що $h(r) \leq \ln r$ $(r \geq r_0)$ і з множником $\ln r$ замість $h(r)$ у нерівності (1.13). Зауважимо, що з умови $h(r) \le \ln r$ $(r \ge r_0)$ випливає співвідношення $\ln_2^+ h(r) = o(\ln_2 \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$.

З теореми 1.9 також випливає таке твердження.

Твердження 1.1. *Якщо функції $f \in \mathcal{E}$ і $h \in \mathcal{H}$ такі, що $\ln^+ h(r) = o(\ln_2 \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність* (1.2) *для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E(\varepsilon, f, h)$, де множина $E(\varepsilon, f, h) := E$ має скінченну h-логарифмічну міру, тобто h-meas$E < +\infty$.*

У статтях [28, 33], автори знайшли, у певному сенсі, найкращий опис величини виняткової множини E у нерівності Вімана для цілих функцій від однієї комплексної змінної.

З прикладу цілої функції, побудованої в [28] (див. також [33]), випливає, що опис, поданий у твердженні 1.1 виняткової множини для фіксованої цілої функції f істотно не може бути покращено. У статтях [28, 33] доведено, що для кожного $\varepsilon > 0$ існують ціла функція f і множина $E \subset [1; +\infty)$ такі, що для всіх $r \in E$

$$M_f(r) \ge \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}$$

та

$$\int\limits_E \frac{(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}}{r} dr = +\infty.$$

З іншого боку, у статті [33] встановлено також, що оцінка

$$\int\limits_E \frac{\sqrt{\ln \mu_f(r)}}{r} dr < +\infty$$

виняткової множини E у нерівності Вімана (1.2) виконується в деякому сенсі майже напевно.

Перші аналоги нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі можна знайти у [86]. Нехай $f(z)$ — аналітична функція вигляду (1.1) з радіусом збіжності $R_f = 1$. Для таких функцій $f(z)$ і для кожного $\delta > 0$ існує множина $E_f(\delta) \subset (0; 1)$ скінченної логарифмічної міри на $(0; 1)$, тобто

$$\int\limits_{E_f(\delta)} \frac{dr}{1-r} < +\infty,$$

така, що для всіх $r \in (0; 1) \backslash E_f(\delta)$ виконується нерівність ([205])

$$M_f(r) \le \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

На точність попередньої нерівності вказує такий приклад. Для

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\{n^{\varepsilon}\} z^n, \ \varepsilon \in (0; 1),$$

у [205] було доведено, що

$$\varliminf_{r\uparrow 1}\frac{M_g(r)}{\frac{\mu_g(r)}{1-r}\ln^{1/2}\frac{\mu_g(r)}{1-r}}\geq C>0.$$

Нерівність типу Вімана для випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі вперше отримана у [41]. Позначимо через $K(f,Z)$ клас випадкових аналітичних функцій

$$f(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nZ_n(\omega)z^n, \tag{1.14}$$

де $\{Z_n(\omega)\}$ — послідовність випадкових величин заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega,\mathcal{A},P)$ та послідовність (a_n) така, що

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

А саме, П. В. Філевич у 1997 році довів такі дві теореми.

Теорема 1.10 ([41])**.** *Нехай $f(z,\omega)$ випадкова аналітична функція вигляду* (1.14)*, $X_n\in MC$ і $|X_n(\omega)|\leq 1$ для майже всіх $\omega\in[0;1]$. Тоді майже напевно в $K(f,X)$ для кожного $\delta>0$ існує множина $E=E(f,\omega,\delta)\subset[0;1)$ скінченної логарифмічної міри на $[0;1)$ така, що для всіх $r\in[0;1)\backslash E$*

$$M_f(r,\omega)\leq\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r)^2}\cdot\ln\frac{\mu_f(r)}{1-r}\right)^{1/4+\delta}.$$

Точність попередньої нерівності випливає з такого твердження.

Теорема 1.11 ([41])**.** *Нехай X_n довільна послідовність випадкових величин така, що $|X_n(\omega)|\geq 1$ для майже всіх $\omega\in[0;1]$. Тоді існують аналітична функція $f(z,\omega)$ вигляду* (1.14) *і стала $C>0$, $0<r_0<1$ такі, що майже напевно в $K(f,Z)$ для $r\in(r_0;1)$ маємо*

$$M_f(r,\omega)>C\mu_f(r)\left(\frac{1}{(1-r)^2}\cdot\ln\frac{\mu_f(r)}{1-r}\right)^{1/4},\ r\uparrow 1.$$

Подібні нерівності для аналітичних функцій в одиничному крузі також можна знайти у [37, 86, 205].

Перейдемо тепер до багатовимірних аналогів нерівності типу Вімана. Розглянемо клас $\mathcal{E}^p$ цілих функцій f від p комплексних змінних вигляду

$$f(z)=f(z_1,\dots,z_p)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}a_nz^n,\quad z=(z_1,\dots,z_p)\in\mathbb{C}^p,$$

де

$$z^n=z_1^{n}\dots z_p^{n_p},\ p\in\mathbb{N},\ p\geq 2,\ n=(n_1,\dots,n_p)\in\mathbb{Z}_+^p:=(\mathbb{N}\cup\{0\})^p,\ \|n\|=\sum_{j=1}^p n_j.$$

Для $r=(r_1,\dots,r_p)\in\mathbb{R}^p_+:=(0;+\infty)^p$ та $f\in\mathcal{E}^p$ позначимо

$$\Delta_r=\{t\in\mathbb{R}^p_+\colon t_j\ge r_j,\ j\in\{1,\dots,p\}\},\ |r|=\sqrt{r_1^2+\ldots+r_p^2},\ r^\wedge=\min_{1\le i\le p} r_i,$$

$$M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z_j|\le r_j,\ j\in\{1,\dots,p\}\},$$

$$\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n\colon n\in\mathbb{Z}^p_+\},\quad \mathfrak{M}_f(r)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}|a_n|r^n,\ \ln_2 x=\ln\ln x.$$

Перші теореми про аналоги нерівності Вімана для цілих функцій від двох комплексних змінних можна знайти у праці І. Ф. Бітляна та А. А. Гольдберга [46], яка опублікована 1959 році. Опис виняткової множини, яка при цьому виникає у нерівності

$$M_f(r_1,r_2)\le C\mu_f(r_1,r_2)\{\ln\mu_f(r_1,r_2)\ln r_1r_2\}^{1+\varepsilon}$$

є дуже слабким, що, наприклад, множина на площині $\mathbb{R}^2_+$, яка отримується при викиданні з площини довільної нескінченної гратки променів паралельних до координатних осей вже виявляється винятковою.

Проте у цій же статті [46] автори отримали більш змістовні твердження про аналоги нерівності Вімана у термінах "кооперативного" максимального члена степеневого ряду за однорідними поліномами, а також відносно нерівності

$$M_f(r_1,r_2)\le C\mu_f(r_1,r_2)\{\ln\mu_f(r_1,r_2)\}^{3/2+\varepsilon},$$

яка виконується зовні деякої множини, перетин якої з кожним променем, що виходить з початку координат, має скінченну логарифмічну міру на промені.

Зауважимо, що у [46] доведено аналог нерівності Вімана для максимуму модуля у бікрузі і максимального члена з степенем $3/2$ замість $1/2$ у попередній нерівності. А. Шиміцький ([165,166]), П. Фентон ([61]), О. Скаксів і О. Тракало ([29]) і деякі інші автори уточнили результат Бітляна і Гольдберга як у специфікації нерівності, так і в ефективності опису виняткової множини, а також встановили аналоги нерівності Вімана для інших класів аналітичних функцій кількох змінних (див. також [3, 34–36, 75, 76, 89, 91, 97, 107]).

Почнемо з теореми, яку довів П. Фентон у 1995 році для цілих функцій від двох комплексних змінних.

Теорема 1.12 ([61]). *Для кожної цілої функції*

$$f(z)=\sum_{n+m=0}^{+\infty}a_{nm}z_1^nz_2^m$$

і для кожного $\varepsilon>0$ існують множина $E\subset\mathbb{R}^2_+$ і стала $C>0$ такі, що для всіх $r\in\mathbb{R}^2_+\backslash E$ виконується нерівність

$$M_f(r_1,r_2)\le$$

$$\leq C\mu_f(r_1,r_2)\ln^+\mu_f(r_1,r_2)\big(\ln_2^+\mu_f(r_1,r_2)\ldots(\ln_k^+\mu_f(r_1,r_2))^{1+\varepsilon}\big)^2, \tag{1.15}$$

де $k \geq 3$ *та*

$$\iint\limits_{E\cap[1,R]^2}\frac{dr_1dr_2}{r_1r_2}\leq 2(1+\varepsilon)\ln R+O(1),\ R\to+\infty.$$

Зауважимо, що нерівність (1.15) є найкращою з можливих у наступному сенсі ([61]): існують функція $f\in\mathcal{E}^2$ і множина $E\subset\mathbb{R}_+^2$ такі, що для всіх $r\in E$

$$M_f(r_1,r_2)\geq\mu_f(r_1,r_2)\ln^2\mu_f(r_1,r_2)\ \text{ і }\ \iint\limits_{E\cap[1,R]^2}\frac{dr_1dr_2}{r_1r_2}\geq c\cdot\ln R\ (R\geq R_0>1),\ c>0.$$

Будемо говорити, що підмножина E з $\mathbb{R}_+^p$ *є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри* ([75]), якщо E — вимірна за Лебегом в $\mathbb{R}_+^p$ та існує $R\in\mathbb{R}_+^p$ таке, що $E\cap\Delta_R$ *є множиною скінченної логарифмічної міри,* тобто

$$\ln_p-\operatorname{meas}(E\cap\Delta_R):=\int\limits_{E\cap\Delta_R\setminus B_1}\!\!\cdots\int\prod_{j=1}^p\frac{dr_j}{r_j}<+\infty,\quad B_1:=\{r\in\mathbb{R}_+^p\colon|r|<1\}.$$

А. Шиміцький у 1989 році довів наступне твердження з "меншою" винятковою множиною, ніж у теоремі 1.12.

Теорема 1.13 ([166]). *Для кожного* $\varepsilon>0$ *існують додатна стала* C, *яка не залежить від* $f\in\mathcal{E}^p$, *множина* $E\subset\mathbb{R}_+^p$ *асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що нерівність*

$$M_f(r)\leq C\mu_f(r)\big(\ln\mu_f(r)\cdot\ln(r_1\ldots r_p)\big)^{p/2+\varepsilon}:=A_1(r) \tag{1.16}$$

виконується для всіх $r\notin E$.

З результатів, доведених О. Б. Скасквом та О. М. Тракало у 2000 році, для інтегралів, випливає наступне твердження. Нехай e^K — образ множини $K\subset\mathbb{R}^p$ при відображенні $r_1=e^{\sigma_1},\ldots,r_p=e^{\sigma_p}$, та

$$\gamma(f):=\Big\{(\sigma_1,\ldots,\sigma_p)\in\mathbb{R}^p\colon\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln M_f(e^{t\sigma_1},\ldots,e^{t\sigma_p})=+\infty\Big\}.$$

Теорема 1.14 ([29]). *Нехай* $f\in\mathcal{E}^p$. *Для кожного* $\varepsilon>0$ *існує стала* $C_0=C_0(f,\varepsilon)>0$ *і множина* $E\subset\mathbb{R}_+^p$ *скінченної логарифмічної міри така, що для довільного конуса* $K\subset\mathbb{R}^p$ *з вершиною у початку координат такого, що*

$$\overline{K}\setminus\{0\}\subset\gamma(f),$$

і для всіх $r\in e^K\setminus E$ *виконується нерівність*

$$M_f(r)\leq C_0\mu_f(r)\prod_{i=1}^p\ln^{p-1}r_i\cdot(\ln\mu_f(r))^{p/2}(\ln_2\mu_f(r))^{p+\varepsilon}:=A_2(r). \tag{1.17}$$

Зокрема, якщо

$$\sum_{j=1}^{p} \ln_2^+ r_j = o(\ln_2 \mu_f(r)), \quad |r| \to +\infty,$$

то $A_2(r) = o(A_1(r))$ ($|r| \to +\infty$) і нерівність (1.16) випливає безпосередньо з (1.17).

При $p = 2$ винятквова множина E у нерівності (1.17) є "меншою" ніж винятквова множина у нерівності (1.15).

Особливістю результатів зі статті [75] доведених у 1977 році є те, що ціла функція має бути трансцендентною відносно кожної змінної $z_1, \dots, z_p$. А саме, через Λ^p позначимо клас цілих функцій $f \in \mathcal{E}^p$ таких, що $\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}^p$ для кожного $j \in \{1, \dots, p\}$.

Теорема 1.15 ([75])**.** *Нехай $f \in \mathcal{E}^p$ і $\delta > 0$.*

a) *Тоді існують $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E$ виконується нерівність*

$$\mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r) \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r) \right)^{1/2+\delta}. \tag{1.18}$$

b) *Якщо для деякого $\alpha \in \mathbb{R}_+^p$ виконується умова*

$$\mathfrak{M}_f(r) \ge \exp(r^\alpha) = \exp\left\{ \prod_{j=1}^{p} r_j^{\alpha_j} \right\}, \quad r^\wedge \to +\infty$$

або більш загально, для кожного $\beta > 0$

$$\int\limits_{\Delta_R} \cdots \int \frac{1}{\ln^\beta \mathfrak{M}_f(r)} \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty, \text{ при } R^\wedge \to +\infty,$$

тоді існують $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри така, що для $r \in \Delta_R \backslash E$ маємо

$$\mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{p/2+\delta} \mu_f(r).$$

Використовуючи методи з [75], можна довести наступний точніший аналог цієї нерівності.

Теорема 1.16 ([97])**.** *Нехай $f \in \mathcal{E}^p$ і $\delta > 0$. Існують $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E \subset \Delta_R$ асимптотично скінченної логарифмічної міри такі, що нерівність*

$$\mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r) \left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \right)^{1/2} \cdot \ln^{5/2+\delta} \left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \right)$$

виконується для всіх $r \in \Delta_R \setminus E$.

Зауваження 1.1 ([97]). *Існує множина E асимптотично нескінченної логарифмічної міри така, що для цілої функції*

$$g(z) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} z_i\right\},$$

кожного $\varepsilon > 0$ і $r \in E$ маємо

$$M_g(r) \geq \mu_g(r)\left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i\right)^{1/2-\varepsilon}.$$

Отже, показник 1/2 у нерівності (1.18) не можна замінити меншим числом. У зв'язку з цим природно виникає таке **запитання**: *як можна описати "кількість" тих цілих функцій, для яких нерівність* (1.18) *можна покращити?*

Весною 1996 року під час доповіді П. В. Філевича на львівському семінарі по теорії аналітичних функцій професори А. А. Гольдберг та М. М. Шеремета задали наступне **питання** (див. [3]). *Чи має місце ефект Леві для аналогів нерівності Вімана для цілих функцій багатьох змінних?*

Відповіді на ці питання можна знайти у статтях [3,34,35] у випадку нерівності Фентона ([61]) для цілих функцій від двох змінних, а для нерівності Вімана з [6] для випадкових цілих функцій від багатьох змінних у [97].

Зауважимо, що всі вище згадані результати стосуються цілих функцій від багатьох змінних. У зв'язку з цим професор О. Б. Скасків сформулював **задачу**: отримати точні аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій представлених кратним степеневим рядом, областю збіжності якого може бути довільна повна кратно-кругова область Рейнхарда. У дисертаційній роботі ми дамо відповідь на це питання.

Перейдемо тепер до теореми типу Вімана з діагональним максимальним членом ([46]).

Нехай $z^n = z_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot z_p^{n_p}$, $\|n\| = \sum_{k=1}^{p} n_k$ для $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ та $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$. Для $\mathcal{E}^p(\lambda)$ позначимо клас цілих функцій $f\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, (тобто, цілих функцій від p комплексних змінних), які можна подати у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(z), \quad z \in \mathbb{C}^p. \tag{1.19}$$

Тут

$$P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C},\ P_k(z) = \sum_{\|n\|=\lambda_k} a_n z^n$$

— однорідний поліном степеня $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$, і $0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ $(1 \leq k \uparrow +\infty)$, $\lambda = (\lambda_k)$. У випадку $\lambda_k \equiv k$ $(k \geq 0)$ ми отримаємо клас усіх цілих функцій від p комплексних змінних і позначимо через $\mathcal{E}^p$. Через $\mathcal{E}^1$ та $\mathcal{E}^1(\lambda)$ класи цілих функцій від однієї змінної і цілих функцій представлених лакунарним степеневим рядом вигляду

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{\lambda_k}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.20}$$

відповідно.

Згідно з [46] розглянемо *вичерпання простору* $\mathbb{C}^p$ системою $(\mathbf{G}_r)_{r\geq 0}$ обмежених повних кратно-кругових областей з центром у точці $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^p$. Дійсно, припустимо, що ця система задовольняє умови:

i) $\bigcup\limits_{r\geq 0} \mathbf{G}_r = \mathbb{C}^p$;

ii) $(\forall r_1 < r_2)\colon \mathbf{G}_{r_1} \subset \mathbf{G}_{r_2}$;

iii) $(z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{G}_1 \Longleftrightarrow (\forall\ r > 0)\colon (rz_1, \dots, rz_p) \in \mathbf{G}_r$;

iv) $(z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{G}_r \Longrightarrow (\forall\ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p)\colon (z_1 e^{i\theta_1}, \dots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbf{G}_r$.

Через $\mathbb{G} = \{\mathbf{G} = (\mathbf{G}_r)_{r\geq 0}\colon \text{i)—iv)}\}$ позначимо клас систем таких областей. Зауважимо, що наступна система $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_r)_{r\geq 0}$ областей $\mathbf{G}_r$ містить клас $\mathbb{G}$:

i) $\mathbf{G}_r = C_{r,a} = \{(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p\colon |z_j| < a_j r,\ 1 \leq j \leq p\}$;

ii) $\mathbf{G}_r = \mathbb{B}_{r,a} = \{(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p\colon a_1|z_1|^2 + \ldots + a_p|z_p|^2 < r^2\}$;

iii) $\mathbf{G}_r = \Pi_{r,a} = \{(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p\colon a_1|z_1| + \ldots + a_p|z_p| < r\}$;

iv) $\mathbf{G}_r = \left\{(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p\colon |z_1|^{a_1} \cdot \ldots \cdot |z_2|^{a_p} < r^{a_1 + \ldots + a_p}\right\}$;

де $a = (a_1, \dots, a_p)$, $a_j > 0$ $(1 \leq j \leq p)$, $r > 0$.

Для $r > 0$ і цілої функції $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ позначимо через

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$$

— максимум модуля і через

$$\mu_f(r) = \max\{|a_k| r^{\lambda_k}\colon k \geq 0\}$$

— максимальний член степеневого ряду (1.20). Для $r > 0$ і цілої функції $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$ вигляду (1.19) позначимо

$$M(r, f) = \max\{|f(z)|\colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\}, \quad m_k(r, f) = \max\{|P_k(z)|\colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\} \quad (k \geq 0).$$

Згідно з [46] визначимо тепер *діагональний максимальний член ряду* (1.19)

$$m(r, f) \overset{def}{=} \max\{m_k(r, f)\colon k \geq 0\} = \max\{r^{\lambda_k} m_k(1, f)\colon k \geq 0\}.$$

Зауважимо, що $m(r, f) \equiv \mu_f(r)$ у випадку коли $p = 1$.

Нехай $n(t) = \sum_{\lambda_k \leq t} 1$ — *лічильна функція* послідовності $\lambda = (\lambda_k)$. За теоремою 1 з статті [27], доведеною для цілого ряду Діріхле, випливає таке твердження. Якщо послідовність $\lambda = (\lambda_k)$ задовольняє умову

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(n(t + \sqrt{\psi(t)}) - n(t - \sqrt{\psi(t)})\right)}{\ln t} \leq p_1 < +\infty \tag{1.21}$$

для деякої додатної функції $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такої, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

то для кожної цілої функції $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E = E(\varepsilon, f) \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто, $\text{ln-meas}(E) \overset{\text{def}}{=} \int_E d\ln r < +\infty$) така, що нерівність

$$M_f(r) \le C\mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{p_1+\varepsilon} \tag{1.22}$$

виконується для всіх $r \in [1; +\infty)\backslash E$. Тут C — деяка стала, яка залежить тільки від f та ε. Звідси, зокрема, випливає (див. також [36, 170]), що якщо

$$(\exists \triangle \in (0; +\infty))(\exists \varrho \in [1/2; 1])(\exists D > 0)(\exists t_0 > 0)(\forall t > t_0)\colon \\ |n(t) - \triangle t^{\varrho}| \le D, \tag{1.23}$$

то нерівність (1.22) виконується при $p_1 = (2\varrho - 1)/2$, тому що у цьому випадку умова (1.21) виконується з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. У випадку $f \in \mathcal{E}^1$, тобто $\lambda_k \equiv k$ $(k \ge 0)$, умова (1.23) виконується з $\varrho = 1$. Тому, нерівність (1.22) виконується з $p_1 = 1/2$, тобто, маємо класичну нерівність Вімана (див. [95, 214, 217]).

У [27] було доведено, що для кожної послідовності $\lambda = (\lambda_k)$ такої, що існує неперервна додатна зростаюча до $+\infty$ на інтервалі $[0; +\infty)$ функція ψ, для якої

$$\psi(t) = O(t \ln t \ln^2 \ln t)\ (t \to +\infty), \ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty, \text{ та}$$

$$(\exists p_1 > 0)\colon \quad \varliminf_{t \to +\infty} t^{-p_1}\Big(n(t + \sqrt{\psi(t)}) - n(t - \sqrt{\psi(t)})\Big) > 0, \tag{1.24}$$

існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ така, що

$$\frac{M_f(r)}{\mu_f(r)}(\ln \mu_f(r))^{-p_1} \to +\infty \quad (r \to +\infty). \tag{1.25}$$

З умови (1.23) випливає, що (1.24) виконується з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. Тому, для деякої цілої функції, яка задовольняє співвідношення (1.25) з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. Зі сказаного випливає, що якщо умова (1.23) виконується, тоді існує функція $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ така, що співвідношення (1.22) та (1.25) виконуються з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. Зокрема, для деякої цілої функції $f \in \mathcal{E}^1$ маємо

$$\frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\sqrt{\ln \mu_f(r)}} \to +\infty\ (r \to +\infty).$$

Це означає, що ми не можемо замінити $(2\varrho - 1)/2$ у (1.22) меншим числом. Більш того, ми не можемо навіть замінити $\varepsilon > 0$ у (1.22) на $\varepsilon = 0$. Тому, у нерівності Вімана для класу всіх цілих функцій $\mathcal{E}^1$ сталу $\frac{1}{2}$ не можна замінити меншою. Більше того, $\varepsilon > 0$ не може бути замінене на $\varepsilon = 0$. Зауважимо також, що

$$M_f(r) \sim \sqrt{2\pi}\mu_f(r)\sqrt{\ln \mu_f(r)} \quad (r \to +\infty)$$

для цілої функції $f(z) = e^z$.

Теорема 1.17 ([46]). *Для кожної цілої функції $f \in \mathcal{E}^2$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існують стала $C = C(\varepsilon, f) > 0$ і множина $E \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що нерівність*

$$M(r, f) \leq C \cdot m(r, f)(\ln m(r, f))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

виконується для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E$.

У дисертаційній роботі доведено аналоги цитованих результатів ([27]) для класу $\mathcal{E}^p(\lambda)$. Отримані результати, зокрема, містять твердження теореми 1.17, а також доведено їх точність.

Для $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $w = (w_1, \ldots, w_p) \in \mathbb{C}^p$ позначимо

$$(z, w) = z_1 w_1 + \ldots + z_p w_p, \quad \|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j, \quad \operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_p),$$

і для $R = (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо $\Pi_R = \{z \in \mathbb{C}^p \colon \operatorname{Re} z < R\}$.

Через $\mathcal{D}$ позначимо клас абсолютно збіжних у всьому комплексному просторі $\mathbb{C}^p$ (цілих) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z, \lambda_n)} \tag{1.26}$$

з такою послідовністю показників (λ_n), що $\{\lambda_n \colon n \in \mathbb{Z}^p\} \subset \mathbb{C}^p$ та $\lambda_n \neq \lambda_m$ для всіх $n \neq m$. Через $\mathcal{D}^+$ позначимо клас цілих рядів Діріхле з послідовністю показників $\Lambda^p = (\lambda_n)$ таких, що $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \ldots, n_p)$ та

$$0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty \ (1 \leq k \uparrow +\infty), \ 1 \leq j \leq p.$$

Для $F \in \mathcal{D}$ і $z \in \mathbb{C}^p$ позначимо

$$\mathfrak{M}(z, F) := \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| e^{\operatorname{Re}(z, \lambda_n)}, \quad \mu(z, F) := \sup\{|a_n| e^{\operatorname{Re}(z, \lambda_n)} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\}.$$

Деякі аналоги нерівності Вімана для цілих Діріхле $F \in \mathcal{D}^+$ з $p = 1$ були отримані в [170, 185].

Нехай $\mathcal{D}_1$ — клас абсолютно збіжних для цілих рядів Діріхле в $\mathbb{C}$ вигляду (1.26) з послідовністю показників (λ_n) таких, що

$$\lambda_n \geq 0 \ \ (n \geq 0), \quad \sup\{\lambda_n \colon n \geq 0\} = +\infty.$$

Слід зазначити, що деякі асимптотичні властивості функцій $F \in \mathcal{D}_1$ були досліджені в статтях [20, 92, 175, 182, 191, 192].

Для функції $F \in \mathcal{D}_1$ вигляду (1.26) позначимо через $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ послідовність $(-\ln|a_k|)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ впорядкована за спаданням.

Нехай L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій на $[0; +\infty)$ і L_1 — клас функції $\Phi \in L$ таких, що

$$\varphi(2t) = O(\varphi(t)) \ (t \to +\infty),$$

де φ — обернена функція до Φ.

У статті [92] було доведено таку теорему.

Теорема 1.18 ([92]). *Нехай $F \in \mathcal{D}_1$, $\Phi_1 \in L_1$, $\Phi_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x}\ln\mu(x, F)$. Якщо*

$$(\exists\alpha > 0)\colon \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^\alpha}{t^2}dt < +\infty, \quad n_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu_n\le t} 1, \quad t_0 > 0,$$

тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}$ така, що $\ln\text{-meas}\,(E) := \int_{E\cap[1;+\infty)} d\ln r < +\infty$ і співвідношення

$$\mathfrak{M}(x, F) = o(\mu(x, F)\ln^{1/\alpha}\mu(x, F))$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Наступне твердження показує, що асимптотичну рівність у теоремі 1.18 не можна покращити в загальному випадку.

Теорема 1.19 ([92]). *Для кожного $\alpha > 0$ існує функція $F \in \mathcal{D}_1$ така, що умова*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^\alpha}{t^2}dt < +\infty$$

і співвідношення

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^{\alpha+\varepsilon}}{t^2}dt = +\infty$$

виконуються та

$$\left(\forall\, \varepsilon \in \left(0; \frac{1}{\alpha}\right)\right)\colon \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\mu(x, F)(\ln\mu(x, F))^{1/\alpha-\varepsilon}} = +\infty.$$

Ще один напрям досліджень асимптотичних властивостей випадкових аналітичних функцій, а саме розподілу їх значень, розпочато у роботі Д. Пойя [157]. Однією з проблем випадкових функцій є дослідження розподілу значень таких функцій. У даній роботі ми розглянемо задачу про асимптотичні властивості ймовірності відсутності нулів у крузі (“hole probability”). Ці проблеми були досліджені у статтях Дж. Е. Літлвуда та А. К. Оффорда ([128, 129, 146–149]); М. Содіна та Б. Цірелсона ([197, 199, 200]); Ю. Переса та Б. Вірага ([158]); П. В. Філевича та М. П. Маголи ([132–134]); М. Содіна ([196, 198]); Ф. Назарова, М. Содіна та А. Вольберга ([136, 137]); М. Крішнапура ([87]); А. Нішрі ([141–144]); та багато інших ([48, 50, 51, 54, 71, 85, 127, 138, 139, 145]).

Вперше у 2005 році в статті М. Содіна та Б. Цірелсона ([199]) було досліджено асимптотичні властивості відсутності нулів для випадкової цілої функції вигляду

$$\psi(z,\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k(\omega)\frac{z^k}{\sqrt{k!}}, \tag{1.27}$$

де $\{\xi_k(\omega)\}$ — незалежні комплекснозначні випадкові величини, визначені на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Позначимо через $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ клас послідовностей незалежних випадкових комплексних величин (ξ_k) зі стандартним гаусовим розподілом на комплексній площині, тобто зі щільністю

$$p_{\xi_k}(z)=\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2},\ z\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Нехай (c_n), $c_n=c_n(\omega)$, — нулі функції $\psi(z,\omega)$ вигляду (1.27). Для $r>0$ позначимо через

$$n_\psi(r,\omega)=\sum_{|c_n|\le r}1$$

лічильну функцію нулів функції $\psi(z,\omega)$ у крузі $r\mathbb{D}:=\{z\colon |z|<r\}$. Тоді ([199]) для будь-якого $\delta\in(0;1/4]$ і всіх $r\ge 1$ виконується нерівність

$$P\Big\{\omega\colon \Big|\frac{n(r,\omega)}{r^2}-1\Big|\ge\delta\Big\}\le\exp(-c(\delta)r^4),$$

де стала $c(\delta)$ залежить тільки від δ. Також у [199] досліджено ймовірність відсутності нулів функції $\psi(z,\omega)$, тобто

$$P_0(r)=P\{\omega\colon n_\psi(r,\omega)=0\},\quad p_0(r)=\ln^- P_0(r),$$

де $\ln^- x:=-\min\{\ln x;0\}$. Зокрема, у [199] було доведено, що існують такі сталі $c_1,c_2>0$, що

$$\exp(-c_1r^4)\le P_0(r)\le\exp(-c_2r^4)\quad (r\ge 1).$$

Також у [199] автори поставили таке **запитання**: *чи існує границя*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln^- P_0(r)}{r^4}?$$

Відповідь на це питання знаходимо у [143]. Для функції $\psi(z,\omega)$ доведено, що

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln^- P_0(r)}{r^4}=\frac{e^2}{4}.$$

Нехай $K\subset\mathbb{C}$ — компакт такий, що $0\notin K$. У статті [141] було доведено, що якщо $\xi_n(\omega)\colon (\forall n\in\mathbb{N})\ \ \xi_n(\omega)\in K$, то існує $r_0(K)<+\infty$ таке, що випадкова ціла функція $\psi(z,\omega)$ вигляду (1.27) має нуль в крузі $r_0\mathbb{D}$.

Для функції вигляду (1.27) у [87] було доведено, що для будь-якого $r > 0$ виконується співвідношення

$$\ln P\{\omega\colon n_\psi(r,\omega) \geq m\} = -\frac{1}{2}m^2 \ln m(1 + o(1)) \quad (m \to +\infty).$$

Також в [137] було доведено, що

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln\Big(-\ln\big(P\{\omega\colon |n_\psi(r,\omega) - r^2| > r^\alpha\}\big)\Big)}{\ln r} = \begin{cases} 2\alpha - 1, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1; \\ 3\alpha - 2, & 1 \leq \alpha \leq 2; \\ 2\alpha, & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

У статтях [141, 144] було розглянуто цілі гаусові функції вигляду

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n,$$

де

$$a_0 \neq 0, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \quad \big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$$

є послідовністю незалежних стандартних гаусових випадкових величин. Для $\varepsilon > 0$ існує ([144, с. 17]) множина скінченної логарифмічної міри $E \subset (1; +\infty)$ така, що

$$s(r) - s^{1/2+\varepsilon}(r) \leq p_0(r) \leq s(r) + s^{1/2+\varepsilon}(r) \tag{1.28}$$

для всіх $r \in (1; +\infty) \setminus E$, де

$$s(r) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^+(|a_n| r^n), \quad \ln^+ x = \max\{0, \ln x\}.$$

Зауважимо ([144], с. 113), що існують ціла гаусова функція $f(z,\omega)$ і множина E нескінченної міри Лебега такі, що

$$p_0(r) \geq 2s(r) - c\sqrt{s(r)}, \ r \in E, \ C > 0.$$

Тобто, наявність виняткової множини у нерівності (1.28) є необхідною умовою.

Також у [144, с. 119] було сформульовано таке **питання**: *Чи є степінь 1/2 у нерівності (1.28) оптимальним для регулярної послідовності коефіцієнтів* $\{a_n\}$*?* У дисертаційній роботі ми дамо відповідь на це питання для випадкових функцій вигляду

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2) a_n z^n. \tag{1.29}$$

Тут $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) це послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi, \pi)$, $\big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$.

Ймовірність відсутності нулів для аналітичних гаусових функцій в одиничному крузі було досліджено у [87, 144, 158, 194, 196].

У 2005 році перше ця задача була розглянута у статті Ю. Переса та Б. Вірага ([158]). А саме, було досліджено випадкову аналітичну функцію вигляду

$$f_1(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(\omega) z^k. \tag{1.30}$$

Позначимо через $\mathbf{E}\eta$ та $\mathbf{D}\eta$ математичне сподівання та дисперсію випадкової величини η, відповідно. Тоді для випадкової величини $n_{f_1}(r,\omega)$ (кількість нулів функції $f_1(z,\omega)$ всередині $r\mathbb{D}$) маємо

$$\mathbf{E}(n_{f_1}(r,\omega)) = \frac{r^2}{1-r^2}, \quad \mathbf{D}(n_{f_1}(r,\omega)) = \frac{r^2}{1-r^4}, \quad p_0(r) = \frac{\pi^2 + o(1)}{1-r}, \ r \uparrow 1.$$

У [87] було розглянуто функції вигляду

$$f_\rho(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) \binom{-\rho}{n}^{1/2} z^n, \ \rho > 0,$$

яка майже напевно є аналітичною функцією в одиничному крузі. Було доведено, що для кожного $m \geq 1$ виконується співвідношення

$$P\{\omega \colon n(r,\omega) \geq m\} = \exp\Big\{-(1+o(1))\frac{1}{2}m^2 \ln m\Big\}, \ r \uparrow 1.$$

У [50, 158] розглядалася випадкова аналітична функція вигляду

$$f_L(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(\omega) \sqrt{\frac{L(L+1)\cdot \ldots \cdot (L+k-1)}{k!}} z^k, \ L > 0,$$

де $\xi_k(\omega) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1), \ k \in \mathbb{Z}_+$.

Зауважимо, що при $L = 1$ отримаємо функцію (1.30).

Асимптотичні оцінки для ймовірності відсутності нулів $f_L(z,\omega)$ такі оцінки можна знайти у [50]. А саме, для $0 < L < 1$ при $r \uparrow 1$

$$\frac{1-L-o(1)}{2^{L+1}} \frac{1}{(1-r)^L} \ln \frac{1}{1-r} \leq p_0(r) \leq \frac{1-L+o(1)}{2^L} \frac{1}{(1-r)^L} \ln \frac{1}{1-r} \tag{1.31}$$

і для $L > 1$

$$p_0(r) = \frac{(L-1)^2 + o(1)}{4} \frac{1}{1-r} \ln^2 \frac{1}{1-r} \quad (r \uparrow 1). \tag{1.32}$$

Зауважимо, що у [144, с. 121] сформульовано таку відкриту **проблему**: знайти аналоги співвідношень (1.31) та (1.32) для випадкових аналітичних функцій

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n,$$

де

$$a_0 \neq 0, \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1).$$

Ця проблема вже розглядалася в [194] для деякого класу функцій вигляду

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n,$$

де $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, $\{a_n\}$ є логарифмічно-ввігнутою послідовністю ([194]) та

$$\lim_{r\uparrow 1} (1-r) \ln\ln \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \right) = +\infty. \tag{1.33}$$

Для всіх $\varepsilon > 0$ існує множина $E(\varepsilon, f) = E_1 \subset (0;1)$ така, що

$$DE_1 = \overline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{1}{1-r} \mathrm{meas}(E_1 \cap [r;1)) = 0$$

і для всіх $r \in (0;1) \backslash E_1$ маємо $p_0(r) = s(r) + o(s(r))$. А саме,

$$s(r) - s^{9/10}(r) \ln^{18/5+\varepsilon} s(r) \le p_0(r) \le s(r) + \sqrt{s(r)} \ln^{3+\varepsilon} s(r).$$

У дисертаційній роботі отримано аналоги співвідношень (1.31) та (1.32) для широкого класу випадкових аналітичних функцій вигляду (1.29).

Перейдемо тепер до розгляду асимптотичних властивостей інтегралів Лапласа-Стілтʼєса. Нехай ν — невідʼємна міра на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм $\mathrm{supp}\,\nu$ і $f(x)$ — довільна невідʼємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначаємо клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u) e^{xu} \nu(du).$$

Для $F \in \mathcal{I}(\nu)$ та $x \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mu_*(x, F) = \sup\{f(u) e^{xu} \colon u \in \mathrm{supp}\ \nu\}.$$

Зазначимо, що умова $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ \mu_*(x,F) < +\infty$ виконується, тоді і тільки тоді, якщо (наприклад, див. [22, 159])

$$\varliminf_{\substack{u\to+\infty \\ u\in \mathrm{supp}\ \nu}} \frac{-\ln f(u)}{u} = +\infty.$$

Позначимо через L клас невідʼємних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ і через L^+ підклас функцій $\psi \in L$ таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ при $t \to +\infty$.

З [184] (для цілого ряду Діріхле див. у [181]) випливає таке твердження.

Теорема 1.20 ([184]). *Нехай $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$. Якщо*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} < +\infty, \quad \nu_0(t) := \nu((0,t]), \tag{1.34}$$

тоді співвідношення

$$\ln F(x) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(x, F) \tag{1.35}$$

виконується при $x \to +\infty$ ($x \notin E$), де $E \subset \mathbb{R}_+$ є деякою множиною скінченної міри Лебега на $\mathbb{R}_+$, тобто $\operatorname{meas} E = \int_E dx < +\infty$.

У статті [189] (див. також [181]) було доведено, що для кожної додатної міри ν такої, що

$$\ln \nu_0(t) = O(t),\ t \to +\infty \ \text{ та } \int\limits_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} = +\infty$$

існують функція $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і додатна стала $d > 0$ такі, що нерівність

$$\ln F(x) \ge (1 + d) \ln \mu_*(x, F)$$

виконується для всіх $x \ge x_0$, тобто умова (1.34) у певному сенсі є необхідною умовою теореми A.

Нехай $\Phi \in L^+$. Через $\mathcal{I}(\nu, \Phi)$ ми позначимо клас функцій $F \in \mathcal{I}(\nu)$ таких, що

$$(\exists c > 0)\colon \quad \ln F(x) \le \Phi(cx) \quad (x \ge x_0),$$

$$\mathcal{I}^*(\nu, \Phi) := \{F \in \mathcal{I}(\nu)\colon (\exists c > 0)(\exists x_j \to +\infty)[\, \ln F(x) \le \Phi(cx)\ (x = x_j,\ j \ge 1)]\}.$$

З твердження 7 у [32, с. 135–137] випливає така теорема.

Теорема 1.21. *Нехай $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$. Якщо*

$$(\forall\, \eta > 0)\colon \quad \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} = 0, \tag{1.36}$$

тоді співвідношення (1.35) виконується при $x \to +\infty$ ($x \notin E$), де E — множина нульової лінійної щільності, тобто

$$\mathcal{D}E := \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{R} \operatorname{meas}(E \cap [0, R]) = 0.$$

З [218, теорема 1] випливає таке твердження.

Теорема 1.22. *Нехай $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$. Якщо умова (1.36) виконується, то співвідношення (1.35) виконується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$), де E — деяка множина нульової лінійної щільності, тобто $\mathcal{D}E = 0$.*

Зауваження 1.2. Якщо $t\Phi(t) = O(\Phi(2t))$ $(t \to +\infty)$, то $\mathcal{I}(\nu, \Phi) = \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$ з $\Phi_0(x) := x\Phi(x)$. Але, загалом,

$$\mathcal{I}(\nu, \Phi) \subset \mathcal{I}(\nu, \Phi_0),\ \mathcal{I}(\nu, \Phi) \neq \mathcal{I}(\nu, \Phi_0).$$

З твердження 8 з [32, с. 137–138] можна отримати наступну теорему.

Теорема 1.23. *Нехай $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}^*(\nu, \Phi)$. Якщо виконується умова* (1.36), *то існує вимірна множина $E \subset \mathbb{R}_+$ така, що*

$$\underline{D}E := \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{meas}(E \cap [0, x]) = 0$$

і співвідношення (1.35) *виконується при $x \to +\infty$ $(x \in \mathbb{R}_+ \setminus E)$.*

Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

позначимо через

$$\varrho(f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$$

її порядок, а через

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho}}$$

її тип. Використовуючи формулу Адамара для знаходження цих характеристик, Е. Г. Келіс ([53]) довів наступні теореми.

Теорема 1.24. *Припустимо, що цілі функції*

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n \text{ та } f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,2} z^n$$

мають скінченні порядки та регулярне зростання (у сенсі однакового порядку $\varrho(f)$ і нижнього порядку $\varrho(f)$) і послідовності $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$ неспадні при $n \geq n_0$. Якщо

$$\ln(1/|a_n|) = (1 + o(1))\sqrt{\ln(1/|a_{n,1}|)\ln(1/|a_{n,2}|)}, \quad n \to \infty,$$

то f — функція регулярного зростання і

$$\varrho(f) = \sqrt{\varrho(f_1)\varrho(f_2)}.$$

Теорема 1.25. *Нехай функції f_1 і f_2 з теореми I мають однакові порядки $\varrho(f_1) = \varrho(f_2) = \varrho \in (0; +\infty)$ і типи $\sigma(f_1) = \sigma_1$, $\sigma(f_2) = \sigma_2$. Також припустимо, що $a_{n,1} \neq 0$ та $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$, де l є повільно змінною функцією. Якщо*

$$|a_n| = (1 + o(1))\sqrt{|a_{n,1}||a_{n,2}|}, \quad n \to \infty,$$

тоді функція f має порядок $\varrho(f) = \varrho$ і тип $\sigma(f) \leq \sqrt{\sigma_1 \sigma_1}$.

Зазначимо, що Р. С. Л. Срівастава ([201,202]) намагався довести теорему 1.24 без припущень $a_{n,1} \neq 0$ та $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$ і теорему 1.25 без умови спадання послідовностей $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$. На хибність таких тверджень було вказано у Math. Rev., 1963, V.25, №2204, №2206.

У [4] аналоги теорем 1.24 і 1.25 доводяться для цілих рядів Діріхле. У цій роботі ми отримаємо аналоги цих теорем для інтегралів Лапласа-Стілт'єса.

1.2. Основні напрямки та результати дослідження

У цьому підрозділі опишемо основні результати цього дисертаційного дослідження, а також їхній зв'язок з результатами, як попередників, так і результатами кандидатської дисертації здобувача.

1.2.1. Нерівність типу Вімана для аналітичних та випадкових аналітичних функцій від однієї змінної Розглянемо $\mathcal{E}_R$, $0 < R \le +\infty$, — клас аналітичних функцій у $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \tag{1.37}$$

Позначимо через $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon\ |z| = r\}$ та $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n\colon n \ge 0\}$, $r \in [0, R)$, максимум модуля та максимальний член ряду (1.37), відповідно.

Нехай $\mathcal{H}_R$ клас неперервних додатних неспадних на $[0; R), 0 < R \le +\infty$, функцій таких, що

$$\int_{r_0}^{R} \frac{h(r)}{r} dr = +\infty$$

для деякого $r_0 \in (0, R)$. Позначимо через $\mathcal{W}$ клас додатних неперервних зростаючих на $[0; +\infty)$ функцій $\psi(x)$ таких, що

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$$

для деякого $x_0 \in (0; +\infty)$.

Для аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $0 < R \le +\infty$, узагальнено і посилено твердження теореми 1.9 про нерівність типу Вімана, що виконується зовні деякої виняткової множини скінченної логарифмічної h-міри, встановленої в [33] у випадку $R = +\infty$ (за додаткової умови $\ln_2^+ h(r) = o(\ln_2 \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$). При цьому узагальнення стосується не лише перенесення результату на ширший клас аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $0 < R \le +\infty$, але й відсутності будь-яких додаткових умов на функцію h, за якою будується h-міра. З цього твердження, як наслідок, випливають твердження про класичну нерівність для цілих функцій і нерівність Кевари для аналітичних в одиничному крузі функцій. У процесі доведення нам вдалося отримати таке твердження про співвідношення типу Бореля для аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $0 < R \le +\infty$, що виконується зовні деякої виняткової множини скінченної логарифмічної h-міри.

Твердження 2.1. *Нехай $h \in \mathcal{H}_R$ і $f \in \mathcal{E}_R$ — довільна необмежена аналітична функція, представлена степеневим рядом вигляду (1.37) з радіусом збіжності $R(f) = R \in (0; +\infty]$. Тоді існує множина $E_0 := E(f, h) \subset (0, R)$ така,* *що нерівність*

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \le (1+o(1))\ln\bigl(h(r)\mu_f(r)\bigr) \tag{1.38}$$

виконується при $r \uparrow R$ $(r \notin E_0)$, *де* $E = E(f,h) \subset [1;+\infty)$ *— множина скінченної* h*-логарифмічної міри (тобто* $h\text{-meas}\, E := \int_E h(r) d\ln r < +\infty$*).*

З твердження 2.1 випливає, що якщо функції $h \in \mathcal{H}_R$ і $f \in \mathcal{E}_R$ такі, що $\ln h(r) = o(\ln \mathfrak{M}_f(r))$ $(r \uparrow R)$, то

$$\ln M_f(r) = (1+o(1))\ln \mu_f(r), \quad r \uparrow R, \ (r \notin E), \quad h\text{−}\operatorname{meas} E < +\infty,$$

а у випадку $\ln h(r) = O(\ln r)$ $(r \uparrow R = +\infty)$ у вигляді наслідку отримаємо одне твердження зі статті [42]. Зазначимо, що у випадку класу всіх цілих функцій там встановлено, що умову $\ln h(r) = O(\ln r)$, $r \uparrow R = +\infty$ в описанні величини виняткової множини у класичному співвідношенні Бореля зняти не можна.

Теорема 2.1. *Нехай* $h \in \mathcal{H}_R$, $R \in (0;+\infty]$. *Для кожної аналітичної функції* $f \in \mathcal{E}_R$, *для кожної функції* $\psi_j \in \mathcal{W}$ $(j \in \{1;2\})$ *і для будь-якого* $\delta > 0$ *існують множина* $E := E(\delta, f, h) \subset (0,R)$ *і* $r_0 \in (0,R))$ *такі, що*

$$h\text{−}\mathrm{meas}E = \int\limits_E h(r) d\ln r < +\infty$$

та

$$(\forall\ r \in (r_0,R)\setminus E)\colon \quad \mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r)\sqrt{h(r)\psi_2\Bigl(h(r)\psi_1\bigl(\ln\bigl(\mu_f(r)h(r)\bigr)\bigr)\Bigr)},$$

зокрема,

$$(\forall\ r \in (r_0,R)\setminus E)\colon \quad \mathfrak{M}_f(r) \le h(r)\mu_f(r)\bigl(\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\bigr)^{1/2+\delta}. \tag{1.39}$$

З попередньої нерівності при $h(r) \equiv 2$ випливає класична теорема Вімана-Валірона ([28, 33, 156, 214, 217]) для цілих функцій: для будь-яких $\delta > 0$ і для кожної необмеженої цілої функції нерівність Вімана

$$\ln M_f(r) \le \mu_f(r)\ln^{1/2+\delta}\mu_f(r)$$

виконується для довільного $r \in (r_0;+\infty)\setminus E$. Для $h(r) \equiv 2/(1-r)$ з цього твердження випливає теорема ([37, 86, 205]) про нерівність типу Кеварі для аналітичних функцій у одиничному крузі $\mathbb{D}$.

Субгаусові випадкові величини і ефект Леві для цілих функцій, які можна подати у вигляді лакунарного ряду.

Розглянемо цілу функцію f, яку можна подати у вигляді лакунарного степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}, \quad n_k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.40}$$

Нехай $\mathcal{N} = (n_k)$ — послідовність цілих чисел таких, що $n_0 = 0$, $n_k < n_{k+1}$ $(k \geq 0)$, степеневий ряд вигляду (1.40) буде цілою функцією,

$$(\exists\Delta \in (0;+\infty))(\exists\rho \in [1/2;1])(\exists D > 0)\colon\ |n(t) - \Delta t^\rho| \leq D\ \ (t \geq t_0),\ n(t) = \sum_{n_k \leq t} 1$$

і $\big(Z_n(\omega)\big)$ — послідовність дійсних випадкових величин задана на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тут $\Omega = [0;1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевих підмножин $[0;1]$ і P — міра Лебега.

Розглянемо клас випадкових функцій

$$K(f, \mathcal{Z}, \mathcal{N}) = \left\{ f(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) z^{n_k}\colon t \in [0;1] \right\}.$$

Припустимо, що Z є послідовністю дійсних незалежних субгаусових випадкових величин, тобто таких, що існує таке $D > 0$, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і всіх $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ маємо

$$\mathbf{E}(e^{\lambda_0 Z_k}) \leq e^{D\lambda_0^2}.$$

Клас таких випадкових величин позначимо через Ξ. Для $Z \in \Xi$ і будь-якого $k \in \mathbb{N}$: $\mathbf{E}(Z_k) = 0$ та

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(Z_k^2) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{D}(Z_k) \leq 2D.$$

Надалі вираз "майже напевно" будемо використовувати у сенсі, що відповідна властивість виконується майже скрізь відносно міри Лебега P на $\Omega = [0;1]$. Будемо говорити, що певне співвідношення виконується майже напевно у певному класі випадкових аналітичних функцій, якщо воно виконується для всіх аналітичних функцій з цього класу майже скрізь по ω.

Для субгаусових цілих лакунарних функцій маємо таке твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $Z \in \Xi$. Тоді існує така множина $E(\delta)$ скінченної логарифмічної міри, що для всіх $r \in (r_0(\omega);+\infty)\backslash E$ майже напевно в $K(f, \mathcal{Z}, \mathcal{N})$ виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega) \leq \mu_f(r) \ln^{(2\rho-1)/4} \mu_f(r) \ln_2^{3/2+\delta} \mu_f(r). \tag{1.41}$$

Наведено приклад, який вказує на необхідність скінченності супремуму дисперсій послідовності випадкових величин Z. А саме, існує $Z \notin \Xi$ така, що $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)$ $\mathbf{E}Z_n = 0$, $\sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty$ і нерівність (1.41) не виконується. Це випливає з наступного твердження.

Теорема 2.3. *Для будь-якого $\alpha > 0$ існують послідовність дійсних незалежних випадкових величин, яка задовольняє умови*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n = 0,\ \sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty,$$

та ціла функція $f(z)$ і стала $C > 0$ така, що майже напевно в $K(f, \mathcal{Z}, \mathcal{N})$ маємо

$$M_f(r,\omega) = \max\{|f(z,\omega)|\colon |z| = r\} \geq C\mu_f(r) \ln^{1/4+\alpha} \mu_f(r),\ r > r_0(\omega).$$

Субгаусові випадкові величини і нерівність Вімана для аналітичних функцій.

Розглянемо клас випадкових функцій

$$K(f,\mathcal{Z})=\left\{f(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nZ_n(\omega)z^n\colon \omega\in[0;1]\right\},$$

де $Z=(Z_n)$ — послідовність дійсних центрованих незалежних субгаусових випадкових величин ($Z\in\Xi$), для яких виконується умова

$$(\exists\beta>0)(\exists n_2\in\mathbb{N})\colon\ \inf\{\mathbf{E}|Z_n|^{-\beta}\colon\ n\geq n_2\}<+\infty.$$

Клас таких випадкових величин позначимо через Ξ_0.

Доведено наявність ефекту Леві для аналітичних функцій у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою.

Теорема 2.4. *Нехай $Z\in\Xi_0, f\in\mathcal{E}_R, h\in\mathcal{H}_R, \delta>0$. Тоді існує множина $E(\delta)$ скінченної h-логарифмічної міри така, що для всіх $r\in(r_0(\omega),R)\backslash E$ майже напевно в $K(f,\mathcal{Z})$ виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega)\leq\sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln^3h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+\delta}.$$

Побудовано приклади, які вказують на необхідність скінченності супремуму дисперсій послідовності випадкових величин Z.

Теорема 2.5. *Для будь-якого $\alpha>0$ існують послідовність дійсних незалежних випадкових величин, що задовольняє умови*

$$(\forall n\in\mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n=0,\ \sup_n\mathbf{D}Z_n=+\infty,$$

ціла функція $f\in\mathcal{E}_{+\infty}$ та $h\in\mathcal{H}_{+\infty}$ такі, що майже напевно в $K(f,\mathcal{Z})$ виконується нерівність

$$M_f(r,\omega)\geq\sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln^3h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+\alpha},\ r\in(r_0(\omega);+\infty).$$

Теорема 2.6. *Для будь-якого $\alpha>0$ існують послідовність дійсних незалежних випадкових величин, що задовольняє умови*

$$(\forall n\in\mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n=0,\ \sup_n\mathbf{D}Z_n=+\infty,$$

аналітична функція $f\in\mathcal{E}_1$ та $h\in\mathcal{H}_1$ такі, що майже напевно в $K(f,\mathcal{Z})$ маємо

$$M_f(r,\omega)\geq\sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^\alpha\mu_f(r)(\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4},\ r\in(r_0(\omega);1).$$

1.2.2. Ефект Леві та нерівність Вімана для аналітичних функцій у кратно-кругових областях Рейнхарда Доведено також аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій $f\in\mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, які можна представити рядом

$$f(z)=f(z_1,\ldots,z_p)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}a_nz^n, \tag{1.42}$$

областю збіжності якого є довільна повна кратно-кругова область Рейнхарда $\mathbb{G}$. Через $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ ми позначаємо підклас функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ такий, що $\frac{\partial}{\partial z_j} f(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0$ у $\mathbb{G}$ для будь-якого $j \in \{1, \ldots, p\}$. Через $\mathcal{E}_R := \mathcal{A}_0^1(\mathbb{D}_R)$ $(0 < R \leq +\infty)$ позначимо клас аналітичних функцій від однієї комплексної змінної у крузі $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$. Зокрема, $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{+\infty} = \mathcal{E}^1$ — це клас цілих функцій від однієї комплексної змінної.

Для функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ вигляду (1.42) з областю збіжності $\mathbb{G}$ та

$$r = (r_1, \ldots, r_p) \in G :=$$
$$:= \{r = (r_1, \ldots, r_p) \colon r_j = |z_j|, z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G},\ j \in \{1, \ldots, p\}\}$$

позначимо

$$\Delta_{r_0} = \{t \in G \colon t_j \geq r_j^0,\ j \in \{1, \ldots, p\}\}, \quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r_1^{n_1} \ldots r_p^{n_p} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\},$$
$$M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}, \quad \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

З одного боку, добре відомо, що кожна аналітична функція f у повній області Рейнхарда $\mathbb{G}$ з центром $z = 0$ може бути представленою в $\mathbb{G}$ рядом вигляду (1.42). З другого боку, область збіжності такого ряду вигляду (1.42) є логарифмічно-опукла повна область Рейнхарда з центром $z = 0$.

Область $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$ є *повною областю Рейнгарда*, якщо:

а) $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall R = (R_1, \ldots, R_p) \in [0; 1]^p) \colon Rz = (R_1 z_1, \ldots, R_p z_p) \in \mathbb{G}$ (*повна область*);

б) $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p) \colon (z_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbb{G}$ (*кратно-кругова область*).

Область Рейнхарда $\mathbb{G}$ називається *логарифмічно-опуклою*, якщо образ множини $G^* = \{z \in \mathbb{G} \colon z_1 \cdot \ldots \cdot z_p \neq 0\}$ відображенням

$$\mathrm{Ln} \colon z \to \mathrm{Ln}(z) = (\ln |z_1|, \ldots, \ln |z_p|)$$

є опуклою в $\mathbb{R}^p$.

Нехай $\mathcal{H}^p$ — клас функцій $h \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ таких, що h є неспадною по кожній змінній та

$$\int_{G \cap \Delta_\varepsilon} \cdots \int h(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} = +\infty$$

для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ такого, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $\mathbb{R}_+^p$.

Для $h \in \mathcal{H}^p$ вважатимемо, що $E \subset G$ є множиною *скінченної логарифмічної h-міри на G*, якщо існує $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $G \subset \mathbb{R}_+^p$ і

$$\nu_h(E \cap \Delta_\varepsilon) := \int_{E \cap \Delta_\varepsilon} \cdots \int h(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо $\mathcal{S}_h$.

Теорема 3.1. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$. Тоді для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ та $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq$$

$$\leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{j=1}^{p}\left(\prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{2}+\delta}. \qquad (1.43)$$

Зауважимо, якщо вибрати $p = 1$ і $\mathbb{G} = \mathbb{D}_R$ у теоремі 3.1, то ми отримаємо нерівність (1.39).

Теорема 3.2. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $\mathbb{G}$ є обмеженою. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}.$$

У тому випадку, коли

$$\mathbb{G} = \mathbb{B}_p(1) := \left\{z \in \mathbb{C}^p \colon |z| := \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2} < 1\right\}$$

можна вибрати $h(r) = (1 - |r|)^{-p}$, $|r| = (r_1^2 + \ldots + r_p^2)^{1/2}$.

Позначимо $|\mathbb{B}_p(1)| := \left\{r \in \mathbb{R}^p_+ \colon |r| < 1\right\}$.

Теорема 3.3. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{B}_p(1))$, $h(r) = (1 - |r|)^{-p}$. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує така множина $E \in \mathcal{S}_h$, що для всіх $r \in (|\mathbb{B}_p(1)| \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \frac{\mu_f(r)}{(1-|r|)^{\frac{1}{2}(p^2+p)+\delta}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-|r|}.$$

Якщо додатково припустити, що

$$h(r) = \prod_{j=1}^{p} h_j(r_j), \qquad (1.44)$$

то отримаємо таке твердження.

Теорема 3.4. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$ задовольняє умову (1.44). Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує така множина $E \in \mathcal{S}_h$, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)(h(r))^{1+\delta} \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{j=1}^{p}\left(\prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{2}+\delta}.$$

Перейдемо тепер до результатів для випадкових аналітичних функцій, областю збіжності яких може бути довільна повна область Рейнхарда.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір Штейнгуаза. Нехай $X = (X_n(t))$ — послідовність випадкових величин заданих на цьому просторі. Через $\mathcal{K}(f, X)$ позначимо клас випадкових функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n. \qquad (1.45)$$

Під “майже напевно” будемо розуміти, що деяка властивість виконується майже скрізь за мірою Лебега P. Будемо говорити, що деякі співвідношення виконується майже напевно у класі $\mathcal{K}(f, X)$, якщо воно виконується для кожної цілої функції $f(z,t)$ вигляду (1.45) майже напевно за t. Для таких функцій і $t \in [0;1]$ також позначимо

$$M_f(r,t) = \max\{|f(z,t)|\colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}.$$

Послідовність випадкових величин $X = (X_n(t)), n \in \mathbb{Z}_+^p$ є мультиплікативною системою (МС), якщо

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall (n_j), n_j \in \mathbb{Z}_+^p, n_j \neq n_s (s \neq j))\colon\ \mathbf{E}(X_{n_1} X_{n_2} \cdots X_{n_k}) = 0,$$

де $\mathbf{E}\xi$ – математичне сподівання випадкової величини ξ.

Нехай комплекснозначна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ утворює мультиплікативну систему, якщо обидві $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС.

Доведено таку теорему.

Теорема 3.5. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н., $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.*
a) Для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ та $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leq$$

$$\leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big) \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{4}+\delta}. \qquad (1.46)$$

b) Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ та $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big)$$

виконується м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$.

Зауважимо, що нерівність (1.46) можна записати у наступному вигляді

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big) \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{p-1}{4}+\delta}.$$

У випадку $\mathbb{G} = \mathbb{C}^p$ з нерівності (1.43) при $h(r_1, \ldots, r_p) \equiv 10$ випливає, що м.н.

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{p}{2}+\delta} \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{p-1}{2}+\delta} \qquad (1.47)$$

для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+^p$ зовні деякої множини E такої, що

$$\int \cdots \int\limits_{E \cap \Delta_\varepsilon} \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Наступне твердження є наслідком з теореми 3.5 і дає для заданої функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$ м.н. істотно сильніший опис виняткової множини у нерівності (1.47).

Наслідок 3.1. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н., $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$. Для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує множина $E = E(\delta, f, t) \in \mathcal{S}_h$ з $h(r) = (\ln \mu_f(r))^{p/(p+1)}$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність* (1.43).

У випадку $p = 1$ з теореми 3.5 маємо такий наслідок.

Наслідок 3.2. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н., $h \in \mathcal{H}^1$, $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}_R), 0 < R \leq +\infty$. Для кожного $\delta > 0$ існують множина $E = E(\delta, f, t) \in \mathcal{S}_h$ і стала $C > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0; R) \setminus E$ м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$ маємо*

$$M_f(r,t) \leq C\mu_f(r)\sqrt{h(r)} \ln^{\frac{5}{4}+\delta} h(r) \ln^{\frac{1}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big).$$

Розглянемо клас $\mathcal{K}(f, \theta)$ аналітичних функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n$$

з $X = \theta = (e^{2\pi i\theta_n t})$, $t \in \mathbb{R}$. Тут (θ_n) — послідовність натуральних чисел така, що її впорядкування (θ_k^*) за зростанням $\{\theta_n \colon n \in \mathbb{Z}^p_+\} = \{\theta_k^* \colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \theta_{k+1}^* > \theta_k^*$, задовольняє умову

$$\theta_{k+1}^*/\theta_k^* \geq q > 1, k > 0. \tag{1.48}$$

Як ми вже відзначали вище, у випадку $q \geq 2$ система $X = \theta = (e^{2\pi i\theta_n t})$ є МС, а за умови $q > 1$ послідовність випадкових величин $(\cos \theta_n t)_{n\in\mathbb{Z}^p_+}$ може не бути МС. Тому природно виникає питання: *чи виконується ефект Леві для класу $\mathcal{K}(f, \theta)$ з $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ і довільною послідовністю (θ_n), впорядкування якої за зростанням (θ_k^*) є послідовністю Адамара?*

Відповідь на це питання знаходимо у такій теоремі.

Теорема 3.6. *Нехай $\theta = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}^p_+}$ — послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову* (1.48), *$f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.*
a) Тоді майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ і для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leq$$

$$\leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big) \prod_{j=1}^{p} \Bigg(\prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{1}{4}+\delta}. \tag{1.49}$$

b) Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big).$$

Зауваження 1.3 (див. [117]). Точність нерівностей (1.46) і (1.49) доведено у випадках:

1) $\mathbb{C}^p$ з $h(r) \equiv 10$;
2) $\mathbb{D}^p$ з
$$h(r) = \prod_{j=1}^{p} \frac{r_j}{1 - r_j};$$
3) $\mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}$ з
$$h(r) = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{r_j}{1 - r_j},$$
де $p, \ell \in \mathbb{N},\ p \geq \ell,\ p \geq 2$.

Ефект Леві для цілих функцій багатьох змінних.

Розглянемо тепер цілі функції від p комплексних змінних вигляду
$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1.50}$$
де $z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, $p \in \mathbb{N}$, $n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j$. Для $r = (r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}_+^p$ позначимо
$$r^\wedge = \min_{1 \leq i \leq p} r_i.$$

Через Λ^p позначимо клас цілих функцій вигляду (1.50) таких, що $\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}^p$ для кожного $j \in \{1, \dots, p\}$. Будемо казати, що підмножина E з $\mathbb{R}_+^p$ є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри ([75]), якщо E є вимірною за Лебегом в $\mathbb{R}_+^p$ та існує $R \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що $E \cap \Delta_R$ є множиною скінченної логарифмічної міри, тобто
$$\int\limits_{E \cap \Delta_R} \cdots \int \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Використовуючи методи з [75], ми можемо довести наступний точніший аналог нерівності Вімана.

Теорема 3.8. *Нехай $f \in \mathcal{E}^p$ і $\delta > 0$. Існують $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E \subset \Delta_R$ асимптотично скінченної логарифмічної міри такі, що нерівність*
$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r) \right)^{1/2} \cdot \ln^{5/2+\delta} \left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \right) \tag{1.51}$$
виконується для всіх $r \in \Delta_R \setminus E$.

Зауваження 1.4. Існує множина E асимптотично нескінченної логарифмічної міри така, що для цілої функції

$$g(z) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} z_i\right\},$$

кожного $\varepsilon > 0$ і $r \in E$ маємо

$$M_g(r) \geq \mu_g(r)\left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_g(r)\right)^{1/2-\varepsilon}.$$

Тому показник $1/2$ у нерівності (1.51) не можна замінити числом, меншим за $1/2$. У зв'язку з цим природно виникає таке запитання: *як можна описати "кількість" тих цілих функцій, для яких нерівність* (1.51) *можна покращити?*

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплекснозначна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ задана на ймовірнісному просторі Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ така, що обидві $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС.

Для цілої функції вигляду (1.50) через $\mathcal{K}_1(f, X)$ позначимо клас випадкових цілих функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}. \tag{1.52}$$

Уточнено нерівність типу Вімана з [75] для випадкових цілих функцій багатьох комплексних змінних. А саме, доведено таку теорему.

Теорема 3.9. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС, рівномірно обмежена числом 1, $\delta > 0$, $f \in \mathcal{E}^p$.*

a) *Тоді майже напевно в $\mathcal{K}_1(f, Z)$ існують $R \in \mathbb{R}^p$ та множина $E^* \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри такі, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E^*$ маємо*

$$M_f(r,t) = \max_{|z|=r} |f(z,t)| \leq \mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r)\right)^{1/4+\delta}.$$

b) *Якщо для деякого $\alpha \in \mathbb{R}_+^p$*

$$\mathfrak{M}_f(r) \geq \exp(r^\alpha) = \exp(r_1^{\alpha_1} \dots r_p^{\alpha_p}) \text{ при } r^\wedge \to +\infty$$

або більш загально, для кожного $\beta > 0$ виконується нерівність

$$\int_{\Delta_R}\cdots\int \frac{1}{\ln^\beta \mathfrak{M}_f(r)} \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty, \text{ при } R^\wedge \to +\infty,$$

то майже напевно в $\mathcal{K}_1(f, Z)$ існує $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E^* \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r) \ln^{p/4+\delta} \mu_f(r). \tag{1.53}$$

Також доведено, що показник степеня $p/4+\delta$ в нерівності (1.53) не може бути замінено числом, меншим за $p/4$. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.10. *Для*

$$f(z) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{p} z_i\right\}$$

майже напевно у $\mathcal{K}_1(f,H)$ *для* $r \in E$ *виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \geq \frac{1}{4^p p}\mu_f(r) \ln^{p/4} \mu_f(r),$$

де E *— множина асимптотично нескінченної логарифмічної міри та* $H = \{e^{2\pi i\omega_n}\}$, $\{\omega_n\}$ *є послідовністю незалежних випадкових величин рівномірно розподілених на* $[0;1]$.

Нерівність типу Вімана для функцій аналітичних у полікрузі.

Перейдемо тепер до аналітичних функцій, які можна подати у вигляді

$$f(z) = f(z_1,\dots,z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n$$

з областю збіжності $\mathbb{D}^p = \{z \in \mathbb{C}^p \colon |z_j| < 1, j \in \{1,\dots,p\}\}$, де

$$z^n = z_1^{n_1}\dots z_p^{n_p},\ p \in \mathbb{Z}_+,\ n = (n_1,\dots,n_p) \in \mathbb{Z}_+^p,\ \|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j.$$

Через $\mathcal{A}^p$ позначимо клас таких аналітичних функцій.

Будемо казати, що $E \in [0;1)^p$ є *множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0;1)^p$, якщо існує $r_0 \in [0;1)^p$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}) := \int_{E\cap\triangle_{r_0}}\cdots\int \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1-r_i} < +\infty,$$

тобто $E \cap \triangle_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0;1)^p$.

Через Υ_1 позначимо сім'ю множин асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0;1)^p$.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплексна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ така, що $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС й $\mathcal{K}_2(f,Z)$ — клас випадкових аналітичних функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z_1^{n_1}\dots z_p^{n_p}.$$

Для таких функції доведено наступне твердження.

Теорема 3.14. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$, Z — МС, рівномірно обмежена числом 1, $\delta > 0$. Тоді майже напевно в $\mathcal{K}_2(f, Z)$ існує множина $E = E(f,t,\delta), E \in \Upsilon_1$, така, що для всіх $r \in [0;1)^p \backslash E$ виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r) \left(\prod_{j=1}^p \frac{1}{\sqrt{1-r_j}} \cdot \ln^{p/4} \left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{1-r_j} \right\} \right)^{1+\delta}.$$

Доведено, що показник $1+\delta$ в попередній нерівності не можна замінити числом, меншим за 1. Це випливає з такого твердження випливає.

Теорема 3.15. *Нехай Z — послідовність випадкових величин така, що $|Z_n| \ge 1$ для майже всіх $t \in [0;1]$. Тоді існують аналітична функція $f \in \mathcal{A}^p$, стала $C > 0$ і множина $E = E(f,t,\delta) \subset [0;1)^p$, $E \notin \Upsilon_1$, такі, що майже напевно в $\mathcal{K}_2(f, Z)$ для всіх $r \in E$ маємо*

$$M_f(r,t) \ge C\mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{\sqrt{1-r_j}} \cdot \ln^{p/4} \left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^p \frac{1}{1-r_j} \right\}.$$

Аналоги нерівності типу Вімана для кратних степеневих рядів у необмеженій циліндричній області.

Нехай

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1.54}$$

де

$$z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p},\ p \in \mathbb{N},\ n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p,\ \|n\| = \sum_{j=1}^p n_j.$$

Через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{T})$, $p, l \in \mathbb{N}$, $l < p$, позначимо клас аналітичних функцій вигляду (1.54) з областю збіжності

$$\mathbb{T} = \{z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p \colon |z_k| < 1, z_j \in \mathbb{C}, k \in \{1, \dots, l\}, j \in \{l+1, \dots, p\}\} = \\ = \mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l},$$

і через $\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ позначимо підклас функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{T})$ таких, що

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f(z_1, \dots, z_p) \not\equiv 0 \ (\forall z \in \mathbb{T} \ \text{ та } \ \forall j \in \{l+1, \dots, p\})$$

і існує $r_0 \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що для кожного $k \in \{1, \dots, l\}$ виконується умова

$$r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_k > 1 \ \big(\forall r \in (r_1^0; 1)^l \times (r_2^0; +\infty)^{p-l}\big).$$

Нехай

$$T{:=}[0;1)^l \times [0;+\infty)^{p-l}, \ \ I = \{1, \dots, l\}, \ J = \{l+1, \dots, p\}.$$

Будемо казати, що $E \subset T$ є множиною *асимптотично скінченної логарифмічної міри на* T, якщо існує $r_0 \in T$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}) := \int_{E\cap\triangle_{r_0}} \cdots \int \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \prod_{j\in J} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо через Υ.

Теорема 3.16. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(\delta, f) \subset T$, $E \in \Upsilon$ така, що для всіх $r \in T \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta}} \ln^{p/2+\delta}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^{p+\delta}. \quad (1.55)$$

Зауважимо, що показник $1+\delta$ при $\prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}$ у нерівності (1.55) не можна замінити на менше число ніж 1.

Теорема 3.17. *Для довільного $\varepsilon \in (0;1)$ існує функція $g \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ така, що*

$$E = \left\{ r \in T \colon M_f(r) > \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i)^{\varepsilon}} \ln^{p/2}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \prod_{j\in J} \left(\ln r_j\right)^p \right\}$$

має асимптотично нескінченну логарифмічну міру.

Також жоден з показників $1+\delta$ і $p/2+\delta$ у нерівності теореми 3.16 не можна замінити одночасно на числа менші за 1 та $p/2$, відповідно. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.18. *Існують функція $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ і стала $C > 0$ такі, що*

$$E = \left\{ r \in T \colon M_f(r) > C\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \right\}$$

має асимптотично нескінченну логарифмічну міру.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — послідовність комплексних випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ задана на ймовірнісному просторі Штейнгауза $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, така, що як $X = X_n(t)$, так і $Y = Y_n(t)$ утворюють дійсну МС, рівномірно обмежену числом 1.

Для аналітичної функції f вигляду (1.54) через $\mathcal{K}_3(f, Z)$ позначимо клас випадкових аналітичних функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z^n. \quad (1.56)$$

Розглянемо клас випадкових аналітичних функцій $\mathcal{K}_3(f, Z)$ вигляду (1.56) для аналітичної функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ вигляду (1.54) і МС $Z = (Z_n(t))$. Для $r = (r_1, \ldots, r_p)$ і функції $f(z,t)$ позначимо

$$M_f(r,t) := \max\{|f(z,t)| \colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}.$$

Для цього класу доведено таке твердження.

Теорема 3.19. *Нехай* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$, Z — *МС, рівномірно обмежена числом 1,* $\delta > 0$. *Тоді майже напевно по* t *існує множина* $E = E(f, t, \delta), E \subset \Upsilon$ *така, що для всіх* $r \in T \setminus E$ *маємо*

$$M_f(r,t) \le \ \le \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i)^{1/2+\delta}} \ln^{p/4+\delta}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^{p/2+\delta}.$$

Розглянемо клас $\mathcal{K}_3(f,\theta)$ аналітичних функцій

$$f(z,t) = f(z_1,\ldots,z_p,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{2\pi i\theta_n t} z^n. \tag{1.57}$$

Тут $\theta = (\theta_n)$ — послідовність цілих натуральних чисел, така що її впорядкування за зростанням (θ^*_k) $\{\theta_n \colon n \in \mathbb{Z}^p_+\} = \{\theta^*_k \colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \theta^*_{k+1} > \theta^*_k$, задовольняє умову ($\theta$ — *послідовність Адамара*)

$$\theta^*_{k+1}/\theta^*_k \ge q > 1, k > 0, \tag{1.58}$$

де $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$. Наступне **запитання** виникає природно: *чи буде ефект Леві для класу* $\mathcal{K}_3(f,\theta)$ *з* $f \in \mathcal{A}^p$ *і послідовністю Адамара* θ*?*

Позитивна відповідь на це питання дана в такому твердженні.

Теорема 3.20. *Нехай* $\delta > 0, f \in \mathcal{K}_3(f,\theta)$ — *аналітична функція вигляду (1.57) і послідовності натуральних чисел* $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}^p_+}$ *задовольняє умову (1.58). Тоді майже напевно по* $t \in \mathbb{R}$ *існує* $E(\delta, t) \in \Upsilon$ *така, що для всіх* $r \in T \setminus E$ *маємо*

$$M_f(r,t) \le$$
$$\le \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i)^{1/2+\delta}} \ln^{p/4+\delta}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^{p/2+\delta}. \tag{1.59}$$

Доведено точність теорем 3.19 та 3.20. А саме, що показники $p/4+\delta$ і $1/2+\delta$ в нерівностях (1.57) та (1.59) не можна замінити одночасно числами, меншими за $p/4$ і $1/2$, відповідно. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.21. *Нехай* $Z = (Z_n(t))$ *така послідовність випадкових величин, що* $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\colon |Z_n(t)| \ge 1$ *м.н.* $t \in [0;1]$. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існують аналітична функція* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$, *стала* $C > 0$ *і* $r_0 \in T$ *такі, що м.н. по* t *для всіх* $r \in \Delta_{r_0}$ *виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \ge$$
$$\ge \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{\sqrt{1-r_i}} \ln^{p/4}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^{p/2} (\ln\ln \mu_f(r))^{-p(p-l)/2-\varepsilon}.$$

1.2.3. Нерівність Бітляна–Гольдберга для лакунарних рядів за однорідними поліномами та нерівність Вімана для кратних рядів Діріхле Нехай $\|n\| = n_1 + \ldots + n_p$ для $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ та $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$. Для $\mathcal{E}^p(\lambda)$ позначимо клас цілих функцій $f\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, (тобто, цілих функцій від p комплексних змінних), які можна подати у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(z), \quad z \in \mathbb{C}^p. \tag{1.60}$$

Тут

$$P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C},\ P_k(z) = \sum_{\|n\|=\lambda_k} a_n z^n$$

— однорідні поліноми степеня $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$, і $0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ $(1 \le k \uparrow +\infty)$, $\lambda = (\lambda_k)$. У випадку $\lambda_k \equiv k$ $(k \ge 0)$ ми отримаємо клас усіх цілих функцій від p комплексних змінних і позначимо через $\mathcal{E}^p$; через $\mathcal{E}^1$ та $\mathcal{E}^1(\lambda)$ класи цілих функцій від однієї змінної і цілих функцій представлених лакунарним степеневим рядом вигляду

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{\lambda_k}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.61}$$

відповідно.

Згідно з [46] розглянемо *вичерпання простору* $\mathbb{C}^p$ системою $(\mathbf{G}_r)_{r\ge 0}$ обмежених повних кратно-кругових областей з центром у точці $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^p$. Дійсно, припустимо, що ця система задовольняє умови:

i) $\bigcup\limits_{r\ge 0} \mathbf{G}_r = \mathbb{C}^p$;

ii) $(\forall r_1 < r_2)\colon \mathbf{G}_{r_1} \subset \mathbf{G}_{r_2}$;

iii) $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbf{G}_1 \iff (\forall\ r > 0)\colon (rz_1, \ldots, rz_p) \in \mathbf{G}_r$;

iv) $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbf{G}_r \Longrightarrow (\forall\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p)\colon (z_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbf{G}_r$.

Через $\mathbb{G} = \{\mathbf{G} = (\mathbf{G}_r)_{r\ge 0}\colon \text{i)—iv)}\}$ позначимо клас систем таких областей.

Для $r > 0$ і цілої функції $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ позначимо через

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$$

— максимум модуля і через $\mu_f(r) = \max\{|a_k| r^{\lambda_k}\colon k \ge 0\}$ — максимальний член степеневого ряду (1.61). Для $r > 0$ і цілої функції $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$ вигляду (1.60) позначимо

$$M(r, f) = \max\{|f(z)|\colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\}, \quad m_k(r, f) = \max\{|P_k(z)|\colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\} \quad (k \ge 0).$$

Згідно з [46] визначимо тепер *діагональний максимальний член ряду* (1.60)

$$m(r, f) \overset{def}{=} \max\{m_k(r, f)\colon k \ge 0\} = \max\{r^{\lambda_k} m_k(1, f)\colon k \ge 0\}.$$

Зауважимо, що $m(r,f) \equiv \mu_f(r)$ у випадку коли $p=1$.

Нехай $n(t) = \sum_{\lambda_k \le t} 1$ — *лічильна функція* послідовності $\lambda = (\lambda_k)$.

Ми доведемо аналоги цитованих результатів ([27]) для класу $\mathcal{E}^p(\lambda)$. Отримані результати, зокрема, містять твердження теореми 1.17 з [46], а також доведено їх точність.

Нехай $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty.$$

Теорема 4.2. *Якщо послідовність $\lambda = (\lambda_k)$ задовольняє умову*

$$(\exists p_1 \in (0;+\infty))(\exists t_0 > 0)(\forall t \ge t_0)\colon \quad n(t + \sqrt{\psi(t)}) - n(t - \sqrt{\psi(t)}) \le t^{p_1}$$

для деякої функції $\psi \in \mathcal{L}$, тоді для кожної цілої функції $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$, $p \ge 2$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують стала $C = C(\varepsilon, f) > 0$ та множина $E = E(\varepsilon, f) \subset [1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що

$$M(r,f) \le Cm(r,f)(\ln m(r,f))^{p_1}(\ln\ln m(r,f))^{p_1+\varepsilon}$$

для всіх $r \in [1,+\infty) \setminus E$.

Теорема 4.3. *Нехай $\psi \in \mathcal{L}$ — зростаюча на $[0;+\infty)$ функція така, що $\psi(t) = O(t \ln t \ln^2 \ln t)$ $(t \to +\infty)$, і для послідовності $\lambda = (\lambda_k)$ виконується умова*

$$(\exists p_1 > 0)(\exists C_1 > 0)(\exists t_0 > 0)(\forall t \ge t_0)\colon\ n(t + \sqrt{\psi(t)}) - n(t - \sqrt{\psi(t)}] \ge C_1 t^{p_1}.$$

Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, p_1)$ існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$ така, що

$$\frac{M(r,f)}{m(r,f)\ln^{p_1} m(r,f) \ln^{p_1-\varepsilon} \ln m(r,f)} \to +\infty \quad (r \to +\infty).$$

Розглянемо $\mathcal{I}(\nu)$ — клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ визначається інтегралом вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(u) e^{xu} \nu(du),$$

де ν є зліченно адитивною мірою на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ борелівських множин на $\mathbb{R}_+$ (борелівська міра) така, що $\nu(\{x\colon 0 \le x \le b\}) < +\infty$ для кожного $b > 0$, $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ додатна вимірна функція. Позначимо через $\operatorname{supp} \nu$ носій міри ν, тобто замкнена множина $E =\colon \operatorname{supp} \nu$ така, що

$$\nu(\mathbb{R} \setminus E) = 0,\ \nu(\{u \in \mathbb{R}\colon |u - u_0| < r\}) > 0$$

для кожного $u_0 \in E$ і $r > 0$. Для $x \in \mathbb{R}$ й $F \in \mathcal{I}(\nu)$ позначимо

$$\mu_*(x) = \sup\{a(u)e^{xu}\colon u \in \operatorname{supp} \nu\}.$$

Отримано твердження, що містить нову оцінку виняткової множини для функцій з класу $\mathcal{I}(\nu)$.

Теорема 4.4. *Нехай* $F \in \mathcal{I}(\nu)$ *та* ν *— міра Бореля така, що* $(\exists t_0 \geq 0)(\exists c_2, c_3 > 0)(\forall T \geq t_0)(\forall t \in [t_0, T])$:

$$\nu(T-t, T+t] \leq c_2 t + c_3.$$

Якщо h *— додатна функція така, що*

$$\int\limits_0^{+\infty} h(x)dx = +\infty, \quad \ln_2^+ h(x) = o(\ln_2 F(x)) \ (x \to +\infty),$$

тоді для кожного $\varepsilon > 0$ *існує множина* $E_3(\varepsilon, F, h) \equiv E_3$ *така, що* h*-meas* $E_3 := \int_{E_3} h(x)dx < +\infty$ *та виконується нерівність*

$$F(x) \leq h(x)\mu_*(x)(\ln \mu_*(x))^{1/2+\varepsilon}$$

для кожного $x \in [0; +\infty) \setminus E_3$.

Тепер ми розглянемо загальний випадок цілих функцій з класу $\mathcal{E}^p := \mathcal{E}^p(\lambda)$ з $\lambda_k \equiv k \in \mathbb{Z}_+$.

З теореми 4.4 випливає такий наслідок.

Теорема 4.5. *Нехай* $f \in \mathcal{E}^p$. *Якщо додатна локально інтегровна на* $[1; +\infty)$ *функція* h_0 *така, що*

$$\int\limits_1^{+\infty} h_0(r) d\ln r = +\infty, \quad \ln^+ \ln h_0(r) = o(\ln\ln m(r, f)) \ (r \to +\infty),$$

тоді для кожного $\varepsilon > 0$ *існує множина* $E_4(\varepsilon, f, h) \equiv E_4$ *така, що*

$$h_0\text{-}\mathit{log}\text{-}\mathit{meas}\ E_4 := \int\limits_{E_4} h_0(r) d\ln r < +\infty$$

і виконується нерівність

$$M(r, f) \leq h_0(r) m(r, f)(\ln m(r, f))^{1/2+\varepsilon}$$

для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E_4$.

Якщо у теоремі 4.5 виберемо $h_0(r) = \ln^\varepsilon m(r, f)$, тоді негайно отримаємо наступне твердження.

Наслідок 1.1. *Якщо* $f \in \mathcal{E}^p$, *тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує множина* $E_5(\varepsilon, f, h) \equiv E_5$ *така, що*

$$\int\limits_{E_5} \ln^\varepsilon m(r, f) d\ln r < +\infty$$

і для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E_5$

$$M(r, f) \leq m(r, f)(\ln m(r, f))^{1/2+\varepsilon}.$$

Нерівність типу Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками.

Для $z=(z_1,\dots,z_p)\in\mathbb{C}^p$, $w=(w_1,\dots,w_p)\in\mathbb{C}^p$ позначимо

$$(z,w)=\sum_{j=1}^{p} z_p w_p,\ \ \|n\|=\sum_{j=1}^{p} n_j,\ \operatorname{Re} z=(\operatorname{Re} z_1,\dots,\operatorname{Re} z_p).$$

Для $R=(r_1,\dots,r_p)\in\mathbb{R}^p$ позначимо $\Pi_R=\{z\in\mathbb{C}^p\colon\ \operatorname{Re} z<R\}$.

Через $\mathcal{D}$ позначимо клас абсолютно збіжних у всьому комплексному просторі $\mathbb{C}^p$ (цілий) рядів Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)} \tag{1.62}$$

з такою послідовністю показників (λ_n), що $\{\lambda_n\colon n\in\mathbb{Z}^p\}\subset\mathbb{C}^p$ та $\lambda_n\neq\lambda_m$ для всіх $n\neq m$. Через $\mathcal{D}^+$ позначимо клас цілих рядів Діріхле з послідовністю показників $\Lambda^p=(\lambda_n)$ таких, що $\lambda_n=(\lambda_{n_1}^{(1)},\dots,\lambda_{n_p}^{(p)})$, $n=(n_1,\dots,n_p)$ та $0=\lambda_0^{(j)}<\lambda_k^{(j)}\uparrow+\infty$ $(1\le k\uparrow+\infty)$, $1\le j\le p$. Для $F\in\mathcal{D}$ і $z\in\mathbb{C}^p$ позначимо

$$\mathfrak{M}(z,F):=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}|a_n|e^{\operatorname{Re}(z,\lambda_n)},\quad \mu(z,F):=\sup\{|a_n|e^{\operatorname{Re}(z,\lambda_n)}\colon n\in\mathbb{Z}_+^p\},$$

і $\mathcal{N}_*:=\bigcup_z\mathcal{N}_*(z)$, де $\mathcal{N}_*(z)$ — множина таких мультиіндексів $\nu=\nu(z,F)\in\mathbb{Z}_+^p$, що $|a_\nu|e^{\operatorname{Re}(z,\lambda_\nu)}=\mu(z,F)$ для даного z. Позначимо

$$\beta(z):=\sup\{\operatorname{Re}(z,\lambda_n)\colon n\in\mathbb{Z}_+\}\colon\mathbb{C}^p\to\mathbb{R}.$$

Нехай $\mathcal{D}_1$ — клас абсолютно збіжних для цілих рядів Діріхле в $\mathbb{C}$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}$$

з послідовністю показників (λ_n) таких, що $\lambda_n\ge0$ $(n\ge0)$ і $\sup\{\lambda_n\colon\ n\ge0\}=+\infty$.

Для функції $F\in\mathcal{D}_1$ позначимо через $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ послідовність $(-\ln|a_k|)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ впорядкована за неспаданням.

Нехай L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій на $[0;+\infty)$ і L_1 — клас функції $\Phi\in L$ таких, що

$$\varphi(2t)=O(\varphi(t))\ (t\to+\infty),$$

де φ — обернена функція до Φ.

Для вимірної за Лебегом множини (наприклад, для борелевої множини) $E\subset\mathbb{C}^p$ та $\alpha>0$ позначимо

$$V_\alpha(E):=\iint\limits_{E\cap\{z\colon\ |z|\ge1\}}\frac{dxdy}{|z|^\alpha},\quad z=x+iy\in\mathbb{C}^p.$$

Для кулі $\mathbb{D}^p_R = \{z \in \mathbb{C}^p\colon |z| \le R\}$, $R > 0$, $V_{2p}(\mathbb{D}^p_R) = C_p \ln R$, $(R \ge 1)$, $V_{2p}(\mathbb{C}^p) = +\infty$, де C_p — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^{2p}$.

Нехай $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, а $\mathcal{L}_0$ — клас таких функцій $\Phi \in \mathcal{L}$, що

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x))\ (x \to +\infty).$$

Позначимо через $\mathcal{D}_0$ клас функцій $F \in \mathcal{D}$ таких, що $\mu(z, F) = 1$ $(z \in \mathbb{D}^p_1)$, де $\mathbb{D}^p_1 = \{z \in \mathbb{C}^p\colon |z| \le 1\}$.

Для функції $F \in \mathcal{D}_0$ і заданого $z \in \mathbb{C}^p$ визначимо

$$\Phi_z(t) = \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F)\colon\ [0; +\infty) \to [0; +\infty).$$

Для функції $F \in \mathcal{D}$ визначимо такі множини

$$\gamma(F) \overset{\text{def}}{=} \Big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \lim_{t \to +\infty} \Phi_z(t) = +\infty\Big\}, \quad \gamma_+(F) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \gamma(F)\colon\ \Phi_z \in \mathcal{L}_0\}.$$

Множини $\gamma(F)$, $\gamma_+(F)$ є дійсними конусами.

Для функції $F \in \mathcal{D}$ і $z \in \gamma_F$ визначимо

$$K(z) = K_F(z) := \sup\left\{\frac{1}{\Phi_z(t)} \int\limits_0^t \frac{\Phi_z(u)}{u} du\colon\ t \ge t_0\right\},$$

де $\Phi_z(t) = \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F)$, та $t_0 = t_0(z) = \max\{t \in \mathbb{R}\colon \mu(tz, F) = 1\}$. Очевидно, що

$$\gamma_+(F) = \Big\{z \in \gamma(F)\colon\ K_F(z) < +\infty\Big\}.$$

Для $R \in (0; +\infty)$ також визначимо

$$\gamma_R = \gamma_+(F, R) := \Big\{z\colon\ K_F(z) \le R\Big\}.$$

Доведено теорему, що містить верхню оцінку загального члена ряду $F \in \mathcal{D}_0$ через його максимальний член.

Теорема 4.8. *Нехай $F \in \mathcal{D}_0$, $v(u)\colon [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ — така функція, що $v(u) > 0$ $(u \ge u_0)$ і $\int_0^{+\infty} v(u) du < +\infty$. Якщо $\ln k = o(\mu_k)$ $(k \to +\infty)$, то існує функція*

$$c_1(u) \uparrow +\infty\ (u \to +\infty), \quad \int\limits_0^{+\infty} c_1(u) v(4u) du < +\infty,$$

та множина $E \subset \gamma_+(F)\colon V_{2p}(E \cap \gamma_+(F)) \le C_p$, такі, що для кожного $R > 0$, для всіх $n \ge 0$ і $t > 0$, $tz \in \gamma_R \setminus E$ виконується нерівність

$$|a_n| e^{t \operatorname{Re}(z, \lambda_n)} \le \mu(tz, F) \exp\left\{-t \int\limits_{\mu_{k_\nu}}^{\mu_{k_n}} (\mu_{k_n} - u) \frac{c^*_z(u)}{\varphi^*_z(u)} v(4u) du\right\},$$

де $\mu_{k_n} = -\ln|a_n|$, $c_z^*(u) = e^{-2K(z)}c_1(u)$, $\nu = \nu(tz, F)$:

$$\|\nu(tz)\| = \max\{\|n\|\colon |a_n|e^{t\operatorname{Re}(z,\lambda_n)} = \mu(tz, F)\}$$

є центральним мультиіндексом ряду (1.62), а $\varphi_z^*(u)$ *є оберненою функцією до* $\Phi_z^*(t) = \ln\mu(tz, F)$.

З попередньої теореми випливає таке твердження.

Теорема 4.9. *Нехай* $F \in \mathcal{D}$. *Якщо*

$$(\exists\alpha > 0)\colon \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^\alpha dt}{t^2} < +\infty, \quad n_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu_n \le t} 1,\ t_0 > 0, \tag{1.63}$$

тоді існує множина $E \subset \gamma_+(F)$ *така, що* $V_{2p}(E \cap \gamma_+(F)) \le C_p$ *і співвідношення*

$$\mathfrak{M}(z, F) = o(\mu(z, F)\ln^{1/\alpha}\mu(z, F)) \tag{1.64}$$

виконується при $z \to \infty$ $(z \in \gamma_R \setminus E)$ *для кожного* $R > 0$.

З теореми 4.9 можна отримати такий наслідок для цілих рядів Діріхле від однієї змінної.

Теорема 4.6. *([92]) Нехай*

$$F \in \mathcal{D}_1,\ \Phi_1 \in L_1,\ \Phi_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x}\ln\mu(x, F).$$

Якщо

$$(\exists\alpha > 0)\colon \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^\alpha}{t^2} dt < +\infty, \quad n_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu_n \le t} 1, \quad t_0 > 0,$$

тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}$ *така, що*

$$\ln\text{–meas}\,(E) := \int\limits_{E\cap[1;+\infty)} d\ln r < +\infty$$

і співвідношення

$$\mathfrak{M}(x, F) = o(\mu(x, F)\ln^{1/\alpha}\mu(x, F))$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Наступне твердження показує, що оцінки (1.64) за умови (1.63) загалом не можуть бути покращені.

Теорема 4.7. *([92]) Для кожного* $\alpha > 0$ *існує функція* $F \in \mathcal{D}_1$ *така, що умова* (1.63) *і співвідношення*

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^{\alpha+\varepsilon}}{t^2} dt = +\infty$$

виконуються та

$$\big(\forall\varepsilon \in (0; 1/\alpha)\big)\colon \quad \frac{F(x)}{\mu(x, F)(\ln\mu(x, F))^{1/\alpha-\varepsilon}} \to +\infty,\ x \to +\infty.$$

1.2.4. Асимптотичні властивості ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих та аналітичних функцій Нехай $\mathcal{E}$ — клас випадкових цілих функцій вигляду

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_n z^n, \tag{1.65}$$

де $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0 \neq 0, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \quad \#\{n \in \mathbb{N}\colon a_n \neq 0\} = +\infty;$$

$\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi,\pi)$, $\big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$, тобто незалежних випадкових комплексних величин зі стандартним гаусовим розподілом у комплексній площині зі щільністю

$$p_{\xi_n}(z) = \frac{1}{\pi}e^{-|z|^2},\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для $r > 0$ і $\delta \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mathcal{N}(r) = \{n\colon \ln(|a_n|r^n) > 0\}, \quad N(r) = \#\mathcal{N}(r),$$

$$s(r) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^+(|a_n|r^n) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}(r)} \ln(|a_n|r^n),$$

$$P_0(r) = P\{\omega\colon n_f(r,\omega) = 0\}, \quad p_0(r) = \ln^- P_0(r), \quad \ln^- x := -\min\{\ln x; 0\},$$

де $n_f(r,\omega)$ — лічильна функція нулів функції $f(z,\omega)$ в $r\mathbb{D} = \{z\colon |z| < r\}$.

Нехай $P = P_1 \times P_2$ — прямий добуток ймовірнісних мір P_1 і P_2, визначених на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Тут $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ — мінімальна σ-алгебра, яка містить усі $A_1 \times A_2$ такі, що $A_1 \in \mathcal{A}_1$ та $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Нехай $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}, (\theta_n)$ — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi,\pi)$, заданих на $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, $\xi_n(\omega_2) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ заданих на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$, де $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ — два ймовірнісні простори.

Отримано оцінки зверху і знизу для $\ln^- P_0(r)$. А саме, доведено такі два твердження.

Теорема 5.1. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f \in \mathcal{E}$. Тоді існує множина $E \subset (1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що*

$$p_0(r) \leq s(r) + N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{\ln N(r)}\}$$

для всіх $r \in (1;+\infty) \setminus E$.

Теорема 5.4. *Нехай $f \in \mathcal{E}$. Тоді P-майже напевно існує $r_0(\omega) > 0$ таке, що для всіх $r \in (r_0(\omega);+\infty)$ маємо*

$$p_0(r) \geq s(r) + N(r)\ln N(r) - 4N(r).$$

З теорем 5.1 і 5.4 випливає таке твердження.

Теорема 5.5. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f \in \mathcal{E}$. Тоді існує множина $E \subset (1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри та P-майже напевно $r_0(\omega) > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0(\omega);+\infty) \setminus E$ виконується нерівність*

$$(1-\varepsilon)N(r)\ln N(r) \le p_0(r) - s(r) \le N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{\ln N(r)}\}, \qquad (1.66)$$

а саме,

$$0 \le \varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)}, \quad \varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} \le \frac{1}{2} \qquad (1.67)$$

та

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

На точність нерівностей (1.67) вказують наступні дві теореми.

Теорема 5.6. *Існують $f \in \mathcal{E}$ і множина $E \subset (1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.7. *Існують $f \in \mathcal{E}$ та множина $E \subset (1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = 0.$$

Асимптотичні властивості ймовірності відсутності нулів для випадкових аналітичних функцій.

Розглянемо тепер випадкові аналітичні функції вигляду (1.65). Тут $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0 \ne 0, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \sup\{|a_n| \colon n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Позначимо клас таких випадкових аналітичних функцій через $\mathcal{A}$.

Нехай

$$p_0(r) = \ln^- P\{\omega\colon n_f(r,\omega) = 0\}$$

для випадкових аналітичних функцій $f \in \mathcal{A}$.

Теорема 5.8. *Нехай $f \in \mathcal{A}$ та*

$$\alpha = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4.$$

Існує множина $E \subset [0;1)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0;1)\setminus E$ маємо

$$p_0(r) \le s(r) + (1+e)N(r)\ln N(r) + C_0 N(r),$$

де $C_0 = 3 + 9/|a_0|$.

Теорема 5.11. *Нехай $f \in \mathcal{A}$. Тоді P-майже напевно існує $r_0(\omega) > 0$ таке, що для всіх $r \in (r_0(\omega); 1)$ маємо*

$$p_0(r) \geq s(r) + N(r) \ln N(r) - 4N(r).$$

З теорем 5.8 та 5.11 випливає таке твердження.

Теорема 5.12. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f \in \mathcal{A}$ такі, що*

$$\alpha = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4.$$

Тоді існують множина $E \subset [0;1)$ скінченної логарифмічної міри та P-майже напевно $r_0(\omega) > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0(\omega);1) \setminus E$ виконується нерівність

$$(1-\varepsilon)N(r) \ln N(r) \leq p_0(r) - s(r) \leq (1 + e + \varepsilon)N(r) \ln N(r),$$

а саме,

$$0 \leq \varliminf_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)}, \quad \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} \leq \frac{1}{2 - \frac{1}{\alpha}} \tag{1.68}$$

та

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

Якщо послідовність (a_n) є логарифмічно ввігнутою, то умову (5.15) у теоремі 5.12 можна замінити на

$$\varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln \ln \mu_f(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4.$$

Точність нерівностей (1.68) у випадку $\alpha = +\infty$ випливає з таких двох тверджень.

Теорема 5.13. *Існують випадкова аналітична функція $f \in \mathcal{A}$: $\alpha = +\infty$ і множина $E \subset [0;1)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.14. *Існують випадкова аналітична функція $f \in \mathcal{A}$: $\alpha = +\infty$, множина $E \subset [0;1)$ нульової щільності, тобто (тут* meas *— міра Лебега на прямій)*

$$DE = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{1}{1-r} \mathrm{meas}(E \cap [r;1)) = 0,$$

такі, що

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = 0.$$

1.2.5. Асимптотичні властивості інтегралів Лапласа-Стілт'єса Нехай ν є невід'ємною мірою на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм $\operatorname{supp}\nu$ і $f(x)$ — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначимо клас функцій $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вигляду

$$F(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du).$$

Для $F\in\mathcal{I}(\nu)$ та $x\in\mathbb{R}$ визначимо

$$\mu_*(x,F)=\sup\{f(u)e^{xu}\colon u\in\operatorname{supp}\,\nu\}.$$

Нехай $\mathbb{L}$ клас невід'ємних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$ і через $\mathbb{L}^+$ підклас функцій

$$\psi\in\mathbb{L}\colon\ \psi(t)\nearrow+\infty,\ t\to+\infty.$$

Припустимо, що $\Phi\in\mathbb{L}^+$. Через $\mathcal{I}(\nu,\Phi)$ ми позначимо клас функцій $F\in\mathcal{I}(\nu)$ таких, що

$$(\exists c>0)\colon\quad \ln F(x)\le\Phi(cx)\ (x\ge x_0),$$
$$\mathcal{I}^*(\nu,\Phi):=\{F\in\mathcal{I}(\nu)\colon (\exists c>0)(\exists x_j\to+\infty)[\,\ln F(x)\le\Phi(cx)\ (x=x_j,\ j\ge1)]\}.$$

Доведено теорему про аналог співвідношення Бореля.

Теорема 6.1. *Нехай* $\Phi_0(x)=x\Phi(x)$, $\Phi\in\mathbb{L}^+$, $F\in\mathcal{I}(\nu,\Phi_0)$. *Якщо умови*

$$(\forall\eta>0)\colon\qquad \ln\nu_0(\eta\Phi(t))=o(t\Phi(t))\ (t\to+\infty)$$

та

$$(\forall\ \eta>0)\colon\quad \varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)}\frac{d\ln\nu_0(t)}{t}=0,\quad \nu_0(t):=\nu((0,t])\tag{1.69}$$

виконуються, то

$$\ln F(x)\le(1+o(1))\ln\mu_*(x,F),\quad x\to+\infty\ (x\notin E),$$

де E — *множина нульової лінійної нижньої щільності, тобто*

$$\underline{D}E=\varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\operatorname{meas}(E\cap[0,R])=0.$$

Наступна теорема вказує, що (1.69) є необхідною умовою теореми 6.1.

Теорема 6.2. *Нехай* $\Phi\in\mathbb{L}^+$. *Якщо умови*

$$(\exists\eta>0)(\exists b>0)\colon\qquad \varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)}\frac{d\ln\nu_0(t)}{t}>b,\qquad \int\limits_0^{+\infty}e^{-\eta t}d\nu_0(t)<+\infty$$

виконуються, то для кожного $h > 0$ *існує функція* $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$, $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, *така, що для всіх* $x \geq x_0$ *виконується нерівність*

$$\ln F(x) \geq (1 + h) \ln \mu_*(x, F).$$

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ — така послідовність, що

$$0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty \quad (1 \leq n \uparrow +\infty), \quad \nu(E) := \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E)$$

для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$, де

$$\delta_\lambda(E) = \begin{cases} 1, & \text{при } \lambda \in E; \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Тоді для функції $F \in \mathcal{I}(\nu)$ та $x \geq 0$ маємо цілий ряд Діріхле

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u) e^{xu} \nu(du) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n) e^{x\lambda_n}.$$

Позначимо $H(\lambda, \Phi)$ клас цілих рядів Діріхле з фіксованою послідовністю показників λ вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n},$$

таких, що

$$(\exists c > 0)\colon \ \ln \mathfrak{M}(x, F) \leq \Phi(cx) \quad (x \geq x_0), \ \mathfrak{M}(x, F) := \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{z\lambda_n}.$$

Нехай

$$M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)|\colon y \in \mathbb{R}\}, \ \mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n}\colon n \geq 0\}.$$

З теореми 6.1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 6.1. *Нехай* $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, $\Phi \in \mathbb{L}^+$, $F \in H(\lambda, \Phi_0)$. *Якщо умови*

$$(\forall \eta > 0)\colon \ \ln n(\eta\Phi(t)) = o(t\Phi(t)) \ (t \to +\infty) \tag{1.70}$$

та

$$(\forall\ \eta > 0)\colon \ \ \varliminf_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d \ln n(t)}{t} = 0, \quad n(t) := \sum_{\lambda_n \leq t} 1,$$

виконуються, то

$$\ln M(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F), \quad x \to +\infty, \ (x \notin E),$$

при де E *— множина нульової нижньої лінійної щільності, тобто* $\underline{D}E = 0$.

З теореми 6.2 маємо наступний наслідок.

Наслідок 6.2. *Нехай $\Phi \in \mathbb{L}^+$. Якщо умови*

$$(\exists\eta > 0)(\exists b > 0)\colon \qquad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln n(t)}{t} > b, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta t}dn(t) < +\infty$$

виконуються, то для кожного $h > 0$ існує функція $F \in H(\lambda, \Phi)$ така, що для всіх $x \geq x_0$ виконується нерівність

$$\ln M(x, F) \geq (1 + h)\ln\mu(x, F).$$

Про зростання інтегралів Лапласа-Стілт'єса

Нехай V — клас невід'ємних неспадних необмежених та неперервних справа на $[0; +\infty)$ функцій F.

Перетворення Лапласа–Стілт'єса дійсної функції g зазвичай задається інтегралом Лебега–Стілт'єса у вигляді $\int_0^{+\infty} e^{zx}dg(x)$. Запишемо це перетворення в іншій формі. Інтегралом Лапласа–Стілт'єса називається

$$I(\sigma) = \int\limits_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{1.71}$$

для невід'ємної на $[0; +\infty)$ функції f. Інтеграл (1.71) є прямим узагальненням звичайного інтеграла Лапласа $I(\sigma) = \int_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dx$ і ряду Діріхле

$$D(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n\sigma}$$

з невід'ємними коефіцієнтами a_n та показниками λ_n, $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty \, (n \to \infty)$, якщо ми виберемо

$$F(x) = n(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1, \quad f(\lambda_n) = a_n \geq 0$$

для всіх $n \geq 0$ (див. також [27, 131]).

Нехай

$$\mu(\sigma) = \mu(\sigma, I) = \max\{f(x)e^{x\sigma}\colon \, x \geq 0\}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

— максимум підінтегральної функції, σ_c — абсциса збіжності інтегралу (1.71) та σ_μ — абсциса існування максимуму підінтегральної функції. Власне, $\mu(\sigma, I) = \max\{f(x)e^{x\sigma}\colon x \geq 0\} < +\infty$ для $\sigma < \sigma_\mu$ і $\mu(\sigma, I) = +\infty$ для всіх $\sigma > \sigma_\mu$. Тоді

$$\sigma_\mu = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}$$

і якщо $\ln F(x) = o(x)$ або $\ln F(x) = o(\ln f(x))$ при $x \to +\infty$, то $\sigma_c \leq \sigma_\mu$. Також зауважимо, що якщо $\ln F(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$ та $\sigma_\mu = +\infty$, то ([177, с. 11]) $\sigma_c = +\infty$.

Щоб отримати нерівність $\sigma_c \geq \sigma_\mu$, ми вводимо поняття регулярного зростання f відносно F. Будемо казати, що додатна функція f *має регулярне зростання відносно* F, якщо існують $a \geq 0$, $b \geq 0$ та $h > 0$ такі, що для всіх $x \geq a$

$$\int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \geq hf(x).$$

Тоді якщо $F \in V$ і f мають регулярне зростання відносно F, то $\sigma_c \leq \sigma_\mu$. Таким чином, якщо $F \in V$ та f мають регулярну варіацію відносно F і якщо або $\ln F(x) = o(x)$, або $\ln F(x) = o(\ln f(x)))$ при $x \to +\infty$, то $\sigma_c = \sigma_\mu$.

Надалі припустимо, що $\sigma_c = \sigma_\mu = +\infty$.

Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

позначимо через $\varrho(f)$ її порядок, а $\sigma(f)$ її тип.

Нехай L — клас неперервних зростаючих функцій α таких, що $\alpha(x) \geq 0$ для $x \geq x_0$, $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $x \leq x_0$, і на $[x_0; +\infty)$ функція α зростає до $+\infty$. Будемо казати, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і

$$\alpha(x(1 + o(1))) = (1 + o(1))\alpha(x), \quad x \to +\infty.$$

Позначимо $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$, якщо $\alpha \in L$ і для будь-якого $c > 0$ виконується нерівність $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Функції з L_{si} називаються *повільно зростаючими.*

Нехай $\alpha \in L, \beta \in L$ та G — довільна функція на $[\sigma_0; +\infty)$. Значення

$$\varrho_{\alpha\beta}(G) = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\alpha(G(\sigma))}{\beta(\sigma)} \tag{1.72}$$

називається *узагальненим порядком* G. Якщо ми виберемо $G(\sigma) = \ln I(\sigma)$, то з (1.72) ми отримаємо означення узагальненого порядку $\varrho_{\alpha\beta}(I)$ інтегралу Лапласа-Стілтʼєса (1.71). Також визначимо

$$k_{\alpha\beta}(f) = \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}\right)}.$$

Спочатку зауважимо, що якщо функції $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні та для кожного $\varrho \in (0; +\infty)$

$$\frac{d\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}{d \ln x} = O(1), \ x \to +\infty, \tag{1.73}$$

тоді $\varrho_{\alpha\beta}(\ln \mu) = k_{\alpha\beta}(f)$, і якщо для кожного $\varrho \in (0; +\infty)$

$$\ln F(x) = o\left(x\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\varrho}\right)\right), \ x \to +\infty, \tag{1.74}$$

то $\varrho_{\alpha\beta}(I) \le \varrho_{\alpha\beta}(\ln\mu)$. З іншого боку, якщо f має регулярну варіацію відносно F, тоді $\varrho_{\alpha\beta}(I) \ge \varrho_{\alpha\beta}(\ln\mu)$ для кожного $\alpha \in L^0$ та $\beta \in L$.

Тоді правильна наступна теорема.

Теорема 6.5. *Нехай $F \in V$, f мають регулярну варіацію відносно F, а функції $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ задовольняють умову* (1.73). *Якщо F задовольняє умову* (1.74), *тоді $\varrho_{\alpha\beta}(I) = k_{\alpha\beta}(f)$.*

Тепер позначимо

$$\lambda_{\alpha\beta}(I) = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln I(\sigma))}{\beta(\sigma)}, \quad \lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\mu(\sigma))}{\beta(\sigma)},$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}(f) = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)}.$$

Теорема 6.6. *Нехай функції $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ задовольняють умову* (1.73), *а функція $F \in V$ — умову* (1.74). *Припустимо, що функція f має регулярну варіацію відносно F і $v(x) = -(\ln f(x))'$ є неперервною та зростаючою на $[x_0; +\infty)$. Якщо $\varrho_{\alpha\beta}(I) < +\infty$, то $\lambda_{\alpha\beta}(I) = \varkappa_{\alpha\beta}(f)$.*

Границі

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right), \quad \lambda^M_{\alpha\beta}(I) = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right) \tag{1.75}$$

називаються *модифікованим узагальненим порядком і модифікованим нижнім узагальненим порядком I*, відповідно. Якщо в (1.75) вибрати $\ln\mu(\sigma)$ замість $I(\sigma)$, то ми отримаємо означення $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)$ і $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)$.

Теорема 6.7. *Нехай $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\mathrm{si}}$, функція $F \in V$ задовольняє умову* (1.74), *а f має регулярну варіацію відносно F. Тоді $\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = k_{\alpha\beta}(f)$.*

Теорема 6.8. *Нехай $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\mathrm{si}}$ і функція $F \in V$ задовольняє умову* (1.74). *Припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і $v(x) = -(\ln f(x))' \uparrow +\infty$ при $x_0 \le x \to +\infty$. Тоді $\lambda^M_{\alpha\beta}(I) = \varkappa_{\alpha\beta}(f)$.*

Нехай $LS(F)$ — клас інтегралів Лапласа-Стілт'єса, для якого $\sigma_c = \sigma_\mu = +\infty$. Припустимо, що $I_j \in LS(F)$, $1 \le j \le m$ і

$$I_j(\sigma) = \int_0^\infty f_j(x) e^{x\sigma} dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{1.76}$$

Наступна теорема є **аналогом теореми 1.24**.

Теорема 6.9. *Нехай функції $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ задовольняють умову* (1.73), *а функція $F \in V$ — умову* (1.74). *Припустимо, що всі функції f_j мають регулярну варіацію відносно F, а $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ є неперервною та зростає на*

$[x_0; +\infty)$. *Також припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і*

$$\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)^{\omega_j}, \ x\to+\infty, \tag{1.77}$$

де $\omega_j > 0$ для $1 \le j \le m$ і

$$\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1.$$

Якщо всі інтеграли (1.76) мають регулярне $\alpha\beta$-зростання (тобто $\lambda_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho_{\alpha\beta}(I_j) < +\infty$), то інтеграл (1.71) має регулярне $\alpha\beta$-зростання і

$$\varrho_{\alpha\beta}(I) = \prod_{j=1}^{m}(\varrho_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

Якщо ми виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \ge x_0$, то за означеннями $\varrho_{\alpha\beta}(I)$ і $\lambda_{\alpha\beta}(I)$ отримаємо означення R-порядку ϱ_R і нижчого R-порядку λ_R, відповідно. Вибравши ще $m = 2$ і $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$, отримаємо таке твердження.

Наслідок 6.3. *Нехай $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x\ln x)$ при $x \to +\infty$. Припустимо, що функції f_j, $j \in \{1; 2\}$, мають регулярну варіацію відносно F і $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ неперервна і зростає на $[x_0; +\infty)$. Також припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і*

$$\ln\frac{1}{f(x)} = (1+o(1))\sqrt{\ln\frac{1}{f_1(x)}\ln\frac{1}{f_2(x)}}, \ x\to+\infty.$$

Якщо інтеграли I_1 і I_2 мають регулярне R-зростання (тобто $\lambda_R(I_j) = \varrho_R(I_j) < +\infty$ для $j \in \{1; 2\}$), то інтеграл (1.71) має регулярне R-зростання та

$$\varrho_R(I) = \sqrt{\varrho_R(I_1)\varrho_R(I_1)}.$$

Використовуючи модифіковані узагальнені порядки, отримуємо наступну теорему.

Теорема 6.10. *Нехай або $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\mathrm{si}}$, і функція $F \in V$ задовольняє умову (1.74). Припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F, а $v(x) = -(\ln f(x))'$ неперервна і зростаюча на $[x_0; +\infty)$. Також припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і виконується (1.77).*

Якщо всі інтеграли (1.76) мають регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання (тобто $\lambda^M_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) < +\infty$), то інтеграл (1.71) має регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання і

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \prod_{j=1}^{m}(\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

Якщо вибрати $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = \ln x$ для $x \ge x_0$, то отримаємо таке твердження.

Наслідок 6.4. *Нехай* $F \in V$ *і* $\ln F(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$. *Припустимо, що функції* f_j, $j \in \{1;2\}$, *мають регулярну варіацію відносно* F *і* $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ *неперервна і зростає на* $[x_0;+\infty)$. *Також припустимо, що* f *має регулярну варіацію відносно* F *і*

$$\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = (1+o(1))\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right)\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right)},\ x\to+\infty. \quad (1.78)$$

Якщо інтеграли I_1 *і* I_2 *мають регулярний логарифмічний ріст (тобто* $\lambda_l(I_j) = \varrho_l(I_j) \in (1;+\infty)$ *для* $j \in \{1;2\}$*), то інтеграл* (1.71) *має регулярний логарифмічний ріст і*

$$\varrho_l(I) = \sqrt{(\varrho_l(I_1)-1)(\varrho_l(I_1)-1)}.$$

При $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = \ln x$ для $x \geq x_0$, маємо

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = T(I) := \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln\sigma},\quad \lambda^M_{\alpha\beta}(I) = t(I) := \underline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln\sigma},$$

і отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 6.5. *Нехай* $F \in V$ *і* $\ln F(x) = o(x^2)$ *при* $x \to +\infty$. *Припустимо, що функції* f_j, $j \in \{1;2\}$, *мають регулярну варіацію відносно* F *і* $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ *неперервна і зростає на* $[x_0;+\infty)$. *Також припустимо, що* f *має регулярну варіацію відносно* F *і виконується* (1.78). *Якщо* $t(I_j) = T(I_j) < +\infty$ *для* $j \in \{1;2\}$, *то для інтеграла* (1.71)

$$t(I) = T(I) = \sqrt{T(I_1)T(I_1)}.$$

Визначимо узагальнений тип $T_{\alpha\beta}(I)$ інтеграла (1.71) за формулою

$$T_{\alpha\beta}(I) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{\exp\{\alpha(\ln I(\sigma))\}}{\exp\{\varrho\beta(\sigma)\}},\ (\varrho = \varrho_{\alpha\beta}(I)).$$

Теорема 6.11. *Нехай функції* $\alpha \in L$ *і* $\beta \in L$ *неперервно диференційовні,* $x\alpha'(x) = o(1)$, $x\beta'(x) = O(1)$ *при* $x \to +\infty$ *та* (1.73) *і виконується співвідношення*

$$\frac{d\beta^{-1}(\alpha(x)+c)}{d\ln x} = O(1),\ x\to+\infty.$$

Нехай $F \in V$, f *і* f_j *мають регулярну варіацію відносно* F *і виконується умова*

$$\ln F(x) = o(x\beta^{-1}(\alpha(x)+c)),\ x\to+\infty,$$

Припустимо, що всі інтеграли (1.76) *мають однаковий узагальнений порядки* $\varrho_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho \in (0;+\infty)$ *і узагальнені типи* $T_{\alpha\beta}(I_j) \in (0;+\infty)$. *Припустимо також, що* $f_1(x) > 0$ *для всіх* $x \geq x_0$ *і для всіх* $2 \leq j \leq m$

$$\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right) \leq (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right),\ x\to+\infty. \quad (1.79)$$

Якщо $\omega_j > 0$ *для* $1 \leq j \leq m$, $\sum_{1\leq j\leq m}\omega_j = 1$ *і*

$$\exp\left\{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right\} = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\exp\left\{\omega_j\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right\}, \quad (1.80)$$

при $x \to +\infty$, *то інтеграл* (1.71) *має узагальнений порядок* $\varrho_{\alpha\beta}(I) = \varrho$ *та узагальнений тип*

$$T_{\alpha\beta}(I) \le \prod_{j=1}^{m} T_{\alpha\beta}(I_j)^{\omega_j}.$$

Якщо ми виберемо $\alpha(x) = \ln\ln\ln x$, $\beta(x) = \ln x$ для $x \ge x_0$, $m = 2$ і $\omega_j = 1/2$, то з теореми 6.11 ми отримуємо таке твердження.

Наслідок 6.6. *Нехай* $F \in V$, $\ln F(x) = o(x \ln\ln x)$ *при* $x \to +\infty$ *і функції* f *і* f_j $(j \in \{1;2\})$ *мають регулярну варіацію відносно* F. *Припустимо, що* $f_1(x) > 0$ *для всіх* $x \ge x_0$ *і*

$$\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right) \le (1+o(1))\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right), \quad x \to +\infty.$$

Якщо $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln\ln\ln I_j(\sigma)}{\ln\sigma} = \varrho \in (0;+\infty)$ *для* $j \in \{1;2\}$ *та*

$$\ln\frac{1}{f(x)} = (1+o(1))\sqrt{\ln\frac{1}{f_1(x)}\ln\frac{1}{f_2(x)}},\ x \to +\infty,$$

то $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln\ln\ln I(\sigma)}{\ln\sigma} = \varrho$ *і*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\exp_3\left\{\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)^{\varrho}\right\}} \le$$

$$\le \sqrt{\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\exp_3\left\{\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)^{\varrho}\right\}} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\exp_3\left\{\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)^{\varrho}\right\}}},$$

де $\exp_3 x = \exp\{\exp\{e^x\}\}$.

Для інтеграла (1.71) зі скінченним модифікованим узагальненим порядком визначимо узагальнений тип $T^M_{\alpha\beta}(I)$ за формулою

$$T^M_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln I(\sigma))}{\sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))}, \quad (\varrho = \varrho^M_{\alpha\beta}(I)).$$

Теорема 6.12. *Нехай* $\beta \in L_{\mathrm{si}}$, $\alpha(x) = (1+o(1))\ln x$ *при* $x \to +\infty$ *і* $\beta_1(x) = \alpha^{-1}(\varrho\beta(x)) \in L_{\mathrm{si}}$. *Нехай* $F \in V$, $\ln F(x) = o(x\beta_1^{-1}(x))$ *при* $x \to +\infty$ *і* f *і* f_j *мають регулярну варіацію відносно* F. *Припустимо, що всі інтеграли* (1.76) *мають однаковий модифікований узагальнений порядок* $\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho \in (0;+\infty)$ *і модифіковані узагальнені типи* $T^M_{\alpha\beta}(I_j) \in (0;+\infty)$. *Припустимо також, що* $f_1(x) > 0$ *для всіх* $x \ge x_0$ *і виконується* (1.79).

Якщо $\omega_j > 0$ *для* $1 \le j \le m$, $\sum_{1\le j\le m}\omega_j = 1$ *і*

$$\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\left(\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right)\right)^{\omega_j},\ x \to +\infty,$$

тоді інтеграл (1.71) *має модифікований узагальнений порядок* $\varrho^M_{\alpha\beta}(I)=\varrho$ *і модифікований узагальнений тип*

$$T^M_{\alpha\beta}(I)\le\prod_{j=1}^m T^M_{\alpha\beta}(I_j)^{\omega_j}.$$

Якщо ми виберемо $\alpha(x)=\ln x$, $\beta(x)=\ln\ln x$ для $x\ge x_0$, $m=2$ і $\omega_j=1/2$ тоді з теореми 6.12 ми отримаємо таке твердження.

Наслідок 6.7. *Нехай* $F\in V$, $\ln F(x)=o(x\exp\{e^x\})$ *при* $x\to+\infty$ *і функції* f *і* f_j, $j\in\{1;2\}$, *мають регулярну варіацію відносно* F. *Припустимо, що* $f_1(x)>0$ *для всіх* $x\ge x_0$ *і*

$$\ln\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right)\le(1+o(1))\ln\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right),\quad x\to+\infty.$$

Якщо $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln I_j(\sigma)-\ln\sigma}{\ln\ln\sigma}=\varrho\in(0;+\infty)$ *для* $j\in\{1;2\}$ *та*

$$\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)=(1+o(1))\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right)\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right)},\ x\to+\infty,$$

то $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln I(\sigma)-\ln\sigma}{\ln\ln\sigma}=\varrho$ *і*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln^\varrho\sigma}\le\sqrt{\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I_1(\sigma)}{\sigma\ln^\varrho\sigma}\ \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I_2(\sigma)}{\sigma\ln^\varrho\sigma}}.$$

Наступне твердження доповнює теореми 6.10 і 6.12.

Теорема 6.13. *Нехай або* $\alpha\in L_{\mathrm{si}}$ *і* $\beta\in L^0$, *або* $\alpha\in L^0$ *і* $\beta\in L_{\mathrm{si}}$, $F\in V$, $\ln F(x)=o(x\beta^{-1}(\alpha^c(x)))$ *при* $x\to+\infty$ *для кожного* $c\in(0,+\infty)$ *та інтеграли* (1.76) *мають модифіковані загальні порядки* $\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j)\in(0;+\infty)$. *Припустимо, що* f *має регулярну варіацію відносно* F *і виконується* (1.77). *Тоді:*

1) *якщо* $f_1(x)>0$ *для всіх* $x\ge x_0$ *і для всіх* $2\le j\le m_0$

$$\ln\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\le(1+o(1))\ln\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right),\ x\to+\infty,$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\beta(\sigma)}\ln\alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right)=1\ \text{ та } \varrho^M_{\alpha\beta}(I)\le\prod_{j=1}^m(\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j};$$

2) *якщо* $v(x)=-(\ln f(x))'$ *є неперервна і зростаюча на* $[x_0;+\infty)$ *і всі інтеграли* (1.76) *мають регулярне модифіковане* $\alpha\beta$*–зростання, то інтеграл* (1.71) *має регулярне модифіковане* $\alpha\beta$*-зростання та*

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I)=\prod_{j=1}^m(\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

Про банахові простори та простори Фреше інтегралів Лапласа-Стілт'єса.

Припустимо, що дійсна функція f на $[0;+\infty)$ така, що інтеграл Лебега-Стілт'єса

$$\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$$

існує для кожного $A \in [0;+\infty)$ та $\sigma \in \mathbb{R}$. Нехай

$$I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{1.81}$$

Цей інтеграл є прямим узагальненням звичайного інтеграла Лапласа $I_o(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dx$ і ряду Діріхле

$$D(\sigma) = \sum_{n=1}^\infty d_n e^{\lambda_n \sigma} \tag{1.82}$$

з невід'ємними показниками λ_n, $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$ при $n \to \infty$, якщо ми виберемо

$$F(x) = n(x) = \sum_{\lambda_n \le x} 1, \quad f(x) = \begin{cases} d_n, & \text{якщо } x = \lambda_n; \\ 0, & \text{якщо } x \ne \lambda_n. \end{cases}$$

Нехай

$$M(\sigma, I) := \int_0^\infty |f(x)|e^{x\sigma}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{1.83}$$

та $\mu(\sigma, I) := \max\{|f(x)|e^{x\sigma}\colon x \ge 0\}$ $(\sigma \in \mathbb{R})$.

Нехай h — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ функція. Тут будемо досліджувати властивості інтегралів (1.81), для яких

$$|f(x)|\exp\{xh(x)\} \to 0, \ x \to +\infty. \tag{1.84}$$

Через LS_h ми позначаємо клас інтегралів вигляду (1.81) з дійсними функціями f, для яких виконується (1.84). На LS_h ми визначимо дії

$$(I_1 + I_2)(x) = \int_0^\infty (f_1(x) + f_2(x))e^{x\sigma}dF(x), \ (\lambda I)(\sigma) = \int_0^\infty \lambda f(x)e^{x\sigma}dF(x),$$

де $I_j(\sigma) = \int_0^\infty f_j(x)e^{x\sigma}dF(x)$ для $j \in \{1;2\}$, і нехай

$$\|I\|_h = \sup\left\{|f(x)|\exp\{xh(x)\}\colon x \ge 0\right\}.$$

LS_h з цими діями є нормованим лінійним простором.

Теорема 6.14. *Якщо $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то $(LS_h, \|\cdot\|_h)$ є нерівномірно опуклим банаховим простором.*

Наступне твердження стосується рівномірної збіжності (I_m).

Твердження 6.9. *Нехай $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$. Якщо $(I_m) \subset LS_h$ збігається до $I \in LS_h$ за $\|\cdot\|_h$, то $I_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $I(\sigma)$ на компактній підмножині $\mathbb{R}$.*

Повернемося до розгляду дуальних просторів. Для $(LS_h, \|\cdot\|_h)$ через LS_h^* ми позначимо дуальний простір, тобто LS_h^* — сім'я всіх неперервних лінійних функціоналів на $(LS_h, \|\cdot\|_h)$. Нехай

$$\Lambda(I) = \int\limits_1^\infty f(x)g(x)dF(x),$$

де g — дійсна функція на $(1; +\infty)$ така, що

$$\int\limits_1^\infty |f(x)g(x)|dF(x) < +\infty.$$

Тоді Λ є лінійним функціоналом.

Твердження 6.10. *Для того, щоб $\Lambda \in LS_h^*$, достатньо збіжності інтегралу*

$$\int\limits_1^\infty |g(x)| \exp\{-xh(x)\}dF(x) < +\infty.$$

Нехай Ω — клас додатних необмежених функцій Φ на $(-\infty; +\infty)$ таких, що похідна Φ' додатна неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ позначимо через φ обернену функцію до Φ' і

$$\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$$

— функція, асоційована з Φ у сенсі Ньютона. Відомо [177, с. 30], що якщо $\Phi \in \Omega$, то $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$ тоді і тільки тоді, коли $\ln |f(x)| \le -x\Psi(\varphi(x))$ для всіх $x \ge x_0$. З огляду на це твердження в [178] вводиться клас LS_Φ інтегралів (1.81) з дійсними функціями f такими, що $|f(x)| \exp\{x\Psi(\varphi(x))\} \to 0$ при $x \to +\infty$ і на LS_Φ визначено

$$\|I\|_\Phi = \sup\{|f(x)| \exp\{x\Psi(\varphi(x))\} \colon x \ge 0\}.$$

Якщо ми виберемо $h(x) = \Psi(\varphi(x))$, то $LS_h = LS_\Phi$ і отримаємо наступне твердження.

Наслідок 6.8. *Нехай $\Phi \in \Omega$, $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$. Тоді $(LS_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ є нерівномірно опуклим банаховим простором. Якщо $(I_m) \subset LS_\Phi$ збігається до $I \in LS_\Phi$ за нормою $\|\cdot\|_\Phi$, то $I_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $I(\sigma)$ на компактній підмножині $\mathbb{R}$. Якщо*

$$\int\limits_1^\infty |g(x)| \exp\{-x\Psi(\varphi(x))\}dF(x) < +\infty,$$

то функціонал

$$\Lambda(I)=\int\limits_1^{\infty} f(x)g(x)dF(x)$$

належить дуального простору LS^*_{Φ}.

Розглянемо банахові простори інтегралів Лапласа-Стілт'єса скінченного узагальненого порядку.

Якщо $\alpha\in L$ і $\beta\in L$, то границя

$$\varrho_{\alpha,\beta}[I]:=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(\ln M(\sigma,I))}{\beta(\sigma)}$$

називається *узагальненим* (α,β)*-порядком* I. Щоб мати формулу для знаходження $\varrho_{\alpha,\beta}[I]$, будемо казати [177, с. 21], що $|f|$ має регулярну варіацію відносно F, якщо існують $a\ge 0$, $b\ge 0$ і $h>0$ такі, що

$$\int\limits_{x-a}^{x+b}|f(t)|dF(t)\ge h|f(x)|$$

для всіх $x\ge a$. Позначимо

$$\kappa_{\alpha,\beta}[f]:=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{|f(x)|}\right)}.$$

Наслідок 6.9. *Нехай* $\alpha\in L$, $\beta\in L^0$, $F\in V$ *і* $\ln F(x)=o(x)$ *при* $x\to+\infty$. *Тоді* $(LS_{(\alpha,\beta;k)},\|\cdot\|_{(\alpha,\beta;k)})$ *є нерівномірно опуклим банаховим простором для кожного* $\kappa\in(\varkappa_{\alpha,\beta}[I];+\infty)$. *Якщо* $(I_m)\subset LS_{(\alpha,\beta;k)}$ *збігається до* $I\in LS_{(\alpha,\beta;k)}$ *за* $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta;k)}$, *то* $I_m(\sigma)$ *рівномірно збігається до* $I(\sigma)$ *на компактній підмножині* $\mathbb{R}$. *Якщо*

$$\int\limits_1^{\infty}|g(x)|\exp\Big\{-x\beta^{-1}\Big(\frac{\alpha(x)}{k}\Big)\Big\}dF(x)<+\infty,$$

то функціонал

$$\Lambda(I)=\int\limits_1^{\infty} f(x)g(x)dF(x)$$

належить до дуального простору $LS^*_{(\alpha,\beta;k)}$.

Розглянемо випадок, коли $I(\sigma)=D(\sigma)$ є рядом Діріхле (1.82) з дійсними коефіцієнтами d_n. Припустимо, що цей ряд абсолютно збігається для всіх $\sigma\in(-\infty;+\infty)$ і будемо вважати, що $D\in S_h$, якщо

$$\lim_{n\to+\infty}|d_n|\exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\}=0.$$

Позначимо

$$\|D\|_h=\sup\{|d_n|\exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\}\colon n\ge 1\}.$$

Тоді з теореми 6.14 отримуємо таке твердження.

Наслідок 6.10. *Якщо* $\ln n(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$, *то* $(S_h, \|\cdot\|_h)$ *є нерівномірним банаховим простором.*

Наступне твердження доповнює твердження 6.9.

Твердження 6.11. *Якщо* $\ln n(x) = o(x)$ *при* $x \to +\infty$, *то для того, щоб* $(D_m) \in S_h$ *збігався до* $D \in S_h$ *за* $\|\cdot\|_h$ *необхідно і достатньо, щоб* $D_m(\sigma)$ *рівномірно сходилася до* $D(\sigma)$ *на кожній компактній підмножині* $\mathbb{R}$.

Для $D \in (S_h, \|\cdot\|_h)$ через S_h^* ми позначаємо дуальний простір і нехай

$$\Lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n,$$

де g_n — дійсна послідовність така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} < +\infty. \tag{1.85}$$

Тоді Λ є лінійним функціоналом, і ми доведемо нашу гіпотезу для $I(\sigma) = D(\sigma)$.

Твердження 6.12. *Кожен обмежений лінійний функціонал* Λ, *визначений для* $(S_h, \|\cdot\|_h)$, *має вигляд*

$$\Lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n, \quad D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp\{\lambda_n \sigma\}, \tag{1.86}$$

де g_n *— дійсна послідовність, що задовольняє* (1.85).

Простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

У просторах цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку можна ввести іншу метрику. Нагадаємо, що якщо $\alpha \in L$, $\beta \in L$ і ряд Діріхле (1.82) цілий, то

$$\varrho_{\alpha,\beta}[D] := \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, D))}{\beta(\sigma)},$$

називається *узагальненим* (α, β)*-порядком* D ([43]), де

$$M(\sigma, D) = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| e^{\sigma \lambda_n}.$$

Для фіксованого $\varrho < +\infty$ через $\overline{S}_\varrho$ позначимо клас цілих рядів Діріхле (1.82), для яких $\varrho_{\alpha,\beta}[D] \le \varrho$. Тоді

$$|d_n| \le \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + o(1)}\right)\right\}, \quad n \to \infty.$$

Для $q \in \mathbb{N}$ визначимо

$$\|D\|_{\varrho;q} = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\}.$$

Очевидно, $\|D\|_{\varrho;q} \le \|D\|_{\varrho;q+1}$. Тому [81], сім'я $\|D\|_{\varrho;q} \colon q \in \mathbb{N}$ індукує на $\overline{S}_\varrho$ унікальну топологію таку, що $\overline{S}_\varrho$ стає локальним опуклим векторним простором, і ця топологія задана метрикою d, де

$$d(D_1,\, D_2) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{\|D_1 - D_2\|_{\varrho;q}}{1 + \|D_1 - D_2\|_{\varrho;q}}.$$

Простір з метрикою d позначимо $\overline{S}_{\varrho,d}$.

Теорема 6.15. *Нехай функції $\alpha \in L_{\rm si}$ і $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні і $\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$. Якщо*

$$\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))), \quad n \to \infty$$

для кожного $c \in (0; +\infty)$, то $\overline{S}_{\varrho,d}$ є простором Фреше.

Також доведено таке твердження.

Твердження 6.13. *Нехай функції α, β і послідовність (λ_n) задовольняють умови теореми 6.15. Тоді кожен неперервний лінійний функціонал Λ на $\overline{S}_{\varrho,d}$ має вигляд (1.86) тоді і тільки тоді, коли для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $q \in \mathbb{N}$*

$$|g_n| \le K \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\}, \quad K = \text{const} > 0.$$

РОЗДІЛ 2. НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ТА ВИПАДКОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Нерівність типу Вімана для цілих та аналітичних функцій і h-міри виняткової множини

Нехай $\mathcal{E}_R$, $0 < R \leq +\infty$, — клас необмежених аналітичних функцій у $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \tag{2.1}$$

Позначимо $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{+\infty}$ — клас цілих функцій. Позначимо через $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$ та $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n\colon n \geq 0\}$, $r \in [0, R)$, максимум модуля та максимальний член ряду (2.1), відповідно.

Позначимо через $\mathcal{H}_R$ клас неперервних додатних неспадних на $[0; R), R \leq +\infty$, функцій таких, що

$$\int_{r_0}^{R} \frac{h(r)}{r} dr = +\infty$$

для деякого $r_0 \in (0, R)$. Нехай $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{+\infty}$.

Метою цього підрозділу є отримання для аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $0 < R \leq +\infty$, аналога теореми 1.9 встановленої в [33] у випадку $R = +\infty$ (за додаткової умови $\ln_2^+ h(r) = o(\ln_2 \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$), з якого, як наслідок, ми отримуємо твердження про нерівність типу Вімана, що виконується зовні виняткової множини скінченної логарифмічної h-міри без будь-яких додаткових умов на функцію h.

Нехай $\mathcal{W}$ — клас додатних неперервних зростаючих на $[0; +\infty)$ функцій $\psi(x)$ таких, що

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$$

для деякого $x_0 \in (0; +\infty)$. Наступне просте допоміжне твердження наведемо для повноти картини з доведенням. Зазначимо, що його твердження переходить у випадку $T = +\infty$ у відповідні твердження з [79, 184], а доведення цілком подібне до доведення леми 1 в [184] та леми 6.15 в [79] (див. також [32, 187]).

Лема 2.1. *Нехай $T \in (-\infty; +\infty]$, $t_0 \in (-\infty, T)$, $g_0(x)$ – додатна диференційовна неспадна функція на (t_0, T), $\psi \in \mathcal{W}$, а $h_0(x)$ – додатна локально інтегровна* *на* $[t_0;T)$ *і* $\int_{t_0}^{T} h_0(x)\,dx = +\infty$. *Тоді існує множина* $E_0 \subset [t_0;T)$ *така, що*

$$\int\limits_{E_0} h_0(x)\,dx < +\infty \quad \text{та} \quad \forall x \in [t_0;T) \setminus E_0\colon \quad g_0'(x) \le h_0(x)\psi(g_0(x)).$$

Справді, позначимо $E_0 = \{x \in (t_0,T)\colon g_0'(x) > h_0(x)\psi(g_0(x))\}$. Тоді

$$\int\limits_{E_0} h_0(x)dx \le \int\limits_{E_0} \frac{g_0'(x)}{\psi(g_0(x))}dx \le \int\limits_{E_0} \frac{dg_0(x)}{\psi(g_0(x))} \le$$

$$\le \int\limits_{g_0(E_0)\cap[0,x_0)} \frac{du}{\psi(u)} + \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} < +\infty.$$

Наступна лема 2.2 нам потрібна для доведення основної у даному підрозділі теореми 2.1.

Лема 2.2. *Нехай* $h \in \mathcal{H}_R$, f *— довільна аналітична функція, представлена степеневими рядом вигляду* (2.1) *з радіусом збіжності* $R(f) = R \in (0;+\infty]$, *та* $r_0 \in (0,R)$ *таке, що* $\ln \mathfrak{M}_f(r_0) \ge 10$, $h(r_0) \ge 1$. *Тоді існує множина* $E_0 := E(f,h) \subset (0,R)$ *така, що*

$$(\forall\, r \in (r_0,R) \setminus E_0)\colon \ \ln \mathfrak{M}_f(r) \le 2\ln\big(h(r)\mu_f(r)\big),$$
$$h\,\text{-meas}\,E_0 := \int\limits_{E} h(r)d\ln r < +\infty.$$

Доведення. Позначимо $g(x) = \mathfrak{M}_f(e^x)$, $g_1(x) = \ln g(x)$, $x = \ln r < \ln R$. Зауважимо, що $g_1'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$. Тоді для $a = 2g_1'(x)$ отримуємо

$$g(x) - \sum_{n\le a} |a_n|e^{xn} = \sum_{n>a} |a_n|e^{xn} \le \frac{1}{a}\sum_{n>a} n|a_n|e^{xn} \le \frac{g'(x)}{a} = \frac{1}{2}g(x).$$

Тому,

$$g(x) \le 2\sum_{n\le a} |a_n|e^{xn} \le 2g_1'(x)\mu_f(r).$$

За лемою 2.1 з

$$g_0(x) = g_1(x),\ h_0(x) = h(e^x),\ \psi(x) = x(\ln x)^2,$$

існує множина $E \subset (-\infty, \ln R)$ і $t_0 < \ln R$ такі, що $g_1'(x) \le h_0(x)g_1(x)(\ln g_1(x))^2$ для всіх $x \in (t_0, \ln R) \setminus E$ та $\int_E h_0(x)dx < +\infty$. Отож,

$$\mathfrak{M}_f(r) = g(\ln r) \le 2\mu_f(r)h(r)g_1(\ln r)(\ln g_1(\ln r))^2.$$

Отже,

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \le \ln 2 + \ln\big(\mu_f(r)h(r)\big) + \ln g_1(\ln r) + 2\ln\ln g_1(\ln r). \qquad (2.2)$$

Оскільки $x - \ln x - 2\ln\ln x - \ln 2 \geq x/2$ для всіх $x \geq 10$, то
$$g_1(\ln r) - \ln 2 - \ln g_1(\ln r) - \ln\ln g_1(\ln r) \geq \frac{1}{2}\ln \mathfrak{M}_f(r).$$
Твердження леми 2.2 доведено, оскільки
$$\int\limits_{E_0} h(r)d\ln r = \int\limits_{E} h(e^x)dx < +\infty,$$
де E_0 є образом множини E при відображенні $r = e^x$. □

Якщо на додаток до умов леми 2.2 припустити, що функція f є необмеженою, то отримаємо таке твердження.

Твердження 2.1. *Нехай $h \in \mathcal{H}_R$ і $f \in \mathcal{E}_R$ — довільна необмежена аналітична функція, представлена степеневим рядом вигляду (2.1) з радіусом збіжності $R(f) = R \in (0; +\infty]$. Тоді існує множина $E_0 := E(f, h) \subset (0, R)$ така, що нерівність*
$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \leq (1 + o(1)) \ln \big(h(r)\mu_f(r)\big) \tag{2.3}$$
виконується при $r \uparrow R$ ($r \notin E_0$), де E_0 — множина з леми 2.2.

Справді, за умовою необмеженості f випливає, що $\mathfrak{M}_f(r) \to +\infty$ ($r \uparrow R$), звідки
$$\ln 2 + \ln g_1(\ln r) + 2\ln\ln g_1(\ln r) = o\big(\ln \mathfrak{M}_f(r)\big)$$
при $r \uparrow R$, бо $g_1(r) = \ln \mathfrak{M}_f(r)$. Тому, з нерівності (2.2) випливає, що співвідношення (2.3) виконується при $r \uparrow R$ ($r \notin E$), де E — множина з леми 2.2.

Зауваження 2.1. Якщо функції $h \in \mathcal{H}_R$ і $f \in \mathcal{E}_R$ такі, що $\ln h(r) = o(\ln \mathfrak{M}_f(r))$ ($r \uparrow R$), то з твердження 2.1 випливає, що
$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(r)$$
при $r \uparrow R$ ($r \notin E$), h-meas $E < +\infty$. Звідси, зокрема, у випадку $\ln h(r) = O(\ln r)$ ($r \uparrow R = +\infty$) як наслідок отримаємо одне твердження зі статті [42]. При цьому там встановлено, що у випадку класу всіх цілих функцій умову $\ln h(r) = O(\ln r)$ $r \uparrow R = +\infty$ в описанні величини виняткової множини у класичному співвідношенні Бореля зняти не можна.

Доведемо тепер такий загальний аналог нерівності Вімана в класі аналітичних функцій $f \in \mathcal{E}_R$, $R \in (0; +\infty]$, з винятковою множиною E такою, що
$$h\text{–meas } E := \int\limits_E h(r)d(\ln r) < +\infty.$$

Теорема 2.1. *Нехай $h \in \mathcal{H}_R$, $R \in (0; +\infty]$. Для кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{E}_R$, для кожної функції $\psi_j \in \mathcal{W}$ ($j \in \{1; 2\}$) і для будь-якого $\delta > 0$ існують множина $E := E(\delta, f, h) \subset (0, R)$ і $r_0 \in (0, R)$ такі, що h-meas $E < +\infty$ та*
$$(\forall\ r \in (r_0, R) \setminus E)\colon \quad \mathfrak{M}_f(r) \leq \mu_f(r)\sqrt{h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big)},$$
зокрема,
$$(\forall\ r \in (r_0, R) \setminus E)\colon \quad \mathfrak{M}_f(r) \leq h(r)\mu_f(r)\big(\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\big)^{1/2+\delta}. \tag{2.4}$$

Зауваження 2.2. Очевидно, що твердження теореми 1.9 випливає з теореми 2.1.

Доведення теореми 2.1. Спочатку ми повторимо міркування з доведення теореми 2 у [33]. Нехай

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{nx}, x < \ln R$$

та ξ — дискретна випадкова величина з розподілом

$$\mathbb{P}\{\xi = n\} = \frac{1}{g(x)} |a_n| e^{nx}, \quad n \geq 0.$$

Тоді математичне сподівання $\mathbf{M}\xi = g_1'(x)$ і дисперсія $\mathbf{D}\xi = g_1''(x)$, де $g_1(x) = \ln g(x)$.

За нерівністю Бєнайме–Чебишева отримуємо (див. також [95, 184, 185])

$$\mathbb{P}\Big\{|\xi - g_1'(x)| < \sqrt{2g_1''(x)}\Big\} = \mathbb{P}\big\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \sqrt{2\mathbf{D}\xi}\big\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\big(\sqrt{2\mathbf{D}\xi}\big)^2} = \frac{1}{2},$$

тобто

$$g(x) \leq 2g(x)\mathbb{P}\Big\{|\xi - g_1'(x)| < \sqrt{2g_1''(x)}\Big\} = 2 \sum_{|n - g_1'(x)| < \sqrt{2g_1''(x)}} |a_n| e^{xn}.$$

Отже, при $\ln r = x < \ln R$ ми маємо (див. також [33, (7) на с. 16])

$$g(x) \leq 2\mu_f(r)\big(2\sqrt{2g_1''(x)} + 1\big).$$

Не зменшуючи загальності ми можемо вважати, що $\psi_2(x) \geq 1$ для $x \geq 1$. Позначимо множини

$$E_1 = \{x < \ln R\colon g_1''(x) > 2^{-7} h(e^x)\psi_2\big(g_1'(x)\big),\ g_1'(x) \geq 1\},$$
$$E_2 = \{x < \ln R\colon g_1'(x) > h(e^x)\psi_1\big(g_1(x)/2\big),\ g_1(x) \geq 1\}.$$

Застосувавши лему 2.1 двічі, з $\psi_0(t) = 2^{-7}\psi_2(t)$, $h_0(x) = h(e^x)$ і $g_0(x) = g_1'(x)$ у першому випадку, і з $\psi_0(t) = \psi_1(t/2)$, $h_0(x) = h(e^x)$ та $g_0(x) = g_1(x)$ у другому випадку, отримаємо

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} h(e^x)dx = \int\limits_{E_1 \cup E_2} h_0(x)dx \leq \int\limits_{E_1} h_0(x)dx + \int\limits_{E_2} h_0(x)dx < +\infty.$$

Через E позначимо образ множини $E_1 \cup E_2$ при відображенні $r = e^x$. Тоді

$$h - \operatorname{meas} E = \int\limits_{E} \frac{h(r)}{r} dr = \int\limits_{E_1 \cup E_2} h(e^x)dx < +\infty.$$

Тепер з означення множин E_j за допомогою нерівності з леми 2.2 отримуємо, що

$$\frac{\mathfrak{M}_f(r)}{2\mu_f(r)} \leq \big(2\sqrt{2g_1''(x)} + 1\big) \leq \frac{1}{4}\sqrt{h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big)} + 1 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big)}$$

для всіх $r \in (r_0, R) \setminus \big(E \cup E_0\big)$. Це завершує доведення першої частини теореми 2.1. Для того, щоб довести другу частину, виберемо $\psi(t) = \psi_2(t) = t\ln^{1+\delta} t$. Тоді

$$\mathfrak{M}_f(r) \leq \mu_f(r)\sqrt{h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big)} \leq$$
$$\leq \mu_f(r)\sqrt{h(r)\Big(h(r)\psi_1\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big)\ln^{1+\delta}\Big(h(r)\psi_1\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big)} \leq$$
$$\leq h(r)\mu_f(r)\ln^{1/2}\big(\mu_f(r)h(r)\big)\times$$
$$\times \ln^{1/2+\delta/2}\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\ln^{1/2+\delta/2}\Big(h(r)\big(\ln^2\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big) \leq$$
$$\leq h(r)\mu_f(r)\ln^{1/2}\big(\mu_f(r)h(r)\big)\ln^{1/2+\delta/2}\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\times$$
$$\times \max\Big\{\ln^{1/2+\delta/2} h(r), 2\ln^{1/2+\delta/2}\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\Big\}\leq$$
$$\leq h(r)\mu_f(r)\big(\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\big)^{1/2+\delta}.$$

$\square$

2.2. Субгаусові випадкові величини і ефект Леві для цілих лакунарних функцій

Для $r \geq 0$ і цілої функції вигляду (2.1) через $\nu_f(r) = \max\{n\colon |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ позначимо центральний індекс,

$$\mathfrak{M}_f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r^n,\ S_f^2(r) = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n},\ S_N^2(r) = \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2r^{2n},\ \ln_2 x = \ln\ln x.$$

Тепер розглянемо функції f, які можна представити лакунарним степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}, \quad n_k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.5}$$

для яких виконується умова

$$(\exists\Delta \in (0;+\infty))(\exists\rho \in [1/2;1])(\exists D > 0)\colon\ |n(t) - \Delta t^\rho| \leq D\ \ (t \geq t_0),\ n(t) = \sum_{n_k \leq t} 1.$$

Нехай $\mathcal{N} = (n_k)$ — послідовність цілих чисел таких, що $n_0 = 0$, $n_k < n_{k+1}$ $(k \geq 0)$, а степеневий ряд вигляду (2.5) є цілою функцією. Позначимо

$$K(f, \mathcal{Z}, \mathcal{N}) = \left\{f(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) z^{n_k}\colon \omega \in [0;1]\right\}, \tag{2.6}$$

де $\mathscr{Z} = (Z_k(\omega))$ — послідовність комплекснозначних випадкових величин заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза.

Відзначимо, що у всіх раніше доведених твердженнях ([33, 36, 55, 66, 130]) про нерівність Вімана для випадкових аналітичних функцій послідовність випадкових величин $\mathscr{Z} = (Z_k(\omega))$ є майже напевно рівномірно обмеженою, тобто, $(\exists C \in (0; +\infty))\colon \sup\{|Z_k(\omega)| : k \geq 0\} \leq C$ м.н. У зв'язку з цим проф. О. Б. Скасків сформулював таке **запитання**: Чи буде справджуватися ефект Леві у випадку послідовності випадкових величин, яка може не бути м.н. рівномірно обмеженою?

У цьому параграфі ми дамо позитивну відповідь на це запитання у випадку послідовності незалежних субнормальних (субгаусових) випадкових величин. Серед таких послідовностей випадкових величин, очевидно, є як м.н. рівномірно обмежені послідовності, так і не рівномірно обмежені у цьому ж сенсі.

У доведенні нам потрібне таке елементарне твердження (порівн. [169, 207]).

Твердження 2.2. *Якщо послідовність випадкових величин $\big(Z_n(\omega)\big)$ задовольняє умову*

$$(\exists \alpha > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\colon \quad \sup\{\mathbf{E}|Z_n|^\alpha \colon n \geq n_0\} < +\infty, \tag{2.7}$$

тоді м.н.

$$(\exists N_1(\omega) \geq n_0)(\forall n > N_1(\omega))\colon \quad |Z_n(\omega)| \leq n^{1/\alpha} \ln^{2/\alpha} n.$$

Справді, з нерівності Маркова $\mathbb{P}\{\omega\colon |Z_n(\omega)|^\alpha \geq a\} \leq \mathbf{E}|Z_n|^\alpha / a$ за умовою (2.7) випливає, що

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon \ |Z_n(\omega)|^\alpha \geq n \ln^2 n\} \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\mathbf{E}|Z_n|^\alpha}{n \ln^2 n} < +\infty.$$

Звідки, за першою частиною леми Бореля-Кантеллі випливає твердження 2.2.

За умови (2.7) з твердження 2.2 очевидно випливає, що якщо радіус збіжності ряду (2.5) $R(f) = +\infty$, то радіус збіжності ряду (2.6) $R(f_t) = +\infty$ м.н.

Також нам буде потрібне наступне твердження.

Лема 2.3 ([80])**.** *Для необмеженої цілої функції $f(z)$ і кожного $\delta > 0$ існує множина $E(\delta) \subset (1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in (1; +\infty) \backslash E$ маємо*

$$\nu_f(r) \leq \ln \mu_f(r) \ln_2^{1+\delta} \mu_f(r),$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\colon |a_n| r^n \leq \mu_f(r) \exp\Big\{-\frac{k^2}{(|k| + \nu_f(r)) \ln^{1+\delta}(|k| + \nu_f(r))}\Big\}, \tag{2.8}$$

де $k = n - \nu_f(r)$.

Визначимо

$$N_0(r) = \min\{n_0 \colon (\forall n \geq n_0 \geq \ln \mu_f(r)) \ |a_n| r^n < 1\},$$

$$N_\varepsilon(r) = N(re^\varepsilon) = \min\{n_0\colon (\forall n \ge n_0 \ge \ln\mu_f(re^\varepsilon))\ |a_n|r^n e^{n\varepsilon} < 1\} =$$
$$= \min\{n_0\colon (\forall n \ge n_0 \ge \ln\mu_f(re^\varepsilon))\ |a_n|r^n < e^{-n\varepsilon}\},\ \varepsilon = \frac{1}{N^\gamma(r)},\ \gamma > 0.$$

З означення $N_\varepsilon(r)$ випливає, що $N_\varepsilon(r) \ge \ln\mu_f(r)$.

Припустимо, що

$$(\exists\Delta \in (0;+\infty))(\exists\rho \in [1/2;1])(\exists D > 0)\colon\ |n(t) - \Delta t^\rho| \le D\ \ (t \ge t_0),$$

(тут $n(t) = \sum_{n_k \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (n_k)).

Лема 2.4. *Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E(\delta) \subset (1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in (1;+\infty)\backslash E$ виконується нерівність*

$$N_0(r) < \ln\mu_f(r)\ln_2^{1+\delta}\mu_f(r).$$

Доведення. Зауважимо, що якщо $n = k + \nu_f(r), k > 0$, то з (2.8) випливає, що для деякого $\delta_0 > 0$ і $r \notin E$ маємо

$$|a_n|r^n \le \mu_f(r)\exp\Big\{-\frac{(n-\nu_f(r))^2}{n\ln^{1+\delta_0} n}\Big\}.$$

Виберемо $n_0(r) = [4\ln\mu_f(r)\ln_2^{1+\delta_0}\mu_f(r)] + 1$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді

$$\ln(|a_{n_0}|r^{n_0}) \le \ln\mu_f(r) - \frac{9\ln^2\mu_f(r)\ln_2^{2+2\delta_0}\mu_f(r)}{4\ln\mu_f(r)\ln_2^{1+\delta_0}\mu_f(r)\ln^{1+\delta_0}(4\ln\mu_f(r)\ln_2^{1+\delta_0}\mu_f(r))} \le$$
$$\le \ln\mu_f(r) - \frac{9}{8}\ln\mu_f(r) < 0.$$

Тому для $n > n_0(r)$ виконується нерівність $|a_n|r^n < 1$. $\square$

Лема 2.5 ([79]). *Припустимо, що $L(r)$ є додатною зростаючою функцією для $r > r_0$. Якщо $\gamma > 0$ і $|h| < L^{-\gamma}(r)$, то*

$$|L(re^h) - L(r)| < \gamma L(r)$$

для всіх r зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.

Зауважимо, що функція $N_0(r)$ задовольняє умови леми 2.5 і, отже, при $r \to +\infty$ $(r \notin E)$ маємо

$$N_0(r) \le N_\varepsilon(r) \le (1+\gamma)N_0(r) \le (1+\gamma)\ln\mu_f(r)\ln_2^{1+\delta}\mu_f(r) \le$$
$$\le \ln\mu_f(r)\ln_2^{1+2\delta}\mu_f(r). \tag{2.9}$$

Для цілої функції $f(z)$ і послідовності випадкових величин $Z_n(t)$ позначимо

$$g_n = g_n(r,\theta) = a_n r^n e^{in\theta} = q_n(r,\theta) + ip_n(r,\theta),$$
$$G = G(r,\theta,t) = Q(r,\theta,t) + iP(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{N} Z_n(t) g_n(r,\theta),$$

$$\|G\|_\infty = \max_{0\le\theta<2\pi}|G(r,\theta,t)|,\ \|Q\|_\infty = \max_{0\le\theta<2\pi}|\operatorname{Re}G(r,\theta,t)|,$$
$$\|P\|_\infty = \max_{0\le\theta<2\pi}|\operatorname{Im}G(r,\theta,t)|,$$
$$S_N = S_N(r) = \left(\sum_{n=0}^N |g_n(r,\theta)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}.$$

Лема 2.6 ([84], с. 49). *Якщо*

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^N b_n\cos(n\theta+\theta_n),\ N\ge 2,\ \theta_n\in\mathbb{R},$$

тоді існує відрізок I такий, що його міра дорівнює $1/N^2$ і для $\theta\in I$ маємо

$$|Q(\theta)| \ge \frac{1}{2}\max_{0\le\theta<2\pi}|Q(\theta)|.$$

Аналогічне твердження виконується для

$$P(r,\theta) = \sum_{n=0}^N a_n r^n \sin(n\theta+\theta_n).$$

Лема 2.7. *Якщо*

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^N b_n\sin(n\theta+\theta_n),\ N\ge 2,\ \theta_n\in\mathbb{R},$$

тоді існує відрізок I такий, що його міра дорівнює $1/N^2$ і для $\theta\in I$ маємо

$$|P(\theta)| \ge \frac{1}{2}\max_{0\le\theta<2\pi}|P(\theta)|.$$

Досить розглянути $\theta_n+\frac{\pi}{2}$ замість θ_n. Якщо $\theta_n=\theta_n'+\frac{\pi}{2}$, то

$$P(r,\theta) = \sum_{n=0}^N a_n r^n \cos(n\theta+\theta_n').$$

Залишається застосувати нерівність з леми 2.6.

Припустимо, що (Z_n) є послідовністю дійсних незалежних субгаусових випадкових величин, тобто таких, що існує $D>0$, що для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ і всіх $\lambda_0\in\mathbb{R}$ маємо

$$\mathbf{E}(e^{\lambda_0 Z_k}) \le e^{D\lambda_0^2}. \tag{2.10}$$

Клас таких випадкових величин позначимо через Ξ. Зауважимо, що будь-яка послідовність випадкових величин $(Z_n)\in\Xi$ задовольняє умови твердження 2.2 з $\alpha=2$ і випадковий степеневий ряд вигляду (2.6) є м.н. цілий.

Для $Z\in\Xi$ маємо ([84, Вправа 7.8, с. 81]) для будь-якого $k\in\mathbb{N}$: $\mathbf{E}(Z_k)=0$ і

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{E}(Z_k^2) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{D}(Z_k) \le 2D, \tag{2.11}$$

де $\mathbf{D}(Z_k) := \mathbf{E}(Z_k^2) - (\mathbf{E}Z_k)^2$ дисперсія випадкової величини Z_k.

Доведемо наступний аналог теореми Салема-Зігмунда ([84, 161]).

Лема 2.8. *Нехай $Z \in \Xi$, $N = N_\varepsilon(r)$. Тоді існують абсолютна стала $C > 0$ і множина E скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\mathbb{P}\{\|G\|_\infty \geq CS_N \ln_2 S_N \sqrt{\ln N}\} \leq \frac{2}{N^2}, \quad r \to +\infty \ (r \notin E). \tag{2.12}$$

Доведення. Використовуючи умову (2.10), ми отримуємо

$$\mathbf{E}(e^{\lambda Q(r,\theta,t)}) = \mathbf{E}\left(e^{\lambda \sum\limits_{n=0}^{N} Z_n q_n(r,\theta)}\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{n=0}^{N} e^{\lambda Z_n q_n(r,\theta)}\right) = \prod_{n=0}^{N} \mathbf{E} e^{\lambda Z_n q_n(r,\theta)}.$$

За лемою 2.5 існує множина $I = I(\omega)$ така, що $m(I) \geq \frac{1}{N^2}$ і для $\theta \in I$ маємо або

$$Q(r,\theta) \geq \frac{\|Q\|_\infty}{2} \quad \text{або} \ -Q(r,\theta) \geq \frac{\|Q\|_\infty}{2}.$$

Тоді

$$\mathbf{E}(e^{\lambda \|Q\|_\infty/2}) \leq N^2 \mathbf{E}\left(\int\limits_I (e^{\lambda Q(r,\theta)} + e^{-\lambda Q(r,\theta)}) d\theta\right) \leq$$

$$\leq N^2 \mathbf{E}\left(\int\limits_0^{2\pi} (e^{\lambda Q(r,\theta)} + e^{-\lambda Q(r,\theta)}) d\theta\right) \leq N^2 \int\limits_0^{2\pi} (\mathbf{E}(e^{\lambda Q(r,\theta)}) + \mathbf{E}(e^{-\lambda Q(r,\theta)})) d\theta \leq$$

$$\leq N^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\prod_{n=0}^{N} \mathbf{E} e^{\lambda Z_n q_n(r,\theta)} + \prod_{n=0}^{N} \mathbf{E} e^{-\lambda Z_n q_n(r,\theta)}\right) d\theta. \tag{2.13}$$

Виберемо $N = N_\delta(r)$ та

$$\lambda = \frac{3\sqrt{\ln N}}{\sqrt{2D} S_N \ln_2 S_N}.$$

Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує такий $D > 0$, що для всіх $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ маємо $\mathbf{E}(e^{\lambda_0 Z_k}) \leq e^{D\lambda_0^2}$.

Тому з (2.13) отримаємо

$$\mathbf{E}(e^{\lambda \|Q\|_\infty/2}) \leq 2N^2 \prod_{n=0}^{N} e^{D\lambda^2 |q_n(r,\theta)|^2} = 2N^2 \prod_{n=0}^{N} e^{D\lambda^2 |a_n|^2 r^{2n}} = 2N^2 e^{D\lambda^2 S_N^2},$$

$$\mathbf{E}(e^{\lambda \|Q\|_\infty/2 - D\lambda^2 S_N^2}) \leq 2N^4 \cdot \frac{1}{N^2},$$

тобто

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\left(\|Q\|_\infty - 2D\lambda S_N^2 - \frac{2}{\lambda}\ln(2N^4)\right)\right\}\right) \leq \frac{1}{N^2}.$$

З цієї нерівності для $N \geq 4$ випливає, що

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\left(\|Q\|_\infty - 2D\lambda S_N^2 - \frac{9}{\lambda}\ln N\right)\right\}\right) \leq \frac{1}{N^2}.$$

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\Big\{\|Q\|_\infty \geq 2D\lambda S_N^2 + \frac{9}{\lambda}\ln N\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{\lambda}{2}\Big(\|Q\|_\infty - 2D\lambda S_N^2 - \frac{9}{\lambda}\ln N\Big) \geq 0\Big\} =$$
$$= \mathbb{P}\Big\{\exp\Big\{\frac{\lambda}{2}\Big(\|Q\|_\infty - 2D\lambda S_N^2 - \frac{9}{\lambda}\ln N\Big)\Big\} \geq 1\Big\} \leq$$
$$\leq \mathbf{E}\Big(\exp\Big\{\frac{\lambda}{2}\Big(\|Q\|_\infty - 2D\lambda S_N^2 - \frac{9}{\lambda}\ln N\Big)\Big\}\Big) \leq \frac{1}{N^2}.$$

Отож,

$$\mathbb{P}\Big\{\|Q\|_\infty \geq 2D\frac{3\sqrt{\ln N}}{\sqrt{2D}S_N\ln_2 S_N}S_N^2 + \frac{9\sqrt{2D}S_N\ln_2 S_N}{3\sqrt{\ln N}}\ln N\Big\} \leq \frac{1}{N^2},$$
$$\mathbb{P}\Big\{\|Q\|_\infty \geq 3\sqrt{2D}\frac{S_N}{\ln_2 S_N} + 3\sqrt{2D}S_N\ln_2 S_N\sqrt{\ln N}\Big\} \leq \frac{1}{N^2},$$
$$\mathbb{P}\Big\{\|Q\|_\infty \geq 5\sqrt{D}S_N\ln_2 S_N\sqrt{\ln N}\Big\} \leq \frac{1}{N^2}.$$

Аналогічно отримуємо

$$\mathbb{P}\{\|P\|_\infty \geq 5\sqrt{D}S_N\ln_2 S_N\sqrt{\ln N}\} \leq \frac{1}{N^2}$$

та

$$\mathbb{P}\{\|G\|_\infty \geq 10\sqrt{D}S_N\ln_2 S_N\sqrt{\ln N}\} \leq \frac{2}{N^2}.$$

□

Лема 2.9. *Нехай $Z \in \Xi$, $N = N_\varepsilon(r)$. Існують абсолютна стала $C > 0$ і множина E скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\mathbb{P}\{\omega\colon M_f(r,\omega) \geq CS_N(r)\ln_2 S_N(r)\sqrt{\ln N}\} \leq \frac{3}{N^2}, \quad r \to +\infty\ (r \notin E).$$

Доведення. Виберемо $\varepsilon = \frac{1}{N(r)}$. Для $n \in N_\varepsilon(r)$ розглянемо події

$$B_n = \{\omega\colon |Z_n(\omega)| \geq n^2\}.$$

Ймовірності цих подій можна оцінити за допомогою нерівності Маркова та (2.11). Тоді

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\{\omega\colon |Z_n(\omega)|^2 \geq n^4\} \leq \frac{\mathbf{D}Z_n}{n^4} \leq \frac{2D}{n^4},$$
$$\sum_{n=N_\varepsilon(r)}^{+\infty}\mathbb{P}(B_n) \leq 2D\sum_{n=N_\varepsilon(r)}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \leq \frac{4D}{3N_\varepsilon^3(r)},\ r \to +\infty.$$

Нехай

$$B = \bigcup_{n=N_\varepsilon(r)}^{+\infty} B_n.$$

Тоді $\mathbb{P}(B) \le \frac{2D}{3N_\varepsilon^3(r)}$, $r \to +\infty$. Використавши (2.9), для $t \notin B$ одержимо

$$\max_{0\le\theta<2\pi}\left|\sum_{n=N_\varepsilon(r)}^{+\infty} Z_n a_n r^n e^{in\theta}\right| \le \sum_{n=N_\varepsilon(r)}^{+\infty} |Z_n||a_n|r^n \le \sum_{n=N_\varepsilon(r)}^{+\infty} n^4 e^{-n\varepsilon} \le$$

$$\le CN_\varepsilon^5(r) \le \ln^5\mu_f(r)\ln_2^6\mu_f(r) < \ln^6\mu_f(r) < S_N(r),\ r \to +\infty,\ (r \notin E).$$

Тому,

$$\mathbb{P}\left\{\omega\colon \max_{0\le\theta<2\pi}\left|\sum_{n=N}^{+\infty} Z_n a_n r^n e^{in\theta}\right| \ge S_N\right\} \le \frac{1}{N^2},\ N = N_\varepsilon(r).$$

За (2.12) маємо

$$\mathbb{P}\{\|G\|_\infty \ge CS_N \ln_2 S_N\sqrt{\ln N}\} \le \frac{2}{N^2},\quad r \to +\infty\ (r \notin E).$$

З двох попередніх нерівностей випливає, що

$$\mathbb{P}\left\{\omega\colon \max_{0\le\theta<2\pi}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} Z_n a_n r^n e^{in\theta}\right| \ge 2CS_N \ln_2 S_N\sqrt{\ln N}\right\} \le \frac{3}{N^2},\ N = N_\varepsilon(r).$$

□

Також нам потрібна наступна лема.

Лема 2.10 ([33], див. також [66]). *Нехай $l(r)$ — функція неперервна зростаюча до $+\infty$ на $(1;+\infty)$, $E \subset (1;+\infty)$ — множина така, що її доповнення містить необмежену відкриту множину. Тоді існує нескінченна послідовність*

$$1 < r_1 \le \ldots \le r_n \to +\infty\ (n \to +\infty)$$

така, що

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})\colon r_n \notin E$;

(2) $(\forall n \in \mathbb{N})\colon \ln l(r_n) \ge \frac{n}{2}$;

(3) якщо $(r_n; r_{n+1}) \cap E \ne (r_n, r_{n+1})$, *то* $l(r_{n+1}) \le el(r_n)$;

(4) множина індексів, для яких виконується пункт (3), є необмеженою.

Теорема 2.2. *Нехай $Z \in \Xi$. Тоді існує така множина $E(\delta)$ скінченної логарифмічної міри, що для всіх $r \in (r_0(\omega);+\infty)\backslash E$ майже напевно в $K(f,\mathcal{Z},\mathcal{N})$ виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega) \le \mu_f(r)\ln^{(2\rho-1)/4}\mu_f(r)\ln_2^{3/2+\delta}\mu_f(r). \tag{2.14}$$

Доведення. Виберемо $k(r) = \mu_f(r)$, множину E і послідовність (r_k) з леми 2.9. Нехай

$$F_k = \{\omega\colon M_f(r_k,\omega) \ge CS_{N_\varepsilon(r_k)}(r_k)\ln_2 S_{N_\varepsilon(r_k)}(r_k)\sqrt{\ln N_\varepsilon(r_k)}\}.$$

За лемою 2.9 та означенням $N_\varepsilon(r)$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(F_k) \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{N_\varepsilon^2(r_k)} \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2\mu_f(r_k)} \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантеллі для майже всіх $\omega \in [0;1]$ і для $k \geq k_0(\omega)$ маємо
$$M_f(r_k,\omega) < CS_{N_\varepsilon(r_k)}(r_k)\ln_2 S_{N_\varepsilon(r_k)}(r_k)\sqrt{\ln N_\varepsilon(r_k)}.$$
Використавши нерівності
$$S_{N_\varepsilon(r)}(r) \leq \mathfrak{M}_f(r)\mu_f(r) \text{ та } N_\varepsilon(r) \leq \ln\mu_f(r)\ln_2^{1+\delta}\mu_f(r), (r \notin E),$$
одержимо
$$M_f(r_k,\omega) < C\sqrt{\mathfrak{M}_f(r_k)\mu_f(r_k)}\ln_2(\mathfrak{M}_f(r_k)\mu_f(r_k))\sqrt{2\ln_2\mu_f(r_k)} <$$
$$< C\mu_f(r_k)\ln^{(2\rho-1)/4}\mu_f(r_k)\cdot 3\ln_2\mu_f(r_k)\sqrt{2\ln_2\mu_f(r_k)} <$$
$$< 5C\mu_f(r_k)\ln^{(2\rho-1)/4}\mu_f(r_k)\ln_2^{3/2}\mu_f(r_k).$$

Нехай $r \geq r_{k_0(\omega)}$ — довільне число поза множиною E, $r \in (r_p, r_{p+1})$. За лемою 2.10 виконується нерівність $\mu_f(r_{p+1}) \leq e\mu_f(r_p) \leq e\mu_f(r)$. Тому для майже всіх $\omega \in [0;1]$ і $r \geq r_0(\omega)$ поза множиною скінченної логарифмічної міри E маємо
$$M_f(r,\omega) \leq M_f(r_{p+1},\omega) < 5C\mu_f(r_{p+1})\ln^{(2\rho-1)/4}\mu_f(r_{p+1})\ln_2^{3/2}\mu_f(r_{p+1}) <$$
$$< 5Ce\mu_f(r)\ln^{(2\rho-1)/4}(e\mu_f(r))\ln_2^{3/2}(e\mu_f(r)) < \mu_f(r)\ln^{(2\rho-1)/4}\mu_f(r)\ln_2^{3/2+\delta}\mu_f(r).$$

□

У випадку комплексних випадкових величин з теореми 2.2 отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай* $\operatorname{Re} Z \in \Xi$, $\operatorname{Im} Z \in \Xi$. *Тоді існує множина* $E(\delta)$ *скінченної логарифмічної міри така, що для всіх* $r \in (r_0(\omega);+\infty)\backslash E$ *майже напевно в* $K(f,\mathcal{Z},\mathcal{N})$ *маємо*
$$M_f(r,\omega) \leq \mu_f(r)\ln^{(2\rho-1)/4}\mu_f(r)\ln_2^{3/2+\delta}\mu_f(r).$$

Побудуємо приклад, який вказує на необхідність скінченності супремуму дисперсій послідовності випадкових величин Z. Тобто, існує $Z \notin \Xi$ така, що $\mathbf{E}Z_n = 0$, $\sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty$ і нерівність (2.14) не виконується. Це випливає з наступного твердження.

Теорема 2.3. *Для будь-якого* $\alpha > 0$ *існують послідовність дійсних незалежних випадкових величин така, що яка для всіх задовольняє*
$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n = 0,\ \sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty,$$
ціла функція $f(z)$ *і стала* $C > 0$ *така, що майже напевно в* $K(f,\mathcal{Z},\mathcal{N})$ *маємо*
$$M_f(r,\omega) = \max\{|f(z,\omega)|\colon |z| = r\} \geq C\mu_f(r)\ln^{1/4+\alpha}\mu_f(r),\ r > r_0(\omega).$$

Доведення. Виберемо

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^\alpha n!},\ g(z)=e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

і послідовність незалежних випадкових величин (Z_n) таких, що

$$\mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega)=-n^\alpha\}=\mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega)=n^\alpha\}=\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\mathbf{E}Z_n=-n^\alpha\frac{1}{2}+n^\alpha\frac{1}{2}=0,\ \mathbf{D}Z_n=n^{2\alpha}\frac{1}{2}+n^{2\alpha}\frac{1}{2}=n^{2\alpha},\ \sup_n\mathbf{D}Z_n=+\infty.$$

Позначимо

$$f(z,\omega)=\sum_{n=1}^{+\infty}Z_n(\omega)\frac{z^n}{n^\alpha n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}R_n(\omega)\frac{z^n}{n!}=g(z,\omega),$$

$$M_f(r,\omega)=\max\{|f(z,\omega)|\colon |z|\le r\}=\max\{|g(z,\omega)|\colon |z|\le r\}=M_g(r,\omega),$$

де $\{R_n(\omega)\}$ — послідовність випадкових величин Радемахера. За теоремою 1.6 для $\rho=1$ можна зробити висновок, що для $g(z,\omega)$ і деякого $C>0$

$$M_f(r,\omega)=M_g(r,\omega)\ge C\mu_g(r)\ln^{1/4}\mu_g(r),\ r\to+\infty.$$

Зауважимо, що

$$\mu_g(r)=\max_{n\in\mathbb{Z}_+}\Big\{\frac{r^n}{n!}\Big\}=\max_{n\in\mathbb{Z}_+}\Big\{n^\alpha\frac{r^n}{n^\alpha n!}\Big\}\ge\nu_f^\alpha(r)\mu_f(r)$$

та $\nu_f(r)>r/2=\ln M_g(r)/2,\ r\to+\infty$. Тому

$$\mu_g(r)>\frac{1}{2^\alpha}M_f(r)\ln^\alpha M_g(r)>\frac{1}{2^\alpha}M_f(r)\ln^\alpha\mu_g(r)>\frac{1}{2^\alpha}M_f(r)\ln^\alpha\mu_f(r).$$

Отже, майже напевно в $K(f,\mathcal{Z},\mathcal{N})$ маємо

$$M_f(r,\omega)>C\mu_g(r)\ln^{1/4}\mu_g(r)>C_1M_f(r)\ln^\alpha\mu_f(r)\ln^{1/4}(M_f(r)\ln^\alpha\mu_f(r))>$$
$$>C_1\mu_f(r)\ln^{1/4+\alpha}\mu_f(r).$$

□

2.3. Нерівність Вімана для аналітичних функцій та субгаусові випадкові величини

У підрозділі 2.1. доведено, що якщо $h\in\mathcal{H}_R$ і $f\in\mathcal{E}_R$, то для будь-якого $\delta>0$ існує $E(\delta,f,h):=E\subset(0,R)$, $r_0\in(0,R)$ така, що $(\forall\ r\in(r_0,R)\backslash E)$:

$$M_f(r)\le h(r)\mu_f(r)\{\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\}^{1/2+\delta}\tag{2.15}$$

та

$$h\text{-meas}E=\int_E h(r)d\ln r<+\infty.$$

Нам буде потрібне наступне елементарне твердження (див. також [169,207]).

Твердження 2.3. *Якщо послідовність випадкових величин* $\big(Z_n(\omega)\big)$ *задовольняє умову*

$$(\exists\alpha>0)(\exists n_1\in\mathbb{N})\colon\ \sup\{\mathbf{E}|Z_n|^{\alpha}\colon\ n\ge n_1\}<+\infty, \tag{2.16}$$

$$(\exists\beta>0)(\exists n_2\in\mathbb{N})\colon\ \inf\{\mathbf{E}|Z_n|^{-\beta}\colon\ n\ge n_2\}<+\infty, \tag{2.17}$$

тоді м. н.

$$(\exists N_1(\omega)\ge\max\{n_1,n_2\})(\forall n>N_1(\omega))\colon\ \frac{1}{n^{1/\beta}\ln^{2/\beta}n}\le|Z_n(\omega)|\le n^{1/\alpha}\ln^{2/\alpha}n.$$

Справді, нерівність $|Z_n(\omega)|\le n^{1/\alpha}\ln^{2/\alpha}n$ за умови (2.16) отримано вище у твердженні 2.2. За нерівністю Маркова за умови (2.17) знову маємо, що

$$\sum_{n=n_2}^{+\infty}\mathbb{P}\{\omega\colon\ |Z_n(\omega)|^{-\beta}\ge n\ln^2 n\}\le\sum_{n=n_2}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}|Z_n(\omega)|^{-\beta}}{n\ln^2 n}<+\infty.$$

Залишається застосувати першу лему Бореля-Кантеллі.

За твердженням 2.3 випливає, що за виконання умов (2.16) і (2.17) радіус збіжності ряду

$$f(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}Z_n(\omega)a_nz^n \tag{2.18}$$

м. н. дорівнює радіусу збіжності ряду (2.1).

Припустимо, що $Z=(Z_n)\in\Xi$ є послідовністю дійсних центрованих незалежних субгаусових випадкових величин, для яких виконується умова (2.17). Клас таких випадкових величин позначимо через Ξ_0.

Для $Z\in\Xi_0$ для будь-якого $k\in\mathbb{N}\colon$ $\mathbf{E}(Z_k)=0$ і

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{E}(Z_k^2)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{D}(Z_k)\le 2D,$$

де $\mathbf{D}(Z_k):=\mathbf{E}(Z_k^2)-(\mathbf{E}Z_k)^2$ — дисперсія випадкової величини Z_k.

Зауважимо, що будь-яка послідовність випадкових величин $\{Z_n\}\in\Xi_0$ задовольняє умови твердження 2.3 з $\alpha=2$ і радіус збіжності R_ω випадкового степеневого ряду вигляду (2.18) дорівнює майже напевно радіусу збіжності ряду (2.1).

Для $r\ge0$ та аналітичної функції вигляду (2.1) позначимо через $\nu_f(r)=\max\{n\colon |a_n|r^n=\mu_f(r)\}$ центральний індекс, через $[x]$ — цілу частину x,

$$\mathfrak{M}_f(r)=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r^n,\ \ M_f(r,N,\omega)=\max_{0\le\theta<2\pi}\left|\sum_{n=0}^{N}Z_n(\omega)a_nr^ne^{in\theta}\right|,$$

$$S_f^2(r)=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n},\quad S_N=S_N(r)=\left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2r^{2n}\right)^{1/2}.$$

Подібно до [103] можна довести наступний аналог теореми Салема-Зігмунда ([84, 161]).

Лема 2.11. *Нехай $Z \in \Xi_0, h \in \mathcal{H}_R, f \in \mathcal{E}_R, N \in \mathbb{N}$. Тоді існують абсолютна стала $C > 0$ і множина E скінченної h-логарифмічної міри такі, що*

$$P\{M_f(r, N, \omega) \geq CS_N \ln\ln S_N \sqrt{\ln N}\} \leq \frac{2}{N^2},\ r \uparrow R.$$

Лема 2.12. *Нехай $Z \in \Xi_0,\ f \in \mathcal{E}_R, h \in \mathcal{H}_R, N = [h^5(r)\ln^5\{h(r)\mu_f(r)\}]$. Тоді існують абсолютна стала $C > 0$ і множина E скінченної h-логарифмічної міри такі, що для $r \uparrow R$ $(r \notin E)$ маємо*

$$\mathbb{P}\{\omega\colon M_f(r, \omega) \geq CS_N(r) \ln\ln S_N(r)\sqrt{\ln N(r)} + \mu_f(r)\} \leq \frac{2D+2}{N^2(r)}.$$

Доведення. Для $\delta > 0$ позначимо

$$E_1 = \left\{r\colon r\frac{\partial}{\partial r}\ln \mathfrak{M}_f(r) > h(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_f(r),\ \ln\mathfrak{M}_f(r) > e\right\}.$$

Тоді

$$\int\limits_{E_1}\frac{h(r)dr}{r} < \int\limits_{E_1}\frac{\frac{\partial}{\partial r}\ln\mathfrak{M}_f(r)dr}{\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_f(r)} < \int\limits_1^{+\infty}\frac{du}{u^{1+\delta}} < +\infty.$$

Тому для $r \notin E_1$ отримаємо

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n \leq h(r)\mathfrak{M}_f(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_f(r).$$

Нехай

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_nz^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2a_nz^n.$$

Отже, існує множина E_2 скінченної h-логарифмічної міри така, що

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{+\infty} n^3|a_n|r^n \leq h(r)\mathfrak{M}_{f_2}(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_{f_2}(r) \leq \\ \leq h^2(r)\mathfrak{M}_{f_1}(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_{f_1}(r)\ln^{1/2+\delta}\{h(r)\mathfrak{M}_{f_1}(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_{f_1}(r)\} \leq \\ \leq h^2(r)\ln^2 h(r)\mathfrak{M}_{f_1}(r)\ln^{2+3\delta}\mathfrak{M}_{f_1}(r) \leq \\ \leq h^3(r)\ln^2 h(r)\mathfrak{M}_f(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_f(r)\ln^{2+3\delta}\{h(r)\mathfrak{M}_f(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_f(r)\} \leq \\ \leq h^{3+\delta}(r)\mathfrak{M}_f(r)\ln^{4+7\delta}\mathfrak{M}_f(r).\end{gathered}$$

Для $n \geq N(r)$ розглянемо події $B_n = \{\omega\colon |Z_n(w)| \geq n^{3/2}\}$. Використовуючи нерівність Маркова, можна оцінити ймовірності цих подій. Тобто,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\{\omega\colon |Z_n(\omega)|^2 \geq n^3\} \leq \frac{\mathbf{D}Z_n}{n^3} \leq \frac{2D}{n^3},$$

$$\sum_{n=N(r)}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) \le 2D \sum_{n=N(r)}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \le \frac{2D}{N^2(r)},\ r \uparrow R.$$

Нехай

$$B = \bigcup_{n=N(r)}^{+\infty} B_n.$$

Тоді $\mathbb{P}(B) \le \frac{2D}{N^2(r)},\ r \uparrow R$. З (2.15) випливає, що для $\omega \notin B$ та $r \notin E_2$

$$\max_{0\le\theta<2\pi} \left| \sum_{n=N(r)}^{+\infty} Z_n(\omega) a_n r^n e^{in\theta} \right| \le \sum_{n=N(r)}^{+\infty} |Z_n(\omega)||a_n| r^n \le \sum_{n=N(r)}^{+\infty} n^{3/2} \frac{n}{N(r)} |a_n| r^n \le$$

$$\le \frac{1}{N(r)} \sum_{n=N(r)}^{+\infty} n^3 |a_n| r^n \le \frac{1}{N(r)} h^{3+\delta}(r) \mathfrak{M}_f(r) \ln^{4+7\delta} \mathfrak{M}_f(r) \le$$

$$\le \frac{1}{N(r)} h^{4+2\delta}(r) \mu_f(r) \big(\ln(h(r)\mu_f(r)) \big)^{9/2+9\delta} \le$$

$$\le \frac{1}{N(r)} h^5(r) \mu_f(r) \ln^5(h(r)\mu_f(r)) \le \mu_f(r), \quad r \uparrow R.$$

Тому,

$$\mathbb{P}\left\{ \omega\colon \max_{0\le\theta<2\pi} \left| \sum_{n=N(r)}^{+\infty} Z_n(\omega) a_n r^n e^{in\theta} \right| \ge \mu_f(r) \right\} \le \frac{2D}{N^2(r)}.$$

Тоді з леми 2.11 отримуємо для $r \notin E_2, r \uparrow R$

$$\mathbb{P}\left\{ \omega\colon \max_{0\le\theta<2\pi} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n(\omega) a_n r^n e^{in\theta} \right| \ge C S_N \ln\ln S_N \sqrt{\ln N(r)} + \mu_f(r) \right\} \le \frac{2D+2}{N^2(r)}.$$

$\square$

Теорема 2.4. *Нехай $Z \in \Xi_0, f \in \mathcal{E}_R, h \in \mathcal{H}_R, \delta > 0$. Тоді існує множина $E(\delta)$ скінченної h-логарифмічної міри така, що для всіх $r \in (r_0(\omega), R) \backslash E$ майже напевно в $K(f, \mathcal{Z})$ виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega) \le \sqrt{h(r)} \mu_f(r) (\ln^3 h(r) \ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+\delta}. \tag{2.19}$$

Доведення. Виберемо $k(r) = h(r)\mu_f(r)$, множину E та послідовність (r_k) з леми 2.12. Нехай

$$F_k = \{\omega\colon M_f(r_k,\omega) \ge C S_{N(r_k)}(r_k) \ln\ln S_{N(r_k)}(r_k) \sqrt{\ln N(r_k)} + \mu_f(r_k)\}.$$

За лемою 2.10 і за означенням $N(r)$ отримуємо

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(F_k) \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2D+2}{N^2(r_k)} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2D+2}{\ln^{10} h(r) \ln^{10}(h(r_k)\mu_f(r_k))} \le$$

$$\leq \frac{D+1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{10}} < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантеллі для майже всіх $\omega \in [0;1]$ існує таке $k_0(\omega)$, що для $k \geq k_0(\omega)$ маємо

$$M_f(r_k,\omega) < CS_{N(r_k)}(r_k)\ln\ln S_{N(r_k)}(r_k)\sqrt{\ln N(r_k)} + \mu_f(r_k).$$

Використавши нерівність $S_{N(r)}(r) \leq \mathfrak{M}_f(r)\mu_f(r)$ та означення $N(r)$ отримаємо

$$M_f(r_k,\omega) < C\sqrt{\mathfrak{M}_f(r_k)\mu_f(r_k)}\ln\ln(\mathfrak{M}_f(r_k)\times$$
$$\times\mu_f(r_k))\ln^{1/2}(h^5(r_k)\ln^5(h(r_k)\mu_f(r_k))) + \mu_f(r_k) <$$
$$< \sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k)(\ln^3 h(r_k)\ln\{h(r_k)\mu_f(r_k)\})^{1/4+3\delta}.$$

Нехай $r \geq r_{k_0(\omega)}$ — довільне число поза множиною E, $r \in (r_p, r_{p+1})$. За лемою 2.10

$$h(r_{p+1})\mu_f(r_{p+1}) \leq eh(r_p)\mu_f(r_p) \leq eh(r)\mu_f(r),$$
$$h(r_{p+1}) \leq eh(r),\ \mu_f(r_{p+1}) \leq e\mu_f(r).$$

Тому для майже всіх $\omega \in [0;1]$ і $r \geq r_0(\omega)$ поза множиною скінченної h-логарифмічної міри E маємо

$$M_f(r,\omega) \leq M_f(r_{p+1},\omega) <$$
$$< \sqrt{h(r_{p+1})}\mu_f(r_{p+1})(\ln^3 h(r_{p+1})\ln\{h(r_{p+1})\mu_f(r_{p+1})\})^{1/4+3\delta} \leq$$
$$\leq e\sqrt{eh(r)}\mu_f(r_{p+1})(\ln^3(eh(r))\ln\{eh(r)\mu_f(r)\})^{1/4+3\delta} \leq$$
$$\leq \sqrt{h(r)}\mu_f(r_{p+1})(\ln^3 h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+4\delta}.$$

□

У випадку комплексних випадкових величин ми отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.2. *Нехай* $\operatorname{Re} Z \in \Xi_0$, $\operatorname{Im} Z \in \Xi_0$, $f \in \mathcal{E}_R$, $h \in \mathcal{H}_R$, $\delta > 0$. *Тоді існує множина* $E(\delta)$ *скінченної* h*-логарифмічної міри така, що для всіх* $r \in (r_0(\omega), R)\backslash E$ *майже напевно в* $K(f,\mathcal{Z})$ *маємо*

$$M_f(r,\omega) \leq \sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln^3 h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+\delta}.$$

Існує послідовність $Z \notin \Xi_0$ така, що $\mathbf{E}Z_n = 0$, $\sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty$ і нерівність (2.19) не виконується. Це випливає з наступного твердження для цілих функцій $f \in \mathcal{E}_{+\infty}$.

Теорема 2.5. *Для будь-якого* $\alpha > 0$ *існує послідовність дійсних незалежних випадкових величин таких, що*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n = 0,\ \sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty,$$

ціла функція $f \in \mathcal{E}_{+\infty}$ *і* $h \in \mathcal{H}_{+\infty}$ *такі, що майже напевно в* $K(f,\mathcal{Z})$ *виконується нерівність*

$$M_f(r,\omega) \geq \sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln^3 h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4+\alpha},\ r \in (r_0(\omega);+\infty).$$

Доведення. Проводиться подібно до доведення теореми 2.3 з $h(r) \equiv \text{const}$. $\square$

Доведемо подібне твердження для $f \in \mathcal{E}_1$.

Теорема 2.6. *Для будь-якого $\alpha > 0$ існує послідовність дійсних незалежних випадкових величин таких, що*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\ \mathbf{E}Z_n = 0,\ \sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty,$$

аналітична функція $f \in \mathcal{E}_1$ і $h \in \mathcal{H}_1$ така, що майже напевно в $K(f, \mathcal{Z})$

$$M_f(r,\omega) \geq \sqrt{h(r)}\mu_f(r) \ln^\alpha \mu_f(r)(\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4},\ r \in (r_0(\omega); 1).$$

Доведення. Виберемо

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(n^\varepsilon)z^n}{n^\alpha},\ g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(n^\varepsilon)z^n$$

і послідовність незалежних випадкових величин (Z_n) таку, що

$$\mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega) = -n^\alpha\} = \mathbb{P}\{\omega\colon Z_n(\omega) = n^\alpha\} = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\mathbf{E}Z_n = -n^\alpha \frac{1}{2} + n^\alpha \frac{1}{2} = 0,\ \mathbf{D}Z_n = n^{2\alpha}\frac{1}{2} + n^{2\alpha}\frac{1}{2} = n^{2\alpha},\ \sup_n \mathbf{D}Z_n = +\infty.$$

Позначимо

$$f(z,\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n(\omega)\frac{\exp(n^\varepsilon)z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(\omega)\exp(n^\varepsilon)z^n = g(z,\omega),$$
$$M_f(r,\omega) = M_g(r,\omega),$$

де $(R_n(\omega))$ — послідовність випадкових величин Радемахера. У [11] для $g(z,\omega)$ було доведено, що для $g(z,\omega)$, $h(r) = (1-r)^{-1}$ і деякого $C > 0$ виконується нерівність

$$M_f(r,\omega) = M_g(r,\omega) \geq \sqrt{h(r)}\mu_g(r)(\ln\{h(r)\mu_g(r)\})^{1/4},\ r \uparrow 1.$$

Зауважимо, що

$$\mu_g(r) = \max_{n\in\mathbb{Z}_+}\Big\{\exp(n^\varepsilon)r^n\Big\} = \max_{n\in\mathbb{Z}_+}\Big\{n^\alpha\frac{\exp(n^\varepsilon)r^n}{n^\alpha}\Big\} \geq \nu_f^\alpha(r)\mu_f(r).$$

З

$$\ln\mu_h(r) - \ln\mu_h(r_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{\nu_h(t)dt}{t} \leq \nu_h(r)(\ln r - \ln r_0)$$

випливає, що для будь-якого $r > r_2 > r_0$ існує стала $c > 0$ така, що

$$\nu_f(r) \geq \frac{\ln\mu_f(r) - \ln\mu_f(r_0)}{\ln r - \ln r_0} \geq \frac{c\ln\mu_f(r)}{-\ln r_0}.$$

Тоді
$$\mu_g(r) \geq \nu_f^{\alpha}(r)\mu_f(r) \geq C_1\mu_f(r)\ln^{\alpha}\mu_f(r).$$
Отже, майже напевно в $K(f, Z)$ ми отримуємо
$$M_f(r,\omega) > \sqrt{h(r)}\mu_g(r)(\ln\{h(r)\mu_g(r)\})^{1/4} \geq$$
$$\geq \sqrt{h(r)}C_1\mu_f(r)\ln^{\alpha}\mu_f(r)(\ln\{h(r)C_1\mu_f(r)\ln^{\alpha}\mu_f(r)\})^{1/4} \geq$$
$$\geq \sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^{\alpha}\mu_f(r)(\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{1/4},\ r \in (r_0(\omega); 1).$$

□

Основні здобутки другого розділу:

1) отримано аналоги співвідношення Бореля та нерівності Вімана для цілих і аналітичних функцій від однієї змінної та новий опис виняткової множини у цих співвідношеннях;
2) вперше перевірено наявність ефекту Леві для цілих та аналітичних у крузі функцій у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою.

Результати другого розділу опубліковано в статтях [103, 113, 124], а також доповідалися на конференції [104] і наукових семінарах.

РОЗДІЛ 3. ЕФЕКТ ЛЕВІ ТА НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У КРАТНО-КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ РЕЙНХАРДА

У даному розділі досліджується нерівність типу Вімана для аналітичних та випадкових аналітичних в кратно-кругових областях Рейнхарда.

3.1. Нерівність Вімана у кратно-круговій області Рейнхарда

Позначимо через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, $p \in \mathbb{N}$, клас аналітичних функцій f у повній кратно-круговій області Рейнхарда $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$, представлених степеневими рядами вигляду

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.1}$$

з областю збіжності $\mathbb{G}$, де

$$z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p},\ z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G},\ n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p,\ \|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j;$$

$\mathcal{E}^p := \mathcal{A}_0^p(\mathbb{C}^p)$ клас необмежених цілих функцій декількох змінних (тобто, аналітичних функцій в $\mathbb{C}^p$); через $\mathcal{E}_R := \mathcal{A}_0^1(\mathbb{D}_R)$ $(0 < R \le +\infty)$ ми позначимо клас аналітичних функцій від однієї комплексної змінної у крузі $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$. Зокрема, $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{+\infty} = \mathcal{E}^1$ — це клас цілих функцій від однієї комплексної змінної.

Для функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ вигляду (3.1) з областю збіжності $\mathbb{G}$ та

$$r = (r_1, \dots, r_p) \in G := \{r = (r_1, \dots, r_p) \colon r_j = |z_j|, z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G}\}$$

позначимо

$$\Delta_{r_0} = \{t \in G \colon t_j \ge r_j^0,\ j \in \{1, \dots, p\}\}, \quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r_1^{n_1} \dots r_p^{n_p} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\},$$

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z_1| = r_1, \dots, |z_p| = r_p\}, \quad \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

З одного боку, добре відомо, що кожна аналітична функція f у повній області Рейнхарда $\mathbb{G}$ з центром $z = 0$ може бути представленою в $\mathbb{G}$ рядом вигляду (3.1). З другого боку, область збіжності такого ряду вигляду (3.1) є логарифмічно-опукла повна область Рейнхарда з центром $z = 0$.

Будемо казати, що область $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$ є *повною областю Рейнгарда*, якщо:

а) $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall R = (R_1, \dots, R_p) \in [0; 1]^p) \colon Rz = (R_1 z_1, \dots, R_p z_p) \in \mathbb{G}$ (*повна область*);

б) $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall(\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p)\colon (z_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbb{G}$ (*кратно-кругова область*).

Область Рейнхарда $\mathbb{G}$ називається *логарифмічно-опуклою*, якщо образ множини $G^* = \{z \in \mathbb{G}\colon z_1 \cdot \ldots \cdot z_p \neq 0\}$ відображенням

$$\mathrm{Ln}\colon z \to \mathrm{Ln}(z) = (\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_p|)$$

є опуклою в $\mathbb{R}^p$. На комплексній площині ($p = 1$), логарифмічно-опуклою областю Рейнхарда є круг. Наступні повні області Рейнхарда ($p \geq 2$) часто розглядаються:

$$C_p(R) := \{z \in \mathbb{C}^p\colon |z_1| < R_1, \ldots, |z_p| < R_p\},$$
$$R = (R_1, \ldots, R_p) \in (0; +\infty)^p, \quad \text{(полікруг)},$$
$$\mathbb{B}_p(r) := \left\{z \in \mathbb{C}^p\colon |z| := \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2} < r\right\}, \quad \text{(куля)},$$
$$\Pi_p(r) := \{z \in \mathbb{C}^p\colon |z_1| + \ldots + |z_p| < r\}, \quad r > 0.$$

Зауважимо, що $C_p(R) \subset \mathbb{G}$ для кожного $w = (w_1, \ldots, w_p) \in \mathbb{G}$ та $R = (|w_1|, \ldots, |w_p|)$. Області

$$C_p(re_1),\ e_1 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p,\ \mathbb{B}_p(r),\ \Pi_p(r)\ (r > 0)$$

є логарифмічно-опуклими повними областями Рейнхарда. Але, наприклад, повна область Рейнхарда

$$G_{1,2} = \{z = (z_1, z_2)\colon |z_1| < 1, |z_2| < 2\} \cup \{z = (z_1, z_2)\colon |z_1| < 2, |z_2| < 1\}$$

не є логарифмічно-опуклою областю.

Метою цього підрозділу є доведення аналогів нерівності Вімана для аналітичних функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, які можна представити рядом вигляду (3.1), областю збіжності якого є довільна повна область Рейнгарта $\mathbb{G}$. Через $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ ми позначаємо підклас функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ такий, що

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f(z_1, \ldots, z_p) \not\equiv 0$$

у $\mathbb{G}$ для будь-якого $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Нехай $\mathcal{H}^p$ — клас функцій $h\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ таких, що h є неспадною по кожній змінній і

$$\int\limits_{G\cap\Delta_\varepsilon} \cdots \int h(r) \prod_{j=1}^p \frac{dr_j}{r_j} = +\infty$$

для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ такого, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $\mathbb{R}_+^p$.

Для $h \in \mathcal{H}^p$ вважатимемо, що $E \subset G$ є множиною *скінченної логарифмічної h-міри на G*, якщо існує $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що $G \cap \Delta_\varepsilon$ є непорожньою областю в $G \subset \mathbb{R}_+^p$ і

$$\nu_h(E \cap \Delta_\varepsilon) := \int\limits_{E\cap\Delta_\varepsilon} \cdots \int h(r) \prod_{j=1}^p \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо $\mathcal{S}_h$.

Теорема 3.1. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ та $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq$$

$$\leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{j=1}^{p}\Bigg(\prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{1}{2}+\delta}. \qquad (3.2)$$

При доведенні основного результату використовується ймовірнісне міркування з [75, 165], яке вже стало традиційним у цій темі, і відрізняється від доведення подібних тверджень у [107].

При нашому доведенні фактично використовується кілька лем (леми 3.1–3.4) зі статті [75]. Але їх доведення в [75] виписані недостатньо повно, а також містять неточності в міркуваннях. Тому ми подаємо їх тут разом з повними доведеннями.

Щоб довести нерівність типу Вімана для аналітичних функцій у $\mathbb{G}$, нам потрібні наступні допоміжні результати.

Нехай $D_f(r) = (D_{ij})$ — $p \times p$ матриця така, що

$$D_{ij} = r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln M_f(r)\Big) = \partial_i\partial_j \ln M_f(r), \quad \partial_i = r_i\frac{\partial}{\partial r_i}, \quad i, j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Нехай I — одинична матриця порядку p.

Для $E \subset \mathbb{R}^p$ через $\#(E\cap\mathbb{Z}^p_+)$ позначимо кількість елементів множини $E\cap\mathbb{Z}^p_+$.

Лема 3.1. *Нехай B — паралелепіпед у $\mathbb{R}^p$ з ребрами довжин $l_1, l_2, \ldots, l_p$ такий, що існує ізометрія $H\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ така, що*

$$H\colon B \to \{x \in \mathbb{R}^p\colon |x_j| \leq l_j/2, j \in \{1, 2, \ldots, p\}\}.$$

Тоді

$$\#(B \cap \mathbb{Z}^p) \leq \lambda_p \prod_{j=1}^{p}(l_j + 1), \quad \lambda_p = \frac{2^n \cdot \Gamma(\frac{n+2}{2})}{\pi^{n/2}} = \frac{1}{V_p(1/2)},$$

де $V_p(1/2)$ — об'єм кулі радіуса $\frac{1}{2}$ у $\mathbb{R}^p$.

Доведення. Позначимо

$$B' = \Big\{x \in \mathbb{R}^p\colon |x_j| \leq \frac{l_j}{2},\ j \in \{1, \ldots, p\}\Big\},$$

$$B^* = \Big\{x \in \mathbb{R}^p\colon |x_j| \leq \frac{l_j + 1}{2},\ j \in \{1, \ldots, p\}\Big\} \supset B.$$

Нехай $S(n)$ — відкрита сфера з центром у $n \in \mathbb{Z}^p_+$ радіусом $\frac{1}{2}$. Зауважимо, що

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^p_+\cap B} S(n) \subseteq B^*.$$

За монотонністю міри Лебега μ в $\mathbb{R}^p$ одержимо

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+^p\cap B} S(n)\right) \le \mu(B^*).$$

Зрештою, за допомогою адитивності цієї міри отримуємо

$$\mu(S(1/2))\cdot\#\{B\cap\mathbb{Z}_+^p\} \le \prod_{j=1}^{p}(l_j+1), \quad \#\{B\cap\mathbb{Z}_+^p\} \le \frac{1}{\mu(S(1/2))}\prod_{j=1}^{p}(l_j+1).$$

$\square$

Через A^+ ми позначимо обернену матрицю за Муром–Пенроузом до A([44, 75, 135, 154]), тобто

$$A^+ = \lim_{\delta\to 0} A^T(AA^T+\delta I)^{-1},$$

де I — одинична матриця порядку, який рівний кількості рядків матриці A.

Лема 3.2. *Нехай $\alpha\in\mathbb{R}^p, C>0$, A є $p\times p$ невід'ємною визначеною матрицею $0<m=\operatorname{rank}A\le p$ і*

$$E=\{x\in\mathbb{R}^m\colon (x-\alpha)A^+(x-\alpha)^T\le C\}.$$

Існує стала $\delta=\delta(C,p)>0$, яка не залежить від A і α така, що

$$\#\{E\cap\mathbb{Z}_+^m\}\le\delta(\det(A+I))^{1/2}.$$

Доведення. Нехай $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_m$ — додатні власні значення матриці A. Тоді $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\ldots,\frac{1}{\lambda_m}$ є власними значеннями матриці A^+. Отже, існує ізометрія $H\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ така, що

$$H\colon E\to\left\{x\in\mathbb{R}^m\colon \sum_{j=1}^{m}\frac{x_j^2}{\lambda_j}\le C\right\},$$

$$E\subset H^{-1}\{x\in\mathbb{R}^m\colon x\le\sqrt{C\lambda_j},\quad j\in\{1,2,\ldots,m\}\}.$$

За лемою 3.1 існує стала $\delta'>0$ така, що

$$\#\{E\cap\mathbb{Z}_+^m\}\le\delta'\prod_{j=1}^{m}(2(C\lambda_j)^{1/2}+1)=\delta'\prod_{j=1}^{p}(2(C\lambda_j)^{1/2}+1).$$

Залишається зауважити, що

$$\prod_{j=1}^{p}(\lambda_j+1)=\det(A+I),$$

$$\#\{E\cap\mathbb{Z}_+^p\}\le\delta'(\sqrt{2C})^p\left(\prod_{j=1}^{p}(\lambda_j+1)\right)^{1/2}\le\delta''(\det(A+I))^{1/2}.$$

$\square$

Лема 3.3. *Нехай* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)^T$ *— випадковий вектор,*

$$\alpha = \mathbf{E}\xi = (\mathbf{E}\xi_1, \mathbf{E}\xi_2, \ldots, \mathbf{E}\xi_p)^T,$$

A *— коваріаційна матриця* ξ, $\delta > 0$, $0 < m = \operatorname{rank} A \le p$. *Тоді*

$$P\{\omega\colon (\xi(\omega) - \alpha)A^+(\xi(\omega) - \alpha)^T \le \delta\} \ge 1 - \frac{m}{\delta}.$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину

$$Z(\omega) = (\xi(\omega) - \alpha)^T A^+(\xi(\omega) - \alpha).$$

Оскільки A є невід'ємно визначеною матрицею, то $\forall\omega \in \Omega\colon Z(\omega) \ge 0$. Крім того, A також є симетричною. Тоді існує ортогональна матриця G така, що $GG^T = G^T G = I$ і $G^T AG = Q$. Тут

$$Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)$$

— діагональна матриця з упорядкованими власними значеннями

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_m > 0, \quad 0 < m = \operatorname{rank} A \le p.$$

Тоді (див., наприклад, [44, 153])

$$G^T AG = Q, \quad GG^T AGG^T = GQG^T \implies A = GQG^T,$$
$$A^+ = (GQG^T)^+ = (G^T)^+ Q^+ G^+ = (G^T)^{-1} Q^+ G^{-1} = GQ^+ G^T,$$

тобто $A = GQG^T$, $A^+ = GQ^+G^T$. Тому,

$$\begin{aligned} Z = (\xi - \alpha)^T A^+(\xi - \alpha) = (\xi - \alpha)^T GQ^+ G^T(\xi - \alpha) = \\ = (\xi - \alpha)^T GQ^{-1/2} Q^{-1/2} G^T(\xi - \alpha) = \\ = (Q^{-1/2} G^T(\xi - \alpha))^T (Q^{-1/2} G^T(\xi - \alpha)) = Y^T Y, \end{aligned}$$

де

$$Y = Q^{-1/2} G^T(\xi - \alpha), \; Q^{-1/2} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \lambda_2^{-1/2}, \ldots, \lambda_m^{-1/2}, 0, \ldots, 0).$$

Математичне сподівання і коваріаційна матриця випадкового вектора Y задовольняють рівняння

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}(Q^{-1/2} G^T(\xi - \alpha)) = Q^{-1/2} G^T \mathbf{E}(\xi - \alpha) = 0,$$
$$\operatorname{cov} Y = \operatorname{cov}(Q^{-1/2} G^T(\xi - \alpha)) = \operatorname{cov}(Q^{-1/2} G^T \xi) = Q^{-1/2} G^T \operatorname{cov}(\xi)(Q^{-1/2} G^T)^T =$$
$$= Q^{-1/2} G^T AGQ^{-1/2} = Q^{-1/2} QQ^{-1/2} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m \text{ разів}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-m \text{ разів}}).$$

Тому,

$$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}(Y^T Y) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p} Y_j^2\right) = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{E}(Y_i^2) = \sum_{j=1}^{p} D(Y_j) = m.$$

Залишається використати нерівність Маркова.

$$P\{\omega\colon Z(\omega) \ge \delta\} = P\{\omega\colon (\xi(\omega) - \alpha)A^+(\xi(\omega) - \alpha)^T \le \delta\} \le \frac{\mathbf{E}Z}{\delta} = \frac{m}{\delta}.$$
$$P\{\omega\colon (\xi(\omega) - \alpha)A^+(\xi(\omega) - \alpha)^T \le \delta\} \ge 1 - \frac{m}{\delta}.$$

□

Лема 3.4 (теорема 3.1, [75]). *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$. Існує стала $C_0(p)$ така, що*

$$\mathfrak{M}_f(r) \le C_0(p)\mu_f(r)(\det(D_f(r)+I))^{1/2}.$$

Доведення. Розглянемо випадковий вектор $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_p(\omega))$ такий, що

$$P\{\omega\colon X_j(\omega) = n_j, j \in \{1,\dots,p\}\} = \frac{1}{\mathfrak{M}_f(r)}|a_{n_1\dots n_p}|r_1^{n_1}\dots r_p^{n_p},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді для $j \in \{1,2,\dots,p\}$ ми отримаємо

$$\mathbf{E}X_j = \frac{1}{\mathfrak{M}_f(r)}\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} n_j|a_n|r^n = r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r).$$

$D_f(r)$ — коваріаційна матриця випадкового вектора $X(\omega)$.

Можна вибрати $\delta = 2p$ у лемі 3.3. Тоді

$$\frac{1}{2} \le 1 - \frac{m}{2p} \le P\{\omega\colon (x-\alpha)D_f^+(x-\alpha)^T \le 2p\} \le$$
$$\le \frac{\mu_f(r)}{\mathfrak{M}_f(r)}\cdot\#\{x\in\mathbb{R}_+^p\colon (x-\alpha)D_f^+(x-\alpha)^T \le 2p\} \le$$
$$\le 2p\frac{\mu_f(r)}{\mathfrak{M}_f(r)}(\det(D_f(r)+I))^{1/2},$$
$$\mathfrak{M}_f(r) \le 4p\mu_f(r)(\det(D_f(r)+I))^{1/2}.$$

□

Лема 3.5. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$. Тоді для $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G\cap\Delta_\varepsilon)\setminus E$ виконуються нерівності*

$$\det(D_f(r)+I) \le h(r)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^p\Bigg(\bigg(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r) + \ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\bigg)\ln^{1+\delta}\bigg(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\bigg)\Bigg), \tag{3.3}$$

$$r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r) \le h(r)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_f(r)\prod_{k=1,k\ne j}^p\ln^{1+\delta}\Big(\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Big),\ j\in\{1,\dots,p\}. \tag{3.4}$$

Доведення. Нехай $E_0 \subset G$ — множина, для якої не виконується нерівність (3.3). Тепер ми доведемо, що $E_0 \in \mathcal{S}_h$. Оскільки $r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r) > 0$, то для кожного $r \in G\cap\Delta_\varepsilon$ маємо

$$r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r) + \ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big) > 1,\ j\in\{1,\dots,p\}.$$

Тоді

$$\nu_h(E_0\cap\Delta_\varepsilon) = \int\!\!\cdots\!\!\int_{E_0\cap\Delta_\varepsilon} h(r)\prod_{j=1}^p\frac{dr_j}{r_j} \le$$

$$\leq \int\limits_{E_0\cap\Delta_\varepsilon}\cdots\int \frac{\det(D_f(r)+I)\prod\limits_{j=1}^{p} dr_j}{\prod\limits_{j=1}^{p}\Big(r_j\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j\Big)\ln^{1+\delta}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j\Big)\Big)}.$$

Нехай $U\colon G\to\mathbb{R}^p_+$ — таке відображення, що

$$U=(u_1(r),u_2(r),\ldots,u_p(r))\colon\ u_j(r)=r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln M_f(r)+\ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big),$$
$$j\in\{1,\ldots,p\},\ r=(r_1,r_2,\ldots,r_p).$$

Тоді для $i,j\in\{1,2,\ldots,p\}$ одержимо

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i}=\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\Big)=\frac{1}{r_i}\partial_i\partial_i\ln\mathfrak{M}_f(r)+\frac{1}{r_i},$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial r_j}=\frac{\partial}{\partial r_j}\Big(r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\Big)=\frac{1}{r_j}\partial_i\partial_j\ln\mathfrak{M}_f(r),\ i\neq j.$$

Отже, якобіан

$$J_1:=\frac{D(u_1,u_2,\ldots,u_p)}{D(r_1,r_2,\ldots,r_p)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial r_p}\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \frac{\partial u_p}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial u_p}{\partial r_p}\end{vmatrix}=\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{r_j}\cdot\det(D_f(r)+I).$$

Тому,

$$\nu_h(E_0\cap\Delta_\varepsilon)\leq\int\limits_{U(E_0\cap\Delta_\varepsilon)}\cdots\int\prod_{j=1}^{p}\frac{du_j}{u_j\ln^{1+\delta}u_j}\leq\int\limits_{1}^{+\infty}\cdots\int\limits_{1}^{+\infty}\prod_{j=1}^{p}\frac{du_j}{u_j\ln^{1+\delta}u_j}<+\infty.$$

Нехай $E_1\subset G$ — множина, для якої нерівність (3.4) не виконується для $j=1$. Тепер доведемо, що $E_1\cap\Delta_\varepsilon\in\mathcal{S}_h$.

Тоді

$$\nu_h(E_1\cap\Delta_\varepsilon)=\int\limits_{E_1\cap\Delta_\varepsilon}\cdots\int h(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{dr_j}{r_j}\leq$$
$$\leq\int\limits_{E_1\cap\Delta_\varepsilon}\cdots\int\frac{r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r)dr_1\ldots dr_p}{\Big(\prod\limits_{j=1}^{p}r_j\Big)\ln^{1+\delta}\mathfrak{M}_f(r)\prod\limits_{j=2}^{p}\Big(\ln^{1+\delta}\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\Big)}.$$

Нехай $V\colon G\to\mathbb{R}^p_+$ — таке відображенням, що $V=(v_1(r),v_2(r),\ldots,v_p(r))$ та $v_1(r)=\ln\mathfrak{M}_f(r),\ v_j=\ln(\frac{er_j}{\varepsilon_j}),\ j\in\{2,\ldots,p\},\ r=(r_1,r_2,\ldots,r_p)$. Тоді якобіан

$$J_2:=\frac{D(v_1,v_2,\ldots,v_p)}{D(r_1,r_2,\ldots,r_p)}=$$
$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r) & \frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r) & \cdots & \frac{\partial}{\partial r_p}\ln\mathfrak{M}_f(r)\\ 0 & \frac{1}{r_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{r_p}\end{vmatrix}=\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{r_j}\cdot r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r).$$

Отже,

$$\nu_h(E_1 \cap \Delta_\varepsilon) \le \int\limits_{U(E_0\cap\Delta_\varepsilon)} \!\!\cdots \int \prod_{j=1}^{p} \frac{du_j}{u_j^{1+\delta}} \le \int\limits_1^{+\infty} \cdots \int\limits_1^{+\infty} \prod_{j=1}^{p} \frac{du_j}{u_j^{1+\delta}} < +\infty.$$

Нехай $E_j \subset G$ — множини, для яких нерівність (3.4) не виконується для $j \in \{2, \dots, p\}$, відповідно. Аналогічно $E_j \cap \Delta_\varepsilon \in \mathcal{S}_h$ для $j \in \{2, \dots, p\}$. Залишається зауважити, що множина $E = \bigcup_{j=0}^{p} E_j$ також є множиною скінченної логарифмічної h-міри в G. $\square$

Доведення теореми 3.1. Нехай E — виняткова множина з леми 3.2. Тоді, використовуючи лему 3.1, ми отримуємо для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$

$$M_f(r) \le \mathfrak{M}_f(r) \le C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2} \le C_0 \mu_f(r) \sqrt{h(r)} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{p} \Big(r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\Big)^{1/2} \prod_{j=1}^{p} \ln^{(1+\delta)/2}\Big(r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\Big) \le$$
$$\le C_0 \mu_f(r) \sqrt{h(r)} \prod_{j=1}^{p} \left(h(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{k=1, k\ne j}^{p} \ln^{1+\delta}\Big(\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Big) + \ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\right)^{1/2} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{p} \ln^{(1+\delta)/2} \left(h(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{k=1, k\ne j}^{p} \ln^{1+\delta}\Big(\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Big) + \ln\Big(\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Big)\right) \le$$
$$\le \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+p\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}} \mathfrak{M}_f(r) \ln^{\frac{p}{2}+p\delta} \ln \mathfrak{M}_f(r) \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{k=1, k\ne j}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{1/2+\delta} \le$$
$$\le \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+p\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}} \mathfrak{M}_f(r) \ln^{\frac{p}{2}+p\delta} \ln \mathfrak{M}_f(r) \prod_{j=1}^{p} \Big(\ln \frac{er_j}{\varepsilon_j} \Big)^{\frac{p-1}{2}(1+4\delta)},$$

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \le \ln \mu_f(r) + \Big(\frac{p+1}{2} + \delta\Big) \ln h(r) +$$
$$+ \Big(\frac{p}{2} + \delta\Big) \ln\ln \mathfrak{M}_f(r) + \Big(\frac{p-1}{2}(1+4\delta)\Big) \sum_{j=1}^{p} \ln^+ \ln \frac{er_j}{\varepsilon_j}.$$

Виберемо множину E так, що $\forall r \in (\Delta_\varepsilon \cap G) \setminus E$

$$\mathfrak{M}_f(r) > C_p^*, \quad \mu_f(r) > 1,$$

де C_p^* — деяка стала така, що $C_p^* \ge \ln^{2p} C_p^*$. Тоді

$$\mathfrak{M}_f(r) \ge \ln^{2p} \mathfrak{M}_f(r), \quad \ln \mathfrak{M}_f(r) \ge 2p \ln\ln \mathfrak{M}_f(r),$$
$$\frac{1}{2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \le \ln \mathfrak{M}_f(r) - \Big(\frac{p}{2} + \delta\Big) \ln\ln \mathfrak{M}_f(r) \le$$
$$\le \ln \mu_f(r) + \Big(\frac{p+1}{2} + \delta\Big) \ln h(r) + \Big(\frac{p-1}{2}(1+4\delta)\Big) \sum_{j=1}^{p} \ln^+ \ln \frac{er_j}{\varepsilon_j},$$

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \le (1+p+2\delta)\ln\left\{\mu_f(r)h(r)\prod_{j=1}^{p}\ln\frac{er_j}{\varepsilon_j}\right\}.$$

$$M_f(r) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}}\ln^{\frac{p}{2}+\delta}h(r)\ln^{\frac{p}{2}}\left\{\mu_f(r)h(r)\prod_{j=1}^{p}\ln\frac{er_j}{\varepsilon_j}\right\}\times$$

$$\times\ln^{1/2+\delta}\ln\left\{\mu_f(r)h(r)\prod_{j=1}^{p}\ln\frac{er_j}{\varepsilon_j}\right\}\prod_{j=1}^{p}\Bigl(\ln\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Bigr)^{\frac{p-1}{2}(1+5\delta)}\le$$

$$\le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}}\ln^{\frac{p}{2}+\delta}h(r)\ln^{\frac{p}{2}+\delta_1}\{\mu_f(r)h(r)\}\prod_{j=1}^{p}\Bigl(\ln\frac{er_j}{\varepsilon_j}\Bigr)^{\frac{p-1}{2}+\delta_1},\ \delta_1 = 5p\delta.$$

□

Наслідки, гіпотези. Розглянемо випадок, коли область G обмежена. Тоді існує такий $R>0$, що $G\subset C_p(R) := \{z\in\mathbb{C}^p\colon |z_i|<R,\ i\in\{1,\dots,p\}\}$. Тому для всіх $r\in(G\cap\Delta_\varepsilon)\setminus E$ маємо

$$\prod_{j=1}^{p}\Biggl(\prod_{k=1,k\ne j}^{p}\ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Biggr)^{\frac{1}{2}+\delta}\le\prod_{k=1}^{p}\Bigl(\ln\frac{eR}{\varepsilon_k}\Bigr)^{\frac{p}{2}+p\delta}.$$

Позначимо

$$K := \left\{z\in G\colon\ \ln^{\delta}h(r)\le\prod_{k=1}^{p}\Bigl(\ln\frac{eR}{\varepsilon_k}\Bigr)^{\frac{p}{2}+p\delta}\right\}.$$

Також міра множини $\nu_h(E\cap\Delta_\varepsilon)$ є скінченною, коли

$$\nu_h^*(E\cap\Delta_\varepsilon)=\underset{E\cap\Delta_\varepsilon}{\int\cdots\int}h(r)\prod_{j=1}^{p}dr_j<+\infty.$$

Зауважимо, що

$$\nu_h^*(K\cap\Delta_\varepsilon)=\underset{K\cap\Delta_\varepsilon}{\int\cdots\int}h(r)\prod_{j=1}^{p}dr_j\le\exp\left\{\prod_{k=1}^{p}\Bigl(\ln\frac{eR}{\varepsilon_k}\Bigr)^{\frac{p}{2\delta}+p}\right\}\underset{K\cap\Delta_\varepsilon}{\int\cdots\int}\prod_{j=1}^{p}dr_j\le$$

$$\le\exp\left\{\prod_{k=1}^{p}\Bigl(\ln\frac{eR}{\varepsilon_k}\Bigr)^{\frac{p}{2\delta}+p}\right\}\underset{G}{\int\cdots\int}\prod_{j=1}^{p}dr_j<+\infty.$$

Для всіх $r\in(G\cap\Delta_\varepsilon)\setminus(E\cup K)$ ми одержимо

$$M_f(r)\le\mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}}\ln^{\frac{p}{2}+\delta}h(r)\ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}\prod_{j=1}^{p}\Biggl(\prod_{k=1,k\ne j}^{p}\ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Biggr)^{\frac{1}{2}+\delta}\le$$

$$\le\mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}}\ln^{\frac{p}{2}+\delta}h(r)\ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}\prod_{k=1}^{p}\Bigl(\ln\frac{eR}{\varepsilon_k}\Bigr)^{\frac{p}{2}+p\delta}\le$$

$$\leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+2\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}.$$

Отже, доведемо таке твердження.

Теорема 3.2. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $\mathbb{G}$ є обмеженою. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}.$$

У тому випадку, коли

$$G = \mathbb{B}_p(1) := \left\{ z \in \mathbb{C}^p \colon |z| := \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2} < 1 \right\}$$

можна вибрати $h(r) = (1-|r|)^{-p}$, $|r| = (r_1^2 + \ldots + r_p^2)^{1/2}$.

Теорема 3.3. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{B}_p(1))$, $h(r) = (1-|r|)^{-p}$. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$, $\delta > 0$ існує така множина $E \in \mathcal{S}_h$, що для всіх $r \in (|\mathbb{B}_p(1)| \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \frac{\mu_f(r)}{(1-|r|)^{\frac{1}{2}(p^2+p)+\delta}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-|r|}.$$

Якщо додатково припустити, що

$$h(r) = \prod_{j=1}^{p} h_j(r_j), \tag{3.5}$$

то нерівність (3.4) з леми 3.5 можна замінити такою

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) \leq h^\delta(r) h_j^{1-\delta}(r_j) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln^{1+\delta}\left(\frac{er_k}{\varepsilon_k}\right),\ j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Для таких функцій h отримано наступне твердження.

Теорема 3.4. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$ задовольняє умову (3.5). Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)(h(r))^{1+\delta} \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{2}+\delta}.$$

Припущення 1. *Описи виняткових множин у нерівностях (2.4), (3.2) у певному сенсі найкращі з можливих.*
2. Для даного $h \in \mathcal{H}$ нерівність (3.2) є точною в загальному випадку.

3.2. Аналітичні функції в кратно-кругових областях: ефект Леві і виняткові множини

Щодо твердження про нерівність Вімана, проф. Й. В. Островський у 1995 році сформулював наступне питання: *який найкращий опис величини винятковоі множини* E? Це ж питання було розглянуто в ряді статей (наприклад, див. [28, 30, 31, 33, 42, 52, 115, 162, 163, 195]) по відношенню до багатьох інших співвідношень, що розглядаються у теорії Вімана-Валірона. У статтях [28, 33, 113] доведено деякі аналоги нерівності Вімана зовні виняткової множини E скінченної h-логарифмічної міри. Зокрема, у статті [113] доведено, що для кожної відмінної від тотожно сталої аналітичної функції у крузі $\mathbb{D}_R = \{z\colon |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$ і для кожної додатної неспадної на $(0, R)$ функції $h(r)$ такої, що $h(r) \ge 2$ $(r \in (0, R))$ нерівність

$$M_f(r) \le h(r)\mu_f(r)\big(\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\big)^{1/2+\delta} \tag{3.6}$$

виконується для $r \in (r_0, R)$ зовні виняткової множини $E = E_f(\varepsilon, h)$ скінченної h-логарифмічної міри, тобто

$$\int\limits_{E\cap(r_0,R)} h(r)d\ln r < +\infty.$$

Більше того, у статті [33] було встановлено, що оцінка

$$\int\limits_{E} \frac{\ln^{1/2}\mu_f(r)}{r}dr < +\infty$$

виняткової множини E у нерівності Вімана для цілих функцій виконується майже напевно у деякому ймовірніному сенсі; тут $h(r) = \ln^{1/2}\mu_f(r)$. З іншого боку, з прикладу цілої функції побудованої у [28, 33] випливає, що опис виняткової множини у цьому твердженні для конкретної цілої функції f не можна істотно покращити. Власне, для кожного $\varepsilon > 0$ існує ціла функція f і множина $E \subset [1; +\infty)$ такі, що для всіх $r \in E$

$$M_f(r) \ge \mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/2+\varepsilon} \quad \text{і} \quad \int\limits_{E} \frac{(\ln\mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}}{r}dr = +\infty.$$

У випадку аналітичних функцій у крузі $\mathbb{D}_1$ і $h(r) = 1/(1-r)$, з нерівності (3.6) випливає аналог Кевարі нерівності Вімана (див. [86, 205]). У статтях [36, 37, 40, 55, 70, 90, 204] встановлено наявність ефекту Леві у випадку нерівності Вімана і аналогів Кеварі нерівності Вімана для різних класів випадкових цілих і аналітичних в одиничному крузі функцій від однієї змінної, відповідно.

Через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, $p \in \mathbb{N}$, позначимо клас аналітичних функцій f у повній області

Рейнгарта $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$, які можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.7}$$

з областю збіжності $\mathbb{G}$. Через $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ позначимо підклас, в який входять функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ такі, що існує $n \in \mathbb{N}^p\colon a_n \neq 0$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір Штейнгуаза. Нехай $X = (X_n(t))$ — послідовність випадкових величин на цьому просторі. Для цілої функції вигляду (3.7) через $\mathcal{K}(f, X)$ позначимо клас випадкових функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n. \tag{3.8}$$

Під "майже напевно" будемо розуміти, що деяка властивість виконується майже скрізь за мірою Лебега P. Будемо говорити, що деякі співвідношення виконується майже напевно у класі $\mathcal{K}(f, X)$, якщо воно виконується для кожної цілої функції $f(z,t)$ вигляду (3.8) майже напевно за t. Для функцій вигляду (3.8) і $t \in [0;1]$ також позначимо

$$M_f(r,t) = \max\{|f(z,t)|\colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}.$$

Послідовність випадкових величин $X = (X_n(t)), n \in \mathbb{Z}_+^p$ є мультиплікативною системою (МС), якщо

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall (n_j), n_j \in \mathbb{Z}_+^p, n_j \neq n_s (s \neq j))\colon\ \mathbf{E}(X_{n_1} X_{n_2} \cdots X_{n_k}) = 0,$$

де $\mathbf{E}\xi$ є математичним сподіванням випадкової величини ξ.

Деякі аналоги нерівності Вімана для цілих функцій від декількох змінних можна знайти у статтях $[3, 29, 46, 61, 75, 89, 89, 112, 165, 166]$, для аналітичних функцій у полікрузі $\mathbb{D}^p$, $p \geq 2$, в $[99, 111]$. У статті [107] доведено деякі аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій $f(z)$ і випадкових аналітичних функцій $f(z,t)$ у $\mathbb{G} = \mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leq \ell < p$, вигляду (3.7) і (3.8), відповідно, де $X = (X_n)$ — мультиплікативна система комплекснозначних випадкових величин на ймовірнісному просторі Штейнгауза, м.н. рівномірно обмежена числом 1. Також було доведено точність отриманих нерівностей. При відповідному виборі функції $h(r)$, ми отримаємо твердження про аналоги нерівності Вімана у відповідних випадках зі статей $[75, 99, 107, 111]$.

У загальному випадку для довільної функції $h(r)$ і нерівностей (3.6) і (3.2), а також окремих випадків, отриманих з нерівності (3.2), питання про наявність ефекту Леві є повністю відкритим.

Основна мета цього підрозділу — довести аналог ефекту Леві для нерівностей з теореми 3.1, отриманих у класі аналітичних функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ для довільної повної області Рейнгарта $\mathbb{G}$.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплекснозначна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ така, що обидві $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС.

Теорема 3.5. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н., $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.*
a) Для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leq$$

$$\leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big) \prod_{j=1}^{p}\Bigg(\prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{1}{4}+\delta} \tag{3.9}$$

м.н. в $\mathcal{K}(f,Z)$.
b) Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+,\ \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ м.н. в $\mathcal{K}(f,Z)$ маємо

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big).$$

Зауважимо, що нерівність (3.9) можна записати у наступному вигляді

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big)\Bigg(\prod_{k=1}^{p} \ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{p-1}{4}+\delta}.$$

Лема 3.6 ([89])**.** *Нехай $X = (X_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н. Тоді для кожного $\beta > 0$ існує стала $A_{\beta p} > 0$, яка залежить тільки від p і β така, що для всіх $N \geq N_1(p) = \max\{p, 4\pi\}$ і $\{c_n \colon \|n\| \leq N\} \subset \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$P\Bigg\{t\colon \max\Bigg\{\Bigg|\sum_{\|n\|=0}^{N} c_n X_n(t) e^{in_1\psi_1}\dots e^{in_p\psi_p}\Bigg| \colon \psi \in [0,2\pi]^p\Bigg\} \geq A_{\beta p} S_N \ln^{\frac{1}{2}} N\Bigg\} \leq \frac{1}{N^\beta},$$

де

$$S_N^2 = \sum_{\|n\|=0}^{N} |c_n|^2.$$

Лема 3.7 ([115])**.** *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ маємо*

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) \leq h(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln^{1+\delta}\Big(\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Big), \quad j \in \{1,\dots,p\}.$$

Доведення теореми 3.5. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $Z = X = (X_n(t))$ — дійсна МС. Для $k \in \mathbb{N}, k \geq 11$ і $l \in \mathbb{Z}$ таких, що $k > -l$ позначимо

$$G_{kl} = \Big\{r = (r_1, \ldots, r_p) \in G \colon k \leq \ln h(r) \leq k+1,\ l \leq \ln \mu_f(r) \leq l+1\Big\},$$

$$G^+_{kl} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} G_{ij}.$$

Не складно перевірити, що множина

$$E_0 = \Big\{r \in G \colon \ln h(r) + \ln \mu_f(r) < 1\Big\} = \Big\{r \in G \colon \mu_f(r) h(r) < e\Big\} \in \mathcal{S}_h.$$

За лемою 3.7 існує множина $E_1 \supset E_0, E_1 \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in G \backslash E_1$ отримаємо

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| \cdot |a_n| r^n \leq h(r) \mathfrak{M}_f(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \cdot \sum_{j=1}^{p} \Bigg(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p} \ln^{1+\delta} \frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg) \leq$$

$$\leq p h(r) \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{er_j}{\varepsilon_j}\Bigg)^{\frac{p-1}{2}+\delta} \times$$

$$\times \Bigg[\ln \mu_f(r) + \frac{p+1}{2} \ln h(r) + \Big(\frac{p}{2} + \delta\Big) \ln\ln h(r) + \Big(\frac{p}{2} + \delta\Big) \ln\ln\Big\{\mu_f(r) h(r)\Big\} +$$

$$+ \Big(\frac{p-1}{2} + \delta\Big) \sum_{j=1}^{p} \ln\ln \frac{er_j}{\varepsilon_j}\Bigg]^{1+\delta} \Bigg(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{er_j}{\varepsilon_j}\Bigg)^{1+\delta} \leq$$

$$\leq \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Тому

$$\sum_{\|n\| \geq d} |a_n| r^n \leq \sum_{\|n\| \geq d} \frac{\|n\|}{d} |a_n| r^n \leq \frac{1}{d} \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| |a_n| r^n \leq$$

$$\leq \frac{1}{d} \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{p+1}{2}+2\delta} \leq \mu_f(r),$$

де

$$d = d(r) = (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Нехай

$$G^*_{kl} = G_{kl} \setminus E_2,\ I = \{(i; j) \colon G^*_{ij} \neq \varnothing\},\ E_2 = E_1 \cup \Bigg(\bigcup_{(i,j) \notin I} G_{ij}\Bigg).$$

Тоді $\#I = +\infty$.

Для $(k,l) \in I$ виберемо послідовність $r^{(k,l)} \in G^*_{kl}$ таку, що $\mu_f(r^{(k,l)}) = \min\limits_{r\in G^*_{kl}} \mu_f(r)$. Для всіх $r \in G^*_{kl}$ одержимо

$$\frac{1}{e}\mu_f(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r) \le e\mu_f(r^{(k,l)}), \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{e}h(r^{(k,l)}) \le h(r) \le eh(r^{(k,l)}), \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{e^2}\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r)h(r^{(k,l)}) \le e^2\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)}) \tag{3.12}$$

і також

$$\bigcup_{(k,l)\in I} G^*_{kl} = \bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl} \setminus E_1 = \bigcup_{k,l=1}^{+\infty} G_{kl} \setminus E_1 = G \setminus E_1.$$

Нехай $N_{kl} = [2d_1(r^{(k,l)})]$ і

$$d_1(r) = (eh(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{e^2\mu_f(r)h(r)\} \left(\prod_{k=1}^{p} \ln\frac{e^2 r_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Для $r \in G^*_{kl}$ позначимо

$$W_{N_{kl}}(r,t) = \max\left\{\left|\sum_{\|n\|\le N_{kl}} a_n r_1^{n_1}\dots r_p^{n_p} e^{in_1\psi_1+\ldots+in_p\psi_p} X_n(t)\right| : \psi \in [0,2\pi]^p\right\}.$$

Для вимірних за Лебегом множин $G \subset G^*_{kl}$ і для $(k,l) \in I$ позначимо

$$\nu_{kl}(G) = \frac{\mathrm{meas}_p(G)}{\mathrm{meas}_p(G^*_{kl})},$$

де meas_p — міра Лебега на $\mathbb{R}^p$.

Зауважимо, що ν_{kl} — ймовірнісна міра, визначена на сім'ї вимірних за Лебегом підмножинах G^*_k. Нехай $\Omega = \bigcup_{(k,l)\in I} G^*_{kl}$ і

$$k_i, l_{i,j} \colon (k_i, l_{i,j}) \in I,\ k_i < k_{i+1},\ l_{i,j} < l_{i,j+1},\ \forall i,j \in \mathbb{Z}_+.$$

Для вимірних за Лебегом підмножин G з Ω позначимо

$$\nu(G) = 2^{k_0} \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k_i}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k_{i+1}-k_i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{N_i} \frac{2^{l_{i,0}}}{2^{l_{i,j}}} \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{l_{i,j+1}-l_{i,j}}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{l_{i,N_{i+1}}+l_{i,0}}} \nu_{k_{i+1}l_{i+1,j+1}}(G \cap G^*_{k_{j+1}l_{i+1,j+1}})\right), \tag{3.13}$$

де $N_i = \max\{j \colon (k_i, l_{ij}) \in I\}$. Зауважимо, що $\nu_{k_{j+1}l_{j+1}}(G^*_{k_{j+1}l_{j+1}}) = \nu(\Omega) = 1$.

Тому ν є ймовірнісною мірою, яка визначена на вимірних підмножинах Ω. На $\Omega_0 := [0;1] \times \Omega$ визначимо ймовірнісну міру $P_0 = P \otimes \nu$, яка є прямим добутком ймовірнісних мір P і ν. Тепер для $(k;l) \in I$ позначимо

$$F_{kl} = \{(t,r) \in [0;1] \times \Omega \colon W_{N_{kl}}(r,t) > A_p S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl}\},$$

$$F_{kl}(r) = \{t \in [0;1] \colon W_{N_{kl}}(r,t) > A_p S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl}\},$$

де

$$S^2_{N_{kl}}(r) = \sum_{\|n\|=0}^{N_{kl}} |a_n|^2 r^{2n}$$

і A_p — стала з леми 3.6 з $\beta = 1$. За теоремою Фубіні і за лемою 3.6 з $c_n = a_n r^n$ і $\beta = 1$, ми одержимо для $(k,l) \in I$

$$P_0(F_{kl}) = \int\limits_{\Omega} \Bigg(\int\limits_{F_{kl}(r)} dP \Bigg) d\nu = \int\limits_{\Omega} P(F_{kl}(r)) d\nu \le \frac{1}{N_{kl}} \nu(\Omega) = \frac{1}{N_{kl}}.$$

Тоді

$$N_{kl} > (h(r))^{\frac{p+3}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{k=1}^{p} \ln^{\frac{p+1}{2}} \frac{er_k}{\varepsilon_k} > e^{2k}(l+k)^{2+2\delta}.$$

Тому

$$\sum_{(k,l)\in I} P_0(F_{kl}) \le \sum_{k=11}^{+\infty} \sum_{l=-k+1}^{+\infty} \frac{1}{e^{2k}(l+k)^{2+2\delta}} < +\infty.$$

Звідси, за лемою Бореля-Кантеллі з ймовірністю, що дорівнює одиниці, серед подій $\{F_{kl} \colon (k,l) \in I\}$ відбувається щонайбільше скінченна кількість подій. Отже,

$$P_0(F) = 1, \quad F = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{k \ge s,\ l \ge m \\ (k,l)\in I}} \overline{F_{kl}} \subset [0;1] \times \Omega.$$

Тоді для кожної точки $(t,r) \in F$ існують $k_0 = k_0(t,r)$ і $l_0 = l_0(t,r)$ такі, що для всіх $k \ge k_0$, $l \ge l_0$, $(k,l) \in I$ маємо

$$W_{N_{kl}}(r,t) \le A_p S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

Нехай $F_\Omega = \{r \in \Omega \colon (\exists t)[(t,r) \in F]\}$. Тоді $\nu(F_\Omega) = 1$. Подібно для проекції F на $[0;1]$

$$F_{[0;1]} = \{t \in [0;1] \colon (\exists r)[(t,r) \in F]\}$$

маємо $P(F_{[0;1]}) = 1$.

Нехай далі $F^\wedge(t) = \{r \in \Omega \colon (t,r) \in F\}$. Як і в [111] маємо, що за теоремою Фубіні

$$0 = \int\limits_{\Omega_0} (1 - \chi_F) dP_0 = \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_{\Omega} (1 - \chi_{F^\wedge(t)}) d\nu \Bigg) dP.$$

Тому, P-майже скрізь

$$0 = \int\limits_{\Omega} (1 - \chi_{F^\wedge(t)}) d\nu = 1 - \nu(F^\wedge(t)),$$

звідки $\exists\, F_1 \subset F_{[0;1]}$, $P(F_1)=1$, така, що $\nu(F^\wedge(t))=1$ для кожного $t\in F_1$.

Для кожних $t\in F_1([111])$ і $(k,l)\in I$ виберемо точку $r_0^{(k,l)}(t)\in G_{kl}^*$ так, що

$$W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t),t)\ge \frac{3}{4}M_{kl}(t),\ \ M_{kl}(t)\stackrel{\text{def}}{=}\sup\{W_{N_{kl}}(r,t)\colon r\in G_{kl}^*\}.$$

Тоді, з $\nu_{kl}\big(F^\wedge(t)\cap G_{kl}^*\big)=1$ для всіх $(k,l)\in I$, випливає, що існує точка $r^{(k,l)}(t)\in G_{kl}^*\cap F^\wedge(t)$ така, що

$$|W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t),t)-W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t)|<\frac{1}{4}M_{kl}(t),$$

звідки

$$\frac{3}{4}M_{kl}(t)\le W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t),t)\le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t)+\frac{1}{4}M_{kl}(t).$$

Оскільки $(t,r^{(k,l)}(t))\in F$, то з нерівності (3.13) маємо

$$\frac{1}{2}M_{kl}(t)\le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t)\le A_pS_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t))\ln^{1/2}N_{kl}.$$

Тепер для $r^{(k,l)}=r^{(k,l)}(t)$ одержимо

$$S_{N_{kl}}^2(r^{(k,l)})\le \mu_f(r^{(k,l)})\mathfrak{M}_f(r^{(k,l)})\le \mu_f^2(r^{(k,l)})(h(r^{(k,l)}))^{\frac{p+1}{2}}\ln^{\frac{p}{2}+\delta}h(r^{(k,l)})\times$$
$$\times\ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}\left(\prod_{j=1}^{p}\ln\frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\right)^{\frac{p-1}{2}+\delta}.$$

Звідси, для $t\in F_1$ і всіх $k\ge k_0(t)$, $l\ge l_0(t)$, отримаємо

$$S_N(r^{(k,l)})\le \mu_f(r^{(k,l)})(h(r^{(k,l)}))^{\frac{p+1}{4}}\ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}}h(r^{(k,l)})\times$$
$$\times\ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}}\{\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}\left(\prod_{j=1}^{p}\ln\frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\right)^{\frac{p-1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

З (3.10)–(3.12) випливає, що $d_1(r^{(k,l)})\ge d(r)$ для $r\in G_{kl}^*$. Тоді для $t\in F_1$, $r\in F^\wedge(t)\cap G_{kl}^*$, $(k,l)\in I$, $k\ge k_0(t), l\ge l_0(t)$ виконується нерівність

$$M_f(r,t)\le \sum_{\|n\|\ge 2d_1(r^{(k,l)})}|a_n|r^n+W_{N_{kl}}(r,t)\le \sum_{\|n\|\ge 2d(r)}|a_n|r^n+M_{kl}(t).$$

Отож, для $t\in F_1$, $r\in F^\wedge(t)\cap G_{kl}^*$, $l\ge l_0(t)$ і $k\ge k_0(t)$ маємо

$$M_f(r^{(k,l)},t)\le \mu_f(r^{(k,l)})+2A_pS_{N_{kl}}(r^{(k,l)})\ln^{1/2}N_{kl}\le \mu_f(r^{(k,l)})+$$
$$+2A_p\mu_f(r^{(k,l)})(h(r^{(k,l)}))^{\frac{p+1}{4}}\ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}}h(r^{(k,l)})\times$$
$$\times\ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}}\{\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}\left(\prod_{j=1}^{p}\ln\frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\right)^{\frac{p-1}{4}+\frac{\delta}{2}}\times$$
$$\times\Big[\Big(\frac{p+3}{2}+2\delta\Big)\ln(eh(r^{(k,l)}))+\Big(\frac{p}{2}+1+2\delta\Big)\ln\ln\{e^2\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}+$$

$$+\Big(\frac{p+1}{2}+2\delta\Big)\sum_{j=1}^{n}\ln\ln\frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\Bigg].$$

Для $t\in F_1$, $r\in F^{\wedge}(t)\cap G_{kl}^*$, $k\ge k_0(t)$ і $l\ge l_0(t)$

$$M_f(r,t)\le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}}\ln^{\frac{p}{4}+1+\delta}h(r)\ln^{\frac{p}{4}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}\left(\prod_{k=1}^{p}\ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{p-1}{4}+\delta}.$$

Тому попередня нерівність виконується м.н. ($t\in F_1$, $P(F_1)=1$) для всіх

$$r\in\left(\bigcup_{(k,l)\in I}(G_{kl}^*\cap F^{\wedge}(t))\cap G_{kl}^{+}\right)\setminus E^*=$$
$$=(G\cap G_{kl}^{+})\setminus(E^*\cup G^*\cup E_1)=G\setminus E_2,$$

де

$$G_{kl}^{+}=\bigcup_{i=k}^{+\infty}\bigcup_{j=l}^{+\infty}G_{kl},\ E_2=E_1\cup G^*\cup E^*,\ G^*=\bigcup_{(k,l)\in I}(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t)).$$

Залишається зауважити, що для $\nu(G^*)$ маємо

$$\nu(G^*)=\sum_{(k,l)\in I}(\nu_{kl}(G_{kl}^*)-\nu_{kl}(F^{\wedge}(t)))=0.$$

Тоді для всіх $(k,l)\in I$ одержимо

$$\nu_{kl}(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t))=\frac{\mathrm{meas}_p(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t))}{\mathrm{meas}_p(G_{kl}^*)}=0,$$
$$\mathrm{meas}_p(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t))=\int\cdots\int_{G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t)}h(r)\prod_{j=1}^{p}dr_j=0.$$

□

Зауваження 3.1. Точність нерівності (3.9) доведено у випадках:
1) $\mathbb{C}^p$ з $h(r)\equiv 10$, $p\in\mathbb{N}, p>1$;
2) $\mathbb{D}^p$ з

$$h(r)=\prod_{j=1}^{p}\frac{r_j}{1-r_j},\quad p\in\mathbb{N},\ p>1;$$

3) $\mathbb{D}^\ell\times\mathbb{C}^{p-\ell}$ з

$$h(r)=\prod_{j=1}^{\ell}\frac{r_j}{1-r_j},\ \ p,\ell\in\mathbb{N},\ p>\ell,\ p\ge 2.$$

Проблема 3.1. Питання стосовно точності нерівностей (3.6) і (3.9) у довільній фіксованій повній області Рейнхарда є відкритим; теж саме стосується довільної функції $h\in\mathcal{H}^p$.

У випадку $\mathbb{G} = \mathbb{C}^p$ з нерівності (3.2) при $h(r_1, \ldots, r_p) \equiv 10$ випливає, що м.н.

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{p}{2}+\delta} \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{p-1}{2}+\delta} \tag{3.14}$$

для всіх $r \in G \cap \Delta_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+^p$ зовні деякої множини E такої, що

$$\int \cdots \int_{E\cap\Delta_\varepsilon} \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Наступне твердження є наслідком з теореми 3.5 і дає для заданої функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$ м.н. істотно сильніший опис виняткової множини у нерівності (3.14).

Наслідок 3.1. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н., $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$. Для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E = E(\delta, f, t) \in \mathcal{S}_h$ з $h(r) = (\ln \mu_f(r))^{p/(p+1)}$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність* (3.14).

У випадку $p = 1$ з теореми 3.5 маємо такий наслідок.

Наслідок 3.2. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС рівномірно обмежена числом 1 м.н., $h \in \mathcal{H}^1$, $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}_R)$, $0 < R \leq +\infty$. Для кожного $\delta > 0$ існують множина $E = E(\delta, f, t) \in \mathcal{S}_h$ і стала $C > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0; R) \setminus E$ м.н. в $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \leq C\mu_f(r)(h(r))^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{5}{4}+\delta} h(r) \ln^{\frac{1}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big).$$

Зауважимо, що у частковому випадку $p = 1$ нерівність (3.2) є слабшою за нерівність (3.6), тому у цьому випадку висловимо припущення, що у наслідку 3.2 повинна виконуватись дещо сильніша нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{1}{2}} \big(\ln h(r) \ln(h(r)\mu_f(r)) \big)^{1/4+\delta}.$$

3.3. Нерівність типу Вімана для степеневих рядів з швидко коливними коефіцієнтами в кратно-кругових областях Рейнхарда

Нехай $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$ — область Рейнгарта з центром у точці $z = 0 \in \mathbb{C}^p$.

Зазначимо, що у випадку $p = 1$ область Рейнгарта — це або круг з центром у початку координат, або ж вся комплексна площина $\mathbb{C}$.

Через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, $p \in \mathbb{N}$, позначимо клас аналітичних функцій f у повній області Рейнгарта $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$, які можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.15}$$

з областю збіжності $\mathbb{G}$. Через $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ позначимо підклас, в який входять функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ такі, що існує $n \in \mathbb{N}^p\colon a_n \neq 0$.

Відомо, що кожну аналітичну функцію f у повній області Рейнгарта $\mathbb{G}$ з центром у точці $z = 0$ можна зобразити в $\mathbb{G}$ у вигляді ряду (3.15). З іншого боку, область збіжності кожного ряду вигляду (3.15) є логарифмічно-опуклою повною областю Рейнгарта з центром у точці $z = 0$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір Штейнгуаза. Нехай $X = (X_n(t))$ — послідовність випадкових величин на цьому просторі. Для функції $f \in \mathcal{A}_0^p$ вигляду (3.15) розглянемо клас випадкових степеневих рядів вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n. \tag{3.16}$$

Нехай $\mathcal{K}(f,\theta)$ аналітичних функцій вигляду (3.16) з $X = \theta = (e^{2\pi i \theta_n t})$, $t \in \mathbb{R}$. Тут (θ_n) — послідовність натуральних чисел така, що її впорядкування (θ_k^*) за зростанням $\{\theta_n\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\} = \{\theta_k^*\colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \theta_{k+1}^* > \theta_k^*$, задовольняє умову ($\theta$ — *послідовність Адамара*)

$$\theta_{k+1}^*/\theta_k^* \geq q > 1, k > 0. \tag{3.17}$$

Як ми вже відзначали вище, у випадку $q \geq 2$ система $X = \theta = (e^{2\pi i \theta_n t})$ є МС, а за умови $q > 1$ послідовність випадкових величин $(\cos\theta_n t)_{n \in \mathbb{Z}_+^p}$ може не бути МС. Тому природно виникає питання: *чи виконується ефект Леві для класу $\mathcal{K}(f,\theta)$ з $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ і довільною послідовністю (θ_n), впорядкування якої за зростанням (θ_k^*) є послідовністю Адамара?*

Основний результат цього підрозділу міститься у такій теоремі.

Теорема 3.6. *Нехай $\theta = (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}_+^p}$ — послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову (3.17), $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.*
a) Тоді майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ і для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leq$$
$$\leqq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\left(\mu_f(r)h(r)\right) \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{4}+\delta}. \tag{3.18}$$

b) Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in (G \cap \Delta_\varepsilon) \setminus E$ нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\left(\mu_f(r)h(r)\right).$$

Для доведення цієї теореми нам будуть потрібні такі леми.

Лема 3.8 ([204])**.** *Нехай* $\theta = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ *— послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову* (3.17)*. Тоді існують такі константи* A_q *і* B_q *(залежні лише від* q*), що для будь-яких* $\{b_k : 1 \le k \le N\} \subset \mathbb{C}$ *і* $\lambda > 0$ *маємо*

$$P\left\{t\colon \left|\sum_{k=1}^{N} b_k e^{2\pi i\theta_k^* t}\right| \ge A_q \lambda S_N\right\} \le B_q e^{-\lambda^2},$$

де

$$S_N^2 = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

Лема 3.9 ([97])**.** *Нехай* $\theta = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ *— послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову* (3.17)*. Тоді для будь-якого* $\beta > 0, p \ge 1$ *існує* $A = A_{\beta pq}$ *така, що для кожного* $N \in \mathbb{N}$*,* $N \ge p$ *і* $\{c_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\} \subset \mathbb{C}$ *маємо*

$$P\left\{t\colon \max\left\{\left|\sum_{\|n\|=0}^{N} c_n \exp\left\{\sum_{s=1}^{p} i n_s\psi_s + 2\pi i\theta_n t\right\}\right| : \psi \in [0, 2\pi]^p\right\} \ge AS_N \ln^{1/2} N\right\} \le$$
$$\le \frac{(5\pi + 1)^p B}{N^\beta},$$

де

$$S_N^2 = \sum_{\|n\|=0}^{N} |c_n|^2,\ A = \sqrt{\beta + \frac{p}{2}(3 + p)}A_q + 1$$

та $B = B_q$ *(*A_q *та* B_q*— сталі з леми 3.8).*

Доведення теореми 3.6. Схема доведення в загальних рисах повторює схему міркувань при доведенні теореми 3.5, тільки замість леми 3.6 використовується лема 3.9. □

Проблема 3.2. Питання стосовно точності нерівностей (3.6) і (3.18) у довільній фіксованій повній області Рейнхарда з довільною функцією $h \in \mathcal{H}^p$ залишається відкритим.

3.4. Випадкові цілі функції багатьох змінних та нерівність Вімана

У цьому підрозділі ми розглянемо різні аналоги нерівності типу Вімана для цілих функцій багатьох змінних та побудуємо приклад на точність цієї нерівності. Розглянемо цілу функцію від p комплексних змінних вигляду

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.19}$$

де $z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p},\ p \in \mathbb{N},\ n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p,\ \|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j$.

Через $\mathcal{E}^p$ позначимо клас цілих функцій вигляду (3.19) таких, що $\frac{\partial}{\partial z_j}f(z)\not\equiv 0$ в $\mathbb{C}^p$ для кожного $j\in\{1,\dots,p\}$. Будемо казати, що підмножина E з $\mathbb{R}^p_+$ є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри ([75]), якщо E є вимірною за Лебегом в $\mathbb{R}^p_+$ та існує $R\in\mathbb{R}^p_+$ таке, що $E\cap\Delta_R$ є множиною скінченної логарифмічної міри, тобто

$$\int\limits_{E\cap\Delta_R}\!\!\cdots\!\int\prod_{j=1}^{p}\frac{dr_j}{r_j}<+\infty.$$

Для цілих функцій вигляду (3.19) аналоги нерівності Вімана доведені у [73, 75, 165, 166]. Також аналоги цієї нерівності без виняткових множин для цілих функцій від декількох комплексних змінних можна знайти у [89].

Нехай e^K — образ множини $K\subset\mathbb{R}^p$ при відображенні $r_1=e^{\sigma_1},\dots,r_p=e^{\sigma_p}$, та

$$\gamma(f):=\Big\{(\sigma_1,\dots,\sigma_p)\in\mathbb{R}^p\colon\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln M_f(e^{t\sigma_1},\dots,e^{t\sigma_p})=+\infty\Big\}.$$

Теорема Б ([29]). *Нехай $f\in\mathcal{E}^p$. Для кожного $\varepsilon>0$ існує стала $C_0=C_0(f,\varepsilon)>0$ і множина $E\subset\mathbb{R}^p_+$ скінченної логарифмічної міри така, що для довільного конуса $K\subset\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат такого, що $\overline{K}\setminus\{0\}\subset\gamma(f)$, і для всіх $r\in e^K\setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r)\le C_0\mu_f(r)\prod_{i=1}^{p}\ln^{p-1}r_i\cdot(\ln\mu_f(r))^{p/2}(\ln_2\mu_f(r))^{p+\varepsilon}:=A_1(r).\tag{3.20}$$

У [166] доведено наступне твердження: *для кожного $\varepsilon>0$ існують додатна стала C, яка не залежить від $f\in\mathcal{E}^p$, множина $E\subset\mathbb{R}^p_+$ асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що нерівність*

$$M_f(r)\le C\mu_f(r)\big(\ln\mu_f(r)\cdot\ln(r_1\dots r_p)\big)^{p/2+\varepsilon}:=A_2(r)\tag{3.21}$$

виконується для всіх $r\notin E$.

Зауважимо, що якщо

$$\sum_{j=1}^{p}\ln_2^+r_j=o(\ln_2\mu_f(r))$$

при $|r|\to+\infty$, то $A_1(r)=o(A_2(r))$ $(|r|\to+\infty)$ і нерівність (3.21) випливає безпосередньо з (3.20).

При $p=2$ виняткова множина E у нерівності (3.20) є “меншою” ніж виняткова множина у нерівності (1.8) з теореми 1 в [61]

$$M_f(r_1,r_2)\le C\mu_f(r_1,r_2)\ln^+\mu_f(r_1,r_2)\big(\ln_2^+\mu_f(r_1,r_2)\dots(\ln_k^+\mu_f(r_1,r_2))^{1+\varepsilon}\big)^2,$$

де $k\ge 3$. Однак, ця нерівність є найкращою з можливих ([61]) у наступному сенсі: *існують функція $f\in\mathcal{E}^2$ і множина $E\subset\mathbb{R}^2_+$ такі, що для всіх $r\in E$*

$$M_f(r)\ge\mu_f(r)\ln^2\mu_f(r)\quad i\quad\iint\limits_{E\cap B_R}\frac{dr_1dr_2}{r_1r_2}\ge c\cdot\ln R\quad(R\ge R_0>1),\ c>0,$$

де

$$B_R = \{r = (r_1, r_2)\colon 1 \le r_1 \le R, 1 \le r_2 \le R\}.$$

Це можна побачити ([61]) для функції вигляду $f(z_1, z_2) = f_0(z_1)$, де

$$f_0(z_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z_1^{n_k}}{n_k!} \left(1 + \sum_{j=1}^{n_k^2} \frac{z_1^j}{(n_k)^j}\right),$$

(n_k) — послідовність натуральних чисел n_k така, що

$$n_{k+1} \ge n_k + n_k^2 + 1 \ (k \ge 1),\ n_1 = 1.$$

Функція f_0 є цілою функцією від однієї змінної, для якої (тут $M_{f_0}(r_1)$ — максимум модуля і $\mu_{f_0}(r_1)$ — максимальний член)

$$M_{f_0}(r_1) > \mu_{f_0}(r_1)\big(\ln \mu_{f_0}(r_1)\big)^2$$

для всіх r_1 у необмежені множині $E_0 = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}(t_k, T_k)$ скінченної логарифмічної міри, де $\big((t_k, T_k)\big)_{k=1}^{+\infty}$ — неперетинна система непорожніх відкритих інтервалів $(t_k, T_k) \ni n_k$ $(k \ge 1)$. Для $r = (r_1, r_2) \in E_0 \times [1; +\infty)$ отримаємо

$$M_f(r) = M_{f_0}(r_1) > \mu_{f_0}(r_1)\big(\ln \mu_{f_0}(r_1)\big)^2 = \mu_f(r)\big(\ln \mu_f(r)\big)^2.$$

Очевидно, що $f \notin \mathcal{E}_0^2$.

У [75] було доведено таке твердження.

Теорема 3.7 ([75]). *Нехай $f \in \mathcal{E}^p$ і $\delta > 0$.*

a) *Тоді існують $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри такі, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E$ виконується нерівність*

$$\mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r)\right)^{1/2+\delta}.$$

b) *Якщо додатково припустити, що для деякого $\alpha \in \mathbb{R}_+^p$ виконується умова*

$$\mathfrak{M}_f(r) \ge \exp(r^\alpha) = \exp\left(\prod_{j=1}^{p} r_j^{\alpha_j}\right), \quad r^\wedge \to +\infty$$

або більш загально, для кожного $\beta > 0$

$$\int \cdots \int\limits_{\Delta_S} \frac{1}{\ln^\beta \mathfrak{M}_f(r)} \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty,\ \textit{при}\ S^\wedge \to +\infty, \tag{3.22}$$

тоді існують $R \in \mathbb{R}_+^p$ і множина $E \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри такі, що для $r \in \Delta_R \backslash E$ маємо

$$\mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{p/2+\delta} \mu_f(r).$$

Нехай $\Omega = [0;1]$ і P міра Лебега на $\mathbb{R}$. Розглянемо ймовірнісний простір Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, де $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω.

Весною 1996 року під час доповіді П. В. Філевича на львівському семінарі по теорії аналітичних функцій професори А. А. Гольдберг та М. М. Шеремета задали наступне питання (див. [3]). Чи має місце ефект Леві для аналогів нерівності Вімана для цілих функцій багатьох змінних?

У статтях [3,34,35] можна знайти позитивну відповідь на це питання у випадку нерівності Фентона ([61]) для цілих функцій від двох комплексних змінних.

Ми дамо відповідь на це питання у випадку нерівності Вімана з [75] для цілих функцій від декількох комплексних змінних.

У [75] було доведено, що для кожного $\varepsilon > 0$ існують $R \in \mathbb{R}^p_+$ і підмножина E множини Δ_R асимптотично скінченної логарифмічної міри такі, що нерівність

$$M_f(r) \le \mu_f(r)\left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i\right)^{1/2+\varepsilon} \tag{3.23}$$

виконується для всіх $r \in \Delta_R \setminus E$. Використовуючи методи з [75], можна довести наступний точніший аналог цієї нерівності.

Теорема 3.8. *Нехай $f \in \mathcal{E}^p$ і $\delta > 0$. Існують $R \in \mathbb{R}^p_+$ і множина $E \subset \Delta_R$ асимптотично скінченної логарифмічної міри такі, що нерівність*

$$\mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r)\left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i\right)^{1/2} \cdot \ln^{5/2+\delta}\left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i\right) \tag{3.24}$$

виконується для всіх $r \in \Delta_R \setminus E$.

Зауваження 3.2. Існує множина E асимптотично нескінченної логарифмічної міри така, що для цілої функції $g(z) = \exp\{\sum_{j=1}^{p} z_i\}$, кожного $\varepsilon > 0$ і $r \in E$ маємо

$$M_g(r) \ge \mu_g(r)\left(\ln^p \mu_f(r) \cdot \prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i\right)^{1/2-\varepsilon}.$$

Тому показник $1/2$ у нерівності (3.23) не можна замінити числом, меншим за $1/2$. У зв'язку з цим природно виникає таке запитання: *як можна описати "кількість" тих цілих функцій, для яких нерівність* (3.23) *можна покращити?*

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — послідовність комплекснозначних випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ така, що обидві послідовності $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними мультиплікативними системами (МС) рівномірно обмеженими числом 1, які визначені на ймовірнісному просторі Штейнгауза. Було доведено, що для класу

$$\mathcal{K}_1(f, Z) = \left\{ f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z^n \colon t \in \mathbb{R} \right\}$$

показник $1/2$ можна замінити на показник $1/4$ в нерівності (3.24) майже напевно (ефект Леві).

Теорема 3.9. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — МС, рівномірно обмежена числом 1, $\delta > 0$, $f \in \mathcal{E}^p$.*

a) *Тоді майже напевно в $\mathcal{K}_1(f, Z)$ існують $R \in \mathbb{R}^p$ та множина $E^* \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E^*$ маємо*

$$M_f(r,t) = \max_{|z|=r} |f(z,t)| \le \mu_f(r) \Big(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r) \Big)^{1/4+\delta}. \tag{3.25}$$

b) *Якщо для деякого $\alpha \in \mathbb{R}^p_+$*

$$\mathfrak{M}_f(r) \ge \exp(r^\alpha) = \exp(r_1^{\alpha_1} \dots r_p^{\alpha_p}) \text{ при } r^\wedge \to +\infty$$

або більш загально, для кожного $\beta > 0$ виконується нерівність (3.22), то майже напевно в $\mathcal{K}_1(f, Z)$ існує $R \in \mathbb{R}^p_+$ і множина $E^* \subset \Delta_R$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r) \ln^{p/4+\delta} \mu_f(r). \tag{3.26}$$

Через H позначимо клас функцій $h\colon \mathbb{R}^p_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що

$$\int_1^{+\infty} \dots \int_1^{+\infty} \frac{du_1 \dots du_p}{h(u)} < +\infty.$$

Також визначимо для всіх $i \in \{1, \dots, p\}$

$$\partial_i \ln \mathfrak{M}_f(r) = r_i \frac{\partial}{\partial r_i} (\ln \mathfrak{M}_f(r)) = \frac{1}{\mathfrak{M}_f(r)} \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} n_i |a_n| r^n.$$

Лема 3.10 ([75]). *Нехай $h \in H$. Тоді існують $R \in \mathbb{R}^p_+$ і підмножина E' множини Δ_R скінченної логарифмічної міри такі, що для всіх $r \in \Delta_R \backslash E'$ і $s \in \{1, \dots, p\}$ виконується нерівність*

$$\partial_s \ln \mathfrak{M}_f(r) \le h(\ln r_1, \dots, \ln r_{s-1}, \ln \mathfrak{M}_f(r), \ln r_{s+1}, \dots, \ln r_p).$$

Доведення теореми 3.9. Не зменшуючи загальності можемо припустити, що $Z = X = (X_n(t))$ є МС. Дійсно, якщо $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$, то

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n + \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} i a_n Y_n(t) z^n = f_1(z,t) + f_2(z,t),$$

та $\mu(r, f_1) = \mu(r, f_2) = \mu(r, f) = \max\{|a_n| r_1^{n_1} \dots r_p^{n_p} \colon n \in \mathbb{Z}^p_+\}$ для всіх $r \in \mathbb{R}^p_+$. Тоді з нерівності (3.25) отримаємо існування множини E_0 асимптотично скінченної логарифмічної міри такої, що для $r \in \Delta_R \backslash E_0$ майже напевно в $K(f, Z)$

$$M_{f_j}(r,t) \le \mu_f(r) \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r) \right)^{1/4+\delta_0}, \quad j \in \{1; 2\},\ \delta_0 > 0.$$

Тому, для $r \in \Delta_R \backslash E_0$ майже напевно в $K(f, Z)$ одержимо

$$M_f(r,t) \leq \sqrt{M_{f_1}^2(r,t) + M_{f_2}^2(r,t)} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r)\right)^{1/4+\delta_0} < \mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r)\right)^{1/4+2\delta_0}.$$

Для кожного $j \in \{1, \ldots, p\}$ виконується рівність

$$\lim_{r_j \to +\infty} \mu_f(r_1^0, \ldots, r_{j-1}^0, r_j, r_{j+1}^0, \ldots, r_p^0) = +\infty \tag{3.27}$$

для фіксованого $r_i^0 > 0,\ i \in \{1, \ldots, p\} \backslash \{j\}$. Справді, якщо (3.27) не виконується, тоді існує стала $C > 0$ така, що для всіх $r_j > r_j^*$ маємо

$$\mu_f(r_1^0, \ldots, r_{j-1}^0, r_j, r_{j+1}^0, \ldots, r_p^0) < C < +\infty.$$

Тоді $\#\{n_j \geq 1 \colon a_n \neq 0\} = 0$ та $\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}^p$. Отже, $f \notin \mathcal{E}^p$ і отримуємо суперечність.

Для $k \in \mathbb{N}$ позначимо

$$G_k = \{r = (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{R}_+^p \colon k \leq \ln \mu_f(r) < k+1\} \cap [1; +\infty)^p.$$

Тоді $G_k \neq \varnothing$ для $k \geq k_0$ і з (3.27) випливає, що для всіх k множина G_k — обмежена. Нехай $G_k^+ = \bigcup_{j=k}^{+\infty} G_k$ і

$$h(r) = \prod_{i=1}^{p} r_i \ln^{1+\delta_1} r_i \in H,\ \delta_1 > 0.$$

За лемою 3.10 існують $R_j \in \mathbb{R}_+^p$ і підмножина E_j множини Δ_{R_j} скінченної логарифмічної міри такі, що для всіх $r \in \Delta_{R_j} \backslash E_j$ і $j \in \{1, \ldots, p\}$ маємо

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} n_i |a_n| r^n \leq \mathfrak{M}_f(r) h(\ln r_1, \ldots, \ln r_{s-1}, \ln \mathfrak{M}_f(r), \ln r_{s+1}, \ldots, \ln r_n) \leq$$

$$\leq \mathfrak{M}_f(r) \ln \mathfrak{M}_f(r) \ln_2^{1+\delta_1} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{i=1,\ i \neq j}^{p} \ln r_i \ln_2^{1+\delta_1} r_i.$$

Можна вибрати $R \in \mathbb{R}_+^p$ так, що

$$\Delta_R \subset \left(\bigcap_{j=1}^{p} \Delta_{R_j}\right) \cap [e^e; +\infty)^p.$$

Тоді для $r \in \Delta_R \backslash (\cup_{i=1}^p E_i)$ виконується нерівність

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| |a_n| r^n \leq \mathfrak{M}_f(r) \ln \mathfrak{M}_f(r) \ln_2^{1+\delta_1} \mathfrak{M}_f(r) \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{i=1,\ i \neq j}^{p} \ln r_i \ln_2^{1+\delta_1} r_i\right) \leq$$

$$\leq p\mathfrak{M}_f(r)\ln\mathfrak{M}_f(r)\ln_2^{1+\delta_1}\mathfrak{M}_f(r)\prod_{i=1}^{p}\ln r_i\ln_2^{1+\delta_1} r_i.$$

За теоремою 3.9 ми отримаємо для $r\in\Delta_R\backslash(\bigcup_{i=1}^{p}E_i)$

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}\|n\||a_n|r^n\leq p\mu_f(r)\left(\prod_{i=1}^{p}\ln^{p-1}r_i\cdot\ln^p\mu_f(r)\right)^{1/2+\delta_1}\times$$

$$\times\left(\ln\mu_f(r)+\left(\frac{1}{2}+\delta_1\right)\left((p-1)\sum_{i=1}^{p}\ln_2 r_i+p\ln_2\mu_f(r)\right)\right)^{1+\delta_1}\prod_{i=1}^{p}\ln r_i\ln_2^{1+\delta_1} r_i.$$

Тому для $\delta_2=2\delta_1$ та $r\in\Delta_R\backslash(\bigcup_{i=1}^{p}E_i)$ маємо

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}\|n\||a_n|r^n\leq\mu_f(r)\ln^{p/2+1+\delta_2}\mu_f(r)\prod_{i=1}^{p}\left((\ln r_i)^{p+\delta_2}(\ln_2 r_i)^{1+\delta_2}\sum_{i=1}^{p}\ln_2^{1+\delta_2}r_i\right)<$$

$$<\mu_f(r)\ln^{p/2+1+\delta_2}\mu_f(r)\prod_{i=1}^{p}(\ln^p r_i\ln_2^2 r_i)^{1+\delta_2}.$$

Отже,

$$\sum_{\|n\|\geq d}|a_n|r^n\leq\sum_{\|n\|\geq d}\frac{\|n\|}{d}|a_n|r^n=\frac{1}{d}\sum_{\|n\|\geq d}\|n\||a_n|r^n\leq$$

$$\leq\frac{1}{d}\mu_f(r)\ln^{p/2+1+\delta_2}\mu_f(r)\prod_{i=1}^{p}(\ln^p r_i\ln_2^2 r_i)^{1+\delta_2}=\mu_f(r),\tag{3.28}$$

де

$$d=d(r)=\ln^{p/2+1+\delta_2}\mu_f(r)\prod_{i=1}^{p}(\ln^p r_i\ln_2^2 r_i)^{1+\delta_2}.$$

Нехай $G_k^*=G_k\setminus E_{p+1}$,

$$E_{p+1}=\bigcup_{i=1}^{p}E_i\cup E^*\cup\left(\bigcup_{i=1}^{k_0-1}G_i\right).$$

Через I позначимо множину натуральних чисел $k\geq k_0$ таких, що $G_k^*\neq\varnothing$. Тоді $\#I=+\infty$. Для $k\in I$ виберемо послідовність $r^{(k)}\in G_k^*$. Тоді для всіх $r\in G_k^*$ одержимо

$$\mu_f(r^{(k)})<e^{k+1}\leq e\mu_f(r),\quad\mu_f(r)<e^{k+1}<e\mu_f(r^{(k)}),\tag{3.29}$$

і також

$$\bigcup_{k\in I}G_k^*=\bigcup_{k\in I}G_k\setminus E_{p+1}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}G_k\setminus E_{p+1}=[0;+\infty)^p\setminus E_{p+1}.$$

Для $k\in I$ позначимо $N_k=[2d_1(r^{(k)})]$, де

$$d_1(r)=\ln^{p/2+1+\delta_2}(e\mu_f(r))\prod_{i=1}^{p}(\ln^p r_i\ln_2^2 r_i)^{1+\delta_2},$$

і для $r \in G_k^*$

$$W_{N_k}(r,t) = \max\left\{ \left| \sum_{\|n\|\le N_k} a_n r_1^{n_1}\dots r_p^{n_p} e^{in_1\psi_1+\dots+in_p\psi_p} X_n(t)\right| : \psi \in [0,2\pi]^p \right\}.$$

Для вимірної за Лебегом множини $G \subset G_k^*$ і для $k \in I$ позначимо

$$\nu_k(G) = \frac{\text{meas}_p(G)}{\text{meas}_p(G_k^*)},$$

де meas_p позначає міру Лебега на $\mathbb{R}^p$.

Зауважимо, що ν_k є ймовірнісною мірою, визначеною на сім'ї вимірних за Лебегом підмножин G_k^*. Нехай $\Omega = \bigcup_{k\in I} G_k^*$ та $I = \{k_j \colon j \ge 1\} \subset \mathbb{N}$, де $k_j < k_{j+1}$, $j \ge 1$. Для вимірних за Лебегом підмножин G множини Ω позначимо

$$\nu(G) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_j}}\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_{j+1}-k_j}\Big) \int\limits_G \chi_{G^*_{k_{j+1}}} d\nu_{k_{j+1}}, \tag{3.30}$$

де $k_0 = 0$ та χ_A — індикаторна функція множини A. Зауважимо, що

$$\nu(\Omega) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_j}}\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_{j+1}-k_j}\Big)\nu(G^*_{k_{j+1}}) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{s=k_j+1}^{k_{j+1}} \frac{1}{2^s} = \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1}{2^s} = 1.$$

Тому ν — ймовірнісна міра, яка визначена на вимірних підмножинах Ω. На $[0;1]\times\Omega$ визначимо ймовірнісну міру $P_0 = P \otimes \nu$, яка є прямим добутком ймовірнісних мір P і ν. Тепер для $k \in I$ позначимо

$$F_k = \{(t,r) \in [0;1]\times\Omega \colon W_{N_k}(r,t) > A_1 S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k\},$$
$$F_k(r) = \{t \in [0;1] \colon W_{N_k}(r,t) > A_1 S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k\},$$

де

$$S^2_{N_k}(r) = \sum_{\|n\|=0}^{N_k} |a_n|^2 r^{2n}$$

і A_p — стала з леми 3.6 з $\beta = 1$. Використавши теорему Фубіні і лему 3.6 з $c_n = a_n r^n$ і $\beta = 1$, одержимо для $k \in I$

$$P_0(F_k) = \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_{F_k(r)} dP\Bigg) d\nu = \int\limits_\Omega P(F_k(r)) d\nu \le \frac{1}{N_k}\nu(\Omega) = \frac{1}{N_k}.$$

Зауважимо, що $N_k > \ln^{p/2+1}\mu_f(r^{(k)}) \ge k^{3/2}$. Тому

$$\sum_{k\in I} P_0(F_k) \le \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-3/2} < +\infty.$$

За лемою Бореля-Кантеллі нескінченна кількість подій $\{F_k \colon k \in I\}$ може відбутися з нульовою ймовірністю. Тому,

$$P_0(F) = 1, \quad F = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \bigcap_{k\ge s, k\in I} \overline{F_k} \subset [0;1]\times\Omega.$$

Тоді для кожної точки $(t,r)\in F$ існує $k_0=k_0(t,r)$ таке, що для всіх $k\ge k_0$, $k\in I$ маємо
$$W_{N_k}(r,t)\le A_1 S_{N_k}(r)\ln^{1/2}N_k.$$

Нехай P_j — ймовірнісна міра визначена на $(\Omega_j,\mathcal{A}_j)$, де $\mathcal{A}_j$ — σ-алгебра підмножин Ω_j $(j\in\{1,\dots,p\})$ та P_0 — прямий добуток ймовірнісних мір $P_1,\dots,P_p$ визначений на $(\Omega_1\times\ldots\times\Omega_p,\ \mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_p)$. Тут $\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_p$ — σ-алгебра, яка містить всі $A_1\times\ldots\times A_p$, де $A_j\in\mathcal{A}_j$. Якщо $F\subset\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_p$ така, що $P_0(F)=1$, тоді у випадку коли проекція
$$F_1=\{t_1\in\Omega_1\colon(\exists(t_2,\dots,t_p)\in\Omega_2\times\ldots\times\Omega_p)[(t_1,\dots,t_p)\in F]\}$$
множини F на Ω_1 є P_1-вимірною та $P_1(F_1)=1$.

Через F_Ω позначимо проекцію F на Ω, тобто
$$F_\Omega=\{r\in\Omega\colon(\exists t)[(t,r)\in F]\}.$$

Тоді $\nu(F_\Omega)=1$. Аналогічно, проекція F на $[0;1]$, $F_{[0;1]}=\bigcup_{r\in\Omega}F(r)$, та $P(F_{[0;1]})=1$.

Нехай $F^\wedge(t)=\{r\in\Omega\colon(t,r)\in F\}$. Тоді за теоремою Фубіні
$$0=\int\limits_X(1-\chi_F)dP_0=\int\limits_0^1\Bigg(\int\limits_\Omega(1-\chi_{F^\wedge(t)})d\nu\Bigg)dP.$$

Тому P-майже скрізь
$$0=\int\limits_\Omega(1-\chi_{F^\wedge(t)})d\nu=1-\nu(F^\wedge(t)),$$
тобто $\exists\,F_1\subset F_{[0;1]}$, $P(F_1)=1$ така, що для всіх $t\in F_1$ маємо $\nu(F^\wedge(t))=1$.

Дійсно, якщо для деякого $k\in I$, $k=k_{j+1}$ ми отримуємо $\nu_k(F^\wedge(t)\cap G_k^*)=q<1$, тоді
$$\nu(F^\wedge(t))=\sum_{k\in I}\nu_k(F^\wedge(t)\cap G_k^*)\le\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k_s}}\Big(1-\Big(\frac12\Big)^{k_{s+1}-k_s}\Big)-$$
$$-(1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\Big(1-\Big(\frac12\Big)^{k_{j+1}-k_j}\Big)=1-(1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\Big(1-\Big(\frac12\Big)^{k_{j+1}-k_j}\Big)<1.$$

Для кожного $t\in F_1$ і $k\in I$ виберемо точку $r_0^{(k)}(t)\in G_k^*$ таку, що
$$W_{N_k}(r_0^{(k)}(t),t)\ge\frac34M_k(t),\ \ M_k(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup\{W_{N_k}(r,t)\colon r\in G_k^*\}.$$
Тоді з $\nu_k(F^\wedge(t)\cap G_k^*)=1$ для всіх $k\in I$ випливає, що існує точка $r^{(k)}(t)\in G_k^*\cap F^\wedge(t)$ така, що
$$|W_{N_k}(r_0^{(k)}(t),t)-W_{N_k}(r^{(k)}(t),t)|<\frac14M_k(t)$$
або
$$\frac34M_k(t)\le W_{N_k}(r_0^{(k)}(t),t)\le W_{N_k}(r^{(k)}(t),t)+\frac14M_k(t).$$

Оскільки $(t, r^{(k)}(t)) \in F$, то з нерівності (3.30) отримуємо

$$\frac{1}{2}M_k(t) \leq W_{N_k}(r^{(k)}(t), t) \leq A_1 S_{N_k}(r^{(k)}(t)) \ln^{1/2} N_k. \qquad (3.31)$$

Тепер для $r^{(k)} = r^{(k)}(t)$ одержимо

$$S_N^2(r^{(k)}) \leq \mu_f(r^{(k)})\mathfrak{M}_f(r^{(k)}) \leq \mu_f^2(r^{(k)}) \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i^{(k)} \cdot \ln^p \mu_f(r^{(k)}) \right)^{1/2+\delta}.$$

Отже, для $t \in F_1$ і всіх $k \geq k_0(t)$, $k \in I$

$$S_N(r^{(k)}) \leq \mu_f(r^{(k)}) \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i^{(k)} \cdot \ln^p \mu_f(r^{(k)}) \right)^{1/4+\delta/2}. \qquad (3.32)$$

З (3.29) випливає, що $d_1(r^{(k)}) \geq d(r)$ для $r \in G_k^*$. Тоді для

$$t \in F_1,\ r \in F^\wedge(t) \cap G_k^*,\ k \in I,\ k \geq k_0(t)$$

маємо

$$M_f(r, t) \leq \sum_{\|n\| \geq 2d_1(r^{(k)})} |a_n| r^n + W_{N_k}(r, t) \leq \sum_{\|n\| \geq 2d(r)} |a_n| r^n + M_k(t).$$

Отож, з (3.28), (3.31), (3.32) для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_k^*$, $k \in I$ та $k \geq k_0(t)$ виконується нерівність

$$M_f(r^{(k)}, t) \leq \mu_f(r^{(k)}) + 2A_p S_{N_k}(r^{(k)}) \ln^{1/2} N_k \leq$$
$$\leq \mu_f(r^{(k)}) + 2A_p \mu_f(r^{(k)}) \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i^{(k)} \cdot \ln^p \mu_f(r^{(k)}) \right)^{1/4+\delta/2} \times$$
$$\times \left((p/2 + 1 + \delta_2) \ln_2(e\mu_f(r^{(k)})) + (1 + \delta_2) \sum_{i=1}^{p} (p \ln_2 r_i^{(k)} + 2 \ln_3 r_i^{(k)}) \right)^{1/2}.$$

Використовуючи нерівність (3.29) ми отримуємо для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_k^*$, $k \in I$ та $k \geq k_0(t)$

$$M_f(r, t) \leq C\mu_f(r) \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r) \right)^{1/4+3\delta_2/4}. \qquad (3.33)$$

Виберемо $k_1 > k_0(t)$ таке, що для $r \in G_{k_1}^+$ маємо

$$C \leq \left(\prod_{i=1}^{p} \ln^{p-1} r_i \cdot \ln^p \mu_f(r) \right)^{\delta_2/4}. \qquad (3.34)$$

Використовуючи (3.33) і (3.34), ми отримуємо, що нерівність (3.25) виконується майже напевно ($t \in F_1$, $P(F_1) = 1$) для всіх

$$r \in \left(\bigcup_{k \in I} (G_k^* \cap F^\wedge(t)) \cap G_{k_1}^+ \right) \backslash E^* =$$

$$= ([1;+\infty)^p \cap G^+_{k_1}) \setminus (E^* \cup G^* \cup E_{p+1}) = [1;+\infty)^p \setminus E_{p+2},$$

де

$$E_{p+2} = E_{p+1} \cup G^* \cup E^*, \ G^* = \bigcup_{k\in I} (G^*_k \setminus F^\wedge(t)).$$

Залишається зауважити, що $\nu(G^*)$ визначена у (3.30) задовольняє

$$\nu(G^*) = \sum_{k\in I} (\nu_k(G^*_k) - \nu_k(F^\wedge(t))) = 0.$$

Тоді для всіх $k \in I$ маємо

$$\nu_k(G^*_k \setminus F^\wedge(t)) = \frac{\mathrm{meas}_p(G^*_k \setminus F^\wedge(t))}{\mathrm{meas}_p(G^*_k)} = 0,$$

$$\mathrm{meas}_p(G^*_k \setminus F^\wedge(t)) = \int\limits_{G^*_k\setminus F^\wedge(t)} \cdots \int \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{r_j} = 0.$$

□

Приклад на точність нерівності типу Вімана для випадкових цілих функцій від багатьох змінних.

Доведемо, що показник степеня $p/4 + \delta$ в нерівності (3.26) не може бути замінено числом, меншим за $p/4$. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.10. *Для*

$$f(z) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{p} z_i \right\}$$

майже напевно у $\mathcal{K}_1(f,H)$ *для* $r \in E$ *виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \geq \frac{1}{4^p p} \mu_f(r) \ln^{p/4} \mu_f(r),$$

де E *— множина асимптотично нескінченної логарифмічної міри та* $H = \{e^{2\pi i\omega_n}\}$, $\{\omega_n\}$ *є послідовністю незалежних випадкових величин рівномірно розподілених на* $[0;1]$.

Для доведення цієї теореми нам потрібен такий результат.

Теорема 3.11 ([70]). *Для цілої функції* $g(z) = e^z$ *майже напевно в* $\mathcal{K}_1(g,H)$

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{M_g(r,t)}{\mu_g(r) \ln^{1/4} \mu_g(r)} \geq \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \tag{3.35}$$

Доведення теореми 3.10. Для цілої функції $f(z) = \exp\{\sum_{i=1}^p z_i\}$ маємо

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{i=1}^{p} r_i$$

і для кожного $\beta > 0$

$$\int\limits_{(1;+\infty)^p}\cdots\int\left(\sum_{j=1}^{p} r_j\right)^{-\beta}\prod_{j=1}^{p}\frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Тому функція $f(z)$ задовольняє умову

$$\int\limits_{\Delta_S}\cdots\int\frac{1}{\ln^{\beta}\mathfrak{M}_f(r)}\prod_{j=1}^{p}\frac{dr_j}{r_j} < +\infty,\ \text{при } S^{\wedge} \to +\infty.$$

З (3.35) маємо для $r \in (r_0; +\infty)^p$

$$M_f(r,t) > \frac{1}{2^p}\mu_f(r)\prod_{i=1}^{p}\ln^{1/4}\mu_g(r_i).$$

Позначимо $\psi(r) = \ln\mu_g(r)$. Зауважимо, що

$$A_t = \{r\colon r_1 = t; r_i \in (t_1,t_2) = (\psi^{-1}(\psi(r_1)/2), \psi^{-1}(2\psi(r_1)))\} \subset$$
$$\subset\left\{r\colon \prod_{i=1}^{p}\psi(r_i) \geq \frac{1}{(4p)^p}\left(\sum_{i=1}^{p}\psi(r_i)\right)^p\right\}.$$

Справді, якщо $r \in A_t$ тоді для фіксованого r_1 виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{p}\psi(r_i) = \psi(r_1)\prod_{i=2}^{p}\psi(r_i) > \psi(r_1)\prod_{i=2}^{p}\frac{\psi(r_1)}{2} = \frac{\psi^p(r_1)}{2^{p-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^{p-1}(2p-1)^p}(\psi(r_1) + \underbrace{2\psi(r_1) + \ldots + 2\psi(r_1)}_{p-1 \text{ разів}})^p > \frac{1}{(4p)^p}\left(\sum_{i=1}^{p}\psi(r_i)\right)^p.$$

Для $r \in A = \bigcup_{t=r_0}^{+\infty} A_t$ маємо

$$M_f(r,t) > \frac{1}{2^p}\mu_f(r)\prod_{i=1}^{p}\ln^{1/4}\mu_g(r_i) > \mu_f(r)\frac{1}{(8p)^p}\left(\sum_{i=1}^{p}\ln\mu_g(r_i)\right)^{p/4} >$$
$$> \frac{1}{(8p)^p}\mu_f(r)\ln^{p/4}\mu_f(r).$$

Залишається довести, що множина A має асимптотично нескінченну логарифмічну міру. Відомо ([91]), що $t < \psi^{-1}(t) < 3t/2,\ t \to +\infty$. Тому

$$\mathrm{meas}_p(A) = \int\limits_{r_0}^{+\infty}\int\limits_{t_1}^{t_2}\cdots\int\limits_{t_1}^{t_2}\prod_{j=1}^{p}\frac{dr_j}{r_j} = \int\limits_{r_0}^{+\infty}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dr_2}{r_2}\right)^{p-1}\frac{dr_1}{r_1} =$$
$$= \int\limits_{r_0}^{+\infty}\Big(\ln\psi^{-1}(2\psi(r_1)) - \ln\psi^{-1}\Big(\frac{\psi(r_1)}{2}\Big)\Big)^{p-1}\frac{dr_1}{r_1} >$$
$$> \int\limits_{r_0}^{+\infty}\Big(\ln(2\psi(r_1)) - \ln\Big(\frac{3\psi(r_1)}{4}\Big)\Big)^{p-1}\frac{dr_1}{r_1} = \ln^{p-1}\frac{8}{3}\cdot\int\limits_{r_0}^{+\infty}\frac{dr_1}{r_1} = +\infty.$$

□

3.5. Ефект Леві для функцій аналітичних у полікрузі

Розглянемо аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{3.36}$$

з областю збіжності $\mathbb{D}^p = \{z \in \mathbb{C}^p \colon |z_j| < 1, j \in \{1, \dots, p\}\}$.

Через $\mathcal{A}^p$ позначимо клас таких аналітичних функцій.

Нехай $D_f(r)$ — матриця $p \times p$ така, що

$$D_{ij} = r_i \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r)\Big) = \partial_i \partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r),\ \partial_i = r_i \frac{\partial}{\partial r_i},\ i, j \in \{1, \dots, p\}.$$

Будемо казати, що $E \in [0;1)^p$ є *множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0;1)^p$, якщо існує $r_0 \in [0;1)^p$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}) := \int\limits_{E \cap \triangle_{r_0}} \cdots \int \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1 - r_i} < +\infty,$$

тобто $E \cap \triangle_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0;1)^p$.

Зазначимо, що множина

$$E_0 = \{r = (r_1, \dots, r_p) \colon 0 < r_1 < 1/2, 0 < r_2 < 1, \dots, 0 < r_p < 1\}$$

має нескінченну логарифмічну міру на $[0;1)^p$, але E_0 — множина асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0;1)^p$, оскільки $E_0 \cap \Delta_{r_0} = \varnothing$ при $r_0 = (1/2, 1/2, \dots, 1/2)$.

Через Υ_1 позначимо сім'ю множин асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0;1)^p$.

Лема 3.11 ([99]). *Нехай $\delta > 0$, $h \colon \mathbb{R}^p_+ \to \mathbb{R}_+$ є зростаючою функцією за кожною змінною такою, що*

$$\int\limits_1^{+\infty} \dots \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{h(u)} \prod_{j=1}^{p} du_j < +\infty.$$

Тоді існує множина $E \subset [0;1)^p$ асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0;1)^p \backslash E$ виконуються нерівності

$$\det(D_f(r) + I) \le \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - r_j} \cdot h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \dots, \frac{\partial}{\partial r_p} \ln \mathfrak{M}_f(r)\Big), \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_s} \ln \mathfrak{M}_f(r) \le (\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \cdot \frac{1}{1 - r_s} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{p} \Big(\frac{1}{1 - r_j}\Big)^{\delta},\ s \in \{1, \dots, p\}. \tag{3.38}$$

Теорема 3.12 ([99]). *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(f, \delta) \subset [0;1)^p$ асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0;1)^p \backslash E$ маємо*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta}} \cdot \ln^{p/2+\delta}\left\{\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j}\right\}. \tag{3.39}$$

З теореми 3.12 випливає, що для кожного $\delta > 0$ множина

$$E = E(f, \delta) =$$

$$= \left\{r \in [0;1)^p \colon M_f(r) > \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-r_j)^{1+\delta}} \ln^{p/2+\delta}\left\{\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j}\right\}\right\}$$

має асимптотично скінченну логарифмічну міру на $[0;1)^p$.

Жоден зі степенів $1 + \delta$ і $p/2 + \delta$ у нерівності (3.39) не можна одночасно замінити меншими числами, ніж 1 та $p/2$, відповідно. Це випливає з такого твердження.

Теорема 3.13 ([99]). *Існують функція $f \in \mathcal{A}^p$, стала $C > 0$ і множина $E \subset [0;1)^p, E \notin \Upsilon_1$, такі, що для всіх $r \in E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \geq C\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \cdot \ln^{p/2}\left\{\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j}\right\}.$$

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплексна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$, така, що $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС й $\mathcal{K}_2(f, Z)$ — клас випадкових аналітичних функцій

$$f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}.$$

Для такої функції доведено наступне твердження.

Теорема 3.14. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$, Z — МС, рівномірно обмежена числом 1, $\delta > 0$. Тоді майже напевно в $\mathcal{K}_2(f, Z)$ існує множина $E = E(f, t, \delta), E \in \Upsilon_1$, така, що для всіх $r \in [0;1)^p \backslash E$ виконується нерівність*

$$M_f(r, t) \leq \mu_f(r) \left(\prod_{j=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1-r_j}} \cdot \ln^{p/4}\left\{\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j}\right\}\right)^{1+\delta}. \tag{3.40}$$

Доведемо, що показник $1 + \delta$ в нерівності (3.40) не можна замінити числом, меншим за 1. Це випливає з такого твердження випливає.

Теорема 3.15. *Нехай Z — послідовність випадкових величин така, що $|Z_n| \geq 1$ для майже всіх $t \in [0;1]$. Тоді існують аналітична функція $f \in \mathcal{A}^p$, стала $C > 0$ і множина $E = E(f,t,\delta) \subset [0;1)^p$, $E \notin \Upsilon_1$, такі, що майже напевно в $\mathcal{K}_2(f,Z)$ для всіх $r \in E$ маємо*

$$M_f(r,t) \geq C\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1-r_j}} \cdot \ln^{p/4}\left\{\mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j}\right\}.$$

Доведення теореми 3.14. Не зменшуючи загальності можна припустити, що $Z = X = (X_n(t))$ є МС.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ і $l \in \mathbb{Z}$ таких, що $k > -l$ позначимо

$$U_{lk} = \left\{ r = (r_1, \ldots, r_p) \in [0;1)^p \colon \right.$$
$$\left. k \leq \sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{1-r_j} \leq k+1,\ l \leq \ln \mu_f(r) \leq l+1 \right\}, \quad U_{lk}^{+} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} U_{ij}.$$

Зауважимо, що множина

$$E_0 = \left\{ r \in [0;1)^p \colon \sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{1-r_j} + \ln \mu_f(r) < 1 \right\} =$$
$$= \left\{ r \in [0;1)^p \colon \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} < e \right\} \in \Upsilon_1,$$

тому що існує r_0, таке, що $E_0 \cap [r_0;1)^p = \varnothing$.

За лемою 3.11 і теоремою 3.12 існує множина $E_1 \supset E_0, E_1 \in \Upsilon_1$ така, що для всіх $r \in [0;1)^p \backslash E_1$ виконується нерівність

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| \cdot |a_n| r^n \leq \mathfrak{M}_f(r)(\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \cdot \sum_{s=1}^{p} \left(\frac{1}{1-r_s} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{p} \left(\frac{1}{1-r_j} \right)^{\delta} \right) \leq$$
$$\leq \mu_f(r) \left(\prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \cdot \ln^{p/2}\left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \right\} \right)^{1+\delta} \times$$
$$\times \left(\ln \mu_f(r) + (1+\delta) \left(\sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{1-r_j} + \frac{p}{2} \ln \left(\ln \mu_f(r) + \sum_{j=1}^{p} \ln \frac{1}{1-r_j} \right) \right) \right)^{1+\delta} \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{p} \left(\frac{1}{1-r_s} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{p} \left(\frac{1}{1-r_j} \right)^{\delta} \right) \leq$$
$$\leq \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-r_j)^{1+2\delta}} \cdot \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \cdot \ln^{p/2+1+p\delta}\left\{ \mu_f(r) \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1-r_j} \right\} \leq$$

$$\leq \mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{(1-r_j)^{2+2\delta}}\cdot\ln^{p/2+1+p\delta}\Big\{\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j}\Big\}. \tag{3.41}$$

Позначимо

$$d=d(r)=\prod_{j=1}^{p}\frac{e^{2+3\delta}}{(1-r_j)^{2+3\delta}}\cdot\ln^{p/2+1+p\delta}\Big\{\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j}\Big\}.$$

З нерівності (3.41) випливає, що

$$\sum_{\|n\|\geq d}|a_n|r^n\leq\sum_{\|n\|\geq d}\frac{\|n\|}{d}|a_n|r^n\leq\frac{1}{d}\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}\|n\||a_n|r^n\leq$$

$$\leq\frac{1}{d}\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{(1-r_j)^{2+2\delta}}\cdot\ln^{p/2+1+p\delta}\Big\{\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j}\Big\}\leq\mu_f(r). \tag{3.42}$$

Нехай

$$U^*_{lk}=U_{lk}\setminus E_1,\ E_2=E_1\cup\Big(\bigcup_{(i,j)\notin J}U_{ij}\Big),\ J=\{(i;j)\colon U^*_{ij}\neq\varnothing\}.$$

Тоді $\#J=+\infty$. Для $(l,k)\in J$ виберемо послідовність $r^{(l,k)}\in\overline{U^*_{lk}}$, так, що

$$\mu_f(r^{(l,k)})=\inf_{r\in U^*_{lk}}\mu_f(r).$$

Для всіх $r\in U^*_{lk}$ отримаємо

$$\mu_f(r^{(l,k)})\leq\mu_f(r)\leq e\mu_f(r^{(l,k)}), \tag{3.43}$$

$$\frac{1}{e}\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\leq\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j}\leq e\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}, \tag{3.44}$$

$$\frac{1}{e^2}\mu_f(r^{(l,k)})\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\leq\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j}\leq e^2\mu_f(r^{(l,k)})\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}} \tag{3.45}$$

і також

$$\bigcup_{(l,k)\in J}U^*_{lk}=\bigcup_{(l,k)\in J}U_{lk}\setminus E_1=\bigcup_{k,l=1}^{+\infty}U_{lk}\setminus E_1=[0;1)^p\setminus E_1.$$

Позначимо $N_{lk}=[2d_1(r^{(l,k)})]$, де

$$d_1(r)=\prod_{j=1}^{p}\frac{e^{2+3\delta}}{(1-r_j)^{2+3\delta}}\cdot\ln^{p/2+1+p\delta}\Big\{e^2\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1-r_j}\Big\}.$$

Для $r\in U^*_{lk}$ припустимо, що

$$V_{N_{lk}}(r,t)=\max\left\{\left|\sum_{\|n\|\leq N_{lk}}a_nr_1^{n_1}\dots r_p^{n_p}e^{in_1\psi_1+\dots+in_p\psi_p}X_n(t)\right|:\psi\in[0,2\pi]^p\right\}.$$

Далі ми міркуємо подібно до [107], адаптуючись до нашого випадку. Для вимірної за Лебегом множини $U \subset U^*_{lk}$ і для $(l,k) \in J$ позначимо

$$\nu_{lk}(U) = \frac{\mathrm{meas}_p(U)}{\mathrm{meas}_p(U^*_{lk})},$$

де meas_p позначає міру Лебега на $\mathbb{R}^p$.

Зауважимо, що ν_{lk} є ймовірнісною мірою, визначеною на сім'ї вимірних за Лебегом підмножин U^*_{kl}. Нехай

$$\Omega = \bigcup_{(l,k)\in J} U^*_{lk},\ k_i, l_{i,j} \colon (k_i, l_{i,j}) \in J,\ k_i < k_{i+1},\ l_{i,j} < l_{i,j+1},\ \forall i,j \in \mathbb{Z}_+.$$

Для вимірних за Лебегом множин $U \subset \Omega$ позначимо

$$\nu(U) = 2^{k_0} \sum_{i=0}^{+\infty} \Biggl(\frac{1}{2^{k_i}} \Bigl(1 - \Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^{k_{i+1}-k_i}\Bigr) \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{N_i} \frac{2^{l_{i,0}}}{2^{l_{i,j}}} \frac{\Bigl(1 - \bigl(\frac{1}{2}\bigr)^{l_{i,j+1}-l_{i,j}}\Bigr)}{1 - \bigl(\frac{1}{2}\bigr)^{l_{i,N_{i+1}}-l_{i,0}}} \nu_{k_{i+1}l_{i+1,j+1}}(U \cap U^*_{k_{j+1}l_{i+1,j+1}}) \Biggr), \tag{3.46}$$

де $N_i = \max\{j \colon (k_i, l_{ij}) \in J\}$. Зауважимо, що

$$\nu_{k_{j+1}l_{j+1}}(U^*_{k_{j+1}l_{j+1}}) = \nu(\Omega) = 1.$$

Таким чином, ν є ймовірносною мірою. На $[0;1] \times \Omega$ визначимо ймовірнісну міру $P_1 = P \otimes \nu$, яка є прямим добутком ймовірнісних мір P та ν. Тепер для $(k;l) \in J$ визначимо

$$F_{lk} = \{(t,r) \in [0;1] \times \Omega \colon V_{N_{lk}}(r,t) > A_p S_{N_{lk}}(r) \ln^{1/2} N_{lk}\},$$
$$F_{lk}(r) = \{t \in [0;1] \colon V_{N_{lk}}(r,t) > A_p S_{N_{lk}}(r) \ln^{1/2} N_{lk}\},$$

де

$$S^2_{N_{lk}}(r) = \sum_{\|n\|=0}^{N_{lk}} |a_n|^2 r^{2n}$$

й A_p — стала з леми 3.6 з $\beta = 1$. Використовуючи теорему Фубіні та лему 3.6 з $c_n = a_n r^n$ і $\beta = 1$, ми отримаємо для $(l,k) \in J$

$$P_1(F_{lk}) = \int_\Omega \Biggl(\int_{F_{lk}(r)} dP \Biggr) d\nu = \int_\Omega P(F_{lk}(r)) d\nu \le \frac{1}{N_{lk}} \nu(\Omega) = \frac{1}{N_{lk}}. \tag{3.47}$$

Зауважимо, що за означенням N_{lk} з нерівностей (3.43)–(3.45) випливає, що

$$N_{lk} > \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1 - r_j^{(l,k)})^2} \ln^{p/2+1+p\delta} \Biggl\{ \mu_f(r^{(l,k)}) \prod_{j=1}^p \frac{1}{1 - r_j^{(l,k)}} \Biggr\} \ge e^k (l+k)^{2+p\delta}.$$

Тому з (3.47) маємо

$$\sum_{(l,k)\in J} P_1(F_{lk}) \le \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-k+1}^{+\infty} \frac{1}{e^k(l+k)^{2+p\delta}} < +\infty.$$

За лемою Бореля-Кантеллі нескінченна кількість подій $\{F_{lk}\colon (l,k)\in J\}$ може відбуватися з нульовою ймовірністю. Тому

$$P_1(F)=1, \quad F=\bigcup_{s=1}^{+\infty}\bigcup_{m=1}^{+\infty}\bigcap_{\substack{k\ge s,\ l\ge m\\ (l,k)\in J}} \overline{F_{lk}} \subset [0;1]\times\Omega.$$

Тоді для будь-якої точки $(t,r)\in F$ існують $k_1=k_1(t,r)$ і $l_1=l_1(t,r)$, такі, що для всіх $k\ge k_1$, $l\ge l_1$, $(l,k)\in J$ маємо

$$V_{N_{lk}}(r,t)\le A_p S_{N_{lk}}(r)\ln^{1/2} N_{lk}. \tag{3.48}$$

Нехай P_j — ймовірнісна міра, визначена на $(\Omega_j,\mathcal{A}_j)$, де $\mathcal{A}_j$ — σ-алгебра підмножин Ω_j ($j\in\{1,\ldots,p\}$) і P_1 є прямим добутком ймовірнісних мір $P_1,\ldots,P_p$, визначених на $(\Omega_1\times\ldots\times\Omega_p,\ \mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_p)$. Тут $\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_p$ є мінімальною σ-алгеброю, яка містить усі $A_1\times\ldots\times A_p$, де $A_j\in\mathcal{A}_j$. Якщо $F\subset\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_p$, така, що $P_1(F)=1$, то у випадку, коли проекція

$$F_1=\{t_1\in\Omega_1\colon (\exists(t_2,\ldots,t_p)\in\Omega_2\times\ldots\times\Omega_p)[(t_1,\ldots,t_p)\in F]\}$$

множини F на Ω_1 є P_1-вимірною, маємо $P_1(F_1)=1$.

Через F_Ω ми позначаємо проекцію F на Ω, тобто

$$F_\Omega=\{r\in\Omega\colon (\exists t)[(t,r)\in F]\}.$$

Тоді $\nu(F_\Omega)=1$. Аналогічно, проекція F на $[0;1]$ є $F_{[0;1]}=\bigcup_{r\in\Omega}F(r)$ і виконується рівність $P(F_{[0;1]})=1$.

Нехай $F^\wedge(t)=\{r\in\Omega\colon (t,r)\in F\}$. За теоремою Фубіні маємо

$$0=\int_X(1-\chi_F)dP_1=\int_0^1\left(\int_\Omega(1-\chi_{F^\wedge(t)})d\nu\right)dP.$$

Отже, P-майже скрізь

$$0=\int_\Omega(1-\chi_{F^\wedge(t)})d\nu=1-\nu(F^\wedge(t)),$$

тобто $\exists\, F_1\subset F_{[0;1]}$ така, що $P(F_1)=1$ і для всіх $t\in F_1$ одержимо $\nu(F^\wedge(t))=1$.

Позначимо $M_{lk}(t)=\sup\{V_{N_{lk}}(r,t)\colon r\in U^*_{lk}\}$. Для довільних $t\in F_1$ і $(l,k)\in J$ виберемо точку $r_0^{(l,k)}(t)\in U^*_{lk}$ таку, що

$$V_{N_{lk}}(r_0^{(l,k)}(t),t)\ge\frac{3}{4}M_{lk}(t).$$

Тоді з $\nu_{lk}(F^{\wedge}(t)\cap U^*_{lk}) = 1$ для всіх $(l,k)\in J$ випливає, що існує точка $r^{(l,k)}(t)\in U^*_{lk}\cap F^{\wedge}(t)$ така, що

$$|V_{N_{lk}}(r_0^{(l,k)}(t),t) - V_{N_{lk}}(r^{(l,k)}(t),t)| < \frac{1}{4}M_{lk}(t)$$

або

$$\frac{3}{4}M_{lk}(t)\le V_{N_{lk}}(r_0^{(l,k)}(t),t)\le V_{N_{lk}}(r^{(l,k)}(t),t)+\frac{1}{4}M_{lk}(t). \tag{3.49}$$

Оскільки $(t,r^{(l,k)}(t))\in F$, з нерівностей (3.48) і (3.49) отримуємо

$$\frac{1}{2}M_{lk}(t)\le V_{N_{lk}}(r^{(l,k)}(t),t)\le A_pS_{N_{lk}}(r^{(l,k)}(t))\ln^{1/2}N_{lk}. \tag{3.50}$$

Використавши нерівність типу Вімана для $S_f(r^{(l,k)}(t))$ одержимо

$$S^2_{N_{lk}}(r^{(l,k)}(t))\le\mu_f(r^{(l,k)}(t))S_f(r^{(l,k)}(t))\le$$
$$\le\mu_f^2(r^{(l,k)}(t))\left(\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\ln^{p/2}\left\{\mu_f(r^{(l,k)}(t))\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\right\}\right)^{1+\delta}.$$

Тому для $t\in F_1$ і всіх $k\ge k_1(t)$, $l\ge l_1(t)$, при $r=r^{(l,k)}(t)$ отримаємо

$$S_N(r)\le\mu_f(r)\left(\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\ln^{p/2}\left\{\mu_f(r)\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\right\}\right)^{1/2+\delta/2}. \tag{3.51}$$

З (3.43)–(3.45) випливає, що $d_1(r^{(l,k)})\ge d(r)$ для $r\in U^*_{lk}$. Тоді для

$$t\in F_1,\ r\in F^{\wedge}(t)\cap U^*_{lk},\ (l,k)\in J,\ k\ge k_1(t),\ l\ge l_1(t)$$

одержимо

$$M_f(r,t)\le\sum_{\|n\|\ge 2d_1(r^{(l,k)})}|a_n|r^n+V_{N_{lk}}(r,t)\le\sum_{\|n\|\ge 2d(r)}|a_n|r^n+M_{lk}(t).$$

Нарешті для $t\in F_1$, $r\in F^{\wedge}(t)\cap U^*_{lk}$, $l\ge l_0(t)$ й $k\ge k_0(t)$ з нерівностей (3.42), (3.50), (3.51) випливає, що

$$M_f(r^{(l,k)},t)\le\mu_f(r^{(l,k)})+2A_pS_{N_{lk}}(r^{(l,k)})\ln^{1/2}N_{lk}\le\mu_f(r^{(l,k)})+$$
$$+2A_p\mu_f(r^{(l,k)})\left(\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\ln^{p/2}\left\{\mu_f(r^{(l,k)})\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\right\}\right)^{1/2+\delta/2}\times$$
$$\times\ln\left(6\prod_{j=1}^p\frac{1}{(1-r_j^{(l,k)})^{2+3\delta}}\cdot\ln^{p/2+1+p\delta}\left\{e^2\mu_f(r^{(l,k)})\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j^{(l,k)}}\right\}\right).$$

Отож, ми отримаємо для $t\in F_1$, $r\in F^{\wedge}(t)\cap U^*_{lk}$, $k\ge k_0(t)$ та $l\ge l_0(t)$

$$M_f(r,t)\le\mu_f(r)\left(\prod_{j=1}^p\frac{1}{(1-r_j)^{1/2}}\cdot\ln^{p/4}\left\{\mu_f(r)\prod_{j=1}^p\frac{1}{1-r_j}\right\}\right)^{1+\delta}. \tag{3.52}$$

Тоді нерівність (3.52) виконується майже напевно ($t \in F_1,\ P(F_1) = 1$) для всіх

$$r \in \Big(\bigcup_{(l,k)\in J} (U^*_{lk} \cap F^\wedge(t)) \cap U^+_{lk} \Big) \backslash E^* =$$
$$= ([0;1)^p \cap U^+_{lk}) \setminus (E^* \cup U^* \cup E_1) = [0;1)^p \setminus E_2,$$

де

$$U^+_{lk} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} U_{lk},\ E_2 = E_1 \cup U^* \cup E^*,\ U^* = \bigcup_{(l,k)\in J} (U^*_{lk} \setminus F^\wedge(t)).$$

Залишається нагадати, що $\nu(U^*)$ задовольняє

$$\nu(U^*) = \sum_{(l,k)\in J} (\nu_{lk}(U^*_{lk}) - \nu_{lk}(F^\wedge(t))) = 0.$$

Тоді для всіх $(l,k) \in J$ маємо

$$\nu_{lk}(U^*_{lk} \setminus F^\wedge(t)) = \frac{\mathrm{meas}_p(U^*_{lk} \setminus F^\wedge(t))}{\mathrm{meas}_p(U^*_{lk})} = 0,$$
$$\mathrm{meas}_p(U^*_{lk} \setminus F^\wedge(t)) = \int\limits_{U^*_{lk}\setminus F^\wedge(t)} \!\!\cdots\! \int \prod_{j=1}^{p} \frac{dr_j}{1-r_j} = 0.$$

Доведення теореми 3.15. Нехай

$$h(z) = \prod_{j=1}^{p} h_0(z_j),\ z = (z_1,\ldots,z_p) \in \mathbb{D}^p,\ h_0(\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\sqrt{k}}\tau^k,\ \tau \in \mathbb{D}.$$

Тоді, функція

$$\varphi(t) = \ln \frac{\mu_{h_0}(t)}{1-t}$$

є додатною, неперервною та зростаючою на $(1/2;1)$ та

$$\lim_{t\uparrow 1} \varphi(t) = +\infty.$$

Отже, існує обернена функція $\varphi^{-1} \colon \mathbb{R}_+ \to (1/2;1)$.

Для $h(z)$ та $r \in [0;1)^p$ маємо

$$M_h(r) = \prod_{j=1}^{p} M_{h_0}(r_j),\ \mu_h(r) = \prod_{j=1}^{p} \mu_{h_0}(r_j).$$

Існують $t' \in (0;1)$ і стала $C > 0$, такі, що для $t \in (t';1)$ виконується нерівність

$$M_{h_0}(t) \geq C_1 \frac{\mu_{h_0}(t)}{1-t} \ln^{1/2} \frac{\mu_{h_0}(t)}{1-t}. \tag{3.53}$$

Доведемо нерівність

$$\varphi^{-1}(3\varphi(t)) - \varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(t)}{3}\Big) > 1 - \varphi^{-1}(3\varphi(t)),\ t \uparrow 1. \tag{3.54}$$

Для фіксованого $t \in (0;1)$ розглянемо функцію $\phi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - x\ln\frac{1}{t}$.

$$x_{\max} = \frac{1}{16\ln^2\frac{1}{t}}$$

є єдиною точкою максимуму функції $\phi(x)$. Тому,

$$\max\{\phi(x)\colon x > 0\} = \phi_{\max} = \frac{1}{16\ln\frac{1}{t}},$$

$$\varphi(t) = \ln\frac{\mu_{h_0}(t)}{1-t} \sim \ln\mu_{h_0}(t) \sim \frac{1}{16\ln\frac{1}{t}} \sim \frac{1}{16(1-t)},\ t\uparrow 1.$$

Тоді $\varphi(t) < 3\varphi(2t-1),\ t\uparrow 1$. Отже,

$$\varphi(2t-1) > \frac{\varphi(t)}{3},\ 2t-1 > \varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(t)}{3}\Big),\ t-\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(t)}{3}\Big) > 1-t.$$

Використавши $\varphi^{-1}(3\varphi(t)) > \varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$, отримаємо при $t\uparrow 1$

$$\varphi^{-1}(3\varphi(t)) - \varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(t)}{3}\Big) > t-\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(t)}{3}\Big) > 1-t > 1-\varphi^{-1}(3\varphi(t)).$$

Отже, нерівність (3.54) доведена.

Виберемо $r_j^0, t^* \in (0;1)$ так, щоб

$$\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(t^*)}{3}\Big) > r_j^0,\ j\in\{1,\dots,p\}.$$

Існують стала $C_1 \in (0;1)$ і $r^* \in (0;1)$ такі, що для всіх

$$z \in \{z\colon t^* < |z_k| < 1,\ k\in\{1,\dots,p\}\}$$

маємо

$$M_{h_0}(r_k) \geq C_1\frac{\mu_{h_0}(r_k)}{1-r_k}\ln^{1/2}\frac{\mu_{h_0}(r_k)}{1-r_k}.$$

Тоді для всіх $z \in \{z\colon r^* < |z_j| < 1,\ j\in\{1,\dots,p\}\}$ виконуються нерівності

$$\prod_{i=1}^{p} M_{h_0}(r_i) \geq \prod_{i=1}^{p}\left(C_1\frac{\mu_{h_0}(r_i)}{1-r_i}\ln^{1/2}\frac{\mu_{h_0}(r_i)}{1-r_i}\right),$$

$$M_h(r) \geq C_1^p\mu_h(r)\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{1-r_i}\left(\prod_{i=1}^{p}\ln\frac{\mu_{h_0}(r_i)}{1-r_i}\right)^{1/2}.$$

Для $r_1 \in (t^*;1)$ визначимо a та b так, що

$$a = a(r_1) = \varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(r_1)}{3}\Big),\ b = b(r_1) = \varphi^{-1}(3\varphi(r_1)).$$

Позначимо

$$E' = \{r\in[0;1)^p\colon r_1\in(t^*;1),\ r_i\in(a,b),\ i\in\{2,\dots,p\}\}.$$

Зафіксуємо $r_1 \in (r^*; 1)$. Тоді a та b також фіксовані та

$$\varphi(a) = \varphi(r_1)/3,\ \varphi(b) = 3\varphi(r_1),\ \varphi(b) = 9\varphi(a),\ (r_2, \ldots, r_p) \in (a, b)^{p-1}.$$

Тому, використовуючи $r_1 > a$, ми отримуємо для всіх $r \in E'$

$$\prod_{i=1}^{p} \varphi(r_i) \geq \varphi^p(a) = \frac{\varphi^p(b)}{9^p} = \frac{1}{(9p)^p}(\underbrace{\varphi(b) + \ldots + \varphi(b)}_{p \text{ разів}})^p \geq$$

$$\geq \frac{1}{(9p)^p}(\varphi(r_1) + \ldots + \varphi(r_p))^p = \frac{1}{(9p)^p}\left(\sum_{i=1}^{p} \varphi(r_i)\right)^p.$$

Тоді одержимо для всіх $r \in E'$

$$M_h(r) \geq C_1^p \mu_h(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - r_i} \cdot \frac{1}{(9p)^p}\left(\sum_{i=1}^{p} \ln \frac{\mu_{h_0}(r_i)}{1 - r_i}\right)^{p/2} =$$

$$= C_2 \mu_h(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - r_i} \ln^{p/2}\left(\mu_h(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - r_i}\right).$$

Розглянемо функції

$$h(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} Z_n(t) \prod_{j=1}^{p} e^{\sqrt{n_j}} z_j^{n_j},\ f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \prod_{j=1}^{p} e^{\sqrt{n_j}/2} z_j^{n_j},$$

$$f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} Z_n(t) \prod_{j=1}^{p} e^{\sqrt{n_j}/2} z_j^{n_j}.$$

Зауважимо, що для всіх $r \in [0; 1)^p$ маємо

$$\mu_h(r_1^2, r_2^2, \ldots, r_p^2) = \max\left\{\prod_{j=1}^{p} e^{\sqrt{n_j}} r_j^{2n_j} : n \in \mathbb{Z}_p^+\right\} =$$

$$= \max\left\{\Big(\prod_{j=1}^{p} e^{\sqrt{n_j}/2} r_j^{n_j}\Big)^2 : n \in \mathbb{Z}_p^+\right\} = (\mu_f(r_1, r_2, \ldots, r_p))^2.$$

Використовуючи рівність Парсеваля та нерівність $|Z_n(t)| \leq 1$, ми отримаємо для майже всіх t

$$M_h(r_1^2, r_2^2, \ldots, r_p^2) \leq \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |Z_n(t)|^2 \prod_{j=1}^{p} e^{\sqrt{n_j}} r_j^{2n_j} =$$

$$= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^p \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}, \ldots, r_p e^{i\varphi_p}, t)|^2 d\varphi_1 \ldots d\varphi_p \leq$$

$$\leq (M_f(r_1, r_2, \ldots, r_p, t))^2,$$

$$
\begin{gathered}
M_f(r_1, r_2, \ldots, r_p, t) \geq \sqrt{M_h(r_1^2, r_2^2, \ldots, r_p^2)} \geq \\
\geq \sqrt{C_2 \mu_h(r^2) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i^2} \ln^{p/2}\left(\mu_h(r^2) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i^2}\right)} = \\
= \sqrt{C_2 \mu_f^2(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i^2} \ln^{p/2}\left(\mu_f^2(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i^2}\right)} \geq \\
\geq \sqrt{C_2} \mu_f(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1-r_i}} \ln^{p/4}\left(\mu_f(r) \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1-r_i}\right).
\end{gathered}
$$

Залишається довести, що множина E' є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Оскільки

$$
\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(t^*)}{3}\Big) > r_j^0, \ \ j \in \{1, \ldots, p\},
$$

то $E' \cap \triangle_{r^0} = E'$. Тому

$$
\nu_{\ln}(E' \cap \triangle_{r^0}) = \nu_{\ln}(E') = \int \cdots \int\limits_{E'} \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1-r_i} = \int\limits_{t^*}^{1} \underbrace{\int\limits_{a}^{b} \cdots \int\limits_{a}^{b}}_{p-1 \text{ разів}} \prod_{i=1}^{p} \frac{dr_i}{1-r_i} =
$$

$$
= \int\limits_{t^*}^{1} \left(\int\limits_{a}^{b} \frac{dr_2}{1-r_2} \right)^{p-1} \frac{dr_1}{1-r_1} = \int\limits_{t^*}^{1} \left(\ln \frac{1}{1-b} - \ln \frac{1}{1-a} \right)^{p-1} \frac{dr_1}{1-r_1} =
$$

$$
= \int\limits_{t^*}^{1} \left(\ln \frac{1}{1-\varphi^{-1}(3\varphi(r_1))} - \ln \frac{1}{1-\varphi^{-1}(\frac{\varphi(r_1)}{3})} \right)^{p-1} \frac{dr_1}{1-r_1} =
$$

$$
= \int\limits_{t^*}^{1} \ln^{p-1} \frac{1-\varphi^{-1}(\frac{\varphi(r_1)}{3})}{1-\varphi^{-1}(3\varphi(r_1))} \frac{dr_1}{1-r_1} =
$$

$$
= \int\limits_{t^*}^{1} \ln^{p-1}\Big(1 + \frac{\varphi^{-1}(3\varphi(r_1)) - \varphi^{-1}(\frac{\varphi(r_1)}{3})}{1-\varphi^{-1}(3\varphi(r_1))}\Big) \frac{dr_1}{1-r_1} > \int\limits_{t^*}^{1} \ln^{p-1} 2 \cdot \frac{dr_1}{1-r_1} = +\infty.
$$

$\square$

3.6. Нерівність типу Вімана для кратних степеневих рядів у необмеженій циліндричній області

Через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, $1 \leq l \leq p$, позначимо клас аналітичних функцій вигляду

$$
f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.55}
$$

з областю збіжності

$$\mathbb{T} = \{z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p \colon |z_k| < 1, z_j \in \mathbb{C}, k \in \{1, \dots, l\}, j \in \{l+1, \dots, p\}\} = \\ = \mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l},$$

і через $\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ позначимо підклас функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{T})$ таких, що

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f(z_1, \dots, z_p) \not\equiv 0 \ (\forall z \in \mathbb{T} \ \text{ та } \ \forall j \in \{l+1, \dots, p\})$$

і існує $r_0 \in \mathbb{R}_+^p$ таке, що для кожного $k \in \{1, \dots, l\}$ виконується умова

$$r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_k > 1 \ \big(\forall r \in (r_1^0; 1)^l \times (r_2^0; +\infty)^{p-l}\big).$$

Метою цього підрозділу є доведення точних аналогів нерівності Вімана для аналітичних функцій f, які можна подати у вигляді ряду вигляду (3.55) з областю збіжності $\mathbb{T} := \mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$, $l \in \mathbb{N}$, $1 \le l < p$.

Для $r = (r_1, \dots, r_p) \in T{:=}[0;1)^l \times [0;+\infty)^{p-l}$ і функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ позначимо

$$I = \{1, \dots, l\}, \ J = \{l+1, \dots, p\}.$$
$$M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z_j| \le r_j, j \in \{1, \dots, p\}\},$$
$$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n \colon (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p\}, \ \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

Будемо казати, що $E \subset T$ є множиною *асимптотично скінченної логарифмічної міри на* T, якщо існує $r_0 \in T$ таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \triangle_{r_0}){:=} \int \cdots \int_{E \cap \triangle_{r_0}} \prod_{i \in I} \frac{dr_i}{1 - r_i} \prod_{j \in J} \frac{dr_j}{r_j} < +\infty.$$

Множину всіх таких множин позначимо Υ.

Теорема 3.16. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(\delta, f) \subset T$, $E \in \Upsilon$ така, що для всіх $r \in T \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{(1 - r_i)^{1+\delta}} \ln^{p/2+\delta} \left(\mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \right) \left(\prod_{j \in J} \ln r_j \right)^{p+\delta}. \tag{3.56}$$

Щоб довести теорему 3.16, нам потрібно наступні допоміжні результати.

Лема 3.12. *Нехай F — функція вигляду*

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} a(x) e^{\langle \sigma, x \rangle} \nu(dx),$$

де $a(x)\colon \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+$ *є* ν*-вимірною функцією, а* ν *є зліченно-адитивною мірою на* $\mathbb{R}_+^p$ *з необмеженим носієм. Припустимо, що для деякого фіксованого* $\sigma \in \mathbb{R}_+^p$ *існують*

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_j} F(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^p} x_j a(x) e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx), \ \frac{\partial^2}{\partial \sigma_j^2} F(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^p} x_j^2 a(x) e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx).$$

Тоді

$$F(\sigma) \leq \frac{c}{c-1} \int\limits_{X_0(\sigma)} a(x) e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx). \tag{3.57}$$

де $c = c(\sigma) > 1$ *є довільною,*

$$a_j = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \ln F(\sigma), \ b_j = \frac{\partial^2}{\partial \sigma_j^2} \ln F(\sigma),$$
$$X_0(\sigma) = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p : \ |x_j - a_j| \leq \sqrt{cpb_j}, \ 1 \leq j \leq p\}.$$

Доведення. Розглянемо випадкові величини $\xi_j = x_j$, $1 \leq j \leq p$ на ймовірнісному просторі $\mathbb{R}_+^p$ з такою мірою

$$P_\sigma(dx) = P(dx) = \frac{a(x)}{F(\sigma)} e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx).$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини ξ_j

$$\mathbf{E}\xi_j = \int\limits_{\mathbb{R}_+^p} x_j a(x) e^{\langle \sigma, x\rangle} P(dx) = \frac{1}{F(\sigma)} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma_j} = a_j$$

і її дисперсія

$$\mathbf{D}\xi_j = M\xi_j^2 - (M\xi_j)^2 = \frac{1}{F(\sigma)} \frac{\partial^2 F(\sigma)}{\partial \sigma_j^2} - \left(\frac{1}{F(\sigma)} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma_j}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{1}{F(\sigma)} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma_j}\right) = b_j.$$

Позначимо

$$d_j = \sqrt{pcb_j}, \ A_j = \{x \in \mathbb{R}_+^p : \ |\xi_j - \mathbf{E}\xi_j| \geq d_j\}, \ A = \bigcup_{j=1}^p A_j.$$

Тоді $X_0(\sigma) = \overline{A}$. Використовуючи p разів нерівність Бієнайме-Чебишева ([72, 164])

$$P(A_j) = P\{x\colon |\xi_j(x) - \mathbf{E}\xi_j| \geq d_j\} \leq \frac{\mathbf{D}\xi_j}{d_j^2},$$

одержимо

$$P(A) \leq \sum_{j=1}^p P(A_j) \leq \sum_{j=1}^p \frac{1}{d_j^2} D\xi_j = \frac{1}{c},$$

Тому

$$F(\sigma)=\int\limits_{X_0(\sigma)} f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx)+F(\sigma)\int\limits_{A}\frac{f(x)}{F(\sigma)}e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx)=$$

$$=\int\limits_{X_0(\sigma)} f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx)+F(\sigma)P(A)\le\int\limits_{X_0(\sigma)} f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx)+\frac{F(\sigma)}{c}.$$

Отож, ми отримали нерівність (3.57). □

Лема 3.13. *Нехай $f\in\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ є функцією вигляду (3.55),*

$$a_j=r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r),\ b_j=r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big),\ C=C(r)>1,$$

$$X_0(r)=\{x\in\mathbb{R}^p_+\colon |x_j-a_j|\le\sqrt{cpb_j},\ 1\le j\le p\}.$$

Тоді для всіх $r\in T$ маємо

$$\mathfrak{M}_f(r)\le\frac{C}{C-1}\sum_{n\in X_0(r)}|a_n|r^n.$$

Доведення. Для $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_p)$, $r=(r_1,\dots,r_p)$, $r_j=e^{\sigma_j}$

$$\mathfrak{M}_f(r)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}|a_n|r^n=\int\limits_{\mathbb{R}^p_+}a(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx)=F(\sigma),$$

де $a(x)=|a_n|$ для $x=n\in\mathbb{Z}^p_+$ та ν — міра така, що

$$\nu(E)=\sum_{n\in E}\delta_n(E),\quad \delta_n(E)=\begin{cases}1, & n\in E;\\ 0, & n\notin E,\end{cases}$$

для кожної обмеженої множини $E\subset\mathbb{R}^p_+$.

Зауважимо, що

$$\frac{\partial\ln F(\sigma)}{\partial\sigma_j}=r_j\frac{\partial\ln\mathfrak{M}_f(r)}{\partial r_j}.$$

Таким чином, використовуючи лему 3.12 з $c=C$, $r=e^{\sigma}$ і $X_0^*(r)=X_0(\ln\sigma)$, одержимо

$$\mathfrak{M}_f(r)=F(\sigma)\le\frac{c}{c-1}\int\limits_{X_0(\sigma)}a(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx)=\frac{C}{C-1}\sum_{n\in X_0^*(r)}|a_n|r^n.$$

□

Лема 3.14. *Нехай $\delta>0$. Якщо $f\in\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$, то існує множина $E\subset T$ ($E\in\Upsilon$) така, що для всіх $r\in T\backslash E$ виконуються нерівності*

$$\frac{\partial}{\partial r_m}\ln\mathfrak{M}_f(r)\le\frac{1}{1-r_m}\prod_{i\in I,i\ne m}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\Big(\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J}\ln r_j\Big)^{1+\delta},\ m\in I;\tag{3.58}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_k}\ln\mathfrak{M}_f(r)\le\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\Big(\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J,j\ne k}\ln r_j\Big)^{1+\delta},\ k\in J.\tag{3.59}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, доводимо нерівність (3.58) для $m = 1$. Припустимо, що $E_1^* \subset T$ — множина, для якої не виконується нерівність (3.58) при $m = 1$. Виберемо $r^0 \in T$ так, щоб $\ln \mathfrak{M}_f(r^0) > 1$ і $r_j^0 > e$, $j \in J$, $r_i^0 > 1/2$, $i \in I$,

$$\nu_{\ln}(E_1^* \cap \triangle_{r^0}) \leq \int\limits_{E_1^* \cap \triangle_{r^0}} \cdots \int \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \prod_{j \in J} \frac{1}{r_j} \prod_{m=1}^{p} dr_m \leq$$

$$\leq \int\limits_{E_1^* \cap \triangle_{r^0}} \cdots \int \frac{(1 - r_1)\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) \prod\limits_{i=2}^{l} (1 - r_i)^{\delta} \prod\limits_{m=1}^{p} dr_m}{\prod\limits_{i \in I}(1 - r_i) \prod\limits_{j \in J} r_j (\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta} \Big(\prod\limits_{j \in J} \ln r_j\Big)^{1+\delta}}.$$

Розглянемо відображення $V \colon T \to \mathbb{R}_+^p$, де

$$V = (v_1(r), \ldots, v_p(r)),$$

$$v_1(r) = \ln \mathfrak{M}_f(r), v_2(r) = r_2, \ldots, v_{l-1}(r) = r_{l-1}, v_l(r) = \ln r_l, \ldots, v_p(r) = \ln r_p.$$

Отож,

$$J_2 := \frac{D(v_1(r), \ldots, v_p(r))}{D(r_1, \ldots, r_p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial r_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_p}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial v_p}{\partial r_2 p} \end{vmatrix} = \prod_{j \in J} \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r).$$

Тому,

$$\nu_{\ln}(E_1^* \cap \triangle_{r^0}) \leq \int\limits_{V(E_1^* \cap \triangle_{r^0})} \cdots \int \frac{\prod\limits_{j=1}^{p} dv_j}{v_1^{1+\delta} \prod\limits_{i=2}^{l-1} (1 - v_i)^{1-\delta} \cdot \prod\limits_{j=l}^{p} v_j^{1+\delta}} < +\infty.$$

Нехай $E_p \subset T$ — множина, для якої нерівність (3.59) не виконується з $k = p$

$$\nu_{\ln}(E_p^* \cap \triangle_{r^0}) \leq \int\limits_{E_p^* \cap \triangle_{r^0}} \cdots \int \frac{r_p \frac{\partial}{\partial r_p} \ln \mathfrak{M}_f(r) \prod\limits_{i \in I} (1 - r_i)^{\delta} \prod\limits_{n=1}^{p} dr_n}{\Big(\ln \mathfrak{M}_f(r) \prod\limits_{j=l+1}^{p-1} \ln r_j\Big)^{1+\delta} \prod\limits_{i \in I}(1 - r_i) \prod\limits_{j \in J} r_j}.$$

Нехай r^0 таке, що $\ln \mathfrak{M}_f(r^0) > 1$. Визначимо відображення $W \colon T \to T$, де $W = (w_1(r), \ldots, w_p(r))$, та

$$w_1(r) = r_1, \ldots, \ w_l(r) = r_l, w_{l+1}(r) = \ln r_{l+1}, \ldots,$$
$$w_{p-1}(r) = \ln r_{p-1}, w_p(r) = \ln \mathfrak{M}_f(r).$$

Тоді

$$J_3 := \begin{vmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial r_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_p}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial w_p}{\partial r_2 p} \end{vmatrix} = \prod_{j=l+1}^{p-1} \frac{1}{r_j} \cdot \frac{\partial}{\partial r_p} \ln \mathfrak{M}_f(r).$$

Отже,

$$\nu_{\ln}(E_1^*\cap\triangle_{r^0})\le\int\limits_{E_p^*\cap\triangle_{r^0}}\cdots\int\frac{\frac{\partial}{\partial r_p}\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod\limits_{i\in I}(1-r_i)^{\delta}\prod\limits_{n=1}^{p}dr_n}{\Big(\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod\limits_{j=l+1}^{p-1}\ln r_j\Big)^{1+\delta}\prod\limits_{i\in I}(1-r_i)\prod\limits_{j\in J}r_j}\le$$

$$\le\int\limits_{W(E_p^*\cap\triangle_{r^0})}\cdots\int\frac{\prod\limits_{n=1}^{p}dw_n}{\prod\limits_{i\in I}(1-w_i)^{1-\delta}\prod\limits_{j\in J}w_j^{1+\delta}}<+\infty.$$

Залишається зауважити, що якщо $E_j\in\Upsilon$, $j\in\{1,\dots,p\}$, то $\bigcup_{j=0}^{p}E_j\in\Upsilon$. $\square$

Доведення теореми 3.16. Нехай E' і E_0 — виняткові множини з теореми 3.16 і леми 3.12, відповідно. Для $E=E'\cup E_0$ і $\delta>0$ отримаємо для всіх $r\in T\backslash E$

$$\mathfrak{M}_f(r)\le\frac{C}{C+1}\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}(2\sqrt{cpb_j}+2)\le C^*\mu_f(r)\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial^2 r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)}\le$$

$$\le C^*\mu_f(r)\prod_{m\in B}\left[\frac{1}{1-r_m}\prod_{i\in I,i\ne m}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\left(\frac{\partial}{\partial r_m}\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\prod_{k\in D}\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J,j\ne k}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right]^{1/2}\le$$

$$\le C^*\mu_f(r)\prod_{m\in B}\left[\frac{1}{1-r_m}\prod_{i\in I,i\ne m}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\left(\left(\frac{1}{1-r_m}\prod_{i\in I,i\ne m}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right)\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right]^{1/2}\prod_{k\in D}\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\left(\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J,j\ne k}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right)\prod_{j\in J,j\ne k}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right]^{1/2}\le$$

$$\le\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+2p^2\delta}}\ln^{p/2+2p^2\delta}\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J}(\ln r_j)^{p+2p^2\delta}.$$

Тоді

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)\le\ln\mu_f(r)+$$
$$+(1+2p^2\delta)\sum_{i\in I}\ln\frac{1}{1-r_i}+\Big(\frac{p}{2}+2p^2\delta\Big)\ln\ln\mathfrak{M}_f(r)+(p+2p^2\delta)\sum_{j\in J}\ln\ln r_j,$$

$$\ln\mathfrak{M}_f(r)-(p/2+2p^2\delta)\ln\ln\mathfrak{M}_f(r)\le(p+2p^2\delta)\ln\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)}\prod_{j\in J}\ln r_j\right),$$

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \le (2p+2p^2\delta)\ln\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)}\prod_{j\in J}\ln r_j\right),$$

$$\mathfrak{M}_f(r) \le \prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+2p^2\delta}}\ln^{p/2+2p^2\delta}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)}\prod_{j\in J}\ln r_j\right)\prod_{j\in J}\left(\ln r_j\right)^{p+2p^2\delta} \le$$

$$\le \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta_1}}\ln^{p/2+\delta_1}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j\in J}\ln\ln r_j\right)^{p/2+\delta_1}\prod_{j\in J}(\ln r_j)^{p+2\delta_1} =$$

$$= \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta_1}}\ln^{p/2+\delta_1}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)}\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in J}(\ln r_j)^{p/2+\delta_1}\ln\left[\prod_{j\in J}(\ln r_j)^{p+2\delta_1}\right]\le$$

$$\le \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta_1}}\ln^{p/2+\delta_1}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\left(\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{p+2\delta_1}.$$

□

Показник $1+\delta$ при $\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}$ у нерівності (3.56) не можна замінити на менше число ніж 1.

Теорема 3.17. *Для довільного* $\varepsilon\in(0;1)$ *існує функція* $g\in\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ *така, що*

$$E=\left\{r\in T\colon M_f(r)>\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{\varepsilon}}\ln^{p/2}\Bigl(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\Bigr)\prod_{j\in J}\Bigl(\ln r_j\Bigr)^p\right\}$$

має асимптотично нескінченну логарифмічну міру.

Доведення. Розглянемо функцію

$$f(z)=f(z_1,\ldots,z_p)=\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\prod_{j\in J}\gamma_j(z_j),$$

де $\gamma_j(z_j)$ — ціла функція така, що $\ln\mu_{\gamma_j}(r_j)<r_j$, $r\to+\infty$, $j\in J$. Тоді

$$M_f(r)=\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\prod_{j\in J}M_{\gamma_j}(z_j),\ \ \mu_f(r)=\prod_{j\in D}\mu_{\gamma_j}(r_j).$$

Позначимо $r'(\varepsilon,p)$ таке, що для всіх $r_j>r'(\varepsilon,p)$, $i\in I$ маємо

$$\Bigl(\frac{1}{(1-r_i)^{1-\varepsilon}}\Bigr)^{2/p}-\ln\frac{1}{1-r_i}>e,\ \ i\in I$$

і тоді існує $r_0 \in T$ таке, що

$$\triangle_{r_0} \cap B' = \Big\{ r \in [r'(\varepsilon);1)^l \times [e;+\infty)^{p-l}, (\forall i \in I, \forall j \in J)\colon \Big(\frac{1}{(1-r_i)^{1-\varepsilon}}\Big)^{2/p} -$$

$$- \ln^2 \frac{1}{1-r_i} > r_j^2 \Big\} \cap \triangle_{r_0} \subset \Big\{ r \in [r'(\varepsilon);1)^l \times [e;+\infty)^{p-l}, (\forall i \in I, \forall j \in J):$$

$$\Big(\frac{1}{(1-r_i)^{1-\varepsilon}}\Big)^{2/p} - \ln \frac{1}{1-r_i} \Big(\ln r_j\Big)^{\frac{p-l}{p}} > r_j \Big(\ln r_j\Big)^{\frac{p-l}{p}} \Big\} \cap \triangle_{r_0} \subset$$

$$\subset \Big\{ r \in [r'(\varepsilon);1)^l \times [e;+\infty)^{p-l}, (\forall i \in I, \forall j \in J)\colon \frac{1}{1-r_i} >$$

$$> \frac{1}{(1-r_i)^{\varepsilon}} \Big(\ln \frac{1}{1-r_i} + r_j\Big)^{p/2} \Big(\ln r_j\Big)^{p} \Big\} \cap \triangle_{r_0} \subset$$

$$\subset \Big\{ r \in [r'(\varepsilon);1)^l \times [e;+\infty)^{p-l}\colon \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \prod_{j \in J} \mu_{\gamma_j}(r_j) >$$

$$> \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i)^{\varepsilon}} \prod_{j\in J} \mu_{\gamma_j}(r_j) \ln^{p/2}\Big(\prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \prod_{j\in J} \mu_{\gamma_j}(r_j)\Big) \prod_{j\in J} \Big(\ln r_j\Big)^{p} \Big\} \cap \triangle_{r_0} \subset$$

$$\subset \Big\{ r \in [r'(\varepsilon);1)^l \times [e;+\infty)^{p-l}\colon M_f(r) >$$

$$> \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i)^{\varepsilon}} \ln^{p/2}\Big(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\Big) \prod_{j\in J} \Big(\ln r_j\Big)^{p} \Big\} \cap \triangle_{r_0} = B \cap \triangle_{r_0}.$$

Тоді міра множини B

$$\nu_{\ln}(B) = \int\limits_{B\cap\triangle_{r_0}} \cdots \int \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \prod_{j\in J} \frac{dr_j}{r_j} \geq \int\limits_{B'\cap\triangle_{r_0}} \cdots \int \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \prod_{j\in J} \frac{dr_j}{r_j} \geq$$

$$\geq \int\limits_{r'(\varepsilon,p)}^{1} \cdots \int\limits_{r'(\varepsilon,p)}^{1} \Bigg(\int\limits_{1}^{\sqrt{\left(\frac{1}{(1-r_1)^{1-\varepsilon}}\right)^{2/p} - \ln^2 \frac{1}{1-r_1}}} \cdots \int\limits_{1}^{\sqrt{\left(\frac{1}{(1-r_1)^{1-\varepsilon}}\right)^{2/p} - \ln^2 \frac{1}{1-r_1}}} \prod_{j\in J} \frac{dr_j}{r_j} \Bigg) \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} =$$

$$= \frac{p-l}{2} \int\limits_{r'(\varepsilon,p)}^{1} \cdots \int\limits_{r'(\varepsilon,p)}^{1} \ln\Big(\Big(\frac{1}{1-r_1}\Big)^{2/p} - \ln^2 \frac{1}{1-r_1}\Big) \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \geq$$

$$\geq \frac{p-l}{2} \int\limits_{r'(\varepsilon,p)}^{1} \cdots \int\limits_{r'(\varepsilon,p)}^{1} \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} = +\infty.$$

□

Зауважимо, що жоден з показників 1 і $p/2$ у нерівності теореми 3.16 не можна одночасно замінити на менші числа. Це випливає з такого твердження.
Теорема 3.18. *Існують функція $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ і стала $C > 0$ такі, що*

$$E = \Big\{ r \in T\colon M_f(r) > C\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2}\Big(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\Big) \Big\}$$

має асимптотично нескінченну логарифмічну міру.

Доведення теореми 3.18. Розглянемо функцію

$$f(z)=f(z_1,\ldots,z_p)=\prod_{i\in D}\sum_{n_i=0}^{+\infty}\frac{z_i^{n_i}}{n_i!}\prod_{i\in I}\sum_{n_j=0}^{+\infty}e^{n_j^{\varepsilon}}z_j^{n_j}=\prod_{i\in I}\psi(z_i)\prod_{j\in J}\varphi(z_j),\ \varepsilon\in(0;1).$$

Для цієї функції існує r_0 таке, що

$$\triangle_{r_0}\cap\Big\{r\in T\colon M_f(r)>$$
$$>\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta}}\ln^{p/2+\delta}\Big\{\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\prod_{j\in J}\ln^p r_j\Big\}\Big\}\subset$$
$$\subset\triangle_{r_0}\cap\Big\{r\in T\colon M_f(r)>\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta}}\ln^{p/2+2\delta}\Big\{\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\Big\}\Big\}.$$

Тоді

$$M_\varphi(r_i)\geq C_1(\varepsilon)\frac{\mu_\varphi(r_i)}{1-r_i}\ln^{1/2}\frac{\mu_\varphi(r_i)}{1-r_i},\ r_i>r_i^0,\ i\in I,$$
$$M_\psi(r_j)\geq(\sqrt{2\pi}-\delta)\mu_\psi(r_j)\ln^{1/2}\mu_\psi(r_j),\delta>0,\ r_j>r_j^0,\ j\in J.$$

Отож,

$$M_f(r_1,\ldots,r_p)=\prod_{i\in I}M_\varphi(r_i)\prod_{j\in J}M_\psi(r_j)$$

і для $r\in(r_1^0;1)^l\times(r_2^0;+\infty)^{p-l}$ маємо

$$M_f(r)\geq(\sqrt{2\pi}-\delta)^{p-l}C_1^l(\varepsilon)\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\left(\prod_{i\in I}\ln\frac{\mu_\varphi(r_i)}{1-r_i}\prod_{j\in J}\ln\mu_\psi(r_j)\right)^{1/2}. \quad (3.60)$$

Нехай

$$r^0=(\underbrace{r_1^0,\ldots,r_1^0}_{l\text{ разів}},\underbrace{r_2^0,\ldots,r_2^0}_{p-l\text{ разів}}).$$

Розглянемо додатні зростаючі функції $g_1(t)=\ln\frac{\mu_\varphi(t)}{1-t}$ і $g_2(t)=\ln\mu_\psi(t)$. Зауважимо, що обернені функції $g_1^{-1},\ g_2^{-1}$ є також є зростаючими. І тому можна вибрати $t_0\in(r_2^0;+\infty)$ так, щоб

$$g_1^{-1}\Big(\frac{g_2(t^*)}{3}\Big)>r_1^0,\quad g_2^{-1}\Big(\frac{g_2(t^*)}{3}\Big)>r_2^0.$$

Доведемо, що $A\supset E^*$. Тут

$$A\overset{\text{def}}{=}\Big\{r\in T\colon g_1(r_1)\cdot\ldots\cdot g_1(r_l)\cdot g_2(r_{l+1})\cdot\ldots\cdot g_2(r_p)>$$
$$>\frac{1}{3^{p-1}(3p-2)^p}(g_1(r_1)+\ldots+g_1(r_l)+g_2(r_{l+1})+\ldots+g_2(r_p))^p\Big\}\supset$$
$$\supset\Big\{r\in T\colon(\forall i\in I)(\forall j\in J\setminus\{p\})$$

$$\left.\frac{1}{3} < \frac{g_1(r_i)}{g_2(r_p)} < 3,\ \frac{1}{3} < \frac{g_1(r_j)}{g_2(r_p)} < 3, \quad r_p \in [t_0; +\infty)\right\} \overset{\text{def}}{=} E^*.$$

Справді, якщо $r \in E^*$, то

$$g_1(r_1) \cdot \ldots \cdot g_1(r_l) \cdot g_2(r_{l+1}) \cdot \ldots \cdot g(r_p) \geq \frac{g_2^p(r_p)}{3^{p-1}} =$$
$$= \frac{1}{3^{p-1}(3p-2)^p}(\underbrace{3g_2^p(r_p) + \ldots + 3g_2^p(r_p)}_{p-1 \text{ разів}} + g_2(r_p))^p \geq$$
$$\geq \frac{1}{3^{p-1}(3p-2)^p}(g_1(r_1) + \ldots + g_1(r_l) + g_2(r_{l+1}) + \ldots + g_2(r_p))^p.$$

Для $r_p \in [t_0; +\infty)$ визначимо

$$a = a(r_p) = g_1^{-1}\Big(\frac{g_2(r_p)}{3}\Big),\ b = b(r_p) = g_1^{-1}(3g_2(r_p)),$$
$$c = c(r_p) = g_2^{-1}\Big(\frac{g_2(r_p)}{3}\Big),\ d = d(r_p) = g_2^{-1}(3g_2(r_p)).$$

У [91] було доведено, що

$$r < g_2^{-1}(r) < \frac{3}{2}r,\ r \to +\infty. \tag{3.61}$$

Тоді з нерівності (3.60) для всіх $r \in E^*$ маємо

$$M_f(r) \geq \frac{(\sqrt{2\pi} - \delta)^{p-l} C_1^l(\varepsilon)}{3^{p-1}(3p-2)^p} \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \left(\sum_{i\in I} \ln \frac{\mu_\varphi(r_i)}{1-r_i} + \sum_{j\in J} \ln \mu_\psi(r_j) \right)^{p/2} =$$
$$= \frac{(\sqrt{2\pi} - \delta)^{p-l} C_1^l(\varepsilon)}{3^{p-1}(3p-2)^p} \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2} \left\{ \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \right\}.$$

Залишається довести, що множина E^* є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Використовуючи (3.54) та (3.61), оцінимо знизу міру множини E^*.

$$\nu_{\ln}(E^*) = \int \cdots \int\limits_{E^* \cap \Delta_{r^0}} \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \prod_{j\in J} \frac{dr_j}{r_j} =$$
$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \int_c^d \cdots \int_c^d \prod_{j=l+1}^{p-1} \frac{dr_j}{r_j} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dr_p}{r_p} =$$
$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \int_{t_0}^{+\infty} (\ln c - \ln d)^{p-l-1} \frac{dr_p}{r_p} =$$
$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \int_{t_0}^{+\infty} \Big(\ln g_2^{-1}(3g_2(r_p)) - \ln g_2^{-1}\Big(\frac{g_2(r_p)}{3}\Big)\Big)^{p-l-1} \frac{dr_p}{r_p} \geq$$

$$\geq \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(\ln(3g_2(r_p)) - \ln\Big(\frac{3}{2}\frac{g_2(r_p)}{3}\Big)\Big)^{p-l-1} \frac{dr_p}{r_p} =$$

$$= \ln^{p-l-1} 6 \cdot \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b \prod_{i\in I} \frac{dr_i}{1-r_i} \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{dr_p}{r_p} =$$

$$= \ln^{p-l-1} 6 \cdot \int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big(\ln \frac{1-a}{1-b}\Big)^l \frac{dr_p}{r_p} = \ln^{p-l-1} 6 \cdot \int\limits_{t_0}^{+\infty} \ln^l \frac{1-g_1^{-1}(\frac{g_2(r_p)}{3})}{1-g_1^{-1}(3g_2(r_p))} \frac{dr_p}{r_p} =$$

$$= \ln^{p-l-1} 6 \cdot \int\limits_{t_0}^{+\infty} \ln^l \left(1 + \frac{g_1^{-1}(3g_2(r_p)) - g_1^{-1}(\frac{g_2(r_p)}{3})}{1-g_1^{-1}(3g_2(r_p))} \right) \frac{dr_p}{r_p} >$$

$$> \ln^{p-l-1} 6 \cdot \ln^l 2 \cdot \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{dr_p}{r_p} = +\infty.$$

$\square$

Твердження 3.1. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ з доведення теореми 3.18 випливає існування такого $r_0 \in T$, що для всіх $r \in T \cap \triangle_{r_0}$ маємо

$$\mu_f(r)2^{-l} \geq 1, \quad \left(\ln \left(\frac{2}{3} \sum_{j\in J} r_j \right)\right)^{\varepsilon} 2^{-l-\varepsilon} \geq 1, \quad (\ln\ln\mu_f(r))^a \geq \left(\prod_{j\in J} \ln r_j \right)^p,$$

і множина

$$E_1 = \Bigg\{ r \in T\colon M_f(r) >$$

$$> \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j \right)^{p/2} (\ln\ln\mu_f(r))^{-a} \Bigg\},$$

має асимптотично нескінченну логарифмічну міру, де $a = p(p-l) + \varepsilon$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \prod_{i\in I} \left(\sum_{n_i=0}^{+\infty} e^{\sqrt{n_i}} z_i^{n_i} \right) \prod_{j\in J} \left(\sum_{n_j=0}^{+\infty} \frac{z_j^{n_j}}{n_j!} \right) = \prod_{i\in I} \psi(z_i) \prod_{j\in J} \varphi(z_j).$$

Зауважимо, що $\ln\mu_\varphi(u) \geq \frac{2}{3}u,\ u \to +\infty$ (див. [91]). Тоді існує такий $r_0 \in \mathbb{R}^p_+$, що для всіх $r \in T \cap \triangle_{r_0}$ маємо

$$\left(\frac{1}{2} \prod_{j\in J} \ln r_j \right)^a \geq \left(\prod_{j\in J} \ln r_j \right)^{a-\varepsilon}, \ \left(\ln \left(\frac{2}{3} \sum_{j\in J} r_j \right) \right)^{\varepsilon} 2^{-l-\varepsilon} \geq 1, \ \sum_{j\in J} \frac{2}{3} r_j > l \ln 2.$$

Отже, для всіх $r \in T \cap \triangle_{r_0}$ одержимо

$$\ln \mu_f(r) = \sum_{i \in I} \ln \mu_\psi(r_i) + \sum_{j \in J} \ln \mu_\varphi(r_j) \geq \sum_{j \in J} \ln \mu_\varphi(r_j) \geq \sum_{j \in J} \frac{2}{3} r_j > l \ln 2.$$

тобто $\mu_f(r) 2^{-l} \geq 1$, та

$$(\ln \ln \mu_f(r))^a \geq \ln^a \left(\sum_{j \in J} \frac{2}{3} r_j \right) \geq \prod_{j \in J} \left(\ln r_j + \ln \frac{2}{3} \right)^a \geq \Big(\frac{1}{2} \prod_{j \in J} \ln r_j \Big)^a \geq$$

$$\geq \Big(\prod_{j \in J} \ln r_j \Big)^{\frac{a-\varepsilon}{p-l}} = \left(\prod_{j \in J} \ln r_j \right)^p.$$

Тому $E \cap \Delta_{r_0} \subset E_1 \cap \Delta_{r_0}$. З цього випливає, що множина E_1 має асимптотично нескінченну логарифмічну міру. $\square$

Нерівність Вімана для випадкових аналітичних функцій у $\mathbb{T}$.

Нехай $X = (X_n(t))$ утворюють дійсну мультиплікативну систему (МС) випадкових величин заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, які рівномірно обмежені числом 1.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — послідовність комплексних випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ така, що $X = X_n(t)$ і $Y = Y_n(t)$ утворюють дійсну МС.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — деяка послідовність комплекснозначних випадкових величин, визначених у просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Для аналітичної функції f вигляду (3.55) через $\mathcal{K}_3(f, Z)$ позначимо клас випадкових аналітичних функцій вигляду

$$f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n Z_n(t) z^n. \tag{3.62}$$

Навесні 1996 р. під час доповіді П. В. Філевича на Львівському семінарі теорії аналітичних функцій проф. А. А. Голдберг і М. М. Шеремета поставили таке **питання** (див. [3]). *Чи має місце ефект Леві для аналогів нерівності Вімана для цілих функцій декількох комплексних змінних?*

Розглянемо клас випадкових аналітичних функцій $\mathcal{K}_3(f, Z)$ вигляду (3.62) для аналітичної функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ вигляду (3.55) і МС $Z = (Z_n(t))$. Для $r = (r_1, \ldots, r_p)$ і функції $f(z, t)$ позначимо

$$M_f(r, t) := \max\{|f(z, t)| \colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\}.$$

Доведемо таке твердження.

Теорема 3.19. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p$, Z — МС, рівномірно обмежена числом 1, $\delta > 0$. Тоді майже напевно по t існує множина $E = E(f, t, \delta)$, $E \subset \Upsilon$ така, що для всіх $r \in T \setminus E$ маємо*

$$M_f(r, t) \leq$$

$$\leq \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1/2+\delta}}\ln^{p/4+\delta}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\left(\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{p/2+\delta}. \qquad (3.63)$$

Для доведення теореми 3.19 нам потрібна наступна лема.

Лема 3.15. *Нехай $\delta > 0$. Існує множина $E \in \Upsilon$ така, що для всіх $r \in T \setminus E$ маємо*

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}\|n\||a_n|r^n \leq \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{2+\delta}}\ln^{p/2+1+\delta}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\prod_{j\in J}(\ln r_j)^{p+1+\delta}.$$

Доведення леми 3.15. Зауважимо, що

$$r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r) = \frac{1}{\mathfrak{M}_f(r)}\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}n_i|a_n|r^n.$$

За лемою 3.14, існує множина $E \in \Upsilon$ така, що для всіх $r \in T\setminus E_1$ виконується така нерівність

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}\|n\||a_n|r^n = \mathfrak{M}_f(r)\sum_{i=1}^{p}r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{m\in B}\left[\frac{r_m}{1-r_m}\prod_{i\in I, i\neq m}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\left(\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k\in D}\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{\delta}}\left(\ln\mathfrak{M}_f(r)\prod_{j\in J, j\neq k}\ln r_j\right)^{1+\delta}\right]\right)\leq$$

$$\leq \mathfrak{M}_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta}}(\ln\mathfrak{M}_f(r))^{1+2\delta}\left(\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{1+2\delta}.$$

Тому за теоремою 3.16 отримуємо для всіх $r \in T \setminus E_2$

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}\|n\||a_n|r^n \leq 2\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{2+\delta}}\ln^{p/2+\delta}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\left(\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{p+\delta}\times$$

$$\times\left(\ln\mu_f(r)+(1+\delta)\sum_{i\in I}\ln\frac{1}{1-r_i}(p+\delta)\sum_{j\in J}\ln\ln r_j\right)^{1+2\delta}\prod_{j\in J}(\ln r_j)^{1+2\delta} \leq$$

$$\leq 2\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{2+2\delta}}\ln^{p/2+1+\delta}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\prod_{j\in J}(\ln r_j)^{p+1+\delta}.$$

$\square$

Доведення теореми 3.19. Не зменшуючи загальності ми можемо припустити, що $Z = X = (X_{nm}(t))$ є дійсною МС. Для $k, m \in \mathbb{Z}_+$ і $l \in \mathbb{Z}$ таких, що $k > -l$ позначимо

$$G_{kl} = \left\{ r = (r_1, r_2) \in T \colon k \le \sum_{i \in I} \ln \frac{1}{1 - r_i} \le k + 1,\ l \le \ln \mu_f(r) \le l + 1 \right\},$$

$$G_{klm} = \left\{ r = (r_1, r_2) \in G_{kl} \colon m \le \sum_{j \in J} \ln \ln r_j \le m + 1 \right\},\quad G^+_{kl} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} G_{ij}.$$

Зауважимо, що

$$E_0 = \left\{ r \in T \colon \sum_{i \in I} \ln \frac{1}{1 - r_i} + \ln \mu_f(r) < 1 \right\} = \\ = \left\{ r \in T \colon \mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} < e \right\} \in \Upsilon,$$

тому що існує r_0 таке, що $E_0 \cap \Delta_{r_0} = \varnothing$.

За лемою 3.15 існує множина $E_1 \supset E_0, E_1 \in \Upsilon$ така, що для всіх $r \in T \backslash E_1$

$$\sum_{\|n\| \ge d} |a_n| r^n \le \sum_{\|n\| \ge d} \frac{\|n\|}{d} |a_n| r^n \le \frac{1}{d} \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| |a_n| r^n \le \\ \le \frac{1}{d} \mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{(1 - r_i)^{2+\delta}} \ln^{p/2+1+\delta} \left(\mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \right) \prod_{j \in J} (\ln r_j)^{p+1+\delta} \le \mu_f(r),$$

де

$$d = d(r) = \prod_{i \in I} \frac{1}{(1 - r_i)^{2+\delta}} \ln^{p/2+1+\delta} \left(\mu_f(r) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \right) \prod_{j \in J} (\ln r_j)^{p+1+\delta}.$$

Нехай $G^*_{kl} = G_{kl} \setminus E_2$, $I = \{(i; j) \colon G^*_{ij} \ne \varnothing\}$,

$$E_2 = E_0 \cup E_1 \cup \left(\bigcup_{(i,j) \notin I} G_{ij} \right).$$

Тоді $\# I = +\infty$. Для $(k, l) \in I$ виберемо послідовність $r^{(k,l)} \in G^*_{kl}$ таку, що

$$M_f(r^{(k,l)}) = \min\{M_f(r) \colon r \in G^*_{kl}\}.$$

Отож, для всіх $r \in G^*_{kl}$ одержимо

$$\frac{1}{e} \mu_f(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r) \le e \mu_f(r^{(k,l)}), \tag{3.64}$$

$$\frac{1}{e} \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i^{(k,l)}} \le \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i} \le e \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i^{(k,l)}}, \tag{3.65}$$

$$\frac{1}{e^2}\mu_f(r^{(k,l)})\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i^{(k,l)}}\le \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\le e^2\mu_f(r^{(k,l)})\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i^{(k,l)}} \tag{3.66}$$

і також

$$\bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl}^* = \bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl}\setminus E_2 = \bigcup_{k,l=1}^{+\infty} G_{kl}\setminus E_2 = T\setminus E_2.$$

Позначимо $N_{kl}=[2d_1(r^{(k,l)})]$, де

$$d_1(r)=e^{2+\delta}\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{2+\delta}}\ln^{p/2+1+\delta}\Big(e^2\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\Big)\prod_{j\in J}(\ln(er_j))^{p+1+\delta}.$$

Для $r\in G_{kl}^*$ позначимо

$$W_{N_{kl}}(r,t)=\max\left\{\left|\sum_{\|n\|\le N_{kl}} a_n r^n X_n(t)e^{i(n,\psi)}\right|\colon \psi\in[0,2\pi]^p\right\}.$$

Для вимірної за Лебегом множини $G\subset G_{kl}^*$ і для $(k,l)\in I$ позначимо

$$\nu_{kl}(G)=\frac{\operatorname{meas}(G)}{\operatorname{meas}(G_{kl}^*)},$$

де meas — міра Лебега на $\mathbb{R}^p$.

Зауважимо, що ν_{kl} є ймовірнісною мірою, визначеною на σ-алгебрі вимірних за Лебегом підмножин G_k^*. Нехай

$$\Omega=\bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl}^*$$

та

$$k_i, l_{i,j}\colon (k_i,l_{i,j})\in I,\ k_i<k_{i+1},\ l_{i,j}<l_{i,j+1},\ \forall i,j\in\mathbb{Z}_+.$$

Для вимірних за Лебегом множин $G\subset\Omega$ позначимо

$$\nu(G)=2^{k_0}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{k_i}}\Big(1-\Big(\frac12\Big)^{k_{i+1}-k_i}\Big)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{j=0}^{N_i}\frac{2^{l_{i,0}}}{2^{l_{i,j}}}\frac{\Big(1-\big(\frac12\big)^{l_{i,j+1}-l_{i,j}}\Big)}{1-\big(\frac12\big)^{l_{i,N_{i+1}}+l_{i,0}}}\nu_{k_{i+1}l_{i+1,j+1}}(G\cap G_{k_{j+1}l_{i+1,j+1}}^*)\right),$$

де $N_i=\max\{j\colon (k_i,l_{ij})\in I\}$. Очевидно, що $\nu_{k_{j+1}l_{j+1}}(G_{k_{j+1}l_{j+1}}^*)=\nu(\Omega)=1$.

Тоді ν є ймовірнісною мірою, яка визначена на вимірних підмножинах Ω. На $[0;1]\times\Omega$ визначимо ймовірнісну міру $P_0=P\otimes\nu$, яка є прямим добутком ймовірнісних мір P і ν. Тепер для $(k;l)\in I$ ми визначимо

$$F_{kl}=\{(t,r)\in[0;1]\times\Omega\colon W_{N_{kl}}(r,t)>AS_{N_{kl}}(r)\ln^{1/2}N_{kl}\},$$
$$F_{kl}(r)=\{t\in[0;1]\colon W_{N_{kl}}(r,t)>AS_{N_{kl}}(r)\ln^{1/2}N_{kl}\},$$

де

$$S^2_{N_{kl}}(r) = \sum_{\|n\|=0}^{N_{kl}} |a_n|^2 r^{2n}$$

а A — стала з леми 3.6 з $\beta = 1$. Використавши теорему Фубіні та лему 3.6 з $c_n = a_n r^n$ і $\beta = 1$, отримуємо для $(k,l) \in I$

$$P_0(F_{kl}) = \int\limits_{\Omega} \Bigg(\int\limits_{F_{kl}(r)} dP \Bigg) d\nu = \int\limits_{\Omega} P(F_{kl}(r)) d\nu \le \frac{1}{N_{kl}} \nu(\Omega) = \frac{1}{N_{kl}}.$$

Зауважимо, що

$$N_{kl} > \prod_{i\in I} \frac{1}{(1 - r_i^{(k,l)})^{2+\delta}} \ln^{p/2+1+\delta} \Big(\mu_f(r^{(k,l)}) \prod_{i \in I} \frac{1}{1 - r_i^{(k,l)}} \Big) \prod_{j \in J} (\ln r_j^{(k,l)})^{p+1+\delta} \ge$$
$$\ge e^{2k}(l+k)^{2+\delta}.$$

Тому,

$$\sum_{(k,l)\in I} P_0(F_{kl}) \le \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-k+1}^{+\infty} \frac{1}{e^{2k}(l+k)^{2+\delta}} < +\infty.$$

За лемою Бореля-Кантеллі нескінченна кількість подій $\{F_{kl} \colon (k,l) \in I\}$ може відбуватися з нульовою ймовірністю. Тоді

$$P_0(F) = 1, \quad F = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{k \ge s,\ l \ge m \\ (k,l) \in I}} \overline{F_{kl}} \subset [0;1] \times \Omega.$$

Тоді для будь-якої точки $(t,r) \in F$ існують $k_0 = k_0(t,r)$ і $l_0 = l_0(t,r)$ такі, що для всіх $k \ge k_0$, $l \ge l_0$, $(k,l) \in I$ маємо

$$W_{N_{kl}}(r,t) \le A S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

Отож, $\nu(F^\wedge(t)) = 1$.

Для довільного $t \in F_1$ і $(k,l) \in I$ виберемо точку $r_0^{(k,l)}(t) \in G^*_{kl}$ таку, що

$$W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t), t) \ge \frac{3}{4} M_{kl}(t),\ \ M_{kl}(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\{W_{N_{kl}}(r,t) \colon r \in G^*_{kl}\}.$$

Тоді з $\nu_{kl}(F^\wedge(t) \cap G^*_{kl}) = 1$ для всіх $(k,l) \in I$ випливає, що існує точка $r^{(k,l)}(t) \in G^*_{kl} \cap F^\wedge(t)$ така, що

$$|W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t), t) - W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t), t)| < \frac{1}{4} M_{kl}(t),$$

тому

$$W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t), t) - W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t), t) < \frac{1}{4} M_{kl}(t).$$

Отож,

$$\frac{3}{4} M_{kl}(t) \le W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t), t) \le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t), t) + \frac{1}{4} M_{kl}(t).$$

Оскільки $(t, r^{(k,l)}(t)) \in F$, то

$$\frac{1}{2}M_{kl}(t) \le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t), t) \le AS_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t)) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

Тепер для $r^{(k,l)} = r^{(k,l)}(t)$ одержимо

$$S^2_{N_{kl}}(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r^{(k,l)})\mathfrak{M}_f(r^{(k,l)}) \le$$

$$\le \mu^2_f(r^{(k,l)}) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i^{(k,l)})^{1+\delta}} \ln^{p/2+\delta}\left(\mu_f(r^{(k,l)}) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^{(k,l)}}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j^{(k,l)}\right)^{p+\delta}.$$

Отже, для $t \in F_1$ і всіх $k \ge k_0(t)$, $l \ge l_0(t)$, маємо

$$S_{N_{kl}}(r^{(k,l)}) \le \mu_f(r^{(k,l)}) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i^{(k,l)})^{1/2+\delta}} \times$$

$$\times \ln^{p/4+\delta}\left(\mu_f(r^{(k,l)}) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^{(k,l)}}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j^{(k,l)}\right)^{p/2+\delta}. \qquad (3.67)$$

З (3.64)–(3.66) випливає, що $d_1(r^{(k,l)}) \ge d(r)$ для $r \in G^*_{kl}$. Тоді для

$$t \in F_1,\ r \in F^\wedge(t) \cap G^*_{kl},\ (k,l) \in I,\ k \ge k_0(t), l \ge l_0(t)$$

отримуємо

$$M_f(r,t) \le \sum_{\|n\| \ge 2d_1(r^{(k,l)})} |a_n| r^n + W_{N_{kl}}(r,t) \le \sum_{\|n\| \ge 2d(r)} |a_n| r^n + M_{kl}(t).$$

Для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G^*_{kl}$, $l \ge l_0(t)$ та $k \ge k_0(t)$ одержимо

$$M_f(r^{(k,l)}, t) \le \mu_f(r^{(k,l)}) + 2AS_{N_{kl}}(r^{(k,l)}) \ln^{1/2} N_{kl} \le \mu_f(r^{(k,l)}) +$$

$$+2A\mu_f(r^{(k,l)}) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i^{(k,l)})^{1/2+\delta}} \ln^{p/4+\delta}\left(\mu_f(r^{(k,l)}) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^{(k,l)}}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j\in J} \ln r_j^{(k,l)}\right)^{p/2+\delta} \ln\left(e^{2+\delta} \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i^{(k,l)})^{2+\delta}} \times\right.$$

$$\left. \times \ln^{p/2+1+\delta}\left(e^2 \mu_f(r^{(k,l)}) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^{(k,l)}}\right) \prod_{j\in J} \ln(e r_j^{(k,l)}))^{p+1+\delta}\right).$$

Тому нерівність

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{(1-r_i)^{1/2+2\delta}} \ln^{p/4+2\delta}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^{p/2+2\delta}$$

виконується м.н. ($t \in F_1$, $P(F_1) = 1$) для всіх

$$r \in \left(\bigcup_{(k,l)\in I} (G^*_{kl} \cap F^\wedge(t)) \cap G^+_{kl}\right) \setminus E^* = (T \cap G^+_{kl}) \setminus (E^* \cup G^* \cup E_1) = T \setminus E_2,$$

де

$$G_{kl}^{+}=\bigcup_{i=k}^{+\infty}\bigcup_{j=l}^{+\infty}G_{kl},\ E_2=E_1\cup G^*\cup E^*,\ G^*=\bigcup_{(k,l)\in I}(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t)).$$

Залишається зауважити, що $\nu(G^*)$ задовольняє

$$\nu(G^*)=\sum_{(k,l)\in I}(\nu_{kl}(G_{kl}^*)-\nu_{kl}(F^{\wedge}(t)))=0.$$

Тоді для всіх $(k,l)\in I$ маємо

$$\nu_{kl}(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t))=\frac{\mathrm{meas}(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t))}{\mathrm{meas}(G_{kl}^*)}=0,$$
$$\mathrm{meas}(G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t))=\int\limits_{G_{kl}^*\setminus F^{\wedge}(t)}\cdots\int\prod_{i\in I}\frac{dr_i}{1-r_i}\prod_{j\in J}\frac{dr_j}{r_j}=0.$$

□

Розглянемо клас $\mathcal{K}_3(f,\theta)$ аналітичних функцій

$$f(z,t)=f(z_1,\dots,z_p,t)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}a_ne^{2\pi i\theta_nt}z^n. \tag{3.68}$$

Тут $\theta=(\theta_n)$ — послідовність цілих натуральних чисел, така що її впорядкування за зростанням (θ_k^*)

$$\{\theta_n\colon n\in\mathbb{Z}_+^p\}=\{\theta_k^*\colon k\in\mathbb{Z}_+\},\theta_{k+1}^*>\theta_k^*,$$

задовольняє умову

$$\theta_{k+1}^*/\theta_k^*\geq q>1,k>0, \tag{3.69}$$

де $f\in\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$. Зауважимо, що у випадку $q\geq 2$ аналітичні функції вигляду (3.68), які задовольняють умови теореми 3.19, бо $(\cos\theta_nt),\ (\sin\theta_nt)$ є МС. Отже, наступне **запитання** виникає природно: *чи буде ефект Леві для класу $\mathcal{K}_3(f,\theta)$ з $f\in\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$ і послідовністю Адамара θ?*

Теорема, аналогічна теоремі 3.19, справедлива також для аналітичних функцій зі швидко коливними коефіцієнтами.

Теорема 3.20. *Нехай $\delta>0, f\in\mathcal{K}_3(f,\theta)$ — аналітична функція вигляду (3.68) і послідовності натуральних чисел $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ задовольняє умову (3.69). Тоді майже напевно по $t\in\mathbb{R}$ існує $E(\delta,t)\in\Upsilon$ така, що для всіх $r\in T\setminus E$ маємо*

$$M_f(r,t)\leq\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{(1-r_i)^{1/2+\delta}}\ln^{p/4+\delta}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\left(\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{p/2+\delta}.$$

Доведення теореми 3.20. Щоб довести теорему 3.20, нам потрібно формально переписати доведення теореми 3.19, використовуючи лему 3.9 замість леми 3.15. Треба використати лему 3.15 і теорему 3.16. Єдина відмінність полягає в тому, що в доведенні теореми 3.19 нам потрібно змінити визначення $W_{N_{kl}}(r,t)$ на

$$W_{N_{kl}}(r,t) = \max\left\{\left|\sum_{\|n\|\le N_{kl}} a_n r^n e^{i(n,\psi)+2\pi i\theta_n t}\right| : \psi\in[0,2\pi]^p\right\}.$$

Зберігаючи всі інші позначення з доведення теореми 3.19 і буквально переписуючи це доведення, ми отримуємо твердження теореми 3.20. □

Точність теорем 3.19 та 3.20. Доведемо, що показники $p/4+\delta$ і $1/2+\delta$ в нерівності (3.63) не можна одночасно замінити числами, меншими за $p/4$ і $1/2$, відповідно.

Теорема 3.21. *Нехай $1\le l<p$ і $Z=(Z_n(t))$ така послідовність випадкових величин, що*

$$(\forall n)\colon |Z_n(t)|\ge 1 \text{ м.н. } t\in[0;1].$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ існують аналітична функція $f\in\mathcal{A}^p(\mathbb{T})$, стала $C>0$ і $r_0\in T$ таке, що м.н. по t для всіх $r\in T\cap\Delta_{r_0}$ виконується нерівність

$$M_f(r,t)\ge$$

$$\ge \mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{\sqrt{1-r_i}}\ln^{p/4}\left(\mu_f(r)\prod_{i\in I}\frac{1}{1-r_i}\right)\left(\prod_{j\in J}\ln r_j\right)^{p/2}(\ln\ln\mu_f(r))^{-p(p-l)/2-\varepsilon}.$$

Доведення. Розглянемо функції

$$g(z)=\prod_{i\in I}\left(\sum_{n_i=0}^{+\infty} e^{\sqrt{n_i}} z_i^{n_i}\right)\prod_{j\in J}\left(\sum_{n_j=0}^{+\infty}\frac{z_j^{n_j}}{n_j!}\right)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} g_n z^n,$$

$$f(z)=\prod_{i\in I}\left(\sum_{n_i=0}^{+\infty} e^{\sqrt{n_i}/2} z_i^{n_i}\right)\prod_{i\in I}\left(\sum_{n_j=0}^{+\infty}\frac{z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} f_n z^n,$$

$$f(z,t)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} Z_n(t) f_n z^n.$$

Зауважимо, що для всіх $r\in T$ маємо

$$\mu_g(r^2)=\max\left\{\prod_{i\in I}\frac{r_i^{2n_i}}{n_i!}\prod_{j\in J} e^{\sqrt{n_j}} r_j^{2n_j} : n\in\mathbb{Z}_+^p\right\}=$$

$$=\max\left\{\left(\prod_{i\in I}\frac{r_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}\prod_{j\in J} e^{\sqrt{n_j}/2} r_j^{n_j}\right)^2 : n\in\mathbb{Z}_+^p\right\}=(\mu_f(r))^2.$$

Використовуючи рівність Парсеваля, ми одержимо для майже всіх t

$$M_g(r^2) \le \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |Z_n(t)|^2 |g_n| r^{2n} = \frac{1}{(2\pi)^p} \underset{[0,2\pi]^p}{\int \cdots \int} |f(re^{i\theta},t)|^2 d\theta \le (M_f(r,t))^2.$$

Тоді згідно з твердженням 3.1 існує таке $r_0 \in T$, що для $r \in (T \cap \Delta_{r_0}) \cap E$

$$M_g(r) > \mu_g(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2}\left(\mu_g(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^p (\ln\ln \mu_g(r))^{-a},$$

де $a = p(p-l) + \varepsilon$.

Тому, для всіх r таких, що $r^2 = (r_1^2, \ldots, r_p^2) \in (\Delta_{r_0} \cap T) \setminus E$ маємо

$$(M_f(r,t))^2 \ge M_g(r^2) \ge$$

$$\ge \mu_g(r^2) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^2} \ln^{p/2}\left(\mu_g(r^2) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^2}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j^2\right)^p (\ln\ln \mu_g(r^2))^{-a} \ge$$

$$\ge \mu_f^2(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^2} \ln^{p/2}\left(\mu_f^2(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i^2}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j^2\right)^p (\ln\ln \mu_f^2(r))^{-a}.$$

Але $1 - r_i^2 \le 2(1-r_i)$ $(i \in I)$, а за твердженням 3.1

$$\big(\ln\ln \mu_f(r)\big)^{\varepsilon} \ge \left(\ln\left(\frac{2}{3}\sum_{j\in J} r_j\right)\right)^{\varepsilon} \ge 2^{l+\varepsilon}.$$

Тоді

$$(M_f(r,t))^2 \ge$$

$$\ge \mu_f^2(r) 2^{-l} \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2}\left(2^{-l}\mu_f^2(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(2^{p-l} \prod_{j\in J} \ln r_j\right)^p (\ln\ln \mu_f^2(r))^{-a} \ge$$

$$\ge 2^{p(p-l)-l-a} \mu_f^2(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^p (\ln\ln \mu_f(r))^{-a} \ge$$

$$\ge \mu_f^2(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i} \ln^{p/2}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^p (\ln\ln \mu_f(r))^{-a-\varepsilon}.$$

Отож, для всіх r таких, що $r^2 = (r_1^2, \ldots, r_p^2) \in (\Delta_{r_0} \cap T) \setminus E$ отримаємо

$$M_f(r,t) \ge$$

$$\ge \mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{\sqrt{1-r_i}} \ln^{p/4}\left(\mu_f(r) \prod_{i\in I} \frac{1}{1-r_i}\right) \left(\prod_{j\in J} \ln r_j\right)^{p/2} (\ln\ln \mu_f(r))^{-a/2-\varepsilon_1},$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. $\square$

Основні здобутки третього розділу:

1) вперше отримані аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області Рейнхарда, а також перевірено наявність ефекту Леві для цих функцій;
2) описано “кількість” тих цілих функцій, для яких нерівність типу Вімана можна покращити;
3) вперше побудовані приклади на точність аналогів нерівності типу Вімана та перевірено наявність ефекту Леві для множин
   (а) $\mathbb{C}^p$;
   (б) $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$;
   (в) $\mathbb{D}^p$;

   де $l, p \in \mathbb{N},\ p > l,\ p \geq 2$.

Результати третього розділу опубліковано в статтях [18,100,107,109,111,115–117], а також доповідалися на конференціях [17, 93, 94, 106, 110, 114, 118, 119] та наукових семінарах.

РОЗДІЛ 4. НЕРІВНІСТЬ БІТЛЯНА–ГОЛЬДБЕРГА ДЛЯ ЛАКУНАРНИХ РЯДІВ ЗА ОДНОРІДНИМИ ПОЛІНОМАМИ ТА НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

4.1. Нерівність Бітляна–Гольдберга для цілих функцій і діагональний максимальний член

Нехай $z^n = z_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot z_p^{n_p}$, $\|n\| = n_1+\ldots+n_p$ для $n=(n_1,\ldots,n_p)\in\mathbb{Z}_+^p$ та $z=(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbb{C}^p$. Через $\mathcal{E}^p(\lambda)$ позначимо клас цілих функцій $f\colon\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}$, (тобто, цілих функцій від p комплексних змінних), які можна подати у вигляді

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}P_k(z),\quad z\in\mathbb{C}^p. \tag{4.1}$$

Тут

$$P_0(z)\equiv a_0\in\mathbb{C},\ P_k(z)=\sum_{\|n\|=\lambda_k}a_nz^n$$

— однорідний поліном степеня $\lambda_k\in\mathbb{Z}_+$, і $0=\lambda_0<\lambda_k\uparrow+\infty$ $(1\le k\uparrow+\infty)$, $\lambda=(\lambda_k)$. У випадку $\lambda_k\equiv k$ $(k\ge0)$ ми отримаємо клас усіх цілих функцій від p комплексних змінних і позначимо через $\mathcal{E}^p$; через $\mathcal{E}^1$ і $\mathcal{E}^1(\lambda)$ класи цілих функцій від однієї змінної і цілих функцій представлених лакунарним степеневим рядом вигляду

$$f(z)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a_kz^{\lambda_k},\quad z\in\mathbb{C}, \tag{4.2}$$

відповідно.

Згідно з [46] розглянемо *вичерпання простору* $\mathbb{C}^p$ системою $(\mathbf{G}_r)_{r\ge0}$ обмежених повних кратно-кругових областей з центром у точці $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{C}^p$. Дійсно, припустимо, що ця система задовольняє умови:

i) $\bigcup\limits_{r\ge0}\mathbf{G}_r=\mathbb{C}^p$;

ii) $(\forall r_1<r_2)\colon \mathbf{G}_{r_1}\subset\mathbf{G}_{r_2}$;

iii) $(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbf{G}_1\Longleftrightarrow(\forall\ r>0)\colon(rz_1,\ldots,rz_p)\in\mathbf{G}_r$;

iv) $(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbf{G}_r\Longrightarrow(\forall\ \theta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)\in\mathbb{R}^p)\colon(z_1e^{i\theta_1},\ldots,z_pe^{i\theta_p})\in\mathbf{G}_r$.

Через $\mathbb{G}=\{\mathbf{G}=(\mathbf{G}_r)_{r\ge0}\colon \text{i)—iv)}\}$ позначимо клас систем таких областей. Зауважимо, що наступна система $\mathbf{G}=(\mathbf{G}_r)_{r\ge0}$ областей $\mathbf{G}_r$ містить клас $\mathbb{G}$:

i) $\mathbf{G}_r=C_{r,a}=\{(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbb{C}^p\colon\ |z_j|<a_jr,\ 1\le j\le p\}$;

ii) $\mathbf{G}_r=\mathbb{B}_{r,a}=\{(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbb{C}^p\colon\ a_1|z_1|^2+\ldots+a_p|z_p|^2<r^2\}$;

iii) $\mathbf{G}_r=\Pi_{r,a}=\{(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbb{C}^p\colon\ a_1|z_1|+\ldots+a_p|z_p|<r\}$;

iv) $\mathbf{G}_r=\left\{(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbb{C}^p\colon |z_1|^{a_1}\cdot\ldots\cdot|z_2|^{a_p}<r^{a_1+\ldots+a_p}\right\}$;

де $a = (a_1, \dots, a_p)$, $a_j > 0$ $(1 \le j \le p)$, $r > 0$.

Для $r > 0$ і цілої функції $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ позначимо через

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| \colon |z| = r\}$$

— максимум модуля і через $\mu_f(r) = \max\{|a_k| r^{\lambda_k} \colon k \ge 0\}$ — максимальний член степеневого ряду (4.2). Для $r > 0$ і цілої функції $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$ вигляду (4.1) позначимо

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| \colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\}, \quad m_k(r, f) = \max\{|P_k(z)| \colon z \in \overline{\mathbf{G}}_r\} \quad (k \ge 0).$$

За принципом максимуму модуля існує точка $z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \dots, z_p^{(k)}) \in \partial \mathbf{G}_r$ така, що $m_k(r, f) = |P_k(z^{(k)})|$. З означення $\mathbf{G}_r$ випливає, що

$$s^{(k)} = (s_1^{(k)}, \dots, s_p^{(k)}) \stackrel{def}{=} \frac{z^{(k)}}{r} \in \partial \mathbf{G}_1.$$

Але $P_k(z)$ — однорідний поліном. Отже, $P_k(z^{(k)}) = r^{\lambda_k} P_k(s^{(k)})$. Тому

$$|P_k(s^{(k)})| = \max\{|P_k(z)| \colon z \in \overline{\mathbf{G}}_1\} = m_k(1, f)$$

і $s^{(k)}$ не залежить від r. Отож,

$$m_k(r, f) = r^{\lambda_k} |P_k(s^{(k)})| \quad (r > 0,\ k \ge 0).$$

Згідно з [46] визначимо тепер *діагональний максимальний член ряду* (4.1)

$$m(r, f) \stackrel{def}{=} \max\{m_k(r, f) \colon k \ge 0\} = \max\{r^{\lambda_k} m_k(1, f) \colon k \ge 0\}.$$

Зауважимо, що $m(r, f) \equiv \mu_f(r)$ у випадку коли $p = 1$.

Нехай $n(t) = \sum_{\lambda_k \le t} 1$ — *лічильна функція* послідовності $\lambda = (\lambda_k)$. За теоремою 1 з статті [27], доведеною для цілого ряду Діріхле, випливає таке твердження. Якщо послідовність $\lambda = (\lambda_k)$ задовольняє умову

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\ln \left(n(t + \sqrt{\psi(t)}) - n\big(t - \sqrt{\psi(t)}\big)\right)}{\ln t} \le p_1 < +\infty \tag{4.3}$$

для деякої додатної функції $\psi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такої, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

то для кожної цілої функції $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E = E(\varepsilon, f) \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто, $\text{ln-meas}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E d \ln r < +\infty$) така, що нерівність

$$M_f(r) \le C \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{p_1 + \varepsilon} \tag{4.4}$$

виконується для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E$. Тут C — деяка стала, яка залежить тільки від f та ε. Звідси, зокрема, випливає (див. [36, 170], що якщо

$$(\exists \triangle \in (0; +\infty))(\exists \varrho \in [1/2; 1])(\exists D > 0)(\exists t_0 > 0)(\forall t > t_0) \colon$$

$$|n(t) - \triangle t^{\varrho}| \le D, \tag{4.5}$$

то нерівність (4.4) виконується при $p_1 = (2\varrho - 1)/2$, тому що у цьому випадку умова (4.3) виконується з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. У випадку $f \in \mathcal{E}^1$, тобто $\lambda_k \equiv k$ ($k \ge 0$), умова (4.5) виконується з $\varrho = 1$. Тому, нерівність (4.4) виконується з $p_1 = 1/2$, тобто, маємо класичну нерівність Вімана (див. [95, 214, 217]).

У [27] було доведено, що для кожної послідовності $\lambda = (\lambda_k)$ такої, що існує неперервна додатна зростаюча до $+\infty$ на інтервалі $[0; +\infty)$ функція ψ, для якої

$$\psi(t) = O(t \ln t \ln^2 \ln t)\ (t \to +\infty),\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

$$(\exists p_1 > 0): \quad \varliminf_{t \to +\infty} t^{-p_1} \Big(n(t + \sqrt{\psi(t)}) - n(t - \sqrt{\psi(t)}) \Big) > 0, \tag{4.6}$$

існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ така, що

$$\frac{M_f(r)}{\mu_f(r)} (\ln \mu_f(r))^{-p_1} \to +\infty \quad (r \to +\infty). \tag{4.7}$$

З умови (4.5) випливає, що (4.6) виконується з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. Тому, для деякої цілої функції, яка задовольняє співвідношення (4.7) з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. Звідси випливає, що якщо умова (4.5) виконується, тоді існує функція $f \in \mathcal{E}^1(\lambda)$ така, що співвідношення (4.4) та (4.7) виконуються з $p_1 = (2\varrho - 1)/2$. Зокрема, для деякої цілої функції $f \in \mathcal{E}^1$ маємо

$$\frac{M_f(r)}{\mu_f(r) \sqrt{\ln \mu_f(r)}} \to +\infty \quad (r \to +\infty).$$

Це означає, що ми не можемо замінити $(2\varrho - 1)/2$ у (4.4) меншим числом. Більш того, ми не можемо навіть замінити $\varepsilon > 0$ у (4.4) на $\varepsilon = 0$. Тому, у нерівності Вімана для класу всіх цілих функцій $\mathcal{E}^1$ сталу $\frac{1}{2}$ не можна замінити меншою. Більше того, $\varepsilon > 0$ не може бути замінене на $\varepsilon = 0$. Зауважимо також, що

$$M_f(r) \sim \sqrt{2\pi} \mu_f(r) \sqrt{\ln \mu_f(r)}\ (r \to +\infty)$$

для цілої функції $f(z) = e^z$.

Теорема типу Вімана з діагональним максимальним членом для рядів з класу $\mathcal{E}^2$ і вичерпанням $\mathbb{C}^2$ довільною системою повних кратно-кругових областей доведена у статті [46].

Теорема 4.1 ([46]). *Для кожної цілої функції $f \in \mathcal{E}^2$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існують стала $C = C(\varepsilon, f) > 0$ і множина $E \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що нерівність*

$$M(r, f) \le C \cdot m(r, f) (\ln m(r, f))^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

виконується для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E$.

Доведемо аналоги цитованих результатів ([27]) для класу $\mathcal{E}^p(\lambda)$. Отримані результати, зокрема, містять твердження теореми 4.1, а також доведено їх точність.

Нерівність типу Вімана для цілих лакунарних степеневих рядів та діагональний максимальний член.

Нехай $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty.$$

Спочатку доведемо таке твердження.

Теорема 4.2. *Якщо послідовність $\lambda = (\lambda_k)$ задовольняє умову*

$$(\exists p_1 \in (0;+\infty))(\exists t_0 > 0)(\forall t \geq t_0)\colon\ n(t+\sqrt{\psi(t)}) - n(t-\sqrt{\psi(t)}) \leq t^{p_1} \tag{4.8}$$

для деякої функції $\psi \in \mathcal{L}$, тоді для кожної цілої функції $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$, $p \geq 2$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують стала $C = C(\varepsilon, f) > 0$ та множина $E = E(\varepsilon, f) \subset [1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що

$$M(r,f) \leq Cm(r,f)(\ln m(r,f))^{p_1}(\ln\ln m(r,f))^{p_1+\varepsilon} \tag{4.9}$$

для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E$.

Теорема 4.3. *Нехай $\psi \in \mathcal{L}$ — зростаюча на $[0;+\infty)$ функція така, що*

$$\psi(t) = O(t\ln t\ln^2\ln t)\ (t \to +\infty),$$

і для послідовності $\lambda = (\lambda_k)$ виконується умова

$$(\exists p_1 > 0)(\exists C_1 > 0)(\exists t_0 > 0)(\forall t \geq t_0)\colon n(t+\sqrt{\psi(t)}) - n(t-\sqrt{\psi(t)}] \geq C_1 t^{p_1}. \tag{4.10}$$

Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, p_1)$ існує ціла функція $f \in \mathcal{E}^p(\lambda)$ така, що

$$\frac{M(r,f)}{m(r,f)\ln^{p_1} m(r,f)\ln^{p_1-\varepsilon}\ln m(r,f)} \to +\infty \quad (r \to +\infty).$$

Доведення теореми 4.2. Нехай $z = rs$, $z_1 = rs_1, \ldots, z_p = rs_p$, $r > 0$, (P_k) — однорідний поліном, тоді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} r^{\lambda_k} P_k(s).$$

Тому використавши

$$m_k(1,f) = |P_k(s^{(k)})| = \max\{|P_k(z)|\colon z \in \overline{G}_1\},$$

одержимо

$$M(r,f) = \max\{|f(z)|\colon z \in \overline{G}_r\} = \max\{|f(rs)|\colon s \in \overline{G}_1\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} r^{\lambda_k} \max\{|P_k(s)|\colon s\in \overline{G}_1\} = \sum_{k=0}^{+\infty} r^{\lambda_k} m_k(1,f) \overset{def}{=} H(r).$$

Тут $H(r)$ — ціла функція від однієї змінної, для якої виконується умова (4.8) теореми 4.2.

Тепер нам потрібен один результат з [95, теорема 1].

Нехай $\mathcal{I}(\nu)$ — клас функцій $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ визначається інтегралом вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(u)e^{xu}\nu(du), \tag{4.11}$$

де ν є зліченною адитивною мірою на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ борелівських множин на $\mathbb{R}_+$ (борелівська міра) така, що $\nu(\{x\colon 0\leq x\leq b\}) < +\infty$ для кожного $b>0$, $a\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ додатна вимірна функція. Позначимо через $\operatorname{supp}\nu$ носій міри ν, тобто замкнена множина $E =\colon \operatorname{supp}\nu$ така, що $\nu(\mathbb{R}\setminus E)=0$ та $\nu(\{u\in\mathbb{R}\colon |u-u_0|<r\})>0$ для кожного $u_0\in E$ і $r>0$. Для $x\in\mathbb{R}$ й $F\in\mathcal{I}(\nu)$ позначимо

$$\mu_*(x) = \sup\{a(u)e^{xu}\colon u\in\operatorname{supp}\nu\},\quad \mu^*(x) = \sup\{a(u)e^{xu}\colon u\in\mathbb{R}\}.$$

Лема 4.1 ([95], теорема 1)**.** *Нехай $F\in\mathcal{I}(\nu)$. Якщо*

$$(\exists\psi\in\mathcal{L})(\exists p_1<+\infty)(\exists t_0)(\forall t\geq t_0)\colon\quad \nu(t-\sqrt{\psi(t)}, t+\sqrt{\psi(t)}]\leq t^{p_1},$$

тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує множина $E_1\subset\mathbb{R}_+$ скінченної міри Лебега, тобто $\operatorname{meas}(E_1) := \int_{E_1} dx < +\infty$*, така, що для всіх $x\in[0;+\infty)\setminus E$*

$$F(x)\leq C\mu_*(x)\ln^{p_1}\mu_*(x)\ln_2^{p_1+\varepsilon}\mu_*(x).$$

Тут C — деяка стала, яка залежить тільки від F та ε, $\ln_2 t := \ln(\ln t)$.

Нехай

$$\nu(E) = \sum_{k=0}^{+\infty}\delta_{\lambda_k}(E),\ \delta_\lambda(E) = \begin{cases} 1, & \text{для } \lambda\in E;\\ 0, & \text{для } \lambda\notin E\end{cases}$$

для кожної обмеженої множини $E\subset\mathbb{R}_+$. Позначимо $a(u)=m_k(1,f)$ для $u=\lambda_k$, $a(u)=0$ для $u\in\mathbb{R}_+\setminus\{\lambda_k\}$. Тоді

$$H(e^x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(u)e^{ux}\nu(du),\quad \mu_h(e^x)=\mu_*(x)\quad (x>0).$$

Тепер з леми 4.1 випливає, що

$$M(e^x,f)\leq H(e^x)\leq C\mu_*(x)\ln^{p_1}\mu_*(x)\ln_2^{p_1+\varepsilon/2}\mu_*(x) =$$
$$= C\mu_H(e^x)\ln^{p_1}\mu_H(e^x)\ln_2^{p_1+\varepsilon/2}\mu_H(e^x) = Cm(e^x,f)\ln^{p_1}m(e^x,f)\ln_2^{p_1+\varepsilon/2}m(e^x,f)$$

для всіх $x\in\mathbb{R}_+\setminus E_1$, $\operatorname{meas}(E_1)<+\infty$. Нехай $r=e^x$ і позначимо $E=e^{E_1}$. Тоді ми отримаємо нерівність (4.9), яка виконується для всіх $r\in[1;+\infty)\setminus E$,

$$\ln -\operatorname{meas}(E) = \int\limits_E d\ln r = \int\limits_{E_1} dx = \operatorname{meas}(E_1) < +\infty.$$

□

Доведення теореми 4.3. Зауважимо, що для довільної цілої функції $f \in \mathcal{E}^p$ вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z_1 \cdot \ldots \cdot z_p)^{\lambda_k}, \quad z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p, \tag{4.12}$$

маємо

$$m_k(r, f) = \max\{|a_k||z_1 \cdot \ldots \cdot z_p|^{\lambda_k} \colon\ (z_1, \ldots, z_p) \in \overline{G}_r\}.$$

Позначимо $d_k = \max\{|s_1 \cdot \ldots \cdot s_p|^{\lambda_k} \colon\ (s_1, \ldots, s_p) \in \overline{G}_1\}$ $(k \geq 1)$. Тоді

$$m_k(r, f) = d_k a_k r^{p\lambda_k}, \quad (k \geq 1), \tag{4.13}$$

та

$$m(r, f) = \max\{m_k(r, f) \colon\ k \geq 1\} = \max\{d_k a_k r^{p\lambda_k} \colon\ k \geq 1\}. \tag{4.14}$$

Далі використаємо таке твердження.

Лема 4.2 ([95], теорема 2)**.** *Нехай $\psi \in \mathcal{L}$ така, що*

$$\psi(t) = O(t \ln t \ln_2^2 t) \ (t \to +\infty)$$

і міра ν така, що $\ln \nu(0, t] = O(t)$ $(t \to +\infty)$ та

$$(\exists C > 0)(\exists p_1 > 0)(\exists t_0 > 0)(\forall t \geq t_0) \colon \nu(t - \sqrt{\psi(t)}, t + \sqrt{\psi(t)}] \geq C t^{p_1}. \tag{4.15}$$

Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, p_1)$ існує функція $F \in \mathcal{I}(\nu)$ вигляду (4.11) *така, що*

$$\frac{F(x)}{\mu^*(x) \ln^{p_1} \mu^*(x) \ln_2^{p_1 - \varepsilon} \mu^*(x)} \to +\infty, \ (x \to +\infty). \tag{4.16}$$

Позначимо

$$\nu(E) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{\lambda_k^{(1)}}(E), \quad \lambda_k^{(1)} := p\lambda_k.$$

Умова (4.10) для послідовності (λ_k) виконується з функцією $\psi \in \mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли вона виконується для $(b\lambda_k)$, $b > 0$, з функцією $\psi_1(u) = b^2 \psi(u/b)$ замість функції ψ і константою Cb^{-p_1} замість сталої C. Отже, умова (4.15) виконується для таких ν, тому з леми 4.2 випливає існування $F \in \mathcal{I}(\nu)$ вигляду (4.11) такої, що виконується співвідношення (4.16).

Нехай $h_k := a(\lambda_k^{(1)}) = a(p\lambda_k)$. Тоді

$$H(r) := \sum_{k=1}^{+\infty} h_k r^{p\lambda_k} = \int_1^{+\infty} a(u) e^{u \ln r} \nu(du) = F(\ln r), \quad \mu^*(\ln r) \geq \mu_H(r) \quad (r \geq 1).$$

Тому $h \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — ціла функція від однієї змінної. З (4.16) випливає, що

$$\frac{H(r)}{\mu^*(\ln r) \ln^{p_1} \mu^*(\ln r) \ln_2^{p_1 - \varepsilon} \mu^*(\ln r)} \to +\infty \quad (r \to +\infty). \tag{4.17}$$

Припустимо, що $a_k = h_k / d_k$ $(k \geq 0)$ і розглянемо функцію f вигляду (4.12). Зауважимо, що для $r > 0$ і кожного $z \in \partial \overline{G}_1$

$$M(r, f) \geq |f(rz)|.$$

Нехай $z = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p_+$. Не зменшуючи загальності, можна припустити, що $z = (1, \dots, 1) \in \partial\overline{G}_1$. Тоді для всіх $r > 0$ маємо

$$M(r, f) \geq |f(rz)| = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k r^{p\lambda_k} = H(r).$$

З нерівностей (4.13), (4.14) випливає, що для $r \geq 1$

$$m(r, f) = \max\{a_k d_k r^{p\lambda_k} \colon k \geq 0\} = \max\{h_k r^{p\lambda_k} \colon k \geq 0\} = \mu_H(r) \leq \mu^*(\ln r).$$

Тому, зі співвідношення (4.17) випливає, що

$$\frac{M(r, f)}{m(r, f) \ln^{p_1} m(r, f) \ln_2^{p_1-\varepsilon} m(r, f)} \geq$$
$$\geq \frac{H(r)}{\mu^*(\ln r) \ln^{p_1} \mu^*(\ln r) \ln_2^{p_1-\varepsilon} \mu^*(\ln r)} \to +\infty \tag{4.18}$$

при $r \to +\infty$. Тепер припустимо, що $z = (1, \dots, 1) \notin \partial\overline{G}_1$, та $r_1 > 0$ такі, що $z = (r_1, \dots, r_1) \in \partial\overline{G}_1$. Розглянемо функцію $f_1(z) = f(zr_1)$ і вичерпання множинами $\overline{G}^0_r := \overline{G}_{r_1}$. Тоді, $z = (1, \dots, 1) \in \partial\overline{G}^0_1$,

$$M(r, f_1, G^0) = M(r, f, G), \quad m(r, f_1, G^0) = m(r, f, G).$$

Оскільки $M(r, f) = M(r, f, G)$ й $M(r, f_1) = M(r, f_1, G^0)$ для $r > 0$, то

$$\frac{M(r, f)}{m(r, f) \ln^{p_1} m(r, f) \ln_2^{p_1-\varepsilon} m(r, f)} = \frac{M(r, f_1)}{m(r, f_1) \ln^{p_1} m(r, f_1) \ln_2^{p_1-\varepsilon} m(r, f_1)} \to +\infty$$

при $r \to +\infty$, бо для функції f_1 і областей G^0_r виконується співвідношення (4.18). $\square$

Нерівність типу Бітляна-Гольдберга та новий опис виняткової множини.

Будемо дотримуватись загальної схеми міркувань з попереднього підрозділу. Спочатку ми отримаємо одне твердження, що містить нову оцінку виняткової множини для функцій з класу $\mathcal{I}(\nu)$.

Теорема 4.4. *Нехай $F \in \mathcal{I}(\nu)$ та ν — міра Бореля така, що*

$$(\exists t_0 \geq 0)\ (\exists c_2, c_3 > 0)\ (\forall T \geq t_0)\ (\forall t \in [t_0, T]) \colon \nu(T - t, T + t] \leq c_2 t + c_3. \tag{4.19}$$

Якщо h — додатна функція така, що

$$\int_0^{+\infty} h(x)dx = +\infty,\ \ln_2^+ h(x) = o(\ln_2 F(x))\ (x \to +\infty),$$

тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E_3(\varepsilon, F, h) \equiv E_3$ така, що h-meas $E_3 := \int_{E_3} h(x)dx < +\infty$ та виконується нерівність

$$F(x) \leq h(x)\mu_*(x)(\ln \mu_*(x))^{1/2+\varepsilon}$$

для кожного $x \in [0; +\infty) \setminus E_3$.

Нам також потрібне наступне твердження.

Лема 4.3 ([27]). *Нехай $g_1(x)$ — додатна диференційовна неспадна на $[0;+\infty)$ функція, $\psi(x)$ — додатна неперервна зростаюча на $[0;+\infty)$ функція така, що*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty,$$

і $h_0(x)$ — додатна локально інтегровна на $[0;+\infty)$ функція, для якої $\int_0^{+\infty} h_0(x)\, dx = +\infty$. Тоді існує множина $E_0 \subset [0;+\infty)$ така, що

$$h\text{-meas } E_0 := \int\limits_{E_0} h_0(x)\, dx < +\infty$$

і для кожного $x \in [0;+\infty) \setminus E_0$ виконується нерівність

$$g_1'(x) \le h_0(x)\psi(g_1(x)).$$

Доведення теореми 4.4. Припустимо, що $g(x) = \ln F(x)$. Як і у [27] для фіксованого $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$F(x) \le 2 \int\limits_{|u-g'(x)|<\sqrt{2g''(x)}} f(u)e^{xu}\nu(du).$$

Тому за умовою (4.19)

$$F(x) \le 2\mu_*(x)\nu(g'(x) - \sqrt{2g''(x)}, g'(x) + \sqrt{2g''(x)}] \le 2\mu_*(x)\Big(c_2\sqrt{2g''(x)} + c_3\Big).$$

Нехай для $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$

$$E_1 = \{x > 0\colon g''(x) > h(x)g'(x)(\ln g'(x))^{1+\varepsilon_1},\ g'(x) \ge 2\},$$
$$E_2 = \{x > 0\colon g'(x) > h(x)(g(x))^{1+\varepsilon_2},\ g(x) \ge 1\}.$$

Використаємо твердження леми 4.3 двічі. Спочатку виберемо

$$g_1(x) = g'(x),\ \psi(x) = \frac{2c_2^2 x(\ln x)^{1+\varepsilon_1}}{2c_2^2}.$$

Тоді $g_1(x) = g(x),\ \psi(x) = x^{1+\varepsilon_2}$ і

$$h\text{-meas } E_1 < +\infty,\ h\text{-meas } E_2 < +\infty,$$

тобто h-meas $E_1 \cup E_2 < +\infty$.

Тому для $x \notin E := E_1 \cup E_2$ маємо

$$F(x) \le 2\mu_*(x)\left(h(x)\big(g(x)\big)^{(1+\varepsilon_2)/2}\Big(\ln\Big(h(x)\big(g(x)\big)^{1+\varepsilon_2}\Big)\Big)^{(1+\varepsilon_1)/2} + c_3\right).$$

За умовою теореми 4.4 виконується нерівність

$$\ln h(x) < (\ln F(x))^{\delta}\ (x \ge x_0(\delta))$$

для кожного $\delta > 0$. Тому,

$$\Big(\ln\big(h(x)(g(x))^{1+\varepsilon_2}\big)\Big)^{(1+\varepsilon_1)/2} \le$$
$$\le \Big((\ln F(x))^{\delta} + (1+\varepsilon_2)\ln_2 F(x)\Big)^{(1+\varepsilon_1)/2} \le \big(1+o(1)\big)\big(\ln F(x)\big)^{\delta(1+\varepsilon_1)/2}$$

при $x \to +\infty$. Отже,

$$F(x) \le 2\mu_*(x)\big(h(x)\big(\ln F(x)\big)^{(1+\varepsilon)/2} + c_3\big) \quad (x \to +\infty,\ x \notin E),$$

де $\varepsilon = \varepsilon_2 + \delta(1+\varepsilon_1)$.

Зауважимо, що $h(x) \le \exp\{\ln^{1/3} F(x)\}$ $(x \to +\infty)$. Тому

$$h(x)\big(\ln F(x)\big)^{(1+\varepsilon)/2} + c_3 \le \exp\{\ln^{2/3} F(x)\} \quad (x \to +\infty)$$

і при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$

$$\ln F(x) \le \ln 2 + \ln \mu_*(x) + \ln\big(h(x)\big(\ln F(x)\big)^{(1+\varepsilon)/2} + c_3\big) \le$$
$$\le \ln 2 + \ln \mu_*(x) + \ln^{2/3} F(x),$$

тобто $\ln F(x) \le (1+o(1))\ln \mu_*(x)$. Отже,

$$F(x) \le 2\mu_*(x)\big(h(x)\big(\ln F(x)\big)^{(1+\varepsilon)/2} + c_3\big) \le 4\mu_*(x)h(x)\big(\ln \mu_*(x)\big)^{(1+\varepsilon)/2}$$

при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$. $\square$

Тепер ми розглянемо загальний випадок цілих функцій з класу $\mathcal{E}^p := \mathcal{E}^p(\lambda)$ з $\lambda_k \equiv k \in \mathbb{Z}_+$.

З теореми 4.4 випливає такий наслідок.

Теорема 4.5. *Нехай $f \in \mathcal{E}^p$. Якщо додатна локально інтегровна на $[1;+\infty)$ функція h_0 така, що*

$$\int_1^{+\infty} h_0(r)d\ln r = +\infty,\ \ln^+ \ln h_0(r) = o(\ln\ln m(r,f))\ (r \to +\infty),$$

тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E_4(\varepsilon, f, h) \equiv E_4$ така, що

$$h_0\text{-}log\text{-}meas\ E_4 := \int_{E_4} h_0(r)d\ln r < +\infty$$

і виконується нерівність

$$M(r,f) \le h_0(r)m(r,f)(\ln m(r,f))^{1/2+\varepsilon}$$

для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E_4$.

Доведення. Спочатку, міркуємо як і при доведенні теореми 4.2 до застосування леми 4.1. Далі, застосовуємо замість леми 4.2 твердження леми 4.3. Ми отримаємо потрібну нерівність і потрібний опис виняткової множини, бо

$$\int_{E_4} h_0(r)d\ln r = \int_{E_3} h_0(e^x)dx = \int_{E_3} h(x)dx < +\infty,$$

де множина E_4 — образ множини E_3 при відображенні $r = e^x\colon E_3 \to E_4$.

Тепер зауважимо, що послідовність $\lambda_k \equiv k$ і $n(T+t) - n(T-t) \le 2t+1$, тобто умова (4.19) виконується з $c_2 = 2, c_3 = 1$. Залишається отримати з умови

$$\ln^+ \ln h_0(r) = o(\ln\ln m(r,f)) \ (r \to +\infty)$$

умову

$$\ln_2^+ h(x) = o(\ln_2 F(x)) \ (x \to +\infty) \text{ з } h(x) = h_0(e^x),\ F(x) = H(e^x).$$

Але за нерівністю Коші $m(r,f) = \mu_H(r) \le H(r)$. □

Якщо у теоремі 4.5 виберемо $h_0(r) = \ln^\varepsilon m(r,f)$, тоді отримаємо наступне твердження.

Наслідок 4.1. *Якщо $f \in \mathcal{E}^p$, тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E_5(\varepsilon, f, h) \equiv E_5$ така, що*

$$\int_{E_5} \ln^\varepsilon m(r,f) d\ln r < +\infty$$

виконується нерівність

$$M(r,f) \le m(r,f)(\ln m(r,f))^{1/2+\varepsilon}$$

для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E_5$.

Зауважимо, що у випадку цілої функції від однієї комплексної змінної твердження подібні до теореми 4.5 і попереднього наслідку можна знайти у [33] (див. також [28]).

4.2. Нерівність типу Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками

Для $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{C}^p$ позначимо

$$(z,w) = \sum_{j=1}^p z_j w_j,\ \|n\| = \sum_{j=1}^p n_j,\ \operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_p),$$

і для $R = (r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо $\Pi_R = \{z \in \mathbb{C}^p\colon \operatorname{Re} z < R\}$.

Через $\mathcal{D}$ позначимо клас абсолютно збіжних у всьому комплексному просторі $\mathbb{C}^p$ (цілий) ряд Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)} \tag{4.20}$$

з такою послідовністю показників (λ_n), що $\{\lambda_n\colon n \in \mathbb{Z}^p\} \subset \mathbb{C}^p$ та $\lambda_n \ne \lambda_m$ для всіх $n \ne m$. Через $\mathcal{D}^+$ позначимо клас цілих рядів Діріхле з послідовністю показників $\Lambda^p = (\lambda_n)$ таких, що $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \dots, n_p)$ та

$$0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty \ (1 \le k \uparrow +\infty),\ 1 \le j \le p.$$

Для $F \in \mathcal{D}$ і $z \in \mathbb{C}^p$ позначимо

$$\mathfrak{M}(z, F) := \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| e^{\mathrm{Re}(z,\lambda_n)},$$

$$\mu(z, F) := \sup\{|a_n| e^{\mathrm{Re}(z,\lambda_n)} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\},\ \mathcal{N}_* := \bigcup_z \mathcal{N}_*(z),$$

де $\mathcal{N}_*(z)$ — множина таких мультиіндексів $\nu = \nu(z, F) \in \mathbb{Z}_+^p$, що

$$|a_\nu| e^{\mathrm{Re}(z,\lambda_\nu)} = \mu(z, F)$$

для даного z. Позначимо

$$\beta(z) := \sup\{\mathrm{Re}(z, \lambda_n) \colon n \in \mathbb{Z}_+\} \colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{R}.$$

Через $\mathcal{D}_1$ позначимо клас абсолютно збіжних для цілих рядів Діріхле в $\mathbb{C}$ вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}$$

з послідовністю показників $(\lambda_n)\colon \lambda_n \geq 0$ $(n \geq 0)$ і $\sup\{\lambda_n \colon n \geq 0\} = +\infty$.

Для функції $F \in \mathcal{D}_1$ позначимо через $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ послідовність $(-\ln|a_k|)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ впорядкована за неспаданням.

Нехай L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ функцій на $[0; +\infty)$ і L_1 — клас функції $\Phi \in L$ таких, що $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ $(t \to +\infty)$, де φ — обернена функція до Φ.

У статті [92] було доведено таку теорему.

Теорема 4.6 ([92])**.** *Нехай*

$$F \in \mathcal{D}_1,\ \Phi_1 \in L_1,\ \Phi_1(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{x} \ln \mu(x, F).$$

Якщо

$$(\exists \alpha > 0)\colon \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^\alpha}{t^2} dt < +\infty, \quad n_1(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\mu_n \leq t} 1, \quad t_0 > 0,$$

тоді існує множина $E \subset \mathbb{R}$ така, що

$$\ln\text{–meas}\ (E) := \int_{E\cap[1;+\infty)} d\ln r < +\infty$$

і співвідношення

$$\mathfrak{M}(x, F) = o(\mu(x, F) \ln^{1/\alpha} \mu(x, F))$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$.

Наступне твердження показує, що оцінки (4.34) за умови (4.33) загалом не можуть бути покращені.

Теорема 4.7 ([92]). *Для кожного* $\alpha > 0$ *існує функція* $F \in \mathcal{D}_1$ *така, що умова* (4.33) *і співвідношення*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{(n_1(t))^{\alpha+\varepsilon}}{t^2} dt = +\infty \tag{4.21}$$

виконуються і

$$\big(\forall\ \varepsilon \in (0; 1/\alpha)\big)\colon \quad \frac{F(x)}{\mu(x, F)(\ln \mu(x, F))^{1/\alpha-\varepsilon}} \to +\infty$$

при $x \to +\infty$.

Доведемо аналог цього результату для цілих рядів Діріхле $F \in \mathcal{D}$.

Для вимірної за Лебегом множини (наприклад, для борелевої множини) $E \subset \mathbb{C}^p$ та $\alpha > 0$ позначимо

$$V_\alpha(E) := \iint\limits_{E \cap \{z\colon |z| \ge 1\}} \frac{dxdy}{|z|^\alpha}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^p.$$

Для кулі $\mathbb{D}^p_R = \{z \in \mathbb{C}^p\colon |z| \le R\}$, $R > 0$,

$$V_{2p}(\mathbb{D}^p_R) = C_p \ln R,\ (R \ge 1),\ V_{2p}(\mathbb{C}^p) = +\infty,$$

де C_p — площа одиничної сфери в $\mathbb{R}^{2p}$.

Нехай $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, а $\mathcal{L}_0$ — клас таких функцій $\Phi \in \mathcal{L}$, що

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x)),\ x \to +\infty.$$

Позначимо через $\mathcal{D}_0$ клас функцій $F \in \mathcal{D}$ таких, що $\mu(z, F) = 1$ $(z \in \mathbb{D}^p_1)$, де $\mathbb{D}^p_1 = \{z \in \mathbb{C}^p\colon |z| \le 1\}$. Якщо для функції $F \in \mathcal{D}$ ця умова не виконується, тоді для $b := \max\{\mu(z, F)\colon z \in \mathbb{D}^p_1\}$ визначимо $F_2(z) := \frac{1}{2b}(F(z) - a_0 + 2b)$. Тому,

$$\mu(z, F_2) = \mu(\mathbf{0}, F_2) = \max\{1, |a_n|/(2b)\colon n \ne \mathbf{0}\} = 1\ (z \in \mathbb{D}^p_1),$$

тобто, $F_2 \in \mathcal{D}_0$.

Для функції $F \in \mathcal{D}_0$ і заданого $z \in \mathbb{C}^p$ визначимо

$$\Phi_z(t) = \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F)\colon\ [0; +\infty) \to [0; +\infty).$$

Для функції $F \in \mathcal{D}$ визначимо такі множини

$$\gamma(F) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \lim_{t\to+\infty} \Phi_z(t) = +\infty\Big\}, \quad \gamma_+(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \gamma(F)\colon\ \Phi_z \in \mathcal{L}_0\}.$$

З опуклості функції $\ln \mu(tz, F)$ як функції від $t \ge 0$ за умови $\mu(\mathbf{0}, F) = 1$ для кожного фіксованого $z \in \gamma(F)$ отримаємо для $t_2 > t_1 \ge t_0$

$$\Phi_z(t_2) = \frac{\ln \mu(t_2 z, F) - \ln \mu(\mathbf{0}, F)}{(t_2 - 0)} \ge$$

$$\geq \frac{\ln \mu(t_1 z, F) - \ln \mu(\mathbf{0}, F)}{(t_1 - 0)} = \Phi_z(t_1) \geq 0, \tag{4.22}$$

тобто функція $\Phi_z(t)$ неперервна, невід'ємна на $[0; +\infty)$ і строго зростає на $[t_0; +\infty)$ для деякого $t_0 \geq 1$. Нехай

$$t_0 = t_0(z) := \max\{t \in \mathbb{R} \colon \mu(tz, F) = 1\}.$$

Таким чином, можемо визначити обернену функцію $\varphi_z(u) \colon [0; +\infty) \to [t_0; +\infty)$ до функції

$$\Phi_z(t) \colon [t_0; +\infty) \to [\Phi_z(t_0); +\infty) = [0; +\infty)$$

для фіксованого $z \in \gamma(F)$. Тоді

$$\Phi_z(t) \equiv 0 \ (0 \leq t \leq t_0), \ \varphi_z(0) = t_0 = t_0(z) = \max\{t \in \mathbb{R} \colon \mu(tz, F) = 1\}.$$

Множини $\gamma(F)$, $\gamma_+(F)$ є дійсними конусами. Це випливає з наступного елементарного твердження.

Твердження 4.1. *Для кожної функції $F \in \mathcal{D}$*

$$z \in \gamma(F) \Longleftrightarrow (\forall\ r > 0) \colon (rz) \in \gamma(F), \ z \in \gamma_+(F) \Longleftrightarrow (\forall\ r > 0) \colon (rz) \in \gamma_+(F).$$

Доведення. Оскільки $\Phi_{rz}(t) = r\Phi_z(rt)$ для $r > 0$, то перша частина твердження є очевидною.

Доведемо, що $z \in \gamma(F) \implies (\forall r > 0) \colon (rz) \in \gamma(F)$. Цього буде достатньо для доведення другого твердження. Для фіксованого $r > 0$ за умови $\Phi_z \in \mathcal{L}_0$ маємо

$$\int\limits_{t_0}^{x} \frac{\Phi_{rz}(t)}{t} dt = r \int\limits_{t_0}^{x} \frac{\Phi_z(rt)}{rt} d(rt) = r \int\limits_{rt_0}^{rx} \frac{\Phi_z(u)}{u} du =$$
$$= O(\Phi_z(rx)) = O(\Phi_{rz}(x)) \quad (x \to +\infty).$$

□

Наступне твердження (у випадку $p = 1$ див. вказівку в [19]) ми наведемо повним доведенням.

Твердження 4.2. *Для кожної функції $F \in \mathcal{D}$, $\gamma(F) = \{z \in \mathbb{C} \colon \beta(z) = +\infty\}$.*

Доведення. Припустимо спочатку, що $\beta(z) < +\infty$. Тоді

$$\Phi_z(t) = \frac{\ln \mu(tz)}{t} = \frac{\ln |a_{\nu(tz)}|}{t} + \mathrm{Re}(z, \lambda_{\nu(tz)}) \leq \frac{\ln |a_{\nu(tz)}|}{t} + \beta(z),$$

звідси,

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \Phi_z(t) \leq \beta(z),$$

тобто, $z \notin \gamma(F)$. Тому, $\gamma(F) \subset \{z \colon \beta(z) = +\infty\}$.

Нехай $z \notin \gamma(F)$. Тоді $(\forall t > 0)\colon \Phi_z(tz) \le C(z) < +\infty$ та

$$\frac{\ln|a_n|}{t} + \mathrm{Re}(\lambda_n, z) \le \frac{\ln\mu(tz, F)}{t} \le C(z) \quad (t > 0,\ n \in \mathbb{Z}_+^p).$$

Таким чином, для кожного фіксованого $n \in \mathbb{Z}_+^p$ маємо

$$\mathrm{Re}(\lambda_n, z) \le \varliminf_{t\to+\infty}\Big(C(z) - \frac{\ln|a_n|}{t}\Big) = C(z).$$

З цього випливає, що $\beta(z) = \sup\{\mathrm{Re}(\lambda_n, z)\colon n \ge 0\} \le C(z)$. Отже,

$$\{z\colon \beta(z) = +\infty\} \subset \gamma(F),\ \gamma(F) = \{z\colon \beta(z) = +\infty\}.$$

□

Твердження 4.3. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Для кожного конуса K з вершиною в точці $z = \mathbf{0}$ такого, що $\overline{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \subset \gamma(F)$ отримаємо*

$$\min\{\|\nu(z, F)\|\colon \nu(z, F) \in \mathcal{N}(z)\} \to +\infty,\ \frac{1}{|z|}\ln\mu(z, F) \to +\infty\ (z \to \infty,\ z \in K).$$

Доведення. Доведемо від супротивного, що

$$\frac{1}{|z|}\ln\mu(z, F) \to +\infty\ (z \to \infty,\ z \in K).$$

Тобто, припустимо, що існує послідовність (z_j), $z_j \in K$ $(j \ge 1)$ така, що $z_j \to \infty$ $(j \to +\infty)$ і

$$\frac{1}{|z_j|}\ln\mu(z_j, F) \le C < +\infty \quad (j \ge 1). \tag{4.23}$$

Позначимо $t_j = |z_j|$, $z_j^{(0)} = z_j/|z_j|$. Оскільки $z_j^{(0)} \in K \cap \{z\colon |z| = 1\}$, послідовність $(z_j^{(0)})$ має точку скупчення

$$z_1 \in \overline{K} \cap \{z\colon |z| = 1\}.$$

Отже, існує підпослідовність $(z_j^{(1)})$, $z_j^{(1)} = z_{k_j}^{(0)}$ $(j \ge 1)$ послідовності $(z_j^{(0)})$ така, що

$$\lim_{j\to+\infty} z_j^{(1)} = z_1.$$

Нехай $z_j^* = z_j^{(1)} t_{k_j} = z_{k_j}$.

З умови $z_1 \in \gamma(F)$ випливає, що існує $\widetilde{t}_0 > 1$ таке, що

$$\Phi_{z_1}(t) = \frac{1}{t}\ln\mu(tz_1, F) \ge 2C \quad (t \ge \widetilde{t}_0). \tag{4.24}$$

З (4.22) і (4.23) при $t = t_1 = \widetilde{t}_0$, $t_2 = |z_j^*|$ отримаємо

$$\Phi_{z_j^{(1)}}(t_0) = \frac{1}{t_0}\ln\mu(t_0 z_j^{(1)}, F) \le \Phi_{z_j^{(1)}}(t_2) = \frac{1}{|z_j^*|}\ln\mu(z_j^*, F) \le C.$$

Переходячи тут до границі при $j \to +\infty$ і врахувавши (4.24), одержимо

$$2C \le \Phi_{z_1}(t_0) = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{t_0} \ln \mu(t_0 z_j^{(1)}, F) \le C.$$

Це суперечність.

Тепер доведемо, що

$$\min\{\|\nu(z,F)\| \colon \nu(z,F) \in \mathcal{N}(z)\} \to +\infty, \ (z \to \infty, \ z \in K).$$

Зауважимо, що

$$\operatorname{Re}\Big(\frac{z}{|z|}, \lambda_{\nu(z)}\Big) = \frac{\ln \mu(z,F)}{|z|} - \frac{\ln |a_{\nu(z)}|}{|z|}, \quad \nu(z) = \nu(z,F) \in \mathcal{N}(z).$$

Якщо припустити, що існує послідовність (z_j), $z_j \in K, z_j \to \infty$ $(j \to +\infty)$ така, що $(\forall j) \colon \|\nu(z_j, F)\| \le C < +\infty$, тоді

$$\frac{\ln |a_{\nu(z_j)}|}{|z_j|} \to 0 \ (z_j \to \infty).$$

Отже,

$$\lim_{j\to+\infty} \operatorname{Re}\Big(\frac{z_j}{|z_j|}, \lambda_{\nu(z_j)}\Big) = \lim_{j\to+\infty} \frac{\ln \mu(z_j, F)}{|z_j|} = +\infty.$$

Знову отримуємо протиріччя тому, що

$$\#\mathcal{N}(z_j) \le (C+1)^p \ (j \ge 1) \text{ та } \Big|\operatorname{Re} \frac{z_j}{|z_j|}\Big| \le 1.$$

$\square$

Для функції $F \in \mathcal{D}$ і $z \in \gamma_F$ покладемо

$$K(z) = K_F(z) := \sup\left\{\frac{1}{\Phi_z(t)} \int_0^t \frac{\Phi_z(u)}{u} du \colon \ t \ge t_0\right\},$$

де $\Phi_z(t) = \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F)$, та $t_0 = t_0(z) = \max\{t \in \mathbb{R} \colon \mu(tz, F) = 1\}$. Очевидно, що

$$\gamma_+(F) = \Big\{z \in \gamma(F) \colon \ K_F(z) < +\infty\Big\}.$$

Для $R \in (0; +\infty)$ також визначимо

$$\gamma_R = \gamma_+(F, R) := \Big\{z \colon \ K_F(z) \le R\Big\}.$$

З твердження 4.1 випливає, що для кожного $R > 0$ множина γ_R також є необмеженим дійсним конусом з вершиною в точці $\mathbf{0}$.

Оскільки $a_n \to 0$ $(\|n\| \to +\infty)$ для функції $F \in \mathcal{D}$ вигляду (4.20), послідовність $(|a_n|)_{n \in \mathbb{Z}_+^p}$ можна впорядкувати за неспаданням. Позначимо через $(\mu_k)_{k \ge 0}$ послідовність $(-\ln |a_n|)_{n \in \mathbb{Z}_+^p}$, упорядковану за неспаданням. Зрозуміло, що $\mu_k \nearrow +\infty$ $(k \to +\infty)$. Для кожного заданого $n \in \mathbb{Z}_+^p$ покладемо $k = k_n$ так, що $\mu_{k_n} = -\ln |a_n|$. Для кожного заданого $k \in \mathbb{Z}_+$ виберемо $n = n(k) \in \mathbb{Z}_+^p$ так, що $\mu_k = -\ln |a_{n(k)}|$.

Доведемо наступну допоміжну теорему, що містить верхню оцінку загального члена ряду $F \in \mathcal{D}_0$ через його максимальний член.

Теорема 4.8. *Нехай* $F \in \mathcal{D}_0$, $v(u)\colon [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ — *така функція, що*

$$v(u) > 0 \ (u \geq u_0), \ \int\limits_0^{+\infty} v(u)du < +\infty.$$

Якщо $\ln k = o(\mu_k)$ $(k \to +\infty)$, *то існує функція*

$$c_1(u) \uparrow +\infty \ (u \to +\infty), \ \int\limits_0^{+\infty} c_1(u)v(4u)du < +\infty,$$

та множина $E \subset \gamma_+(F)$, $V_{2p}(E \cap \gamma_+(F)) \leq C_p/2$, *такі, що для кожного* $R > 0$, *для всіх* $n \geq 0$ *і* $t > 0$, $tz \in \gamma_R \setminus E$ *виконується нерівність*

$$|a_n|e^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_n)} \leq \mu(tz, F)\exp\left\{ -t\int\limits_{\mu_{k_\nu}}^{\mu_{k_n}} (\mu_{k_n} - u)\frac{c_z(u)}{\varphi_z^*(u)} v(4u)du \right\}, \tag{4.25}$$

де $\mu_{k_n} = -\ln|a_n|$, $c_z(u) = e^{-2K(z)}c_1(u)$, $\nu = \nu(tz, F)\colon$

$$\|\nu(tz)\| = \max\{\|n\|\colon |a_n|e^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_n)} = \mu(tz, F)\}$$

є центральним мультиіндексом ряду (4.20), а $\varphi_z^*(u)$ *є оберненою функцією до* $\Phi_z^*(t) = \ln\mu(tz, F)$.

Доведення. Зафіксуємо $z \in \gamma_+(F), |z| = 1$. Позначимо

$$l(x) := \int\limits_x^{+\infty} v(u)du, \quad c_z^*(x) := e^{-2K(z)}c_1(x), \quad c_1(x) := (l(0)\cdot l(4x))^{-1/2},$$

де $K(z) = K_F(z)$ є константою, визначеною перед формулюванням теореми 4.8. Зауважимо, що $l(x) \downarrow 0$, тому $c_1(x) \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, і

$$e^{2K(z)}\int\limits_0^{+\infty} c_z^*(t)v(4t)dt \leq -\frac{1}{4}(l(0))^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{+\infty}(l(x))^{-\frac{1}{2}}dl(x) = \frac{1}{2}. \tag{4.26}$$

Для $t > 0$ і $k \in \mathbb{Z}_+$ позначимо

$$\alpha(t) := -\int\limits_t^{+\infty}\frac{1}{\varphi_z^*(u)}c_z^*(u)v(4u)du, \ \alpha_k = \exp\left\{-\int\limits_0^{\mu_k}\alpha(t)dt\right\}, \ \tau_k = \alpha(\mu_k).$$

З (4.26) випливає таке співвідношення

$$|\alpha(t)| \leq \frac{1}{\varphi_z^*(t)}\int\limits_t^{+\infty} c_z^*(u)v(4u)du = o\left(\frac{1}{\varphi_z^*(t)}\right) \quad (t \to +\infty). \tag{4.27}$$

Тому,

$$\int\limits_0^{\mu_k} dt \int\limits_t^{+\infty} \frac{c_z^*(u)}{\varphi_z^*(u)} v(4u)du = o(\mu_k) \quad (k \to +\infty). \tag{4.28}$$

Розглянемо ряд Діріхле f від однієї змінної $s \in \mathbb{C}$

$$f(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{\alpha_k} \mathrm{e}^{s\mu_k},$$

де $b_k = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z,\lambda_n)}$, $n = n(k) \in \mathbb{Z}_+^p$ такі, що $\mu_k = -\ln|a_{n(k)}|$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$.

Доведемо тепер, що для кожного фіксованого $z \in \gamma_+(F)$ ряд Діріхле f є абсолютно збіжним у півплощині $\{s = \sigma + it \colon \sigma < 0\}$, а також для центрального індексу маємо $\nu(x, f) \to +\infty$ $(x \uparrow 0)$.

Дійсно, умова $F \in \mathcal{D}$ означає, що

$$\varliminf_{\|n\| \to +\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\mathrm{Re}(z, \lambda_n)} = +\infty.$$

Таким чином, $\mathrm{Re}(z, \lambda_{n(k)}) = o(\mu_k)$ $(k \to +\infty)$. Отже, і з (4.28) отримаємо

$$\ln \frac{b_k}{\alpha_k} = \mathrm{Re}(z, \lambda_{n(k)}) - \int\limits_0^{\mu_k} dt \int\limits_t^{+\infty} \frac{c_z^*(u)}{\varphi_z^*(u)} v(4u)du = o(\mu_k) \quad (k \to +\infty).$$

Оскільки $\ln k = o(\mu_k)$ $(k \to +\infty)$, то за теоремою Валірона для абсцис абсолютної збіжності ряду Діріхле f маємо

$$\sigma_a(f) = \varliminf_{k \to +\infty} \frac{-\ln(b_k/\alpha_k)}{\mu_k} = 0.$$

Отже, ряд Діріхле f є абсолютно збіжним у півплощині $\{s = \sigma + it \colon \sigma < 0\}$ для кожного фіксованого $z \in \gamma_+(F)$.

Тепер доведемо, що центральний індекс $\nu(x, f) \to +\infty$ $(x \uparrow 0)$. Це випливає зі співвідношення $\mu(x, f) \to +\infty$ $(x \uparrow 0)$ або, що те саме, з умови

$$\sup\left\{\frac{b_k}{\alpha_k} : \ k \geq 0\right\} = +\infty. \tag{4.29}$$

Доведемо останнє співвідношення. Зауважимо, що

$$0 \leq \ln \mu(tz, F) = \ln|a_\nu| + t\,\mathrm{Re}(z, \lambda_\nu) \quad (t \geq t_0(z)), \ \nu = \nu(tz, F).$$

Отож, $-\ln|a_\nu| \leq t\,\mathrm{Re}(z, \lambda_\nu)$. Тоді

$$\Phi_z^*(t) = t\Phi_z(t) = \ln \mu(tz, F) \leq t\,\mathrm{Re}(z, \lambda_\nu) \ (t \geq 0),$$

$t \leq \varphi_z(\mathrm{Re}(z\lambda_\nu))$, де φ_z — функція, обернена до Φ_z. Таким чином,

$$-\ln|a_\nu| \leq t\,\mathrm{Re}(z, \lambda_\nu) \leq \mathrm{Re}(z, \lambda_\nu)\varphi_z(\mathrm{Re}(z, \lambda_\nu)) \quad (t \geq t_0(z)),$$

де $\nu=\nu(tz,F)$. Функція $u/\varphi_z^*(u)$ є оберненою до функції $u\varphi_z(u)$, де функція φ_z є оберненою до $\Phi_z(t)=\Phi_z^*(t)/t$, отже,

$$\mathrm{Re}(z,\lambda_\nu)\geq \frac{u}{\varphi_z^*(u)}\Bigg|_{-\ln|a_\nu|}=\frac{-\ln|a_\nu|}{\varphi_z^*(-\ln|a_\nu|)},\quad (t\geq 0),\quad \nu=\nu(tz,F).$$

Нехай $k_\nu\in\mathbb{Z}_+$ таке, що $-\ln|a_\nu|=\mu_{k_\nu}$. Тоді, при $k=k_\nu$, $\nu=\nu(tz,F)$ маємо

$$\ln\frac{b_k}{\alpha_k}\geq\frac{\mu_k}{\varphi_z^*(\mu_k)}-\int\limits_0^{\mu_k}|\alpha(t)|dt.$$

З умови $z\in\gamma_+(F)$ випливає, що

$$t/\varphi_z^*(t)=\Phi_z(\varphi_z^*(t))\to+\infty\ (t\to+\infty),$$

та

$$\int\limits_0^x\frac{dt}{\varphi_z^*(t)}=\frac{x}{\varphi_z^*(x)}+\int\limits_0^{\varphi_z^*(x)}\frac{\Phi_z^*(u)}{u^2}du+O(1)=\frac{x}{\varphi_z^*(x)}+O\left(\frac{\Phi_z^*(\varphi_z^*(x))}{\varphi_z^*(x)}\right)=O\left(\frac{x}{\varphi_z^*(x)}\right)$$

при $x\to+\infty$. Отже, з (4.27) отримаємо

$$\int\limits_0^{\mu_k}|\alpha(u)|du=o\big(\mu_k/\varphi_z^*(\mu_k)\big)\ (k\to+\infty).$$

Тоді при $k=k_\nu$

$$\ln\frac{b_k}{\alpha_k}\geq(1+o(1))\frac{\mu_k}{\varphi_z^*(\mu_k)}\to+\infty\ (t\to+\infty),\ \nu=\nu(tz,F),$$

тобто рівність (4.29) виконується. Таким чином, $\nu(x,f)\to+\infty$ $(x\uparrow 0)$.

Нехай (s_j) — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(s,f)$, пронумерованих таким чином, що $\nu(s,f)=j$ для $s\in[s_j,s_{j+1})$ і, якщо $\nu(s_{j+1}-0,f)=j$ і $\nu(s_{j+1},f)=j+p$, тоді

$$s_{j+1}=s_{j+2}=\cdots=s_{j+p}<s_{j+p+1}.$$

Зрозуміло, що $s_j\uparrow 0$ $(j\to+\infty)$. Якщо

$$x\in[s_k+\tau_k,s_{k+1}+\tau_k)\stackrel{\mathrm{def}}{=}E_k^*\subset(-\infty;0),$$

тоді $\nu(x-\tau_k,f)=k$ і за означенням $\mu(x-\tau_k,f)$ для всіх $m\geq 0$ одержимо

$$\frac{b_m}{\alpha_m}\mathrm{e}^{(x-\tau_k)\mu_m}\leq\mu(x-\tau_k,f).$$

Звідси випливає, що для $\mu_m\neq\mu_k$ маємо нерівність

$$\frac{b_m}{b_k}\mathrm{e}^{x(\mu_m-\mu_k)}\leq\frac{\alpha_m}{\alpha_k}\mathrm{e}^{\tau_k(\mathrm{Re}(z,\lambda_{n(m)}-\lambda_{n(k)}))}=\exp\left\{-\int\limits_{\mu_k}^{\mu_m}(\alpha(u)-\alpha(\mu_k))du\right\}<1.$$

Підставляючи сюди $x=-\frac{1}{t},\ t>0$, отримаємо
$$\frac{|a_{n(m)}|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_{n(m)})}}{|a_{n(k)}|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_{n(k)})}}=\left(\frac{b_m\mathrm{e}^{x\mu_m}}{b_k\mathrm{e}^{x\mu_k}}\right)^t<1\quad (n\neq k),\tag{4.30}$$
тобто, $\nu(tz,F)=n(k)$ та $\mu(tz,F)=|a_{n(k)}|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_{n(k)})}$ для
$$t\in[-(s_k+\tau_k)^{-1},-(s_{k+1}+\tau_k)^{-1}).$$
Отже, для кожного $t>0$ такого, що
$$x=-t^{-1}\in\bigcup_{k\in J}E_k^*,$$
де $J\subset\mathbb{N}\cup\{0\}$ — множина значень центрального індексу $\nu(x,f)$, а для всіх $n\in\mathbb{Z}_+^p$ з нерівності (4.30) випливає, що
$$\frac{|a_{n(m)}|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_{n(m)})}}{|a_{n(k)}|\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\lambda_{n(k)})}}=\left(\frac{b_m\mathrm{e}^{x\mu_m}}{b_k\mathrm{e}^{x\mu_k}}\right)^t\leq\exp\left\{-t\int\limits_{\mu_k}^{\mu_m}(\mu_m-u)\alpha'(u)du\right\}$$
при $t=-\frac{1}{x}>0$, де $n(m)$ таке, що $-\ln|a_{n(m)}|=\mu_m$. Отже, для всіх
$$t\in\bigcup_{k\in J}\widetilde{E}_k\stackrel{\mathrm{def}}{=}\widetilde{E}$$
отримаємо (4.25), де $\widetilde{E}_k\subset(0;+\infty)$ є образом множини E_k^* при відображенні $t=-\frac{1}{x}$.

Оцінимо логарифмічну міру множини
$$E_z^*=[-s_1^{-1},+\infty)\setminus\widetilde{E}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}[-(s_k+\tau_{k-1})^{-1},-(s_k+\tau_k)^{-1})=\bigcup_{k=1}^{+\infty}I_k^*.$$
Оскільки
$$(\forall\ k\geq 0)(\forall\ t>0)\colon\ -\mu_k+t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_{n(k)})\leq\ln\mu(tz,F)$$
при $t=\varphi_z^*(\mu_k)$, то
$$\mathrm{Re}(z,\lambda_{n(k)})\leq\frac{\mu_k+\Phi_z^*(t)}{t}=\frac{2\mu_k}{\varphi_z^*(\mu_k)}.\tag{4.31}$$
Для сталої $K=K_F(z)\in(0;+\infty)$ і фіксованого $z\in\gamma_+(F)$ виконується нерівність
$$2K\Phi_z(x\mathrm{e}^{-2K})\leq\int\limits_{x\mathrm{e}^{-2K}}^{x}\frac{\Phi_z(t)}{t}dt\leq\int\limits_0^x\frac{\Phi_z(t)}{t}dt\leq K\Phi_z(x)\quad (x>0),$$
тобто, $2\Phi_z\left(x\mathrm{e}^{-2K}\right)\leq\Phi_z(x)$ $(x>0)$. Отже, $\varphi_z(2u)\leq e^{2K}\varphi_z(u)$ $(u\geq 0)$. Оскільки, $t/\varphi_z^*(t)=\Phi_z(\varphi_z^*(t))$, то нерівність
$$\varphi_z\Big(\frac{2t}{\varphi_z^*(t)}\Big)\leq c\varphi_z\Big(\frac{t}{\varphi_z^*(t)}\Big)=c\varphi_z^*(t)\ (t\geq 0)$$

виконується з $c = \mathrm{e}^{2K}$, $K = K_F(z)$. З цієї нерівності та з (4.31) випливає, що

$$t \le \varphi_z(\mathrm{Re}(z, \lambda_{\nu(tz,F)})) \le \varphi_z\left(\frac{2\mu_{k_\nu}}{\varphi_z^*(\mu_{k_\nu})}\right) \le c\varphi_z^*(\mu_{k_\nu}) \ (t \ge 0), \tag{4.32}$$

де $\nu = \nu(tz, F)$, k_ν такі, що $-\ln|a_\nu| = \mu_{k_\nu}$, та $c = \mathrm{e}^{2K}$, $K = K_F(z)$.

Тепер припустимо, що $k \in J$. Тоді

$$\nu\left(-\left(s_k + \tau_{k-1} - 0\right)^{-1}\mu_{k_\nu}, F\right) = \nu(s_k + \tau_{k-1} - 0, f) \le k - 1.$$

Звідси і з нерівності (4.32) отримаємо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1} = -(s_k + \tau_{k-1})^{-1} \le c\varphi_z^*(\mu_{k-1}).$$

Отже, за означенням τ_k одержимо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}(|\tau_{k-1}| - |\tau_k|) \le c \int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du.$$

Оскільки за нерівністю (4.26)

$$c \cdot \int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du \le \frac{1}{2},$$

для $I_k^* = [|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1})$ маємо

$$\ln\text{-}\operatorname{meas}(I_k^*) = \ln\text{-}\operatorname{meas}\left(([|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1}))\right) = \ln\left|\frac{s_k + \tau_{k-1}}{s_k + \tau_k}\right| =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_k|}\right) \le \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_k|} = \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_{k-1}| - (|\tau_{k-1}| - |\tau_k|)} \le$$

$$\le c \int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du \left(1 - c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du\right)^{-1} \le 2c \int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du.$$

Припустимо тепер, що $j \notin J$, $k, p \in J$ такі, що

$$p < j < k, \ s_p < s_{p+1} = s_j = s_k < s_{k+1}.$$

Тоді

$$\bigcup_{j=p+1}^{k} I_j^* = \bigcup_{j=p+1}^{k} [|s_j + \tau_{j-1}|^{-1}, |s_j + \tau_j|^{-1}) = [|s_{p+1} + \tau_p|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1}).$$

Використовуючи нерівності

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1} = -(s_k + \tau_{k-1})^{-1} \le c\varphi_z^*(\mu_{k-1})$$

та (4.26) отримаємо

$$\ln\text{-}\operatorname{meas}\left(\bigcup_{j=p+1}^{k} I_j^*\right) \le \ln\frac{|s_{p+1} + \tau_p|}{|s_{p+1} + \tau_k|} \le \frac{|\tau_p| - |\tau_k|}{|s_{p+1} + \tau_p| - (|\tau_p| - |\tau_k|)} \le$$

$$\le c\int\limits_{\mu_p}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du\Bigg(1-c\int\limits_{\mu_p}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du\Bigg)^{-1}\le 2c\int\limits_{\mu_p}^{\mu_k} c_z^*(u)v(4u)du.$$

Тому для множини

$$E_z^*=\bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j^*$$

за нерівністю (4.26) маємо

$$\ln\text{-}\operatorname{meas}(E_z^*)=\ln\text{-}\operatorname{meas}\Bigg(\bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j^*\Bigg)\le 2c\int\limits_0^{\infty} c_z^*(u)v(4u)du\le\frac{1}{2}.$$

Отже, для множини

$$E=\bigcup_{z\in\gamma(F)\cap\{z:|z|=1\}} E_z,$$

де $E_z=\{tz\colon t\in E_z^*\}$, виконується нерівність

$$V_{2p}(E)=\int\limits_{z\in\gamma(F)\cap\{z:|z|=1\}}\Bigg(\int\limits_{E_z}\frac{dt}{t}\Bigg)dS\le\frac{1}{2}\cdot C_p,$$

де C_p — площа одиничної сфери в $\mathbb{C}^p$. □

Теорема 4.9. *Нехай $F\in\mathcal{D}$. Якщо*

$$(\exists\alpha>0)\colon\quad\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{(n_1(t))^{\alpha}}{t^2}dt<+\infty,\quad n_1(t)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\mu_n\le t}1,\ t_0>0,\tag{4.33}$$

тоді існує множина $E\subset\gamma_+(F)$, така, що $V_{2p}(E\cap\gamma_+(F))\le C_p$ і співвідношення

$$\mathfrak{M}(z,F)=o(\mu(z,F)\ln^{1/\alpha}\mu(z,F))\tag{4.34}$$

виконується при $z\to\infty$ $(z\in\gamma_R\setminus E)$ для кожного $R>0$.

Доведення. Не зменшуючи загальності можемо припустити, що

$$F\in\mathcal{D}_0,\ \lambda_{\mathbf{0}}=\mathbf{0},\ 0=\mu_0\le\mu_m\nearrow+\infty\ (1\le m\to+\infty).$$

Для доведення теореми 4.9 достатньо використати теорему 4.8 та аргументи згідно зі схемою доведення теореми 4.6 в [92]. З одного боку, для заданого $R>0$ і кожного фіксованого $z\in\gamma_R$ отримаємо, що

$$\ln\mu(tz,F)\ge(n_1(3\mu_\nu))^{\alpha}c_1(\nu),\ \nu=\nu(tz,F),$$

виконується для всіх $t>0$ таких, що $tz\notin E_1$, де множина $E_1\subset\gamma_+(F)$, за теоремою 4.8 така, що

$$V_{2p}(E\cap\gamma_+(F))\le C_p/2,\ c_1(\nu)\to+\infty,\ tz\to\infty$$

рівномірно в K (за твердженням 4.3). З іншого боку, маємо, що нерівність

$$\sum_{\mu_k > 3\mu_\nu} |a_n| \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z,\lambda_n)} \le \mu(tz, F)/c_2(\nu), \quad \nu = \nu(tz, F),$$

виконується для всіх $t > 0$ таких, що $tz \notin E_2$, де знову множина $E_2 \subset \gamma_+(F)$ за теоремою 4.8 така, що

$$V_{2p}(E_2 \cap \gamma_+(F)) \le C_p/2,\ c_2(\nu) \to +\infty,\ tz \to \infty$$

рівномірно в K (знову за твердженням 4.3).

Зауважимо, що $V_{2p}((E_1 \cup E_2) \cap \gamma_+(F)) \le C_p$. Отже, для всіх $tz \notin E = E_1 \cup E_2$ маємо

$$\mathfrak{M}(tz, F) \le \mu(tz, F)\Big(n(3\mu_\nu) + 1/c_2(\nu)\Big) \le$$
$$\le \mu(tz, F)\Big((\ln \mu(tz, F))^{1/\alpha}/c_1(\nu) + 1/c_2(\nu)\Big).$$

Тепер, щоб завершити доведення теореми 4.9, залишається застосувати твердження 4.3. У випадку $F \in \mathcal{D}_0$ теорема 4.9 доведена. Перехід до загального випадку очевидний. $\square$

Основні здобутки четвертого розділу:

1) для цілих функцій від багатьох комплексних змінних, заданих лакунарними рядами за однорідними поліномами, отримано точні аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга;
2) доведено аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками.

Результати четвертого розділу опубліковано в статтях [92, 112, 123], а також доповідалися на наукових семінарах.

РОЗДІЛ 5. АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ НУЛІВ ВИПАДКОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

5.1. Асимптичні властивості ймовірність відсутності нулів для випадкових цілих функцій

Нехай $\mathcal{E}$ — клас випадкових цілих функцій вигляду

$$f(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_nz^n, \tag{5.1}$$

де $a_n\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0\neq 0,\quad \varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0,\quad \#\{n\in\mathbb{N}\colon a_n\neq 0\}=+\infty;$$

$\varepsilon_n(\omega_1)=e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi,\pi)$, $\big(\xi_n(\omega_2)\big)\in\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$, тобто незалежних випадкових комплексних величин зі стандартним гаусовим розподілом у комплексній площині зі щільністю

$$p_{\xi_n}(z)=\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2},\ z\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

Метою цього підрозділу є дослідження асимптотичних властивостей

$$p_0(r)=\ln^-P\{\omega\colon f(z,\omega)\neq 0 \text{ в } r\mathbb{D}\}$$

при $r\to+\infty$ для випадкових цілих функцій $f\in\mathcal{E}$.

Нагадаємо, що як вже згадувалося у вступі, у випадку, якщо $K\subset\mathbb{C}$ — компакт такий, що $0\notin K$, то [141] з того, що $(\forall\omega)(\forall n\in\mathbb{N})\colon\ \eta_n(\omega)\in K$ випливає, що існує $r_0(K)<+\infty$ таке, що випадкова ціла функція

$$\psi(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\eta_n(\omega)z^n$$

з коефіцієнтами $a_n=(n!)^{-1/2}$ має нуль в крузі $r_0\mathbb{D}$. Тобто, у випадку $\eta_n(\omega)\equiv\varepsilon_n(\omega)$ маємо, що $P\{\omega\colon \psi(z,\omega)\neq 0 \text{ в } r\mathbb{D}\}=0$, бо $\{\omega\colon f(z,\omega)\neq 0 \text{ в } r\mathbb{D}\}=\varnothing$. І у цьому випадку, незважаючи на простий (зокрема, тому що $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r^{2n}=e^{r^2}$) спеціальний вигляд коефіцієнтів, предмет дослідження є повністю відсутнім, оскільки відповідь є тривіальною. Те ж саме, очевидно, маємо у випадку послідовності випадкових величин Радемахера. Тому, в літературі розглядається випадок $\eta_n(\omega)\equiv\xi_n(\omega)$, тобто, цілих гаусових випадкових функцій, як такий, що дозволяє розглядати степеневі ряди з коефіцієнтами загального вигляду. Найбільш змістовні результати, які істотно посилюють результати інших авторів, нам вдається отримати у випадку випадкових цілих функцій вигляду (5.1).

Висловимо обережне припущення, що у наших результатах стосовно цілих і аналітичних функцій вигляду (5.1), всі елементи послідовності $(\varepsilon_n(\omega))$ можна замінити на одну і ту ж сталу. Відзначимо також, що якщо $\eta_0(\omega) = 0$, то для даного ω ціла функція $\psi(0, \omega) = 0$ і, тому, апріорі потрібно припускати, що $\eta_0(\omega) \neq 0$ м.н.

Отже, перейдемо до викладу результатів даного розділу.

Для $r > 0$, $\delta \geq 0$ та $f \in \mathcal{E}$ позначимо

$$\mathcal{N}' = \{n\colon a_n = 0\}, \quad \mathcal{N}_\delta(r) = \{n\colon \ln(|a_n| r^n) > -\delta n\},$$
$$N_\delta(r) = \#\mathcal{N}_\delta(r), \quad \mathcal{N}(r) = \mathcal{N}_0(r), \quad N(r) = \#\mathcal{N}(r),$$
$$m_\delta(r) = \sum_{n \in \mathcal{N}_\delta(r)} n, \quad m(r) = m_0(r) = \sum_{n \in \mathcal{N}(r)} n,$$
$$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n\colon n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \nu_f(r) = \max\{n\colon \mu_f(r) = |a_n| r^n\},$$
$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| \leq r\}, \quad S_f^2(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$
$$s(r) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^+(|a_n| r^n) = 2\sum_{n \in \mathcal{N}(r)} \ln(|a_n| r^n).$$

Допоміжні твердження.

Лема 5.1 (Бореля-Неванлінни, [74], с. 90)**.** *Нехай $u(r)$ — неспадна неперервна функція на $[r_0; +\infty)$ така, що*

$$\lim_{r \to +\infty} u(r) = +\infty,$$

і $\varphi(u)$ — неперервна незростаюча додатна функція, визначена на $[u_0; +\infty)$ така, що

$$u_0 = u(r_0); \ \lim_{u \to +\infty} \varphi(u) = 0; \ \int\limits_{u_0}^{+\infty} \varphi(u) du < +\infty.$$

Тоді множина

$$E_1 = \{r \geq r_0\colon u\big(r + \varphi(u(r))\big) < u(r) + 1\}.$$

має скінченну міру.

Зауважимо, що

$$E_2 = \{r \geq r_0\colon u(r - \varphi(u(r))) > u(r) - 1\}$$

також має скінченну міру. Нехай $t = r + \varphi(u(r)) > r$. Оскільки $u(r)$ є неспадною неперервною функцією на $[r_0; +\infty)$ такою, що

$$\lim_{r \to +\infty} u(r) = +\infty,$$

і $\varphi(u)$ — неперервна незростаюча додатна функція, визначена на $[u_0; +\infty)$, то

$$t > r, \ u(t) \geq u(r), \ \varphi(u(t)) \leq \varphi(u(r)), \ t - \varphi(u(t)) \geq t - \varphi(u(r)),$$

$$u(t-\varphi(u(t))) \geq u(t-\varphi(u(r))).$$
$$u\big(r+\varphi(u(r))\big) \leq u(r)+1,\ u(t) \leq u(t-\varphi(u(r)))+1 \leq u(t-\varphi(u(t)))+1,$$
$$u(t-\varphi(u(t))) \geq u(t)-1.$$

Нам буде потрібний наступний елементарний наслідок цієї леми.

Лема 5.2. *Нехай $f \in \mathcal{E}$. Тоді існує множина $E \subset (1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що*

$$m(re^{\delta})\exp\{-2\sqrt{\ln m(r)}\} < em(r) < m(re^{-\delta})\exp\{2\sqrt{\ln m(r)}\}$$

для всіх $r \in (1;+\infty) \setminus E$, де $\delta = \frac{1}{2\ln m(r)}$.

Доведення. В лемі 5.1 можна вибрати $u_1(r) = \sqrt{\ln u(r)}$ і $\varphi(u) = \frac{1}{2u^2}$. Тоді

$$\sqrt{\ln u\Big(r+\varphi\Big(\sqrt{\ln u(r)}\Big)\Big)} < \sqrt{\ln u(r)}+1,$$
$$\ln u\Big(r+\frac{1}{2\ln u(r)}\Big) < \ln u(r)+2\sqrt{\ln u(r)}+1,$$
$$u\Big(r+\frac{1}{2\ln u(r)}\Big) < eu(r)\exp\Big\{2\sqrt{\ln u(r)}\Big\}.$$

Використаємо цю нерівність для функції $u(e^r)$. Тоді,

$$u\Big(e^r\exp\Big\{\frac{1}{2\ln u(e^r)}\Big\}\Big) = u\Big(\exp\Big\{r+\frac{1}{2\ln u(e^r)}\Big\}\Big) < eu(e^r)\exp\Big\{2\sqrt{\ln u(e^r)}\Big\}$$

і множина

$$E_3 = \Big\{r \geq r_0 \colon u\Big(e^r\exp\Big\{\frac{1}{2\ln u(e^r)}\Big\}\Big) < eu(e^r)\exp\Big\{2\sqrt{\ln u(e^r)}\Big\}\Big\}$$

має скінченну міру. Залишається вибрати $t = e^r$ і тоді множина

$$E_4 = \Big\{t \geq t_0 \colon u\Big(t\exp\Big\{\frac{1}{2\ln u(t)}\Big\}\Big) < eu(t)\exp\Big\{2\sqrt{\ln u(t)}\Big\}\Big\}$$

має скінченну логарифмічну міру.

Нехай $u_1(r) = \sqrt{\ln u(r)}$ і $\varphi(u) = \frac{1}{2u^2}$. Отже,

$$\sqrt{\ln u\Big(r-\varphi\Big(\sqrt{\ln u(r)}\Big)\Big)} > \sqrt{\ln u(r)}-1,$$
$$\ln u\Big(r-\frac{1}{2\ln u(r)}\Big) > \ln u(r)-2\sqrt{\ln u(r)}+1,$$
$$u\Big(r-\frac{1}{2\ln u(r)}\Big) < eu(r)\exp\Big\{-2\sqrt{\ln u(r)}\Big\}.$$

Тепер використовуємо цей результат для функції $u(e^r)$. Отже,

$$u\Big(e^r\exp\Big\{-\frac{1}{2\ln u(e^r)}\Big\}\Big) = u\Big(\exp\Big\{r-\frac{1}{2\ln u(e^r)}\Big\}\Big) > eu(e^r)\exp\Big\{-2\sqrt{\ln u(e^r)}\Big\}$$

і множина

$$E_5 = \Big\{ r \ge r_0 \colon u\Big(e^r \exp\Big\{ -\frac{1}{2\ln u(e^r)} \Big\} \Big) > eu(e^r) \exp\Big\{ -2\sqrt{\ln u(e^r)} \Big\} \Big\}$$

має скінченну міру. Нехай $t = e^r$ і тоді множина

$$E_6 = \Big\{ t \ge t_0 \colon u\Big(t \exp\Big\{ -\frac{1}{2\ln u(t)} \Big\} \Big) > eu(t) \exp\Big\{ -2\sqrt{\ln u(t)} \Big\} \Big\}$$

має скінченну логарифмічну міру. □

Лема 5.3. *Нехай $f \in \mathcal{E}$ та $\varepsilon > 0$. Існує множина $E \subset (1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що*

$$N(r) < s^{1/2}(r) \exp\{(1+\varepsilon)\sqrt{\ln s(r)}\} \tag{5.2}$$

для всіх $r \in (1; +\infty) \setminus E$.

Доведення. Зауважимо, що

$$N_{-\delta}(r) = \#\{n \colon |a_n| r^n \ge e^{\delta n}\} = \#\{n \colon |a_n| (re^{-\delta})^n \ge 1\} = N(re^{-\delta}).$$

Якщо $\mathcal{N}(r) = \{n_k \colon 1 \le k \le N(r)\}$, де $n_k < n_{k+1}$ $(1 \le k \le N(r) - 1)$, то $n_k \ge k - 1$ $(1 \le k \le N(r))$ і

$$m(r) \ge \sum_{k=0}^{N(r)-1} k = \frac{(N(r)-1)N(r)}{2} > \frac{N^2(r)}{e}$$

для всіх $r > r_0$, де r_0 таке, що $N(r_0) > 4$. Отже, за лемою 5.2 отримуємо

$$\frac{s(r)}{2} = \sum_{n \in \mathcal{N}(r)} \ln(|a_n| r^n) \ge \sum_{n \in \mathcal{N}_{-\delta}(r)} \ln(|a_n| r^n) \ge \sum_{n \in \mathcal{N}_{-\delta}(r)} n\delta =$$
$$= \delta m(re^{-\delta}) > \frac{e}{2\ln m(r)} m(r) \exp\{-2\sqrt{\ln m(r)}\}$$

для $r \in (r_0; +\infty) \setminus E$. Тоді

$$\ln s(r) > 1 + \ln m(r) - 2\sqrt{\ln m(r)} - \ln\ln m(r)$$

і для $r \in (r_2; +\infty) \setminus E$, де r_2 є достатньо великим, ми отримуємо $\ln m(r) < 2\ln s(r)$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$s(r) > em(r) \exp\{-2\sqrt{\ln m(r)} - \ln\ln m(r)\} >$$
$$> e\frac{N^2(r)}{e} \exp\{-2\sqrt{(1+\varepsilon)\ln s(r) - \ln((1+\varepsilon)\ln s(r))}\} >$$
$$> N^2(r) \exp\{-(2+2\varepsilon)\sqrt{\ln s(r)}\}$$

при $r \to +\infty$ поза деякою множиною скінченної логарифмічної міри. □

Показник $1/2$ у нерівності (5.2) не можна замінити меншим числом. Це випливає з такої леми.

Лема 5.4. *Існують $f \in \mathcal{E}$ і множина $E \subset (1;+\infty)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$N(r) > \frac{s^{1/2}(r)}{\ln^{5/2} s(r)}$$

для всіх $r \in (1;+\infty) \setminus E$.

Доведення. Розглянемо таку цілу функцію

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}.$$

Функція $y(n) = \ln a_n = -\frac{n}{2}\ln(\frac{n}{2})$ є ввігнутою, а послідовність (a_n) є логарифмічно-ввігнутою ([141, 194]). Оскільки $m!e^m > m^m$ $(m \geq 1)$, то

$$M_f(r) > 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{r^{2m}}{m^m} > 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{r^{2m}}{m!e^m} = \exp\Big\{\frac{r^2}{e}\Big\}, \quad \ln M_f(r) > \frac{r^2}{e}.$$

За теоремою Вімана-Валірона існує множина E_1 скінченної логарифмічної міри така, що

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r)$$

для всіх $r \in (1;+\infty) \setminus E_1$. Тому, для всіх $r \in (1;+\infty) \setminus E_1$ маємо

$$\ln \mu_f(r) + \ln\ln \mu_f(r) > \ln M_f(r) > r^2/e, \ \ln \mu_f(r) > r^2/2e,$$

$$\frac{r^2}{2e} < \ln \mu_f(r) = \ln f_\nu + \nu_f(r)\ln r, \ \nu_f(r) > \frac{1}{\ln r}\Big(\frac{r^2}{2e} - \ln f_\nu\Big) > r, \ r \to +\infty.$$

Для довільної логарифмічно ввігнутої послідовності $\{a_n\}$ (див. [141]) виконується нерівність $s(r) < 2(N(r)+1)\ln \mu_f(r)$. Отже, поза деякою множиною E скінченної логарифмічної міри отримаємо

$$s(r) < 2(N(r)+1)\ln \mu_f(r) < \ln^2 \mu_f(r)(\ln\ln \mu_f(r))^2 =$$

$$= \ln^3 r \frac{\ln^2 \mu_f(r)}{\ln^2 r} \frac{(\ln\ln \mu_f(r))^2}{\ln r} <$$

$$< \ln^3 r \nu_f^2(r) \ln^2 \nu_f(r) < \nu_f^2(r) \ln^5 \nu_f(r) < N^2(r) \ln^5 N(r) < N^2(r) \ln^5 s(r).$$

Отже, для всіх $r \in (1;+\infty) \setminus E_1$

$$N(r) > \sqrt{\frac{s(r)}{\ln^5 s(r)}}, \quad r \to +\infty.$$

$\square$

Нам також буде потрібна наступна лема.

Лема 5.5. *Нехай $\big\{\eta_n(\omega)\big\}$ — послідовність незалежних невід'ємних однаково розподілених випадкових величин таких, що*

$$\mathbf{E}\eta_n < +\infty, \ \mathbf{E}\Big(\frac{1}{\eta_n}\Big) < +\infty, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$P\Big\{\omega \colon (\exists N^*(\omega))(\forall n > N^*(\omega)) \ \Big[\frac{1}{n} \leq \eta_n(\omega) \leq n\Big]\Big\} = 1.$$

Доведення. Нехай $F_\eta(t) = F_{\eta_n}(t)$ — функція розподілу випадкової величини η_n, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Позначимо $B_m = \{\omega\colon |\eta_m(w)| \geq m\},\ m \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$\sum_{m=1}^{+\infty} P\{\omega\colon |\eta_m(w)| \geq m\} = \sum_{m=1}^{+\infty} \int\limits_{|t|\geq m} dF_{|\eta|}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{s=m}^{+\infty} \int\limits_{|t|\in[s,s+1)} dF_{|\eta|}(t) =$$

$$= \sum_{s=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{s} \int\limits_{|t|\in[s,s+1)} dF_{|\eta|}(t) = \sum_{s=1}^{+\infty} s \int\limits_{|t|\in[s,s+1)} dF_{|\eta|}(t) \leq$$

$$\leq \sum_{s=1}^{+\infty} \int\limits_{|t|\in[s,s+1)} |t| dF_{|\eta|}(t) \leq \mathbf{E}|\eta| < +\infty.$$

Отже,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} P(B_m) < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантеллі з ймовірністю, що дорівнює 1, лише скінченна кількість подій B_n може відбутися. Тобто існує подія A_1 така, що

$$P(A_1) = P\Big\{\omega\colon (\exists N_1^*(\omega))(\forall n > N_1^*(\omega))\ \Big[|\eta_n(\omega)| \leq n\Big]\Big\} = 1.$$

Оскільки $\mathbf{E}(\frac{1}{|\eta|}) < +\infty$, аналогічно отримуємо для випадкової величини $\frac{1}{|\eta(\omega)|}$

$$P(A_2) = P\Big\{\omega\colon (\exists N_2^*(\omega))(\forall n > N_2^*(\omega))\ \Big[\frac{1}{|\eta_n(\omega)|} \leq n\Big]\Big\} =$$

$$= P\Big\{\omega\colon (\exists N_2^*(\omega))(\forall n > N_2^*(\omega))\ \Big[|\eta_n(\omega)| \geq \frac{1}{n}\Big]\Big\} = 1.$$

Отож,

$$P(A_1 \cap A_2) = P\Big\{\omega\colon (\exists N^*(\omega))(\forall n > N^*(\omega))\ \Big[\frac{1}{n} \leq |\eta_n(\omega)| \leq n\Big]\Big\} = 1.$$

□

Верхня і нижня оцінки для $p_0(r)$.

Теорема 5.1. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f \in \mathcal{E}$. Тоді існує множина $E \subset (1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри така, що*

$$p_0(r) \leq s(r) + N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{\ln N(r)}\}$$

для всіх $r \in (1; +\infty) \setminus E$.

Доведення. Для фіксованого r розглянемо подію $A = \bigcap_{i=1}^4 A_i$, де

$$A_1 = \Big\{\omega\colon |\xi_0(\omega_2)| \geq \frac{2eN^{1/3}(r)\exp\{2\sqrt{\ln N(r)}\}}{|a_0|}\Big\},$$

$$A_2=\Big\{\omega\colon (\forall n\in\mathcal{N}(r)\setminus\{0\})\Big[|\xi_n(\omega_2)|\le\frac{1}{|a_n|r^nN^{2/3}(r)}\Big]\Big\},$$
$$A_3=\Big\{\omega\colon (\forall n\in\mathcal{N}_\delta(r)\setminus(\mathcal{N}(r)\cup\{0\}))\Big[|\xi_n(\omega_2)|\le\frac{1}{N^{2/3}(r)}\Big]\Big\},$$
$$A_4=\Big\{\omega\colon (\forall n\notin\mathcal{N}_\delta(r)\cup\mathcal{N}'\cup\{0\})\Big[|\xi_n(\omega_2)|\le n\Big]\Big\},\ \delta=\frac{1}{2\ln N(r)}.$$

Якщо відбувається подія A, то для $r\notin E$ маємо

$$|\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)a_0|-\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_nz^n\right|\ge 2eN^{1/3}(r)\exp\{2\sqrt{\ln N(r)}\}-$$
$$-\sum_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{|a_n|r^n}{|a_n|r^nN^{2/3}(r)}-\sum_{n\in\mathcal{N}_\delta(r)\setminus\mathcal{N}(r)}\frac{|a_n|r^n}{N^{2/3}(r)}-\sum_{n\notin\mathcal{N}_\delta(r)\cup\mathcal{N}'}ne^{-n\delta}>$$
$$>2eN^{1/3}(r)\exp\{2\sqrt{\ln N(r)}\}-\sum_{n\in\mathcal{N}_\delta(r)}\frac{1}{N^{2/3}(r)}-\int\limits_1^{+\infty}xe^{-\delta x}dx>$$
$$>2eN^{1/3}(r)\exp\{2\sqrt{\ln N(r)}\}-N^{1/3}(r)-$$
$$-eN^{1/3}(r)\exp\{2\sqrt{\ln N(r)}\}-8\ln^2N(r)>0$$

при $r\to+\infty$, бо

$$\int\limits_1^{+\infty}xe^{-\delta x}dx=\frac{e^{-\delta}}{\delta^2}(\delta+1)<\frac{2}{\delta^2}=8\ln^2N(r).$$

Отже, ми довели, що якщо відбувається подія A, то для $z\in r\mathbb{D}$ виконується нерівність

$$|\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)a_0|>\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_nr^n\right|.$$

Тоді якщо подія A відбувається, то функція $f(z,\omega)$ не має нулів в $r\mathbb{D}$. Тепер знайдемо нижню оцінку для ймовірності події A.

$$P(A_1)=\exp\Big\{-\frac{4e^2N^{2/3}(r)\exp\{4\sqrt{\ln N(r)}\}}{|a_0|^2}\Big\},$$
$$P(A_2)\ge\prod_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{1}{2|a_n|^2r^{2n}N^{4/3}(r)}=\prod_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{1}{2|a_n|^2r^{2n}}\times$$
$$\times\exp\{-N(r)\ln(N^{4/3}(r))\}=\exp\Big\{-s(r)-\frac{4}{3}N(r)\ln N(r)-N(r)\ln 2\Big\},$$
$$P(A_3)\ge\prod_{n\in\mathcal{N}(re^\delta)}\frac{1}{2N^{4/3}(r)}\ge\exp\Big\{-N(re^\delta)\ln(2N^{4/3}(r))\Big\}\ge$$
$$\ge\exp\Big\{-eN(r)\exp\{2\sqrt{N(r)}\}\ln(2N^{4/3}(r))\Big\},$$
$$P(A_4)=P\{\omega\colon (\forall n\notin\mathcal{N}_\delta(r)\cup\mathcal{N}'\cup\{0\})[|\xi_n(\omega_2)|<n]\}\ge$$

$$\geq 1 - \sum_{n \notin \mathcal{N}_\delta(r) \cup \mathcal{N}' \cup \{0\}} e^{-n^2} > \frac{1}{2},\ r \to +\infty\ (r \notin E).$$

З означення $\ln^- x$ і незалежності подій $A_j,\ j \in \{1,2,3,4\}$ випливає, що

$$\ln^- P(A) = \sum_{n=1}^{4} \ln^- P(A_n).$$

Тому з $A \subset \{\omega\colon n(r,\omega) = 0\}$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для кожного $r \in [r_0; +\infty) \setminus E$ виконується нерівність

$$p_0(r) \leq \ln^- P(A) \leq$$
$$\leq \ln 2 + \frac{4e^2 N^{2/3}(r) \exp\{4\sqrt{\ln N(r)}\}}{|a_0|^2} + s(r) + 2N(r)\ln N(r) + N(r)\ln 2 +$$
$$+ eN(r)\exp\{2\sqrt{N(r)}\}\ln(2N^{4/3}(r)) \leq s(r) + N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{N(r)}\}.$$

□

Розглянемо випадкову цілу функцію вигляду

$$g(z,\omega_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\theta_n(\omega_1)} a_n z^n, \tag{5.3}$$

де $a_0 \neq 0$ і незалежні випадкові величини $\theta_n(\omega_1)$ рівномірно розподілені на $[-\pi,\pi)$, було розглянуто в [132]. Для таких функцій доведено наступні твердження.

Теорема 5.2 ([132])**.** *Нехай $g(z,\omega_1)$ — випадкова ціла функція вигляду (5.3). Тоді для $r > r_0$ і всіх ω_1 маємо*

$$N_g(r,\omega_1) \leq \frac{1}{2e} + \ln S_g(r),$$

де

$$N_g(r,\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|g(re^{i\alpha},\omega_1)|d\alpha - \ln|a_0|.$$

Теорема 5.3 ([132])**.** *Існує абсолютна стала $C > 0$ така, що для функції $g(z,\omega_1)$ вигляду (5.3) P_1 майже напевно*

$$\ln S_g(r) \leq N_g(r,\omega_1) + C\ln N_g(r,\omega_1),\ r_0(\omega_1) \leq r < +\infty.$$

Нехай $P = P_1 \times P_2$ — прямий добуток ймовірнісних мір P_1 і P_2, визначених на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Тут $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ — мінімальна σ-алгебра, яка містить усі $A_1 \times A_2$ такі, що $A_1 \in \mathcal{A}_1$ та $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Нехай $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}, (\theta_n)$ — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi,\pi)$, заданих на $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, $\xi_n(\omega_2) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ заданих на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$, де $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ — два ймовірнісні простори.

Наслідок 5.1. *Нехай $(\zeta_n(\omega_2))$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин така, що для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$ щільність розподілу випадкової величини $\eta = \zeta_n$ можна подати у вигляді $p_\eta(z) = q(|z|)$ і $\mathbf{E}|\eta| < +\infty$, $\mathbf{E}(\frac{1}{|\eta|}) < +\infty$. Існують абсолютна стала $C > 0$ і множина $B \in \mathcal{A}$: $P(B) = 1$ такі, що для функцій*

$$f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\zeta_n(\omega_2)a_n z^n, \ a_0 \neq 0$$

та для всіх $\omega \in B$ і всіх $r \in [r_0(\omega); +\infty)$ маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\alpha}, \omega)|d\alpha - \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\zeta_0(\omega_2)| \geq$$
$$\geq \ln S_f(r, \omega_2) - (C+1)\ln\ln S_f(r, \omega_2).$$

Зауважимо, що якщо функція щільності $\zeta_n(\omega_1)$ має вигляд $p_{\zeta_n}(z) = q(|z|)$, $n \in \mathbb{N}$, то послідовність випадкових величин $\arg\zeta_n(\omega_1)$ рівномірно розподілена на $[-\pi, \pi)$. Справді, для будь-яких $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi)$: $\alpha < \beta$ отримаємо

$$P_1(\omega_1 \colon \zeta_n(\omega_1) \in \mathbb{C}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} rq(r)dr = 2\pi \int\limits_0^{+\infty} rq(r)dr = 1,$$

$$P_1(\omega_1 \colon \arg\zeta_n(\omega_1) \in (\alpha, \beta)) = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_0^{+\infty} rq(r)dr = \frac{\beta - \alpha}{2\pi}.$$

Випадкові величини $\xi_n(\omega_1)$ задовольняють цю умову, бо

$$p_{\xi_k}(z) = q(|z|) = \frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}, \ z \in \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{Z}_+$$

і маємо таке твердження для функцій вигляду (5.1).

Наслідок 5.2. *Існують абсолютна стала $C > 0$ і множина $B \in \mathcal{A}$: $P(B) = 1$ такі, що для $f \in \mathcal{E}$ та для всіх $\omega \in B$ і всіх $r \in [r_0(\omega); +\infty)$ виконується нерівність*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta}, \omega)|d\theta - \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| \geq$$
$$\geq \ln S_f(r, \omega_2) - (C+1)\ln\ln S_f(r, \omega_2).$$

Доведення наслідку 5.1. З теореми 5.2 випливає, що

$$\ln N_g(r, \omega_1) \leq 1 + \ln\ln S_g(r)$$

і за теоремою 5.3 маємо ω_1-майже напевно

$$N_g(r, \omega_1) \geq \ln S_g(r) - C\ln N_g(r, \omega_1) \geq \ln S_g(r) - (C+1)\ln\ln S_g(r),$$

для $r_0(\omega_1) \le r < +\infty$. Тому,

$$P_1\{\omega\colon (\exists r_0(\omega_1))(\forall r > r_0(\omega_1))\ [N_g(r,\omega_1) \ge \ln S_g(r) - (C+1)\ln\ln S_g(r)]\} = 1.$$

Розглянемо випадкову функцію $f(z,\omega_1,\omega_2)$ вигляду (5.1). Нехай

$$A_f = \{(\omega_1,\omega_2)\colon (\exists r_0(\omega_1,\omega_2))(\forall r > r_0(\omega_1,\omega_2))$$
$$[N_f(r,\omega_1,\omega_2) \ge \ln S_f(r,\omega_2) - (C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)]\},$$

де

$$S_f^2(r,\omega_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n(\omega_1)|^2 |\zeta_n(\omega_2)|^2 |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |\zeta_n(\omega_2)|^2 |a_n|^2 r^{2n}.$$

Розглянемо події

$$F = \{\omega_2\colon (\forall n \in \mathbb{N})\ [\zeta_n(\omega_2) \ne 0]\},\ H = \Big\{\omega_2\colon \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||\zeta_n(\omega_2)|} = 0\Big\}.$$

Тоді за лемою 5.5 для $\eta_n = |\zeta_n|$ маємо $P_2(H) = 1$. Оскільки $\mathbf{E}(\frac{1}{\zeta_n}) < +\infty$, то ймовірність події F

$$1 \ge P_2(F) \ge 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P_2\{\omega_2\colon \zeta_n(\omega_2) = 0\} = 1.$$

Позначимо $G = F \cap H$. Отже, $P_2(G) = 1$. Тоді для фіксованого $\omega_2^0 \in G$

$$P_1(A_f(\omega_2^0)) := P_1\{\omega_1\colon (\exists r_0(\omega_1,\omega_2^0))(\forall r > r_0(\omega_1,\omega_2^0))$$
$$[N_f(r,\omega_1,\omega_2^0) \ge \ln S_f(r,\omega_2^0) - (C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2^0)]\} = 1.$$

Залишається скористатися теоремою Фубіні

$$P(A_f) = \int\limits_{\Omega_2}\Bigg(\int\limits_{A_f(\omega_2)} dP_1(\omega_1)\Bigg) dP_2(\omega_2) \ge \int\limits_{G}\Bigg(\int\limits_{A_f(\omega_2)} dP_1(\omega_1)\Bigg) dP_2(\omega_2) =$$
$$= \int\limits_{G} dP_2(\omega_2) = P_2(G) = 1.$$

$\square$

Теорема 5.4. *Нехай $f \in \mathcal{E}$. Тоді P-майже напевно існує $r_0(\omega) > 0$ таке, що для всіх $r \in (r_0(\omega); +\infty)$ маємо*

$$p_0(r) \ge s(r) + N(r)\ln N(r) - 4N(r).$$

Доведення теореми 5.4. За формулою Єнсена майже напевно

$$0 = \int\limits_0^r \frac{n(t,\omega)}{t} dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta},\omega)| d\theta - \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|,$$

$$\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta},\omega)| d\theta.$$

Тому,

$$P\{\omega\colon n(r,\omega)=0\}\le P\biggl\{\omega\colon\ \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\biggr\}.$$

Визначимо

$$A=\biggl\{\omega\colon\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\ge$$

$$\ge\ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\biggr\},$$

$$G_1=\{\omega\colon\ \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\ge\ln\gamma(\omega_2)\},$$

$$G_2=G_2(r)=\biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\le\ln\gamma(\omega_2)\biggr\},$$

де $\gamma(\omega_2)>1$. З наслідку 5.2 випливає, що $P(A)=1$.

Тоді для $r>r_0(\omega)$

$$\overline{G_1}\cap\overline{G_2}=\biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta>\ln\gamma(\omega_2)>\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\biggr\},$$

$$\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\subset\biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\ne\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\biggr\},$$

$$G_1\cup G_2=\overline{\overline{G_1}\cap\overline{G_2}}\supset\biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta=\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\biggr\}.$$

Тому, для $r>r_0(\omega)$

$$P\{\omega\colon n(r,\omega)=0\}\le P(G_1\cup G_2)\le P(G_1)+P(G_2),\ r\to+\infty.$$

Нехай $\gamma(\omega_2)=C_1\cdot|a_0|\cdot|\xi_0(\omega_2)|,\ C_1>1$. Тоді ми можемо обчислити ймовірність події G_1

$$P(G_1)=P\Bigl\{\omega\colon\ \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\ge\ln C_1+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Bigr\}=$$

$$=P\Bigl\{\omega\colon\ \ln C_1\le 0\Bigr\}=0$$

і оцінити ймовірність події G_2 при $r>r_0(\omega)$

$$P(G_2)=P(G_2\cap A)+P(G_2\cap\overline{A})\le P(G_2\cap A)+P(\overline{A})=P(G_2\cap A)=$$

$$=P\biggl\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)+$$

$$+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta \le \ln\gamma(r,\omega)\Big\}=$$

$$= P\Big\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| \le$$

$$\le \ln C_1+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Big\}=$$

$$= P\Big\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)\le \ln C_1\Big\}\le$$

$$\le P\Big\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)\le 2\ln C_1\Big\}= P\Big\{\omega\colon S_f(r,\omega_2)\le C_1^2\Big\}=$$

$$\le P\Big\{\omega\colon\ \sum_{n\in\mathcal{N}(r)}|\xi_n(\omega_2)|^2|a_n|^2r^{2n}\le C_1^4\Big\},\ r\to+\infty.$$

Функція розподілу випадкової величини $|\xi_n(\omega_2)|$

$$F_{|\xi_n|}(x)=1-\exp\{-x^2\},\ F_{|\xi_n|^2}(x)=F_{|\xi_n|}(\sqrt{x})=1-\exp\{-x\},$$
$$F_{|\xi_n|^2|a_n|^2r^{2n}}(x)=F_{|\xi_n|^2}\Big(\frac{x}{|a_n|^2r^{2n}}\Big)=1-\exp\Big\{-\frac{x}{|a_n|^2r^{2n}}\Big\}$$

для $n\notin\mathbb{N}$: $a_n\ne 0$ і $x\in\mathbb{R}_+$. Нехай

$$\eta(\omega_2)=(|\xi_1(\omega_2)|a_1r^{j_1},\dots,|\xi_{j_k}(\omega_2)|a_{j_k}r^{j_k}),\ j_k\in\mathcal{N}(r).$$

Тоді щільність випадкового вектора $\eta(\omega_2)$

$$p_\eta(x)=\begin{cases}\prod\limits_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{1}{|a_n|^2r^{2n}}\exp\Big\{-\frac{x_n}{|a_n|^2r^{2n}}\Big\}, & x\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{N}(r)};\\ 0, & x\notin\mathbb{R}_+^{\mathcal{N}(r)}.\end{cases}$$

Отже, для $r>r_0(\omega)$ отримуємо

$$P\Bigg\{\omega\colon\ \sum_{n\in\mathcal{N}(r)}|\xi_n(\omega_2)|^2|a_n|^2r^{2n}\le C_1^4\Bigg\}=P\{\omega\colon\eta(\omega_2)\in W(r)\}=$$

$$=\prod_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{1}{|a_n|^2r^{2n}}\cdot\int\cdots\int\limits_{W(r)}\prod_{n\in\mathcal{N}(r)}\exp\Big\{-\frac{x_n}{|a_n|^2r^{2n}}\Big\}\prod_{j=1}^{N(r)}dx_j\le$$

$$\le\exp(-s(r))\cdot\mathrm{meas}_{N(r)}W(r),\tag{5.4}$$

де

$$W(r)=\Bigg\{x\in\mathbb{R}_+^{N(r)}\colon\ \sum_{n\in\mathcal{N}(r)}x_n\le C_1^4\Bigg\}.$$

Для $C>0$ маємо

$$\mathrm{meas}_n\Bigg\{x\in\mathbb{R}_+^n\colon\ \sum_{i=1}^n x_i\le C\Bigg\}=\frac{C^n}{n!}.$$

З цієї рівності і з формули Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \cdot \exp\Big\{-\frac{\theta_n}{12n}\Big\},\ \theta_n \in [0;1],\ n \in \mathbb{N},$$

випливає, що

$$\ln\Bigg(\mathrm{meas}_{N(r)} W(r)\Bigg) \le -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln N(r) - N(r)\ln N(r) + \frac{1}{12N(r)} +$$
$$+ N(r) + 4N(r)\ln C_1 \le -N(r)(\ln N(r) - 1 - 4\ln C_1).$$

Виберемо $C_1 = 2$. Врахувавши (5.4), отримаємо

$$p_0(r) \ge s(r) + N(r)\ln N(r) - 4N(r),$$

для $r > r_0(\omega)$. □

Використовуючи лему 5.3 з теорем 5.1 і 5.4, випливає таке твердження.

Теорема 5.5. *Нехай* $\varepsilon > 0$, *і* $f \in \mathcal{E}$. *Тоді існують множина* $E \subset (1;+\infty)$ *скінченної логарифмічної міри та* P*-майже напевно* $r_0(\omega) > 0$ *такі, що для всіх* $r \in (r_0(\omega);+\infty) \setminus E$ *виконується нерівність*

$$(1-\varepsilon)N(r)\ln N(r) \le p_0(r) - s(r) \le N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{\ln N(r)}\}, \tag{5.5}$$

а саме,

$$0 \le \varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)},\ \varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} \le \frac{1}{2} \tag{5.6}$$

та

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

Доведення. З теорем 5.1 і 5.4 випливає нерівність (5.5). Також з (5.5) отримаємо для $r \in (r_0(\omega);+\infty) \setminus E$

$$\frac{-\ln 2 + \ln N(r) + \ln\ln N(r)}{\ln N(r)} \le \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} \le \frac{\ln N(r) + 3\sqrt{\ln N(r)}}{\ln N(r)},$$
$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

За лемою 5.3 одержимо

$$\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = \varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} \cdot \frac{N(r)}{s(r)} = \varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{N(r)}{s(r)} \le \frac{1}{2}.$$

Оскільки $N(r)$ і $s(r)$ є невід'ємними функціями, то

$$\varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = \varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} \cdot \frac{N(r)}{s(r)} = \varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{N(r)}{s(r)} \ge 0.$$

□

Приклади на точність асимптотичних оцінок для випадкових цілих функцій

Теорема 5.6. *Існують $f \in \mathcal{E}$ та множина E скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

Доведення. Розглянемо цілу функцію

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}.$$

Для цієї цілої функції та $r \in (r_0(\omega); +\infty) \setminus E$ за лемою 5.4

$$\frac{\sqrt{s(r)}}{\ln^3 s(r)} < N(r) < \sqrt{s(r)}\exp\{(1+\varepsilon)\sqrt{\ln s(r)}\},\ \lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln N(r)}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

За теоремою 5.5 маємо для $r \in (r_0(\omega); +\infty) \setminus E$

$$\frac{-\ln 2 + \ln N(r) + \ln\ln N(r)}{\ln s(r)} \le \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} \le \frac{\ln N(r) + 3\sqrt{\ln N(r)}}{\ln s(r)},$$

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln N(r)}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

□

Теорема 5.7. *Існують $f \in \mathcal{E}$ і множина E скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = 0.$$

Доведення. Розглянемо цілі функції

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}, \quad h(z) = 1 + \sum_{n\in\mathcal{N}^*} \frac{z^n}{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}},$$

де $\mathcal{N}^* = \{n\colon n = [e^k]+1$ для деякого $k \in \mathbb{Z}_+\}$. Тут $[e^k]$ — ціла частина дійсного числа e^k. Позначимо

$$\mathcal{N}_f(r) = \{n \in \mathbb{Z}_+\colon\ \ln(|a_n|r^n) > 0\} \setminus \{0\},\ \mathcal{N}_h(r) = \{n \in \mathcal{N}^*\colon\ \ln(|a_n|r^n) > 0\},$$

$$s_f(r) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}_f(r)} \ln(|a_n|r^n),\ s_h(r) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}_h(r)} \ln(|a_n|r^n),\ a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{n}{2}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що послідовність $\{(n/2)^{-n/2}\}$ є логарифмічно ввігнутою і тоді

$$\mathcal{N}_f(r) = \{1, \dots, N_f(r)\}.$$

З означення $N_h(r)$ випливає, що $N_h(r) \le 2\ln N_f(r)$, $r \to +\infty$. Для $r \in (r_0; +\infty) \setminus E$ маємо

$$N_h(r) \le 2\ln N_f(r) \le 2\ln(\ln \mu_f(r) \ln^2(\ln \mu_f(r))) < 4\ln\ln \mu_f(r).$$

Тоді,

$$\min\{n \in \mathcal{N}' \colon n > \nu_h(r)\} \le [e\nu_h(r)] + 1 < (e+1)\nu_h(r).$$

Зафіксуємо $r > 0$. Розглянемо функцію

$$y(t) = \ln(a(t)r^t) = -\frac{t}{2}\ln\frac{t}{2} + t\ln r$$

таку, що $a(n) = a_n$. Графік функції $y(t)$ проходить через точки $(0;0)$ і $(\nu_h(r); \ln \mu_h(r))$. У випадку коли $\nu_h(r) \le \nu_f(r)$ з ввігнутості функції $y(t)$ випливає, що точка $(\nu_f(r); \ln \mu_f(r))$ належить трикутнику з вершинами

$$(\nu_h(r); \ln \mu_h(r)),\ ((e+1)\nu_h(r); \ln \mu_h(r)) \text{ та } ((e+1)\nu_h(r); (e+1)\ln \mu_h(r)).$$

Тоді

$$\ln \mu_f(r) \le (e+1)\ln \mu_h(r),\ s_h(r) \ge 2\ln \mu_h(r) \ge \frac{2}{e+1}\ln \mu_f(r).$$

Якщо ж $\nu_h(r) > \nu_f(r)$, то позначимо

$$\nu_h^*(r) = \min\{n < \nu_f(r) \colon n \in \mathcal{N}^*\},\ \mu_h^*(r) = a_{\nu^*} r^{\nu^*}.$$

З ввігнутості функції $y(t)$ випливає, що точка $(\nu_f(r); \ln \mu_f(r))$ належить трикутнику з вершинами

$$(\nu_h^*(r); \ln \mu_h^*(r)),\ ((e+1)\nu_h^*(r); \ln \mu_h^*(r)) \text{ та } ((e+1)\nu_h^*(r); (e+1)\ln \mu_h^*(r)).$$

Тоді

$$\ln \mu_f(r) \le (e+1)\ln \mu_h^*(r) \le (e+1)\ln \mu_h(r),\ s_h(r) \ge 2\ln \mu_h(r) \ge \frac{2}{e+1}\ln \mu_f(r).$$

Отже,

$$s_h(r) \ge \frac{2}{e+1}\ln \mu_f(r).$$

Для функції $h(z)$ отримаємо

$$0 \le \lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s_h(r))}{\ln s_h(r)} = \lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln N_h(r)}{\ln s_h(r)} \le \lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln(4\ln\ln \mu_f(r))}{\ln(\frac{2}{e+1}\ln \mu_f(r))} = 0.$$

$\square$

Відкриті проблеми. Нехай $\varepsilon \in (0; 1/2)$. Зауважимо, що для випадкової цілої функції вигляду

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n. \tag{5.7}$$

$P_0(r) = P\{\omega \colon n_f(r,\omega) = 0\}$, $p_0(r) = \ln^- P_0(r)$, маємо ([144])

$$p_0(r) = s(r) + O((s(r))^{1/2+\varepsilon}),\ r \to +\infty,\ r \notin E.$$

Тут E — виняткова множина скінченної логарифмічної міри. Чи є оптимальним степінь $1/2$ в попередній нерівності?

Гіпотеза. *Нехай $\varepsilon > 0$ і f — випадкова ціла функція вигляду (5.7) така, що $a_0 \neq 0$. Тоді P-майже напевно існують множина E скінченної логарифмічної міри та $r_0(\omega) > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0(\omega); +\infty) \setminus E$ виконується нерівність*

$$(1-\varepsilon)N(r)\ln N(r) \leq p_0(r) - s(r) \leq N(r)\exp\{(2+\varepsilon)\sqrt{\ln N(r)}\},$$

а саме,

$$0 \leq \varliminf_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)}, \ \varlimsup_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} \leq \frac{1}{2}$$

та

$$\lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

5.2. Ймовірність відсутності нулів для випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі

Розглянемо випадкові аналітичні функції вигляду

$$f(z,\omega) = f(z,\omega_1,\omega_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_n z^n. \tag{5.8}$$

Тут $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi,\pi)$, $\big(\xi_n(\omega_2)\big) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ і $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$a_0 \neq 0, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \sup\{|a_n|\colon n \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Позначимо клас таких випадкових аналітичних функцій через $\mathcal{A}$.

Дослідимо асимптотичні властивості

$$p_0(r) = \ln^- P\{\omega\colon f(z,\omega) \neq 0\}$$

при $r \uparrow 1$ для випадкових аналітичних функцій $f \in \mathcal{A}$.

Позначимо

$$\mathcal{N}(r) = \{n\colon \ln(|a_n|r^n) > 0\}, \quad \exp_2\{x\} = e^{e^x}, \quad N(r) = \#\mathcal{N}(r),$$
$$\mathcal{N}_1(r) = \{n\colon \ln(|a_n|r_1^n) > 0\}, \qquad N_1(r) = \#\mathcal{N}_1(r),$$
$$r_1 = 1-(1-r)\exp\Big\{-\frac{1}{\ln^2 N(r)}\Big\}, \ s(r) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}(r)} \ln(|a_n|r^n) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^+(|a_n|r^n),$$
$$\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n\colon n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \nu_f(r) = \max\{n\colon \mu_f(r) = |a_n|r^n\},$$
$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| \leq r\}, \quad S_f^2(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Лема 5.6 ([133]). *Нехай $r_0 \in [0;1)$, $u(r)$ — неспадна необмежена функція на $[r_0;1)$, $x_0 = u(r_0)$. Крім того, функція $\varphi(u)$ є додатною неперервною зростаючою до $+\infty$ на $[x_0;+\infty)$ функцією, визначеною на $[u_0;+\infty)$ така, що*

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} < +\infty.$$

Тоді для всіх $r \geq r_0$ зовні множини E скінченної логарифмічної міри ($\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$) маємо

$$u\Big(1-(1-r)\exp\Big\{-\frac{1}{\varphi(\ln u(r))}\Big\}\Big) < eu(r).$$

Зауважимо, що якщо $f \in \mathcal{A}$, то

$$\lim_{r\uparrow 1} N(r) = +\infty$$

і можна вибрати в лемі 5.6 $u(r) = N(r)$ та $\varphi(x) = x^2,\ x \to +\infty$. Тоді отримаємо таке твердження.

Лема 5.7. *Нехай $f \in \mathcal{A}$. Існує множина $E \subset (0;1)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0;1)\backslash E$ виконується нерівність*

$$N_1(r) < eN(r).$$

Лема 5.8. *Нехай $f \in \mathcal{A}$. Існує множина $E \subset [0;1)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0;1)\backslash E$ маємо*

$$N(r) < \Big(\frac{4}{1-r} s(r) \ln^2 s(r)\Big)^{1/2}. \tag{5.9}$$

Доведення. Зовні множини зліченної кількості точок виконується така нерівність

$$s'(r) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}(r)} \frac{n}{r} \geq 2\sum_{n\in\mathcal{N}(r)} n \geq 2\sum_{n=0}^{N(r)-1} n = (N(r)-1)N(r) > \frac{N^2(r)}{4},\ r\uparrow 1.$$

Нехай

$$E = \Big\{r \in [0;1)\colon s'(r) \geq \frac{1}{1-r} s(r)\ln^2 s(r),\ s(r) > 2\Big\}.$$

Ця множина має скінченну логарифмічну міру, тобто

$$\int_E \frac{dr}{1-r} < \int_E \frac{s'(r)dr}{s(r)\ln^2 s(r)} = \int_{s(E)} \frac{dt}{t\ln^2 t} \leq \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t} < +\infty.$$

Тому для всіх $r \in [0;1)\backslash E$ отримаємо

$$N(r) < 2\sqrt{s'(r)} \leq \frac{2}{\sqrt{1-r}}\sqrt{s(r)}\ln s(r).$$

$\square$

Зауважимо, що степінь $1/2$ у нерівності (5.9) не може бути замінений на менше число. Приклад на точність цієї нерівності буде побудовано при доведенні теореми 5.13.

Верхня та нижня оцінка для $p_0(r)$.

Теорема 5.8. *Нехай $f \in \mathcal{A}$ та*

$$\alpha = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4.$$

Існує множина $E \subset [0;1)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0;1)\backslash E$ маємо

$$p_0(r) \le s(r) + (1+e)N(r)\ln N(r) + C_0 N(r),$$

де $C_0 = 3 + 9/|a_0|$.

Доведення теореми 5.8. Нехай $\alpha = 4 + 5\varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Тоді

$$N(r) > \frac{1}{(1-r)^{4+4\varepsilon}},\ r \uparrow 1. \tag{5.10}$$

За означенням $N_1(r)$ і r_1 отримаємо

$$\begin{gathered} N_1(r) = \#\{n\colon \ln(|a_n| r_1^n) > 0\} = \\ = \#\Big\{n\colon |a_n|\Big(1-(1-r)\exp\Big\{-\frac{1}{\ln^2 N(r)}\Big\}\Big)^n > 1\Big\} = \\ = \{n\colon |a_n| r^n > q^n(r)\},\ q(r) := \frac{r}{1-(1-r)\exp\Big\{-\frac{1}{\ln^2 N(r)}\Big\}} < 1. \end{gathered}$$

Розглянемо подію $B = \bigcap_{i=1}^4 A_i$, де

$$\begin{gathered} A_1\colon |\xi_0(\omega_1)| \ge \frac{3}{|a_0|}\sqrt{N(r)}, \\ A_2\colon |\xi_n(\omega_1)| \le \frac{1}{|a_n| r^n \sqrt{N(r)}} \text{ для всіх } n \in \mathcal{N}(r)\backslash\{0\}, \\ A_3\colon |\xi_n(\omega_1)| \le \frac{1}{\sqrt{N(r)}} \text{ для всіх } n \in \mathcal{N}_1(r)\backslash(\mathcal{N}(r)\cup\{0\}), \\ A_4\colon |\xi_n(\omega_1)| \le \sqrt{n} \text{ для всіх } n \notin \mathcal{N}_1(r)\cup\{0\}. \end{gathered}$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{x} q^x(r)dx = \frac{1}{\ln q(r)}\left(\sqrt{x}q^x(r)\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty} q^x(r)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln\frac{1}{q(r)}}\left(q(r) + \int\limits_1^{+\infty} q^x(r)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) < \frac{1}{\ln\frac{1}{q(r)}}\left(q(r) + \int\limits_1^{+\infty} q^x(r)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln\frac{1}{q(r)}}\Big(q(r) + \frac{q^x(r)}{\ln q(r)}\Big|_1^{+\infty}\Big) = \frac{1}{\ln\frac{1}{q(r)}}\Big(q(r) - \frac{q(r)}{\ln q(r)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\ln\frac{1}{q(r)}}\Big(q(r) + \frac{q(r)}{\ln\frac{1}{q(r)}}\Big) < \frac{1}{\ln^2\frac{1}{q(r)}} < \frac{1}{(1-q(r))^2}, \quad r \uparrow 1. \tag{5.11}$$

Якщо відбувається подія B, то використовуючи лему 5.7 та нерівності (5.10), (5.11) для $r \notin E$ виконуються нерівності

$$|\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)a_0| - \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_n z^n\right| \geq 3\sqrt{N(r)} -$$

$$-\sum_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{|a_n|r^n}{|a_n|r^n\sqrt{N(r)}} - \sum_{n\in\mathcal{N}_1(r)\setminus\mathcal{N}(r)}\frac{|a_n|r^n}{\sqrt{N(r)}} - \sum_{n\notin\mathcal{N}_1(r)\cup\{0\}}\sqrt{n}\cdot q^n(r) >$$

$$> 3\sqrt{N(r)} - \sqrt{N(r)} - \frac{N_1(r)-N(r)}{\sqrt{N(r)}} - \frac{1}{(1-q(r))^2} \geq$$

$$\geq 3\sqrt{N(r)} - e\sqrt{N(r)} - \left(\frac{1-(1-r)\exp\Big\{-\frac{1}{\ln^2 N(r)}\Big\}}{(1-r)\Big(1-\exp\Big\{-\frac{1}{\ln^2 N(r)}\Big\}\Big)}\right)^2 \geq$$

$$\geq (3-e)\sqrt{N(r)} - \ln^5 N(r)\frac{1}{(1-r)^2} = \ln^5 N(r)\Big((3-e)\frac{\sqrt{N(r)}}{\ln^5 N(r)} - \frac{1}{(1-r)^2}\Big) \geq$$

$$\geq \ln^5 N(r)\Big(\frac{1}{(1-r)^{2+\varepsilon}} - \frac{1}{(1-r)^2}\Big) > 0, \quad r \uparrow 1.$$

Отож, ми довели, що для $z \in r\mathbb{D}$ виконується нерівність

$$|\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)a_0| > \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_n z^n\right|.$$

Якщо подія B відбувається, то $f(z,\omega)$ майже напевно не має нулів у $r\mathbb{D}$. Тепер оцінимо знизу ймовірність події B.

$$P(A_1) = \exp\Big\{-\frac{9N(r)}{|a_0|^2}\Big\},$$

$$P(A_2) \geq \prod_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{1}{2|a_n|^2 r^{2n}N(r)} = \exp\Big\{-s(r) - N(r)\ln N(r) - N(r)\ln 2\Big\},$$

$$P(A_3) \geq \prod_{n\in\mathcal{N}_1(r)}\frac{1}{2N(r)} \geq \exp\Big\{-N_1(r)\ln(2N(r))\Big\} \geq$$

$$\geq \exp\Big\{-eN(r)(\ln N(r) + \ln 2)\Big\},$$

$$P(A_4) = P\{\omega\colon (\forall n \notin \mathcal{N}_1(r)\cup\{0\})|\xi_n(\omega)| < \sqrt{n}\} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{n\notin\mathcal{N}_1(r)\cup\{0\}} e^{-n} \geq 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = 1 - \frac{1}{e-1} > \frac{2}{5}, \ r \uparrow 1.$$

З $B \subset \{\omega\colon n(r,\omega)=0\}$ випливає, що

$$p_0(r) = \ln^- P\{\omega\colon n(r,\omega)=0\} \le \ln^- P(B) = \sum_{n=1}^{4} \ln^- P(A_n) \le$$
$$\le \ln\frac{5}{2} + \frac{9N(r)}{|a_0|^2} + s(r) + N(r)\ln N(r) + N(r)\ln 2 +$$
$$+ eN(r)\ln N(r) + e\ln 2\cdot N(r) \le$$
$$\le s(r) + \frac{9N(r)}{|a_0|^2} + (1+e)N(r)\ln N(r) + 3N(r) =$$
$$= s(r) + (1+e)N(r)\ln N(r) + C_0 N(r).$$

□

У [132] було розглянуто випадкову аналітичну функцію вигляду

$$g(z,\omega_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\theta_n(\omega_1)} a_n z^n, \tag{5.12}$$

де $a_0 \ne 0$, $\sup\{|a_n|\colon n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ і незалежні випадкові величини $\theta_n(\omega_1)$ рівномірно розподілені на $[-\pi,\pi)$. Для таких функцій доведено наступні твердження.

Теорема 5.9 ([132]). *Нехай $g(z,\omega_1)$ — випадкова аналітична функція вигляду (5.12). Тоді для $r > r_0$ і всіх ω_1 маємо*

$$N_g(r,\omega_1) \le \frac{1}{2e} + \ln S_g(r),$$

де

$$N_g(r,\omega_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(re^{i\alpha},\omega_1)|d\alpha - \ln|a_0|, \quad S_g^2(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Теорема 5.10 ([132]). *Існує абсолютна стала $C > 0$ така, що для функції $g(z,\omega_1)$ вигляду (5.12) P_1-майже напевно виконується нерівність*

$$\ln S_g(r) \le N_g(r,\omega_1) + C\ln N_g(r,\omega_1),\ r_0(\omega_1) \le r < +\infty. \tag{5.13}$$

Нехай $P = P_1 \times P_2$ — прямий добуток ймовірнісних мір P_1 і P_2, визначених на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Тут $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ — мінімальна σ-алгебра, яка містить усі $A_1 \times A_2$ такі, що $A_1 \in \mathcal{A}_1$ та $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Нехай $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) є послідовністю незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на $[-\pi,\pi)$ на $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, $\xi_n(\omega_2) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0;1)$ на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$, де $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ — два ймовірнісні простори.

Наслідок 5.3. *Нехай $(\zeta_n(\omega_2))$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин така, що для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$ щільність розподілу випадкової величини $\eta = \zeta_n$ має вигляд $p_\eta(z) = h(|z|)$ та $\mathbf{E}|\eta| < +\infty$, $\mathbf{E}(\frac{1}{|\eta|}) < +\infty$. Існують абсолютна стала $C > 0$ і множина $B \in \mathcal{A}$: $P(B) = 1$ такі, що для функцій*

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\zeta_n(\omega_2)a_n z^n, \quad a_0 \neq 0, \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = +\infty, \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

і всіх $\omega \in B$, всіх $r \in [r_0(\omega); +\infty)$ отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\alpha},\omega)|d\alpha - \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\zeta_0(\omega_2)| \geq$$
$$\geq \ln S_f(r,\omega_2) - (C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2),$$

де

$$S_f^2(r,\omega_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2|\zeta_n(\omega_2)|^2 r^{2n}.$$

Зауважимо, що якщо функція щільності $\zeta_n(\omega_1)$ має наступний вигляд $p_{\zeta_n}(z) = q(|z|), n \in \mathbb{N}$, то $\arg\zeta_n(\omega_1)$ рівномірно розподілені на $[-\pi,\pi)$.

Оскільки випадкові величини $\xi_n(\omega_1)$ задовольняють умови наслідку 5.3, бо

$$p_{\xi_k}(z) = h(|z|) = \frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}, \ z \in \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

то маємо таке твердження для функцій вигляду (5.8).

Наслідок 5.4. *Існують абсолютна стала $C > 0$ і множина B: $P(B) = 1$ такі, що для функцій вигляду (5.8) і для всіх $\omega \in B$ і всіх $r \in [r_0(\omega); +\infty)$ маємо*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta - \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| \geq$$
$$\geq \ln S_f(r,\omega_2) - (C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2).$$

Доведення наслідку 5.4. З теореми 5.9 випливає, що

$$\ln N_g(r,\omega_1) \leq 1 + \ln\ln S_g(r)$$

і за теоремою 5.10 ω_1-майже напевно маємо

$$N_g(r,\omega_1) \geq \ln S_g(r) - C\ln N_g(r,\omega_1) \geq \ln S_g(r) - (C+1)\ln\ln S_g(r),$$

для $r_0(\omega_1) \leq r < +\infty$. Тому,

$$P_1\{\omega\colon (\exists r_0(\omega_1))(\forall r > r_0(\omega_1))\ [N_g(r,\omega_1) \geq \ln S_g(r) - (C+1)\ln\ln S_g(r)]\} = 1.$$

Розглянемо випадкову функцію $f(z,\omega_1,\omega_2)$ вигляду (5.8). Визначимо

$$A_f = \{(\omega_1,\omega_2)\colon (\exists r_0(\omega_1,\omega_2))(\forall r > r_0(\omega_1,\omega_2))$$
$$[N_f(r,\omega_1,\omega_2) \geq \ln S_f(r,\omega_2) - (C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)]\},$$

де

$$S_f^2(r,\omega_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n(\omega_1)|^2 |\zeta_n(\omega_2)|^2 |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |\zeta_n(\omega_2)|^2 |a_n|^2 r^{2n}.$$

Розглянемо події

$$F = \{\omega_2\colon (\forall n \in \mathbb{N})\ [\zeta_n(\omega_2) \neq 0]\},\ H = \Big\{\omega_2\colon \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||\zeta_n(\omega_2)|} = 1\Big\}.$$

Тоді за лемою 5.5 для $\eta_n = |\zeta_n|$ маємо $P_2(H) = 1$. Оскільки $\mathbf{E}(\frac{1}{\zeta_n}) < +\infty$, то ймовірність події F

$$1 \geq P_2(F) \geq 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P_2\{\omega_2\colon \zeta_n(\omega_2) = 0\} = 1.$$

Позначимо $G = F \cap H$. Отже, $P_2(G) = 1$. Тоді для фіксованого $\omega_2^0 \in G$

$$P_1(A_f(\omega_2^0)) := P_1\{\omega_1\colon (\exists r_0(\omega_1,\omega_2^0))(\forall r > r_0(\omega_1,\omega_2^0))$$
$$[N_f(r,\omega_1,\omega_2^0) \geq \ln S_f(r,\omega_2^0) - (C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2^0)]\} = 1.$$

Залишається використати теорему Фубіні

$$P(A_f) = \int\limits_{\Omega_2} \Bigg(\int\limits_{A_f(\omega_2)} dP_1(\omega_1) \Bigg) dP_2(\omega_2) \geq \int\limits_{G} \Bigg(\int\limits_{A_f(\omega_2)} dP_1(\omega_1) \Bigg) dP_2(\omega_2) =$$
$$= \int\limits_{G} dP_2(\omega_2) = P_2(G) = 1.$$

$\square$

Теорема 5.11. *Нехай $f \in \mathcal{A}$. Тоді P-майже напевно існує $r_0(\omega) > 0$ таке, що для всіх $r \in (r_0(\omega);1)$ маємо*

$$p_0(r) \geq s(r) + N(r)\ln N(r) - 4N(r).$$

Доведення теореми 5.11. За формулою Єнсена

$$0 = \int\limits_0^r \frac{n(t,\omega)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta},\omega)| d\theta - \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|,$$

$$\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta},\omega)| d\theta.$$

Отже,

$$P\{\omega\colon n(r,\omega)=0\}\le P\Biggl\{\omega\colon\ \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\Biggr\}.$$

Нехай

$$A=\Biggl\{\omega\colon\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\ge$$

$$\ge\ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Biggr\},$$

$$G_1=\{\omega\colon\ \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\ge\ln\gamma(\omega_2)\},$$

$$G_2=G_2(r)=\Biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\le\ln\gamma(\omega_2)\Biggr\},$$

де $\gamma(\omega_2)>1$. З наслідку 5.4 випливає, що $P(A)=1$.

Тоді для $r>r_0(\omega)$

$$\overline{G_1}\bigcap\overline{G_2}=\Biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta>\ln\gamma(\omega_2)>\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Biggr\},$$

$$\overline{G_1}\bigcap\overline{G_2}\subset\Biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta\ne\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Biggr\},$$

$$G_1\bigcup G_2=\overline{\overline{G_1}\bigcap\overline{G_2}}\supset\Biggl\{\omega\colon\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta=\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Biggr\}.$$

Отож, для $r>r_0(\omega)$

$$P\{\omega\colon n(r,\omega)=0\}\le P(G_1\cup G_2)\le P(G_1)+P(G_2),\ r\uparrow 1.$$

Нехай $\gamma(\omega_2)=C_1\cdot|a_0|\cdot|\xi_0(\omega_2)|,\ C_1>1$. Тоді ми можемо обчислити ймовірність події G_1

$$P(G_1)=P\Bigl\{\omega\colon\ \ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\ge\ln C_1+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Bigr\}=$$
$$=P\{\omega\colon\ \ln C_1\le 0\}=0$$

і оцінити ймовірність події G_2 при $r>r_0(\omega)$

$$P(G_2)=P(G_2\cap A)+P(G_2\cap\overline{A})\le P(G_2\cap A)+P(\overline{A})=P(G_2\cap A)=$$

$$=P\Biggl\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)+$$

$$+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta},\omega)|d\theta \le \ln\gamma(r,\omega)\Big\}\le$$

$$\le P\Big\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)| \le$$

$$\le \ln C_1+\ln|a_0\varepsilon_0(\omega_1)\xi_0(\omega_2)|\Big\}=$$

$$=P\Big\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)-(C+1)\ln\ln S_f(r,\omega_2)\le\ln C_1\Big\}\le$$

$$\le P\Big\{\omega\colon\ \ln S_f(r,\omega_2)\le 2\ln C_1\Big\}=P\Big\{\omega\colon S_f(r,\omega_2)\le C_1^2\Big\}=$$

$$\le P\left\{\omega\colon \sum_{n\in\mathcal{N}(r)}|\xi_n(\omega_2)|^2|a_n|^2r^{2n}\le C_1^4\right\},\ r\uparrow 1.$$

Функція розподілу випадкової величини $|\xi_n(\omega_2)|$

$$F_{|\xi_n|}(x)=1-\exp\{-x^2\},\ F_{|\xi_n|^2}(x)=F_{|\xi_n|}(\sqrt{x})=1-\exp\{-x\},$$
$$F_{|\xi_n|^2|a_n|^2r^{2n}}(x)=F_{|\xi_n|^2}\Big(\frac{x}{|a_n|^2r^{2n}}\Big)=1-\exp\Big\{-\frac{x}{|a_n|^2r^{2n}}\Big\}$$

для $n\notin\mathcal{N}_0$ та $x\in\mathbb{R}_+$. Тоді щільність випадкового вектора

$$\eta(\omega_2)=(|\xi_1(\omega_2)|a_1r^{j_1},\dots,|\xi_{j_k}(\omega_2)|a_{j_k}r^{j_k}),\ j_k\in\mathcal{N}(r),$$

можна записати у вигляді

$$p_\eta(x)=\begin{cases}\prod\limits_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{1}{|a_n|^2r^{2n}}\exp\Big\{-\frac{x_n}{|a_n|^2r^{2n}}\Big\}, & x\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{N}(r)};\\ 0, & x\notin\mathbb{R}_+^{\mathcal{N}(r)}.\end{cases}$$

Отже, для $r>r_0(\omega)$ отримаємо

$$P\left\{\omega\colon \sum_{n\in\mathcal{N}(r)}|\xi_n(\omega_2)|^2|a_n|^2r^{2n}\le C_1^4\right\}=P\{\omega\colon\eta(\omega_2)\in W(r)\}=$$

$$=\prod_{n\in\mathcal{N}(r)}\frac{1}{|a_n|^2r^{2n}}\cdot\int\limits_{W(r)}\!\!\cdots\!\int\prod_{n\in\mathcal{N}(r)}\exp\Big\{-\frac{x_n}{|a_n|^2r^{2n}}\Big\}\prod_{j=1}^{N(r)}dx_j\le$$
$$\le\exp(-s(r))\cdot\mathrm{meas}_{N(r)}W(r), \tag{5.14}$$

де

$$W(r)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^{N(r)}\colon \sum_{n\in\mathcal{N}(r)}x_n\le C_1^4\right\}.$$

Для $C>0$ маємо таку рівність

$$\mathrm{meas}_n\left\{x\in\mathbb{R}_+^n\colon\ \sum_{i=1}^n x_i\le C\right\}=\frac{C^n}{n!}.$$

З цієї рівності і формули Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \cdot \exp\Big\{-\frac{\theta_n}{12n}\Big\},\ \theta_n \in [0;1],\ n \in \mathbb{N},$$

випливає, що

$$\ln\Big(\mathrm{meas}_{N(r)} W(r)\Big) \le -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln N(r) - N(r)\ln N(r) + \frac{1}{12N(r)} + \\ +N(r) + 4N(r)\ln C_1 \le -N(r)(\ln N(r) - 1 - 4\ln C_1).$$

Виберемо $C_1 = 2$. Врахувавши (5.14), отримаємо

$$p_0(r) \ge s(r) + N(r)\ln N(r) - 4N(r)$$

для $r > r_0(\omega)$. □

З леми 5.8 і теорем 5.8 та 5.11 випливає таке твердження.

Теорема 5.12. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f \in \mathcal{A}$ такі, що*

$$\alpha = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4. \tag{5.15}$$

Тоді існують множина $E \subset [0;1)$ скінченної логарифмічної міри та P-майже напевно $r_0(\omega) > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0(\omega);1) \setminus E$ виконується нерівність

$$(1-\varepsilon)N(r)\ln N(r) \le p_0(r) - s(r) \le (1+e+\varepsilon)N(r)\ln N(r), \tag{5.16}$$

а саме,

$$0 \le \varliminf_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)},\ \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} \le \frac{1}{2-\frac{1}{\alpha}} \tag{5.17}$$

та

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

Доведення. З (5.16) випливає, що для $r \in (r_0(\omega);1) \setminus E$ маємо

$$\frac{\ln N(r) + \ln\ln N(r) - 1}{\ln N(r)} \le \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)} \le \frac{\ln N(r) + \ln\ln N(r) + 2}{\ln N(r)},$$

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

За лемою 5.8 отримуємо для довільного $\delta > 0$ при $r \uparrow 1$

$$s^{1+\delta}(r) > s(r)\ln^2 s(r) > N^2(r)(1-r),\quad \ln s(r) > \frac{1}{1+\delta}\Big(2\ln N(r) - \ln\frac{1}{1-r}\Big),$$

$$\varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)} \cdot \frac{\ln N(r)}{\ln s(r)} =$$

$$= \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln N(r)}{\ln s(r)} \leq (1+\delta) \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln N(r)}{2\ln N(r) - \ln\frac{1}{1-r}} = (1+\delta) \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{1}{2 - \frac{\ln\frac{1}{1-r}}{\ln N(r)}} =$$

$$= (1+\delta)\frac{1}{2 - \varlimsup\limits_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln\frac{1}{1-r}}{\ln N(r)}} = (1+\delta)\frac{1}{2 - \left(\lim\limits_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln N(r)}{\ln\frac{1}{1-r}}\right)^{-1}} = (1+\delta)\frac{1}{2-\frac{1}{\alpha}}.$$

Оскільки δ є довільне, то

$$\varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} \leq \frac{1}{2-\frac{1}{\alpha}}.$$

З $N(r)>1$ і $s(r)>1,\ r\uparrow 1$, випливає, що

$$\varliminf_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \varliminf_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)}\cdot\frac{\ln N(r)}{\ln s(r)} = \varliminf_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln N(r)}{\ln s(r)} \geq 0.$$

$\square$

Приклади на точність нерівностей (5.17) у випадку $\alpha=+\infty$.

Теорема 5.13. *Існують випадкова аналітична функція $f\in\mathcal{A}$: $\alpha=+\infty$, множина $E\subset[0;1)$ скінченної логарифмічної міри такі, що*

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

Доведення. Позначимо

$$h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,\quad h(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1)\xi_n(\omega_2)a_n z^n,$$

де $a_n=\exp\{\frac{n+5}{\ln\ln(n+5)}\}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тоді

$$M_h(r)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\Big\{\frac{n+5}{\ln\ln(n+5)} - n\ln\frac{1}{r}\Big\}.$$

Розглянемо функцію $g(x)=\frac{x+5}{\ln\ln(x+5)}-x\ln\frac{1}{r},\ x\geq 0$. Тоді

$$g'(x)=\frac{\ln\ln(x+5)-\frac{1}{\ln(x+5)}}{\ln^2\ln(x+5)} - \ln\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{\ln\ln(x+5)}\Big(1-\frac{1}{\ln(x+5)\ln\ln(x+5)}\Big) - \ln\frac{1}{r} = 0.$$

Нехай $x_{\max}(r)$ — точка максимуму функції $g(x)$. Тоді

$$\lim_{r\uparrow 1} x_{\max}(r) = +\infty$$

і для $r \uparrow 1$ маємо

$$\frac{1}{\ln\ln(x_{\max}(r)+5)} < 2\ln\frac{1}{r}, \quad x_{\max}(r) > \exp_2\Big\{\frac{1}{2\ln\frac{1}{r}}\Big\}-5,$$
$$\nu_h(r) > \exp_2\Big\{\frac{1}{2\ln\frac{1}{r}}\Big\}-5 > \exp_2\Big\{\frac{1}{3(1-r)}\Big\}, \; r\uparrow 1.$$

Тому,

$$\exp\{g(x_{\max})\} \geq \mu_h(r) \geq \exp\Big\{g\Big(\exp_2\Big\{\frac{1}{2\ln\frac{1}{r}}\Big\}-5\Big)\Big\}\geq$$
$$\geq \exp\Big\{\exp_2\Big\{\frac{1}{2\ln\frac{1}{r}}\Big\}\Big(2\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{1}{r}\Big)\Big\}=$$
$$= \exp\Big\{\exp_2\Big\{\frac{1}{2\ln\frac{1}{r}}\Big\}\ln\frac{1}{r}\Big\}> \exp_3\Big\{\frac{1}{3}\frac{1}{1-r}\Big\},$$
$$\ln s(r) > \ln\ln\mu_h(r) > \exp\Big\{\frac{1}{3}\frac{1}{1-r}\Big\},$$

та

$$\alpha = \varliminf_{r\uparrow 1}\frac{\ln N(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} \geq \varliminf_{r\uparrow 1}\frac{\ln\nu_h(r)}{\ln\frac{1}{1-r}} \geq \varliminf_{r\uparrow 1}\frac{\exp\{\frac{1}{3(1-r)}\}}{\ln\frac{1}{1-r}} = +\infty. \tag{5.18}$$

За лемою 5.8 існує множина $E\subset[0;1)$ скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r\in[0;1)\backslash E$ маємо

$$N(r) < \frac{2}{\sqrt{1-r}}\sqrt{s(r)}\ln s(r) \leq \sqrt{s(r)}\ln^2 s(r). \tag{5.19}$$

З

$$\ln\mu_h(r)-\ln\mu_h(r_0) = \int\limits_{r_0}^{r}\frac{\nu_h(t)dt}{t} \leq \nu_h(r)(\ln r-\ln r_0),$$

випливає, що для будь-якого $r>r_2>r_0$ існує стала $c>0$ така, що

$$\nu_h(r) \geq \frac{\ln\mu_h(r)-\ln\mu_h(r_0)}{\ln r-\ln r_0} \geq \frac{c\ln\mu_h(r)}{-\ln r_0}.$$

Зауважимо, що послідовність

$$a_n = \exp\Big\{\frac{n+5}{\ln\ln(n+5)}\Big\}, n\in\mathbb{Z}_+,$$

є логарифмічно ввігнутою. Тоді для будь-якого $r\in[0;1)$: $N(r)>\nu_h(r)$. Отож,

$$s(r) < (N(r)+1)\ln\mu_h(r) < 2(N(r)+1)\frac{1}{c}\ln\frac{1}{r_0}\nu_h(r) \leq$$
$$\leq \frac{1}{c}\ln\frac{1}{r_0}(N(r)+1)N(r) < N^2(r), \; r\uparrow 1. \tag{5.20}$$

З (5.18) випливає, що функція $h(z,\omega)$ задовольняє умови теореми 5.12 ($\alpha = +\infty$). Врахувавши (5.19) та (5.20) отримаємо для $r\in[0;1)\backslash E$ маємо

$$\sqrt{s(r)} < N(r) < \sqrt{s(r)}\ln^2 s(r),$$

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = \lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln N(r)} \cdot \frac{\ln N(r)}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

□

Теорема 5.14. *Існують випадкова аналітична функція* $f \in \mathcal{A}$: $\alpha = +\infty$, *множина* $E \subset [0;1)$ *нульової щільності, тобто (тут* meas *— міра Лебега на прямій)*

$$DE = \overline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{1}{1-r} \operatorname{meas}(E \cap [r;1)) = 0,$$

такі, що

$$\lim_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r)-s(r))}{\ln s(r)} = 0.$$

Доведення. Розглянемо випадкові аналітичні функції

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n\in\mathcal{N}^*} a_n z^n,$$

де

$$a_n = \exp\Big\{\frac{n+5}{\ln\ln(n+5)}\Big\},\ \mathcal{N}^* = \{n\colon n = [e^k]+1 \text{ для деякого } k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Тут $[e^k]$ означає цілу частину дійсного числа e^k. Позначимо

$$\mathcal{N}_h(r) = \{n \in \mathbb{Z}_+\colon\ \ln(|a_n|r^n) > 0\}\backslash\{0\},\ \mathcal{N}_g(r) = \{n \in \mathcal{N}^*\colon\ \ln(|a_n|r^n) > 0\},$$
$$s_h(r) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}_h(r)} \ln(|a_n|r^n),\ s_g(r) = 2\sum_{n\in\mathcal{N}_g(r)} \ln(|a_n|r^n).$$

Зауважимо, що послідовність

$$a_n = \exp\left\{\frac{n+5}{\ln\ln(n+5)}\right\},\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

є логарифмічно ввігнутою і $\mathcal{N}_h(r) = \{0,\dots,N_h(r)-1\}$. Тоді за означенням $N_g(r)$ маємо

$$N_g(r) \le 2\ln N_h(r),\ r\uparrow 1.$$

Оскільки $h(z)$ задовольняє умову (1.33), то ([194]) існує множина E нульової щільності така, що для $r \in [0;1)\backslash E$ виконується нерівність

$$N_g(r) \le 2\ln N_h(r) \le 2\ln(\ln\mu_h(r)\ln^5(\ln\mu_h(r))) < 4\ln\ln\mu_h(r).$$

З іншого боку,

$$N_g(r) \ge \frac{1}{2}\ln N_h(r) \ge \frac{1}{2}\ln\nu_h(r) \ge \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{c\ln\mu_h(r)}{-\ln r_0}\Big) \ge \frac{1}{3}\ln\ln\mu_h(r) \ge$$
$$\ge \frac{1}{3}\exp\Big\{\frac{1}{3}\frac{1}{1-r}\Big\} \ge \exp\Big\{\frac{1}{4}\frac{1}{1-r}\Big\},\quad r\uparrow 1.$$

Тому,

$$\alpha = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} \geq \frac{1}{4} \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\frac{1}{1-r}}{\ln \frac{1}{1-r}} = +\infty, \quad r \uparrow 1.$$

Зауважимо, що

$$\min\{n \in \mathcal{N}^* \colon n > \nu_g(r)\} \leq [e\nu_g(r)] + 1 < (e+1)\nu_g(r).$$

Зафіксуємо $r > 0$. Розглянемо функцію

$$y(t) = \ln(a(t)r^t) = \frac{t+5}{\ln\ln(t+5)} - t \ln \frac{1}{r}.$$

Графік функції $y(t)$ проходить через точки $(0; \frac{5}{\ln\ln 5})$ і $(\nu_g(r); \ln \mu_g(r))$. Якщо $\nu_g(r) \leq \nu_h(r)$, то з ввігнутості функції $y(t)$ випливає, що точка $(\nu_h(r); \ln \mu_h(r))$ належить трикутнику з вершинами

$$(\nu_g(r); \ln \mu_g(r)),\ ((e+1)\nu_g(r); \ln \mu_g(r)) \text{ та } ((e+1)\nu_g(r); (e+1)\ln \mu_g(r)).$$

Тоді

$$\ln \mu_h(r) < (e+1)\ln \mu_g(r) < 4\ln \mu_g(r), \quad s_g(r) \geq 2\ln \mu_g(r) \geq \frac{\ln \mu_h(r)}{2}, \quad r \uparrow 1.$$

Якщо ж $\nu_g(r) > \nu_h(r)$, то позначимо

$$\nu_g^*(r) = \min\{n < \nu_h(r) \colon n \in \mathcal{N}^*\},\ \mu_g^*(r) = a_{\nu^*} r^{\nu^*}.$$

З ввігнутості функції $y(t)$ випливає, що точка $(\nu_h(r); \ln \mu_h(r))$ належить трикутнику з вершинами

$$(\nu_g^*(r); \ln \mu_g^*(r)),\ ((e+1)\nu_g^*(r); \ln \mu_g^*(r)) \text{ та } ((e+1)\nu_g^*(r); (e+1)\ln \mu_g^*(r)).$$

Тоді

$$\ln \mu_h(r) \leq (e+1)\ln \mu_g^*(r) \leq (e+1)\ln \mu_g(r),\ s_g(r) \geq 2\ln \mu_g(r) \geq \frac{2}{e+1}\ln \mu_g(r).$$

Отже,

$$s_g(r) \geq \frac{2}{e+1}\ln \mu_h(r).$$

Для функції $g(z)$ маємо

$$0 \leq \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln N_g(r)}{\ln s_g(r)} \leq \varlimsup_{\substack{r\uparrow 1\\ r\notin E}} \frac{\ln(4\ln\ln \mu_h(r))}{\ln(\frac{\ln \mu_h(r)}{2})} = 0.$$

□

Зауважимо, що для $f \in \mathcal{A}$ та $r > r_2 > r_1$ існує така $C_1 > 0$, що

$$\ln \mu_f(r) - \ln \mu(r_1) = \int\limits_{r_1}^{r} \frac{\nu_f(t)dt}{t} \leq \nu_f(r)(\ln r - \ln r_1),$$

$$\nu_f(r) \geq \frac{\ln \mu_f(r) - \ln \mu(r_1)}{\ln r - \ln r_1} \geq \frac{C_1 \ln \mu_f(r)}{-\ln r_1}.$$

Якщо ми додатково припустимо, що послідовність (a_n) є логарифмічно ввігнутою, то

$$N(r) > \nu_f(r) > \frac{C_1 \ln \mu_f(r)}{-\ln r_1}, \quad r \uparrow 1.$$

Отже, якщо послідовність (a_n) є логарифмічно ввігнутою, то умову (5.15) у теоремі 5.12 можна замінити на

$$\varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4.$$

Останній факт приводить нас до наступного припущення.

Гіпотеза 5.1. *Якщо послідовність* (a_n) *є логарифмічно ввігнутою, то умову* (5.15) *у теоремі 5.12 можна замінити на*

$$\varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 1.$$

Гіпотеза 5.2. *Умову* (5.15) *у теоремі 5.12 можна замінити на* $\alpha > 1$.

Основні здобутки п'ятого розділу:

1) отримані оцінки зверху і знизу для ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих функцій;
2) побудовано приклади на точність верхніх та нижніх оцінок цієї ймовірності для випадкових цілих функцій;
3) для класу аналітичних функцій, який визначається додатковою умовою на мінімально можливу швидкість зростання при наближенні до межі одиничного круга, доведено точні асимптотичні оцінки ймовірності відсутності нулів.

Результати п'ятого розділу опубліковано в статтях [120, 121], а також доповідалися на конференції [126] та наукових семінарах.

РОЗДІЛ 6. АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА-СТІЛТ'ЄСА

6.1. Про співвідношення Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса

Нехай $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, ν є невід'ємною мірою на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм $\operatorname{supp}\nu$ і $f(x)$ — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначаємо клас функцій $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вигляду

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du). \tag{6.1}$$

Для $F \in \mathcal{I}(\nu)$ та $x \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\mu_*(x, F) = \sup\{f(u)e^{xu}\colon u \in \operatorname{supp}\,\nu\}.$$

Зазначимо, що умова $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ \mu_*(x, F) < +\infty$ виконується, тоді і тільки тоді, коли (наприклад, див. [22, 159])

$$\varliminf_{\substack{u\to+\infty\\ u\in\operatorname{supp}\,\nu}} \frac{-\ln f(u)}{u} = +\infty.$$

Позначимо через $\mathbb{L}$ клас невід'ємних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ і через $\mathbb{L}^+$ підклас функцій $\psi \in \mathbb{L}$ таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ при $t \to +\infty$.

Нехай $\Phi \in \mathbb{L}^+$. Через $\mathcal{I}(\nu, \Phi)$ ми позначимо клас функцій $F \in \mathcal{I}(\nu)$ таких, що

$$(\exists c > 0)\colon \quad \ln F(x) \le \Phi(cx) \quad (x \ge x_0),$$

$$\mathcal{I}^*(\nu, \Phi) := \{F \in \mathcal{I}(\nu)\colon (\exists c > 0)(\exists x_j \to +\infty)[\,\ln F(x) \le \Phi(cx)\ (x = x_j,\ j \ge 1)]\}.$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 6.1. *Нехай $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, $\Phi \in \mathbb{L}^+$, $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$. Якщо умови*

$$(\forall \eta > 0)\colon\ \ln \nu_0(\eta\Phi(t)) = o(t\Phi(t))\ (t \to +\infty) \tag{6.2}$$

та

$$(\forall\ \eta > 0)\colon\ \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln \nu_0(t)}{t} = 0, \quad \nu_0(t) := \nu((0, t]) \tag{6.3}$$

виконуються, то співвідношення

$$\ln F(x) \le (1 + o(1)) \ln \mu_*(x, F) \tag{6.4}$$

виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$, де E — множина нульової лінійної нижньої щільності, тобто $\underline{D}E = 0$.

Зауважимо, що з умов (6.3) випливає, що рівність

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln \nu_0(\eta\Phi(t))}{t\Phi(t)} = 0$$

виконується для кожного $\eta > 0$.

Наступна теорема вказує, що умова (6.3) є необхідною умовою теореми 6.1.

Теорема 6.2. *Нехай $\Phi \in \mathbb{L}^+$. Якщо умови*

$$(\exists \eta > 0)(\exists b > 0)\colon \quad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln \nu_0(t)}{t} > b, \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta t} d\nu_0(t) < +\infty \qquad (6.5)$$

виконуються, то для кожного $h > 0$ існує функція $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$, $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, така, що для всіх $x \geq x_0$ виконується нерівність

$$\ln F(x) \geq (1+h) \ln \mu_*(x, F).$$

Гіпотеза 6.1. Твердження теореми 6.1 правильне без умови (6.2).

Гіпотеза 6.2. Твердження теореми 6.2 є правильне без другої умови (6.5).

Зауваження 6.1. Очевидно, що друга умова (6.5) виконується, тоді і тільки тоді, коли $\ln \nu_0(t) = O(t)$ $(t \to +\infty)$.

Визначимо клас додатних функцій

$$L(\Phi) = \left\{ \psi \in \mathbb{L}^+\colon \ (\forall b > 0)\left[\varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int^{b\Phi(t)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0 \right], \right.$$
$$\left. \Phi(t) = o\left(\psi(t\Phi(t))\right) \ (t \to +\infty) \right\}.$$

Нам потрібні такі дві леми.

Лема 6.1 ([2, 26]). *Нехай $\varphi,\ \psi \in \mathbb{L}^+$ — такі дві функції, що*

$$A_1(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int^R \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = o(1) \quad (R \to +\infty,\ R \in G), \quad G \subset \mathbb{R}_+,$$

та $R = o(\psi(R\varphi(R)))$ $(R \to +\infty)$. Тоді

$$A_2(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi(x)} = o(1) \quad (R \to +\infty,\ R \in G).$$

Зауваження 6.2. Умови $R = o(\psi(R\varphi(R)))$ $(R \to +\infty)$ та

$$(\forall b > 0)\colon\ \psi^{-1}(R) = o(R\varphi(bR)) \quad (R \to +\infty)$$

еквівалентні.

Лема 6.2. *Нехай* $\Phi_1 \in \mathbb{L}$, $\psi \in L(\Phi_1)$. *Якщо* $g(x)$ — *додатна диференційовна неспадна функція на* $[0;+\infty)$ *така, що* $g(x) \le x\Phi_1(x)$ $(x \ge x_0)$, *тоді для множини* $E = \{x \ge 0\colon\, g'(x) \ge \psi(g(x))\}$ *маємо*

$$\frac{1}{R} meas(E \cap [0, R]) \to 0 \quad (R = R_j \to +\infty)$$

для деякої послідовності $0 < R_j \uparrow +\infty$ $(1 \le j \uparrow +\infty)$.

Доведення. Умова $\psi \in L(\Phi_1)$, $\Phi_1 \in \mathbb{L}^+$ означає, що існує послідовність (R_j) така, що $0 < R_j \uparrow +\infty$ $(1 \le j \uparrow +\infty)$ і

$$\frac{1}{R} \int\limits_0^{\Phi_1(R)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} \to 0 \quad (R = R_j \to +\infty).$$

Отже, використовуючи лему 6.1 отримуємо

$$\frac{1}{R}\mathrm{meas}(E \cap [0, R]) \le \frac{1}{R} \int\limits_{E\cap[0,R]} \frac{g'(x)}{\psi(g(x))} dx \le \frac{1}{R} \int\limits_0^{g(R)} \frac{du}{\psi(u)} \le \frac{1}{R} \int\limits_0^{R\Phi_1(R)} \frac{du}{\psi(u)} = o(1),$$

$(R = R_j \to +\infty)$. □

Доведення теореми 6.1. З умов (6.2) та (6.3) випливає, що існує така функція $\psi \in \mathbb{L}^+$:

$$(\forall b > 0)\colon \quad \psi^{-1}(b\Phi(R)) = o(R\Phi(R)), \quad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = 0,$$

$$\ln \nu_0(R) = o\big(\psi^{-1}(R)\big) \quad (R \to +\infty), \tag{6.6}$$

тобто, зокрема, за зауваженням 6.2 маємо, що $\psi \in L(\Phi)$.

Для будь-якого фіксованого $x > 0$ отримаємо

$$\int\limits_{u>2(\ln F(x))'} f(u)e^{ux}\nu(du) \le \int\limits_{u\ge 2(\ln F(x))'} \frac{u}{2(\ln F(x))'} f(u)e^{ux}\nu(du) \le$$

$$\le \frac{1}{2(\ln F(x))'} \int\limits_0^{+\infty} uf(u)e^{ux}\nu(du) = \frac{F(x)}{2}.$$

Тому

$$F(x) \le \int\limits_{u\le 2(\ln F(x))'} f(u)e^{ux}\nu(du) + \frac{F(x)}{2}$$

та для кожного $x > 0$

$$F(x) \le 2 \int\limits_{u\le 2(\ln F(x))'} f(u)e^{ux}\nu(du) \le 2\mu_*(x)\nu_0\big(2(\ln F(x))'\big). \tag{6.7}$$

Застосувавши лему 6.2 з

$$g(x) = \ln F(x),\ \Phi_1(x) = \Phi(x) \text{ та } \psi(t) = \frac{1}{2}\psi_1(t),$$

одержимо

$$g'(x) \le \frac{1}{2}\psi_1(g(x))$$

для всіх $x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$, $\underline{\mathcal{D}}E = 0$. Отже, використовуючи (6.6) та (6.7), ми отримаємо

$$\ln F(x) \le \ln 2 + \ln \mu_*(x) + \ln \nu_0\big(2g'(x)\big)\big) \le \ln 2 + \ln \mu_*(x) + \ln \nu_0\big(\psi_1(g(x))\big) \le$$
$$\le \ln 2 + \ln \mu_*(x) + o(\ln F(x)), \quad x \to +\infty\ (x \in \mathbb{R}_+ \setminus E).$$

Отож, $(1 + o(1)) \ln F(x) \le \ln \mu_*(x, F)$ при $x \to +\infty$ $(x \in \mathbb{R}_+ \setminus E)$. □

Доведення теореми 6.2. Подібно до [189] позначимо

$$N_0(t) = \int\limits_1^t \frac{\nu_0(x)}{x} dx, \quad \nu_0(t) = \nu(0; t], \quad B = \frac{1}{1+h}, \quad h > 0,$$

$$\psi(u) = -Bu \int\limits_1^u \frac{\ln\left(N_0(0,5(t+1))/\ln(t+1)\right)}{t^2} dt,$$

$$f(u) = \begin{cases} \exp\{\psi(u)\}, & u \ge 1; \\ 1, & 0 < u \le 1. \end{cases}$$

Доведемо, що функція F, яка визначається інтегралом вигляду (6.1), належить до класу $\mathcal{I}(\nu)$. Дійсно, з умови

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta t} d\nu_0(t) < +\infty$$

випливає, що

$$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} f(u) e^{xu} \nu(du) = \int\limits_0^{+\infty} f(u) e^{xu} d\nu_0(u) \le \mu_*(x+\eta, F) \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta u} d\nu_0(u). \quad (6.8)$$

Для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}_+$ розглянемо функцію $\psi_0(u, x) = \psi(u) + xu$. Очевидно, що $\psi_0(u, x)$ є ввігнутою функцією для $u \ge 1$ і кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}_+$ та має єдину точку максимуму $\overline{u} = u(x) \in [1; +\infty)$. Можемо знайти цю точку з рівняння

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -B \int\limits_1^u t^{-2} \ln\left(\frac{N_0(0,5(t+1))}{\ln(t+1)}\right) dt - \frac{B}{u} \ln\left(\frac{N_0(0,5(u+1))}{\ln(u+1))}\right) + x = 0,$$

і також $\psi(u, x) \ge \psi(1, x) = x \ge 0$ $(1 \le u \le \overline{u},\ x \ge 0)$. Отже,

$$\ln \mu_*(x, F) = \sup\{\ln f(u) + xu \colon u \in \operatorname{supp} \nu\} \le \max\{\psi(u) + ux \colon u \ge 1\} =$$

$$= \psi(\overline{u}) + \overline{u}x = B\ln\left(\frac{N_0(0,5(u+1))}{\ln(u+1))}\right) \le$$
$$\le B\ln\nu_0(0,5(\overline{u}+1)) \le B\ln\nu_0(\overline{u}) < +\infty, \tag{6.9}$$

та $F \in \mathcal{I}(\nu)$. З іншого боку, для $x \ge 0$ ми отримаємо

$$F(x) \ge \int\limits_0^{\overline{u}} f(u)e^{xu}\nu(du) \ge \int\limits_0^{\overline{u}} \nu(du) = \nu_0(\overline{u}) - \nu_0(0) = \nu_0(\overline{u}).$$

Використовуючи нерівність (6.9), маємо

$$\ln F(x) \ge \ln\nu_0(\overline{u}) \ge \frac{1}{B}\ln\mu_*(x,F) = (1+h)\cdot\ln\mu_*(x,F) \quad (x \ge x_0).$$

З перших умов у (6.5) випливає, що виконується умова

$$(\exists\eta > 0)(\exists b > 0)\colon \quad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt > b.$$

Припустимо, що

$$(\forall\delta > 0)\colon \quad \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int\limits_0^{\delta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt = 0.$$

Тоді також для кожного фіксованого $\eta > 0$ існує таке $R_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$, що

$$\max\left\{\frac{1}{R}\int\limits_0^{2\eta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt,\ \frac{1}{R}\int\limits_{\eta\Phi(R)}^{2\eta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt\right\} = \frac{1}{R}\int\limits_0^{2\eta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt \to 0$$

при $R = R_j \to +\infty$. З нерівності

$$\frac{1}{R}\int\limits_{\eta\Phi(R)}^{2\eta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt \ge \frac{\ln\nu_0(\eta\Phi(R))}{2\eta R\Phi(R)} \quad (R > 0),$$

одержимо

$$\frac{\ln\nu_0(\eta\Phi(R))}{R\Phi(R)} \to 0 \quad (R = R_j \to +\infty).$$

Але

$$0 < b < \frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln\nu_0(t)}{t} = \frac{\ln\nu_0(\eta\Phi(R))}{\eta R\Phi(R)} + \frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt \le$$
$$\le \frac{\ln\nu_0(\eta\Phi(R))}{\eta R\Phi(R)} + \frac{1}{R}\int\limits_0^{2\eta\Phi(R)} \frac{\ln\nu_0(t)}{t^2}dt \to 0 \quad (R = R_j \to +\infty).$$

Ми отримали суперечність.

Зауважимо, що

$$N_0(t) \geq \int\limits_{t/e}^{t} \frac{\nu_0(x)}{x}dx \geq \nu_0\Big(\frac{t}{e}\Big) \geq \nu_0\Big(\frac{t}{3}\Big)\ (t > 0).$$

Тоді

$$\int\limits_1^y \frac{\ln\left(N_0((t+1)/2)/\ln(t+1)\right)}{t^2}dt \geq \int\limits_1^y \frac{\ln\left(\nu_0\left((t+1)/6\right)/\ln(t+1)\right)}{t^2}dt \geq$$

$$\geq \int\limits_1^y \frac{\ln \nu_0\,(t/6)}{t^2}dt - \int\limits_1^y \frac{\ln\ln(t+1)}{t^2}dt \geq \frac{1}{6}\int\limits_0^{y/6} \frac{\ln \nu_0(u)}{u^2}du - c,$$

де $c > 0$ — деяка стала. Звідси за умови (6.5) отримуємо

$$\int\limits_1^{6\eta\Phi(R)} \frac{\ln\left(N_0((t+1)/2)/\ln(t+1)\right)}{t^2}dt \geq \frac{1}{6}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{\ln \nu_0(u)}{u^2} - c \geq \frac{bR}{12} \quad (R \geq R_0),$$

та

$$\ln f(u) = \psi(u) \leq -\frac{bB}{12}\cdot u\varphi\Big(\frac{u}{6\eta}\Big) = -c_1 u\varphi(c_2 u) \quad (u \geq 6\eta\Phi(r_0)),$$

де функція φ є оберненою функцією до Φ, а $c_1, c_2 > 0$. Тоді для достатньо великих x маємо

$$\begin{gathered}\ln \mu_*(x, F) \leq \max\{\max\{\psi(u) + xu\colon u \geq 6\eta\Phi(r_0)\},\\ \max\{\psi(u) + xu\colon 0 \leq u < 6\eta\Phi(r_0)\}\} \leq\\ \leq \max\{-c_1 u\varphi(c_2 u) + xu\colon u \geq 6\eta\Phi(r_0)\} \leq\\ \leq \max\Big\{-\frac{c_1}{c_2}v\Phi(v) + \frac{x}{c_2}\Phi(v)\colon v \geq 0\Big\} =\\ = \max\Big\{\frac{x - c_1 v}{c_2}\Phi(v)\colon 0 \leq v \leq \frac{x}{c_1}\Big\} \leq \frac{x}{c_2}\Phi\Big(\frac{x}{c_1}\Big).\end{gathered}$$

Зрештою, з (6.8) випливає, що $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$. □

Сформулюємо тепер деякі наслідки. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ — така послідовність, що

$$0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty\ (1 \leq n \uparrow +\infty),$$

та

$$\nu(E) := \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E)$$

для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$, де $\delta_\lambda(E) = 1$ при $\lambda \in E$ і $\delta_\lambda(E) = 0$ в інших випадках. Тоді для функції $F \in \mathcal{I}(\nu)$ та $x \geq 0$ маємо цілий ряд Діріхле

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n)e^{x\lambda_n}.$$

Позначимо $H(\lambda,\Phi)$ клас цілих рядів Діріхле з фіксованою послідовністю показників λ вигляду
$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},$$
таких, що
$$(\exists c>0)\colon\quad \ln\mathfrak{M}(x,F)\le\Phi(cx)\quad (x\ge x_0),\quad \mathfrak{M}(x,F):=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{z\lambda_n}.$$

З теореми 6.1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 6.1. *Нехай* $\Phi_0(x)=x\Phi(x)$, $\Phi\in\mathbb{L}^+$, $F\in H(\lambda,\Phi_0)$. *Якщо умови*
$$(\forall\eta>0)\colon\ \ \ln n(\eta\Phi(t))=o(t\Phi(t))\ (t\to+\infty)\tag{6.10}$$
та
$$(\forall\ \eta>0)\colon\ \ \varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)}\frac{d\ln n(t)}{t}=0,\quad n(t):=\sum_{\lambda_n\le t}1,$$
виконуються, то
$$\ln M(x,F)=(1+o(1))\ln\mu(x,F),\ x\to+\infty,\ (x\notin E),$$
де E *— множина нульової нижньої лінійної щільності, тобто* $\underline{D}E=0$,
$$M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|\colon y\in\mathbb{R}\},\ \mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n\ge0\}.$$

У [186, теорема 2] ми знаходимо твердження наслідку 6.1 з умовою
$$\sup\left\{\frac{\ln n}{\lambda_n}\colon n\ge m\right\}=O\Big(\frac{\ln m}{\lambda_m}\Big)\quad (m\to+\infty)\tag{6.11}$$
замість умови (6.10). Зауважимо, що з умови (6.11) випливає, що $\ln n=O(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$, тобто $\ln n(t)=O(t)$ $(t\to+\infty)$. Таким чином, умова (6.10) випливає з умови (6.11).

Твердження наслідку 6.1 також випливає з теореми 3 у [188].

З теореми 6.2 маємо наступний наслідок (див. також [186, Теорему 2]).

Наслідок 6.2. *Нехай* $\Phi\in\mathbb{L}^+$. *Якщо умови*
$$(\exists\eta>0)(\exists b>0)\colon\quad \varliminf_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int\limits_0^{\eta\Phi(R)}\frac{d\ln n(t)}{t}>b,\quad \int\limits_0^{+\infty}e^{-\eta t}dn(t)<+\infty$$
виконуються, то для кожного $h>0$ *існує функція* $F\in H(\lambda,\Phi)$ *така, що для всіх* $x\ge x_0$ *виконується нерівність*
$$\ln M(x,F)\ge(1+h)\ln\mu(x,F).$$

З умови (6.11) випливає, що $\ln n(t) = O(t)$ $(t \to +\infty)$. Тому згідно з зауваженням 6.1

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta t} dn(t) < +\infty$$

для деякого достатньо великого $\eta > 0$.

Нехай ν — дискретна міра на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм. З результатів у статтях [68, 162] випливає, що обмеженість міри Лебега виняткової множини E у теоремі A є найкращим її описом у цьому випадку (подібні твердження в класі кратних рядів Діріхле див. [190] та в класі інтегралів Лапласа кількох змінних див. [195]).

6.2. Про зростання інтегралів Лапласа-Стілт'єса

Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

позначимо через

$$\varrho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$$

її порядок, а

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho}}$$

її тип. Використовуючи формулу Адамара для знаходження цих характеристик, Е. Г. Келіс довів такі дві теореми.

Теорема 6.3 ([53])**.** *Припустимо, що цілі функції*

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n \text{ та } f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,2} z^n$$

мають скінченні порядки та регулярне зростання (у сенсі однакового порядку $\varrho(f)$ і нижнього порядку $\varrho(f)$) і послідовності $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$ неспадні при $n \geq n_0$. Якщо

$$\ln(1/|a_n|) = (1+o(1))\sqrt{\ln(1/|a_{n,1}|)\ln(1/|a_{n,2}|)}, \quad n \to \infty,$$

то f — функція регулярного зростання і

$$\varrho(f) = \sqrt{\varrho(f_1)\varrho(f_2)}.$$

Теорема 6.4 ([53])**.** *Нехай функції f_1 і f_2 з теореми I мають однакові порядки $\varrho(f_1) = \varrho(f_2) = \varrho \in (0; +\infty)$ і типи $\sigma(f_1) = \sigma_1$, $\sigma(f_2) = \sigma_2$. Також припустимо, що $a_{n,1} \neq 0$ та $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$, де l є повільно змінною функцією. Якщо*

$$|a_n| = (1+o(1))\sqrt{|a_{n,1}||a_{n,2}|}, \quad n \to \infty,$$

тоді функція f має порядок $\varrho(f) = \varrho$ і тип $\sigma(f) \leq \sqrt{\sigma_1\sigma_1}$.

Зазначимо, що Р. С. Л. Срівастава ([201,202]) намагався довести теорему 6.3 без припущень $a_{n,1} \neq 0$ та $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$ і теорему 6.4 без умови спадання послідовностей $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$. На хибність таких тверджень було вказано у Math. Rev., 1963, V.25, №2204, №2206.

У [4] аналоги теорем 6.3 і 6.4 доводяться для цілих рядів Діріхле. Тут ми отримаємо такі теореми для інтегралів Лапласа-Стілт'єса.

Нехай V — клас невід'ємних неспадних необмежених та неперервних справа на $[0;+\infty)$ функцій F.

Перетворення Лапласа–Стілт'єса дійсної функції g зазвичай задається інтегралом Лебега–Стілт'єса у вигляді $\int_0^{+\infty} e^{zx} dg(x)$. Запишемо це перетворення в іншій формі. Інтегралом Лапласа–Стілт'єса ([27, 177]) називається

$$I(\sigma) = \int\limits_0^{\infty} f(x) e^{x\sigma} dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{6.12}$$

для невід'ємної на $[0;+\infty)$ функції f. Інтеграл (6.12) є прямим узагальненням звичайного інтеграла Лапласа $I(\sigma) = \int_0^{\infty} f(x) e^{x\sigma} dx$ і ряду Діріхле

$$D(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n \sigma}$$

з невід'ємними коефіцієнтами a_n та показниками λ_n, $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty \, (n \to \infty)$, якщо ми виберемо

$$F(x) = n(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1, \;\; f(\lambda_n) = a_n \geq 0$$

для всіх $n \geq 0$ (див. також [27, 131]).

Нехай

$$\mu(\sigma) = \mu(\sigma, I) = \max\{f(x) e^{x\sigma} : \; x \geq 0\}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

— максимум підінтегральної функції, σ_c — абсциса збіжності інтегралу (6.12) та σ_μ — абсциса існування максимуму підінтегральної функції. Тоді ([177, с. 8])

$$\sigma_\mu = \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}$$

і якщо $\ln F(x) = o(x)$ або $\ln F(x) = o(\ln f(x))$ при $x \to +\infty$, то ([177, с. 13]) $\sigma_c \leq \sigma_\mu$. Також зауважимо, що якщо $\ln F(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$ та $\sigma_\mu = +\infty$, то ([177, с. 11]) $\sigma_c = +\infty$.

Щоб отримати нерівність $\sigma_c \geq \sigma_\mu$, введемо поняття регулярного зростання f відносно F. Будемо казати, що додатна функція f має регулярне зростання відносно F, якщо існують $a \geq 0$, $b \geq 0$ та $h > 0$ такі, що для всіх $x \geq a$

$$\int\limits_{x-a}^{x+b} f(t) dF(t) \geq h f(x).$$

Тоді [177, с. 21], якщо $F \in V$ і f мають регулярне зростання відносно F, то $\sigma_c \le \sigma_\mu$. Таким чином, якщо $F \in V$ та f мають регулярну варіацію відносно F і якщо або $\ln F(x) = o(x)$, або $\ln F(x) = o(\ln f(x)))$ при $x \to +\infty$, то $\sigma_c = \sigma_\mu$.

Надалі припустимо, що $\sigma_c = \sigma_\mu = +\infty$.

Узагальнені порядки. Нехай L — клас неперервних зростаючих функцій α таких, що $\alpha(x) \ge 0$ для $x \ge x_0$, $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $x \le x_0$, і на $[x_0; +\infty)$ функція α зростає до $+\infty$. Будемо казати, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і

$$\alpha(x(1 + o(1))) = (1 + o(1))\alpha(x), \ x \to +\infty;$$

далі, $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$, якщо $\alpha \in L$ і для будь-якого $c > 0$ $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Очевидно, що $L_{\mathrm{si}} \subset L^0$. Функції з L_{si} називаються повільно зростаючими. Надалі нам буде потрібна наступна лема.

Лема 6.3 ([176])**.** *Нехай $\beta \in L$ та*

$$B(\delta) = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\beta((1 + \delta)x)}{\beta(x)}, \quad \delta > 0.$$

Тоді для того, щоб $\beta \in L^0$ необхідно і достатньо, щоб $B(\delta) \to 1$ при $\delta \to 0$.

Нехай $\alpha \in L, \beta \in L$ та G — довільна функція на $[\sigma_0; +\infty)$. Значення

$$\varrho_{\alpha\beta}(G) = \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} \frac{\alpha(G(\sigma))}{\beta(\sigma)} \tag{6.13}$$

називається *узагальненим порядком* G. Якщо ми виберемо $G(\sigma) = \ln I(\sigma)$, то з (6.13) ми отримаємо означення узагальненого порядку $\varrho_{\alpha\beta}(I)$ інтегралу Лапласа-Стілт'єса (6.12). Також визначимо

$$k_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}\right)}.$$

Спочатку зауважимо, що якщо функції $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні та для кожного $\varrho \in (0; +\infty)$

$$\frac{d\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}{d\ln x} = O(1), \ x \to +\infty, \tag{6.14}$$

тоді ([177, с. 77]) $\varrho_{\alpha\beta}(\ln \mu) = k_{\alpha\beta}(f)$, і якщо для кожного $\varrho \in (0; +\infty)$

$$\ln F(x) = o\left(x\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\varrho}\right)\right), \ x \to +\infty, \tag{6.15}$$

то ([177, с. 77]) $\varrho_{\alpha\beta}(I) \le \varrho_{\alpha\beta}(\ln \mu)$. З іншого боку, якщо f має регулярну варіацію відносно F, тоді ([177, с. 81]) $\varrho_{\alpha\beta}(I) \ge \varrho_{\alpha\beta}(\ln \mu)$ для кожного $\alpha \in L^0$ та $\beta \in L$.

Теорема 6.5. *Нехай $F \in V$, f мають регулярну варіацію відносно F, а функції $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ задовольняють умову* (6.14)*. Якщо F задовольняє умову* (6.15)*, тоді $\varrho_{\alpha\beta}(I) = k_{\alpha\beta}(f)$.*

Тепер позначимо

$$\lambda_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln I(\sigma))}{\beta(\sigma)}, \quad \lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln\mu(\sigma))}{\beta(\sigma)},$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}(f) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)}.$$

Твердження 6.1. *Якщо $\alpha \in L$ і $\beta \in L^0$ тоді $\lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) \geq \varkappa_{\alpha\beta}(f)$.*

Дійсно, якщо $\varkappa_{\alpha\beta}(f) > 0$, то для кожного $\varkappa \in (0, \varkappa_{\alpha\beta}(f))$ і всіх $x \geq x_0 = x_0(\varkappa)$ маємо $\ln f(x) \geq -x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa))$. Отже,

$$\ln\mu(\sigma) \geq -x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa)) + x\sigma$$

для всіх σ і $x \geq x_0$. Вибираючи $x = \alpha^{-1}(\varkappa\beta(\sigma-1)) \geq x_0$ для $\sigma \geq \sigma_0$, отримуємо

$$\ln\mu(\sigma) \geq a^{-1}(\varkappa\beta(\sigma-1)) = a^{-1}(\varkappa(1+o(1))\beta(\sigma)), \quad \sigma\to+\infty.$$

Отже, $\lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) \geq \varkappa$ і з огляду на довільність $\varkappa$ маємо $\lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) \geq \varkappa_{\alpha\beta}(f)$. Якщо $\varkappa_{\alpha\beta}(f) = 0$, то ця нерівність очевидна.

Твердження 6.2. *Нехай $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$, $\beta \in L^0$ і виконується умова* (6.14)*. Якщо функція $v(x) = -(\ln f(x))'$ неперервна і зростає на $[x_0; +\infty)$, то $\lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) \leq \varkappa_{\alpha\beta}(f)$.*

Дійсно, оскільки $v(x) = -(\ln f(x))'$ неперервна та зростаюча на $[x_0; +\infty)$, функція $\ln f(x) + \sigma x$ має єдину точку x максимуму таку, що $\sigma = v(x)$ і $\ln\mu(\sigma) = \ln f(x) + \sigma x$, де $\sigma = v(x)$.

Припустимо, що $\varkappa_{\alpha\beta}(f) < +\infty$. Тоді для кожного $\varkappa > \varkappa_{\alpha\beta}(f)$ існує така послідовність $(x_k) \uparrow +\infty$, що

$$\ln f(x_k) \leq -x_k\beta^{-1}(\alpha(x_k)/\varkappa)).$$

Позначимо $\mu^*(\sigma) = f(x_k)e^{\sigma x_k}$. Оскільки $\mu(\sigma) = f(x)e^{\sigma x}$ для $\sigma = v^{-1}(x)$, то $\mu(\sigma_k) = \mu^*(\sigma_k)$ для $\sigma_k = v(x_k)$. Отже

$$\ln\mu(\sigma_k) = \ln\mu^*(\sigma_k) \leq \max_k\{-x_k\beta^{-1}(\alpha(x_k)/\varkappa) + x_k\sigma_k\} \leq$$
$$\leq \max_x\{-x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa) + x\sigma_k\}.$$

З огляду на (6.14)

$$(-x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa)) + x\sigma_k)' = -\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa)) - \frac{d\beta^{-1}(\alpha(x)/k)}{d\ln x} + \sigma_k =$$
$$= -\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa)) + \sigma_k + O(1),\ x\to+\infty,$$

тобто, функція $-x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa)) + x\sigma_k$ досягає максимуму в точці

$$x(\sigma_k) = \alpha^{-1}(\varkappa\beta(\sigma_k + O(1))),\ x\to+\infty,$$

$$\ln\mu(\sigma_k) \leq -\alpha^{-1}(\varkappa\beta(\sigma_k+O(1)))(\sigma_k+O(1)))) + \sigma_k\alpha^{-1}(\varkappa\beta(\sigma_k+O(1))) =$$
$$= O(\alpha^{-1}(\varkappa\beta(\sigma_k+O(1)))),\ k\to\infty.$$

Оскільки $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$, звідси випливає, що $\lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) \leq \varkappa$. З огляду на довільність $\varkappa$ маємо $\lambda_{\alpha\beta}(\ln\mu) \leq \varkappa_{\alpha\beta}(f)$. Якщо $\varkappa_{\alpha\beta}(f) = +\infty$, то ця нерівність очевидна.

Твердження 6.3. *Якщо* $\alpha \in L^0$, $\beta \in L$ *і* f *має регулярне зростання відносно* F, *то* $\lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \lambda_{\alpha\beta}(I)$.

Дійсно, якщо f має регулярну варіацію відносно F, тоді ([177, с. 75])

$$\ln \mu(\sigma) \leq (1 + o(1)) \ln I(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \tag{6.16}$$

звідки $\lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \lambda_{\alpha\beta}(I)$.

Твердження 6.4. *Нехай функції* $\alpha \in L^0$ *і* $\beta \in L^0$ *задовольняють умову* (6.14), *а функція* $F \in V$ *задовольняє умову* (6.15). *Якщо* $\varrho_{\alpha\beta}(\ln \mu) < +\infty$, *то* $\lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \geq \lambda_{\alpha\beta}(I)$.

Дійсно, оскільки $\varrho_{\alpha\beta}(\ln \mu) < +\infty$, то $k_{\alpha\beta}(f) = \varrho_{\alpha\beta}(\ln \mu) < +\infty$, тобто

$$\ln f(x) \leq -x\beta^{-1}(\alpha(x)/k))$$

для деяких $k < +\infty$ і врахувавши (6.15) отримаємо

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln F(x)}{\ln(1/f(x))} = 0.$$

Тому ([177, с. 61])

$$I(\sigma) \leq K(\varepsilon)\mu(\sigma/(1-\varepsilon))^{1-\varepsilon} \tag{6.17}$$

для кожного $\varepsilon \in (0; 1)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$. Отже,

$$\lambda_{\alpha\beta}(I) \leq \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\beta(\sigma/(1-\varepsilon))}{\beta(\sigma)}.$$

Оскільки $\beta \in L^0$, то за лемою 6.3

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\beta(\sigma/(1-\varepsilon))}{\beta(\sigma)} \to 1, \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким чином, $\lambda_{\alpha\beta}(I) \leq \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu)$.

З тверджень 6.1–6.4 випливає наступна теорема.

Теорема 6.6. *Нехай функції* $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ *і* $\beta \in L^0$ *задовольняють умову* (6.14), *а функція* $F \in V$ — *умову* (6.15). *Припустимо, що функція* f *має регулярну варіацію відносно* F *і* $v(x) = -(\ln f(x))'$ *є неперервною та зростаючою на* $[x_0; +\infty)$. *Якщо* $\varrho_{\alpha\beta}(I) < +\infty$, *то* $\lambda_{\alpha\beta}(I) = \varkappa_{\alpha\beta}(f)$.

Модифіковані узагальнені порядки. Границі

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right), \quad \lambda^M_{\alpha\beta}(I) = \varliminf_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right) \tag{6.18}$$

називаються *модифікованим узагальненим порядком і модифікованим нижнім узагальненим порядком* I, відповідно. Якщо в (6.18) вибрати $\ln \mu(\sigma)$ замість $I(\sigma)$, то ми отримаємо означення $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln \mu)$ і $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln \mu)$.

Твердження 6.5. *Нехай* $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ *і* $\beta \in L^0$ *або* $\alpha \in L^0$ *і* $\beta \in L_{\mathrm{si}}$, *а функція* $F \in V$, *задовольняє умову* (6.15). *Тоді* $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln \mu) = k_{\alpha\beta}(f)$.

Доведення. Припустимо, що $\varrho_{\alpha\beta}^M(\ln\mu) < +\infty$. Тоді для кожного $\varrho > \varrho_{\alpha\beta}^M(\ln\mu)$, усіх $\sigma \geq \sigma_0(\varrho)$ та $x \geq 0$ отримуємо

$$\ln f(x) + \sigma x \leq \ln\mu(\sigma) \leq \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)),$$

тобто $\ln f(x) \leq \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)) - \sigma x$. Виберемо

$$\sigma = \sigma(x) = \beta^{-1}(\alpha(\delta x)/\varrho)$$

для довільного $\delta \in (0;1)$. Тоді $\sigma(x) \geq \sigma_0(\varrho)$ для $x \geq x_0 = x_0(\varrho,\delta)$ і

$$\ln f(x) \leq -(1-\delta)x\beta^{-1}(\alpha(\delta x)/\varrho)$$

для $x \geq x_0$, звідки

$$k_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)} =$$

$$= \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{\alpha(\delta x)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)} \frac{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)}\right) \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)} \leq$$

$$\leq \varrho \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\beta(x/(1-\delta))}{\beta(x)} \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)}. \tag{6.19}$$

Якщо $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ та $\beta \in L^0$, то

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)} = 1$$

і за лемою 6.3

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\beta(x/(1-\delta))}{\beta(x)} \to 1 \quad \delta \to 0.$$

Звідси з огляду на довільність ϱ отримуємо

$$k_{\alpha\beta}(f) \leq \varrho_{\alpha\beta}^M(\ln\mu). \tag{6.20}$$

Якщо $\beta \in L_{\mathrm{si}}$ і $\alpha \in L^0$, то

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\beta(x/(1-\delta))}{\beta(x)} = 1,$$

і за лемою 6.3

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)} \to 1$$

при $\delta \to 1$, і знову отримуємо нерівність (6.20). Якщо $\varrho_{\alpha\beta}^M(\ln\mu) = +\infty$, то нерівність (6.20) очевидна.

Тепер припустимо, що $k_{\alpha\beta}(f) \neq \varrho_{\alpha\beta}^M(\ln\mu)$. Тоді з огляду на (6.19) $k_{\alpha\beta}(f) < \varrho_{\alpha\beta}^M(\ln\mu)$ і якщо ми виберемо $k_{\alpha\beta}(f) < \varrho < \varrho_{\alpha\beta}^M(\ln\mu)$ тоді

$$\ln f(x) \leq -x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho))$$

для $x \geq x_0(\varrho)$, тобто

$$\ln\mu(\sigma) \leq \max\left\{\max_{x\leq x_0(\varrho)}(\ln f(x)+x\sigma),\ \max_{x\geq x_0(\varrho)}(-x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho))+x\sigma)\right\} \leq$$
$$\leq \max_{x\geq 0}(x(\sigma-\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho)))+O(\sigma), \quad \sigma\to+\infty.$$

Оскільки $\ln\mu(\sigma)\to+\infty$ при $\sigma\to+\infty$, функція $x(\sigma-\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho))$ досягає максимуму в точці $x = x(\sigma)$ так, що $\sigma-\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho) > 0$, тобто $x(\sigma)\leq\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$. Тому

$$\ln\mu(\sigma) \leq x(s)(\sigma-\beta^{-1}(\alpha(x(\sigma))/\varrho))+O(\sigma) \leq$$
$$\leq \sigma x(\sigma)+O(\sigma) \leq \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))+O(\sigma),$$

при $\sigma\to+\infty$, звідки випливає, що $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)\leq\varrho$. Суперечність. □

Твердження 6.6. *Нехай $\alpha\in L^0$, $\beta\in L^0$, і f мають регулярну варіацію відносно F. Тоді $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)=\varrho^M_{\alpha\beta}(I)$.*

Доведення. Дійсно, якщо f має регулярну варіацію відносно F, то з (6.16) ми отримуємо $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)\leq\varrho^M_{\alpha\beta}(I)$. З іншого боку, якщо $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)<+\infty$, то з урахуванням твердження 6.5, як у доведенні твердження 6.4, маємо (6.17) для кожного $\varepsilon\in(0;1)$ і всіх $\sigma\geq\sigma_0(\varepsilon)$. Оскільки $\alpha\in L^0$ і $\beta\in L^0$, маємо $\varrho^M_{\alpha\beta}(I)\leq\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)$. Тому, $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)=\varrho^M_{\alpha\beta}(I)$. □

Об'єднавши твердження 6.5 і 6.6, отримаємо наступну теорему.

Теорема 6.7. *Нехай $\alpha\in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta\in L^0$ або $\alpha\in L^0$ і $\beta\in L_{\mathrm{si}}$, функція $F\in V$ задовольняє умову (6.15), а f має регулярну варіацію відносно F. Тоді*

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I)=k_{\alpha\beta}(f).$$

Твердження 6.7. *Нехай або $\alpha\in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta\in L^0$, або $\alpha\in L^0$ і $\beta\in L_{\mathrm{si}}$. Тоді $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)\geq\varkappa_{\alpha\beta}(f)$. Крім того, якщо $v(x)=-(\ln f(x))'$ неперервна і зростаюча на $[x_0;+\infty)$, то $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)=\varkappa_{\alpha\beta}(f)$.*

Доведення. Дійсно, якщо $\varkappa_{\alpha\beta}(f)>0$, то для кожного $\varkappa\in(0,\varkappa_{\alpha\beta}(f))$ і всіх $x\geq x_0=x_0(\varkappa)$, як і у доведенні твердження 6.7 маємо

$$\ln\mu(\sigma)\geq -x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa))+x\sigma$$

для всіх σ та $x\geq x_0$. Вибираючи $x=\alpha^{-1}(\varkappa\beta(\delta\sigma))$, де $0<\delta<1$, отримаємо $\ln\mu(\sigma)\geq(1-\delta)\sigma a^{-1}(\varkappa\beta(\delta\sigma))$. Отже,

$$\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)\geq\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha((1-\delta)a^{-1}(\varkappa\beta(\delta\sigma)))}{\beta(\sigma)}.$$

Якщо $\alpha\in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta\in L^0$, то ми маємо, як вище,

$$\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)\geq\varkappa\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\beta(\delta\sigma)}{\beta(\sigma)}\to\varkappa$$

при $\delta \to 1$. Якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\mathrm{si}}$, тоді

$$\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) \geq \varkappa \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha((1-\delta)a^{-1}(\varkappa\beta(\delta\sigma)))}{\varkappa\beta(\delta\sigma)} \frac{\beta(\delta\sigma)}{\beta(\sigma)} = \varkappa \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\alpha((1-\delta)a^{-1}(t)}{t} \to \varkappa$$

при $\delta \to 0$. Отож, $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) \geq \varkappa_{\alpha\beta}(f)$.

З іншого боку, як і в доведенні твердження 6.2, отримаємо $\ln\mu(\sigma) = \ln f(x) + \sigma x$ для $\sigma = v(x)$. Припустимо, що $\varkappa_{\alpha\beta}(f) < +\infty$, для $\varkappa > \varkappa_{\alpha\beta}(f)$ і деякої послідовності $(x_k) \uparrow +\infty$, як і у доведенні твердження 6.2 маємо для $\sigma_k = v(x_k)$

$$\ln\mu(\sigma_k) \leq \max_x\{-x\beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa)) + x\sigma_k\} = \max_x\{-x(\sigma_k - \beta^{-1}(\alpha(x)/\varkappa)))\}.$$

Отже, як і в доведенні твердження 6.5,

$$\ln\mu(\sigma_k) \leq \sigma_k\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma_k)) + O(\sigma_k), \quad k\to\infty,$$

звідки випливає, що $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) \leq \varkappa$. Залишається зауважити, що $\varkappa$ — довільне. $\square$

Твердження 6.8. *Нехай $\alpha \in L^0$, $\beta \in L^0$, $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) < +\infty$, функція $F \in V$ задовольняє умову* (6.15)*, а f має регулярну варіацію відносно F. Тоді*

$$\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) = \lambda^M_{\alpha\beta}(I).$$

Доведення. Дійсно, оскільки f має регулярну варіацію відносно F, то з (6.16) отримуємо $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) \leq \lambda^M_{\alpha\beta}(I)$. З іншого боку, оскільки $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) < +\infty$, то (6.17) виконується для кожного $\varepsilon \in (0;1)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$. Оскільки $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$, то $\lambda^M_{\alpha\beta}(I) \leq \lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu)$. Тому, $\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln\mu) = \lambda^M_{\alpha\beta}(I)$. $\square$

З тверджень 6.7 і 6.8 ми отримуємо наступну теорему.

Теорема 6.8. *Нехай $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\mathrm{si}}$ і функція $F \in V$ задовольняє умову* (6.15)*. Припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і*

$$v(x) = -(\ln f(x))' \uparrow +\infty, \quad x_0 \leq x \to +\infty.$$

Тоді $\lambda^M_{\alpha\beta}(I) = \varkappa_{\alpha\beta}(f)$.

Аналоги теореми 6.3. Нехай $LS(F)$ — клас інтегралів Лапласа-Стілт'єса, для яких $\sigma_c = \sigma_\mu = +\infty$. Припустимо, що $I_j \in LS(F)$, $1 \leq j \leq m$ і

$$I_j(\sigma) = \int_0^\infty f_j(x)e^{x\sigma}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{6.21}$$

Наступна теорема є аналогом теореми 6.3.

Теорема 6.9. *Нехай функції $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ задовольняють умову* (6.14)*, а функція $F \in V$ —* (6.15)*. Припустимо, що всі функції f_j мають регулярну варіацію відносно F, а $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ є неперервною та зростає на $[x_0; +\infty)$. Також припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і*

$$\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = (1+o(1))\prod_{j=1}^m \beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)^{\omega_j}, \; x\to+\infty, \tag{6.22}$$

де $\omega_j > 0$ *для* $1 \le j \le m$ *і* $\sum_{1\le j\le m} \omega_j = 1$.

Якщо всі інтеграли (6.21) *мають регулярне* $\alpha\beta$*-зростання (тобто* $\lambda_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho_{\alpha\beta}(I_j) < +\infty$*), то інтеграл* (6.12) *має регулярне* $\alpha\beta$*-зростання і*

$$\varrho_{\alpha\beta}(I) = \prod_{j=1}^{m} (\varrho_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

Доведення. За теоремою 6.5 $\varrho_{\alpha\beta}(I_j) = k_{\alpha\beta}(f_j)$ та за теоремою 6.6 $\lambda_{\alpha\beta}(I_j) = \varkappa_{\alpha\beta}(f_j)$. Оскільки $\lambda_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho_j < 1$, то $k_{\alpha\beta}(f_j) = \varkappa_{\alpha\beta}(f_j) = \varrho_j$, тобто

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)} = \varrho_j. \tag{6.23}$$

Тому з (6.22) ми отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha(x)} \prod_{j=1}^{m} \beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)^{\omega_j} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right)^{\omega_j} =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\varrho_j}\right)^{\omega_j},$$

тобто

$$\prod_{j=1}^{m} \varrho_j^{\omega_j} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)} = k_{\alpha\beta}(f) = \varkappa_{\alpha\beta}(f). \tag{6.24}$$

За твердженнями 6.2 і 6.1

$$\lambda_{\alpha\beta}(\ln I) \ge \lambda_{\alpha\beta}(\ln \mu) \ge \varkappa_{\alpha\beta}(f)$$

і за теоремою 6.5 $\varrho_{\alpha\beta}(\ln I) = k_{\alpha\beta}(f)$. Отже,

$$\varrho_{\alpha\beta}(I) = \lambda_{\alpha\beta}(I) = \prod_{j=1}^{m} (r_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

□

Якщо ми виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \ge x_0$, то за означеннями $\varrho_{\alpha\beta}(I)$ і $\lambda_{\alpha\beta}(I)$ отримаємо означення R-порядку ϱ_R і нижчого R-порядку λ_R, відповідно. Вибравши ще $m = 2$ і $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$, отримаємо таке твердження.

Наслідок 6.3. *Нехай* $F \in V$ *і* $\ln F(x) = o(x \ln x)$ *при* $x \to +\infty$. *Припустимо, що функції* f_j, $j \in \{1; 2\}$, *мають регулярну варіацію відносно* F *і* $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ *неперервна і зростає на* $[x_0; +\infty)$. *Також припустимо, що* f *має регулярну варіацію відносно* F *і*

$$\ln\frac{1}{f(x)} = (1 + o(1))\sqrt{\ln\frac{1}{f_1(x)}\ln\frac{1}{f_2(x)}},\ x \to +\infty.$$

Якщо інтеграли I_1 і I_2 мають регулярне R-зростання (тобто $\lambda_R(I_j) = \varrho_R(I_j) < +\infty$ для $j \in \{1;2\}$), то інтеграл (6.12) *має регулярне R-зростання та*

$$\varrho_R(I) = \sqrt{\varrho_R(I_1)\varrho_R(I_1)}.$$

Використовуючи модифіковані узагальнені порядки, отримуємо наступну теорему.

Теорема 6.10. *Нехай або $\alpha \in L_{\rm si}$ і $\beta \in L^0$ або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\rm si}$, і функція $F \in V$ задовольняє умову* (6.15). *Припустимо, що f_j, $j \in \{1;2\}$, мають регулярну варіацію відносно F, а $v(x) = -(\ln f(x))'$ неперервна і зростаюча на $[x_0;+\infty)$. Також припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і виконується* (6.22).

Якщо всі інтеграли (6.21) *мають регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання (тобто $\lambda^M_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) < +\infty$), то інтеграл* (6.12) *має регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання і*

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \prod_{j=1}^{m} (\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

Доведення. За теоремою 6.7 $\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) = k_{\alpha\beta}(f_j)$ та за теоремою 6.8 $\lambda^M_{\alpha\beta}(I_j) = \varkappa_{\alpha\beta}(f_j)$. Оскільки $\lambda^M_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho_j < 1$, то $k_{\alpha\beta}(f_j) = \varkappa_{\alpha\beta}(f_j) = \varrho_j$, тобто виконується (6.23). Тому, як і в доведенні теореми 6.9, ми отримаємо (6.24) з (6.22). За твердженнями 6.7 і 6.6

$$\lambda^M_{\alpha\beta}(\ln I) \geq \lambda^M_{\alpha\beta}(\ln \mu) \geq \varkappa_{\alpha\beta}(f)$$

і за теоремою 6.7 $\varrho^M_{\alpha\beta}(\ln I) = k_{\alpha\beta}(f)$. Отже,

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \lambda_{\alpha\beta}(I) = \prod_{j=1}^{m} (r^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

□

Якщо ми виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = \ln x$ для $x \geq x_0$, то з означень $\varrho_{\alpha\beta}(I)$ і $\lambda_{\alpha\beta}(I)$ одержимо означення логарифмічного порядку ϱ_l і нижчого логарифмічного порядку λ_l, відповідно. Оскільки

$$\frac{1}{\ln \sigma} \ln\left(\frac{\ln I(\sigma))}{\sigma}\right) = \frac{\ln\ln I(\sigma)}{\ln \sigma} - 1,$$

то для такої функції маємо $\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \varrho_l(I)$ і $\lambda^M_{\alpha\beta}(I) = \lambda_l(I)$. Тому, вибираючи $m = 2$ і $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$, ми отримаємо таке твердження.

Наслідок 6.4. *Нехай $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$. Припустимо, що функції f_j, $j \in \{1;2\}$, мають регулярну варіацію відносно F і $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ неперервна і зростає на $[x_0;+\infty)$. Також припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і*

$$\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = (1+o(1))\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right)\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right)},\ x \to +\infty. \quad (6.25)$$

Якщо інтеграли I_1 і I_2 мають регулярний логарифмічний ріст (тобто $\lambda_l(I_j) = \varrho_l(I_j) \in (1;+\infty)$ для $j \in \{1;2\}$), то інтеграл (6.12) *має регулярний логарифмічний ріст і*

$$\varrho_l(I) = \sqrt{(\varrho_l(I_1)-1)(\varrho_l(I_1)-1)}.$$

Якщо ми виберемо $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = \ln x$ для $x \geq x_0$, то

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = T(I) := \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln\sigma}, \quad \lambda^M_{\alpha\beta}(I) = t(I) := \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln\sigma},$$

і отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 6.5. *Нехай $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x^2)$ при $x \to +\infty$. Припустимо, що функції f_j, $j \in \{1;2\}$, мають регулярну варіацію відносно F і $v_j(x) = -(\ln f_j(x))'$ неперервна і зростає на $[x_0;+\infty)$. Також припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і виконується* (6.25). *Якщо $t(I_j) = T(I_j) < +\infty$ для $j \in \{1;2\}$, то для інтеграла* (6.12)

$$t(I) = T(I) = \sqrt{T(I_1)T(I_1)}.$$

Аналоги теореми 6.4. Оскільки

$$\varrho_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\exp\{\alpha(\ln I(\sigma))\}}{\ln\exp\{\beta(\sigma)\}},$$

то визначимо узагальнений тип $T_{\alpha\beta}(I)$ інтеграла (6.12) за формулою

$$T_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\exp\{\alpha(\ln I(\sigma))\}}{\exp\{\varrho\beta(\sigma)\}}, \ (\varrho = \varrho_{\alpha\beta}(I)).$$

З теореми 6.5 випливає наступна лема.

Лема 6.4. *Припустимо, що функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ неперервно диференційовні,*

$$x\alpha'(x) = o(1), \, x\beta'(x) = O(1), \quad x \to +\infty$$

і для кожного $c \in (-\infty;+\infty)$

$$\frac{d\beta^{-1}(\alpha(x)+c)}{d\ln x} = O(1), \ x \to +\infty. \tag{6.26}$$

Якщо $F \in V$, f має регулярну варіацію відносно F і для кожного $c \in (-\infty;+\infty)$

$$\ln F(x) = o(x\beta^{-1}(\alpha(x)+c)), \ x \to +\infty, \tag{6.27}$$

то

$$T_{\alpha\beta}(I) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\exp\{\alpha(x)\}}{\exp\left\{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right\}}.$$

Дійсно, якщо $\alpha_1 \in L$ і $\frac{x\alpha_1'(x)}{\alpha_1(x)} = o(1)$ при $x \to +\infty$, то $\alpha_1 \in L_{si}$, а якщо $\beta_1 \in L$ і $\frac{x\beta_1'(x)}{\beta_1(x)} = O(1)$ при $x \to +\infty$, то $\beta_1 \in L^0$. Звідси випливає, що якщо

$$\alpha_1(x) = e^{\alpha(x)}, \ \beta_1(x) = e^{\beta(x)}, \ x\alpha'(x) = o(1), \ x\beta'(x) = O(1), \quad x \to +\infty,$$

то $\alpha_1 \in L_{\rm si}$ і $\beta_1 \in L^0$. З (6.26) випливає умова (6.14) з α_1 і β_1 замість α і β, відповідно. З умови (6.27) випливає (6.15) з α_1 і β_1 замість α і β, відповідно. Отже, з теореми 6.5 випливає лема 6.4.

Теорема 6.11. *Нехай функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ неперервно диференційовні, $x\alpha'(x) = o(1)$, $x\beta'(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$ та (6.14) і (6.26) виконуються. Нехай $F \in V$, f і f_j мають регулярну варіацію відносно F і виконується (6.27). Припустимо, що всі інтеграли (6.21) мають однаковий узагальнений порядки $\varrho_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho \in (0; +\infty)$ і узагальнені типи $T_{\alpha\beta}(I_j) \in (0; +\infty)$. Припустимо також, що $f_1(x) > 0$ для всіх $x \geq x_0$ і для всіх $2 \leq j \leq m$*

$$\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right) \leq (1+o(1))\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right), \ x \to +\infty. \tag{6.28}$$

Якщо $\omega_j > 0$ для $1 \leq j \leq m$, $\sum_{1\leq j\leq m}\omega_j = 1$ і

$$\exp\left\{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right\} =$$

$$= (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\exp\left\{\omega_j\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right\}, \ x \to +\infty, \tag{6.29}$$

то інтеграл (6.12) має узагальнений порядок $\varrho_{\alpha\beta}(I) = \varrho$ та узагальнений тип

$$T_{\alpha\beta}(I) \leq \prod_{j=1}^{m} T_{\alpha\beta}(I_j)^{\omega_j}.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що з умов $x\alpha'(x) = o(1)$, $x\beta'(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$ випливає, що $\alpha \in L_{\rm si}$ і $\beta \in L^0$, і з (6.27) випливає (6.15). Таким чином, функції α, β і F задовольняють припущення теореми 6.5.

З (6.29) маємо

$$\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = \sum_{j=1}^{m}\omega_j\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right) + o(1), \ x \to +\infty. \tag{6.30}$$

Тому за теоремою 6.5

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha\beta}(I)} = \varliminf_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) \geq \sum_{j=1}^{m}\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\omega_j}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right) = \frac{1}{\varrho}.$$

З іншого боку, з огляду на (6.28) отримаємо з(6.30)

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha\beta}(I)} \leq \sum_{j=1}^{m}\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\omega_j}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right) = \frac{1}{\varrho}.$$

Тому, $\varrho_{\alpha\beta}(I) = \varrho$.

З (6.29) і леми 6.4 випливає, що

$$\frac{1}{T_{\alpha\beta}(I)} = \varliminf_{x\to+\infty}\frac{1}{\exp(\alpha(x))}\prod_{j=1}^{m}\exp\left\{\varrho\omega_j\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right\} \geq$$

$$\geq \prod_{j=1}^{m}\varliminf_{x\to+\infty}\left(\frac{\exp\left\{\varrho\omega_j\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right\}}{\exp\alpha(x)}\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{T_{\alpha\beta}(I)}\right)^{\omega_j}.$$

□

Якщо ми виберемо $\alpha(x)=\ln\ln\ln x$, $\beta(x)=\ln x$ для $x\geq x_0$, $m=2$ і $\omega_j=1/2$, то з теореми 6.11 ми отримуємо таке твердження.

Наслідок 6.6. *Нехай $F\in V$, $\ln F(x)=o(x\ln\ln x)$ при $x\to+\infty$ і функції f і f_j ($j\in\{1;2\}$) мають регулярну варіацію відносно F. Припустимо, що $f_1(x)>0$ для всіх $x\geq x_0$ і*

$$\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right)\leq(1+o(1))\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right),\quad x\to+\infty.$$

Якщо

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln\ln\ln I_j(\sigma)}{\ln\sigma}=\varrho\in(0;+\infty)$$

для $j\in\{1;2\}$ та

$$\ln\frac{1}{f(x)}=(1+o(1))\sqrt{\ln\frac{1}{f_1(x)}\ln\frac{1}{f_2(x)}},\ x\to+\infty,$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln\ln\ln I(\sigma)}{\ln\sigma}=\varrho,$$
$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{x}{\exp_3\left\{\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)^{\varrho}\right\}}\leq$$
$$\leq\sqrt{\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{x}{\exp_3\left\{\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)^{\varrho}\right\}}\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{x}{\exp_3\left\{\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)^{\varrho}\right\}}},$$

де $\exp_3 x=\exp\{\exp\{e^x\}\}$.

Для інтеграла (6.12) зі скінченним модифікованим узагальненим порядком визначимо узагальнений тип $T_{\alpha\beta}^M(I)$ за формулою

$$T_{\alpha\beta}^M(I)=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I(\sigma))}{\sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))},\quad(\varrho=\varrho_{\alpha\beta}^M(I)).$$

Тоді маємо наступну лему.

Лема 6.5. *Нехай $\beta\in L$, $\beta_1(x)=\alpha^{-1}(\varrho\beta(x))\in L_{\mathrm{si}}$, функція $F\in V$ задовольняє умову $\ln F(x)=o(x\beta_1^{-1}(cx))$ при $x\to+\infty$ для кожного $c\in(0;+\infty)$, і f має регулярну варіацію щодо F. Тоді*

$$T_{\alpha\beta}^M(I)=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{x}{\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right)}.$$

Дійсно,

$$\beta_1^{-1}(cx))=\beta^{-1}(c\alpha(x/\varrho))\leq\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho_1),$$

оскільки з умови $\alpha\in L^0$ випливає, що $\alpha(cx)\leq K(c)\alpha(cx)$ для кожного $c\in(0,+\infty)$. Отже, якщо вибирати $\alpha_1(x)\equiv x$ для $x\geq x_0$, то з теореми 6.7 з α_1 і β_1 замість α і β, відповідно, ми доведемо лему 6.5.

Теорема 6.12. *Нехай*

$$\beta \in L_{\rm si},\ \alpha(x) = (1+o(1))\ln x,\quad x \to +\infty,\quad \text{та}\ \ \beta_1(x) = \alpha^{-1}(\varrho\beta(x)) \in L_{\rm si}.$$

Нехай $F \in V$, $\ln F(x) = o(x\beta_1^{-1}(x))$ *при* $x \to +\infty$ *і* f *та* f_j *мають регулярну варіацію відносно* F. *Припустимо, що всі інтеграли* (6.21) *мають однаковий модифікований узагальнений порядок* $\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) = \varrho \in (0; +\infty)$ *і модифіковані узагальнені типи* $T^M_{\alpha\beta}(I_j) \in (0; +\infty)$. *Припустимо також, що* $f_1(x) > 0$ *для всіх* $x \geq x_0$ *і виконується* (6.28).

Якщо $\omega_j > 0$ *для* $1 \leq j \leq m$, $\sum_{1\leq j\leq m}\omega_j = 1$ *і*

$$\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right) = \\ = (1+o(1))\prod_{j=1}^{m}\left(\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right)\right)^{\omega_j},\ x \to +\infty, \tag{6.31}$$

тоді інтеграл (6.12) *має модифікований узагальнений порядок* $\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \varrho$ *і модифікований узагальнений тип*

$$T^M_{\alpha\beta}(I) \leq \prod_{j=1}^{m} T^M_{\alpha\beta}(I_j)^{\omega_j}.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що з умови

$$\ln F(x) = o(x\beta_1^{-1}(x)),\ x \to +\infty$$

випливає (6.15), оскільки $\beta_1^{-1}(x)) = \beta^{-1}(\alpha(t)/\varrho))$. Таким чином, функції α, β і F задовольняють умови теореми 6.7.

Оскільки $\alpha(x) = (1+o(1))\ln x$ при $x \to +\infty$, з (6.31) ми отримаємо (6.30). Як вище, з (6.30) за теоремою 6.7 маємо $1/\varrho^M_{\alpha\beta}(I) \geq 1/\varrho$. З іншого боку, з (6.28) і (6.30), як вище, ми отримаємо $1/\varrho^M_{\alpha\beta}(I) \leq 1/\varrho$. Тому, $\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \varrho$.

З (6.31) і леми 6.5 випливає, що

$$\frac{1}{T^M_{\alpha\beta}(I)} = \varliminf_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right) = \\ = \varliminf_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\prod_{j=1}^{m}\left(\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right)\right)^{\omega_j} \geq \\ \geq \prod_{j=1}^{m}\varliminf_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\alpha^{-1}\left(\varrho\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right)\right)\right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{T^M_{\alpha\beta}(I)}\right)^{\omega_j}.$$

□

Якщо ми виберемо $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = \ln\ln x$ для $x \geq x_0$, $m = 2$ і $\omega_j = 1/2$ тоді з теореми 6.12 ми отримаємо таке твердження.

Наслідок 6.7. *Нехай $F \in V$, $\ln F(x) = o(x\exp\{e^x\})$ при $x \to +\infty$ і функції f і f_j, $j \in \{1; 2\}$, мають регулярну варіацію відносно F. Припустимо, що $f_1(x) > 0$ для всіх $x \geq x_0$ і*

$$\ln\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right) \leq (1+o(1))\ln\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right), \quad x \to +\infty.$$

Якщо

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln I_j(\sigma) - \ln\sigma}{\ln\ln\sigma} = \varrho \in (0; +\infty)$$

для $j \in \{1; 2\}$ та

$$\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = (1+o(1))\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right)\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_2(x)}\right)},\ x \to +\infty,$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln I(\sigma) - \ln\sigma}{\ln\ln\sigma} = \varrho, \quad \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma\ln^{\varrho}\sigma} \leq \sqrt{\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I_1(\sigma)}{\sigma\ln^{\varrho}\sigma}\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln I_2(\sigma)}{\sigma\ln^{\varrho}\sigma}}.$$

Доведемо теорему, яка доповнює теореми 6.10 і 6.12.

Теорема 6.13. *Нехай або $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\mathrm{si}}$, $F \in V$, $\ln F(x) = o(x\beta^{-1}(\alpha^c(x)))$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$ та інтеграли (6.21) мають модифіковані загальні порядки $\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) \in (0; +\infty)$. Припустимо, що f має регулярну варіацію відносно F і виконується (6.22). Тоді:*

1) *якщо $f_1(x) > 0$ для всіх $x \geq x_0$ і для всіх $2 \leq j \leq m_0$*

$$\ln\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right) \leq (1+o(1))\ln\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_1(x)}\right),\ x \to +\infty, \tag{6.32}$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\beta(\sigma)}\ln\alpha\left(\frac{\ln I(\sigma)}{\sigma}\right) = 1 \tag{6.33}$$

та

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) \leq \prod_{j=1}^{m}(\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j};$$

2) *якщо $v(x) = -(\ln f(x))'$ є неперервна і зростаюча на $[x_0; +\infty)$ і всі інтеграли (6.21) мають регулярне модифіковане $\alpha\beta$–зростання, то інтеграл (6.12) має регулярне модифіковане $\alpha\beta$-зростання та*

$$\varrho^M_{\alpha\beta}(I) = \prod_{j=1}^{m}(\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j}.$$

Доведення. Оскільки $\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j) \in (0; +\infty)$, то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\ln\beta(\sigma)}\ln\alpha\left(\frac{\ln I_j(\sigma)}{\sigma}\right) = 1.$$

Відомо ([176]), що якщо $h \in L^0$, то h є RO–зростаючою функцією ([167, с. 86]), тобто для кожного $\lambda \in [1; +\infty)$ і всіх $x \geq x_0$ виконуються нерівності

$$1 \leq \frac{h(\lambda x)}{h(x)} \leq M(\lambda) < +\infty,$$

звідки випливає, що $\ln h \in L_{\mathrm{si}}$. Отже, використовуючи теорему 6.7 з $\ln \alpha$ і $\ln \beta$ замість α і β, відповідно, (умова $\ln F(x) = o(x\beta^{-1}(\alpha^c(x)))$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$ забезпечує умову (6.15)), і маємо

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \alpha(x)} \ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_j(x)} \right) = 1$$

для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, і з урахуванням (6.22)

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \alpha(x)} \ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} \right) = \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \alpha(x)} \sum_{j=1}^{m} \omega_j \ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_j(x)} \right) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m} \omega_j \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \alpha(x)} \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_1(x)} \right) = 1.$$

З іншого боку, з (6.32) випливає, що

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \alpha(x)} \ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} \right) =$$

$$= \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \alpha(x)} \left(\omega_1 \ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_1(x)} \right) + \sum_{j=2}^{m} \omega_j \ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_j(x)} \right) \right) \leq$$

$$\leq \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \alpha(x)} \sum_{j=1}^{m} \omega_j \ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_1(x)} \right) = 1,$$

тобто

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln \alpha(x)}{\ln \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} \right)} = 1$$

і за теоремою 6.7 рівність (6.33) виконується.

З умови $\ln F(x) = o(x\beta^{-1}(\alpha^c(x)))$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$ випливає умова

$$\ln F(x) = o(x\beta^{-1}(\alpha(cx))), \quad x \to +\infty$$

для кожного $c \in (0; +\infty)$. Отже, за теоремою 6.7 з (6.22) маємо

$$\frac{1}{\varrho^M_{\alpha\beta}(I)} = \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha(x)} \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} \right) = \varliminf_{x \to +\infty} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\alpha(x)} \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_j(x)} \right) \right)^{\omega_j} \geq$$

$$\geq \prod_{j=1}^{m} \varliminf_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha(x)} \beta \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_j(x)} \right) \right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{m} (\varrho^M_{\alpha\beta}(I_j))^{\omega_j},$$

тобто твердження 1) доведено.

Тепер, якщо $\varrho_{\alpha\beta}^{M}(I_j) = \varrho_{\alpha\beta}^{M}(I_j)$, то за теоремою 6.8

$$\frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right) \to \frac{1}{\varrho_{\alpha\beta}^{M}(I_j)},\ x \to +\infty,$$

для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ і з (6.22) ми отримаємо

$$\frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right) = (1 + o(1))\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f_j(x)}\right) =$$

$$= (1 + o(1))\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\varrho_{\alpha\beta}^{M}(I_j)}\right)^{\omega_j},\ x \to +\infty.$$

Звідси з теорем 6.7 та 6.8 випливає, що інтеграл (6.12) має регулярний модифікований $\alpha\beta$-ріст та

$$\varrho_{\alpha\beta}^{M}(I) = \prod_{j=1}^{m}(\varrho_{\alpha\beta}^{M}(I_j))^{\omega_j}.$$

□

6.3. Банахові простори та простори Фреше інтегралів Лапласа-Стілт'єса

Нехай V — клас невід'ємних неспадних необмежених неперервних справа на $[0; +\infty)$ функцій F. Припустимо, що дійсна функція f на $[0; +\infty)$ така, що інтеграл Лебега-Стілт'єса $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ існує для кожного $A \in [0; +\infty)$ та $\sigma \in \mathbb{R}$. Нехай

$$I(\sigma) = \int_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{6.34}$$

Інтеграл (6.34) є прямим узагальненням звичайного інтеграла Лапласа $I_o(\sigma) = \int_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dx$ і ряду Діріхле

$$D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n\sigma} \tag{6.35}$$

з невід'ємними показниками λ_n, $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$ при $n \to \infty$, якщо ми виберемо

$$F(x) = n(x) = \sum_{\lambda_n \le x} 1, \quad f(x) = \begin{cases} d_n, & \text{якщо } x = \lambda_n; \\ 0, & \text{якщо } x \ne \lambda_n \end{cases}$$

(див. також [21, 27, 95]).

Нехай

$$M(\sigma, I) := \int_0^{\infty} |f(x)|e^{x\sigma}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{6.36}$$

та $\mu(\sigma, I) := \max\{|f(x)|e^{x\sigma}\colon x \geq 0\}$ ($\sigma \in \mathbb{R}$) — максимум підінтегрального виразу. Зрозуміло, що якщо $f(x) \geq 0$ для всіх $x \geq 0$, то $M(\sigma, I) = I(\sigma)$, а асимптотичні властивості інтегралів такого вигляду розглядалися у [177]. Якщо σ_M є абсцисою збіжності інтегралу (6.36) і σ_μ є абсцисою існування максимуму підінтегральної функції, то [177, с. 13] $\sigma_M \geq \sigma_\mu$ за умови $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, ([177], с. 8).

$$\sigma_\mu = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{|f(x)|}.$$

Звідси випливає, що якщо $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$ та

$$\frac{1}{x} \ln \frac{1}{|f(x)|} \to +\infty,\ x \to +\infty, \tag{6.37}$$

тоді $\sigma_M = +\infty$, тобто інтеграл (6.34) збігається для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$.

Нехай h — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ функція. Тут будемо досліджувати властивості інтегралів (6.34), для яких

$$|f(x)| \exp\{xh(x)\} \to 0,\ x \to +\infty. \tag{6.38}$$

Спочатку зауважимо, що якщо $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то інтеграл

$$J_h(\sigma) = \int\limits_0^\infty e^{-xh(x)} e^{x\sigma} dF(x)$$

збіжний для всіх $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Через LS_h ми позначаємо клас інтегралів вигляду (6.34) з дійсними функціями f, для яких виконується (6.38). На LS_h ми визначимо дії

$$(I_1 + I_2)(x) = \int\limits_0^\infty (f_1(x) + f_2(x)) e^{x\sigma} dF(x),\ (\lambda I)(\sigma) = \int\limits_0^\infty \lambda f(x) e^{x\sigma} dF(x),$$

де

$$I_j(\sigma) = \int\limits_0^\infty f_j(x) e^{x\sigma} dF(x)$$

для $j \in \{1; 2\}$, і нехай

$$\|I\|_h = \sup\left\{|f(x)| \exp\{xh(x)\}\colon x \geq 0\right\}.$$

LS_h з цими діями є нормованим лінійним простором.

Теорема 6.14. *Якщо $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то $(LS_h, \|\cdot\|_h)$ є нерівномірно опуклим банаховим простором.*

Доведення. Нехай (I_p) — послідовність Коші у LS_h,

$$I_p(\sigma) = \int\limits_0^\infty f_p(x) e^{x\sigma} dF(x).$$

З (6.38) випливає, що $|f_p(x)|\exp\{xh(x)\}\to 0$ при $x\to+\infty$ для кожного p і для даного $\varepsilon>0$ існує $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ таке, що $\|I_p-I_q\|_h<\varepsilon$ для всіх $p\ge n_0$ і $q\ge n_0$, тобто

$$\sup\{|f_p(x)-f_q(x)|\exp\{xh(x)\}\colon x\ge 0\}<\varepsilon.$$

Тоді,

$$|f_p(x)\exp\{xh(x)\}-f_q(x)\exp\{xh(x)\}|<\varepsilon$$

для всіх $x\ge 0$, $p\ge n_0$ та $q\ge n_0$. Тобто, $(f_p(x)\exp\{xh(x)\})$ є послідовністю Коші в $\mathbb{R}$, тому вона збігається до $f_0(x)\exp\{xh(x)\}$ при $p\to\infty$. Оскільки

$$|f_0(x)|\exp\{xh(x)\}\le$$
$$\le|f_0(x)\exp\{xh(x)\}-f_p(x)|\exp\{xh(x)\}|+|f_p(x)|\exp\{xh(x)\}\to 0,\ x\to+\infty,$$

інтеграл

$$I_0(\sigma)=\int\limits_0^\infty f_0(x)e^{x\sigma}dF(x)$$

належить LS_h. Також маємо

$$\|I_p-I_0\|_h=\sup\{|f_p(x)-f_0(x)|\exp\{xh(x)\}\colon x\ge 0\}\to 0,\ p\to\infty,$$

тобто $(LS_h,\|\cdot\|_h)$ є повним і, отже, банаховим простором.

Тепер виберемо числа $0<a_n<b_n<c_n<+\infty$ так, що

$$\int\limits_0^{a_n} e^{-xh(x)}e^{x\sigma}dF(x)>0,\quad \int\limits_{b_n}^{c_n} e^{-xh(x)}e^{x\sigma}dF(x)>0.$$

Нехай

$$J_n(\sigma)=\int\limits_0^{a_n} e^{-xh(x)}e^{x\sigma}dF(x),$$

$$J_n^*(\sigma)=\int\limits_0^{a_n} e^{-xh(x)}e^{x\sigma}dF(x)+\int\limits_{b_n}^{c_n} e^{-xh(x)}e^{x\sigma}dF(x).$$

Тоді $J_n\in LS_h$, $J_n^*\in LS_h$,

$$\|J_n\|_h=1,\ \|J_n^*\|_h=1,\ \|J_n^*+J_n\|_h=2\ \text{ і }\ \|J_n^*-J_n\|_h=1\not\to 0,$$

тобто простір $(LS_h,\|\cdot\|_h)$ є нерівномірно опуклим (див., наприклад, [208, с. 183]). □

Наступне твердження стосується рівномірної збіжності (I_m).

Твердження 6.9. *Нехай $F\in V$ і $\ln F(x)=o(x)$ при $x\to+\infty$. Якщо $(I_m)\subset LS_h$ збігається до $I\in LS_h$ за $\|\cdot\|_h$, то $I_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $I(\sigma)$ на компактній підмножині $\mathbb{R}$.*

Доведення. Якщо $\|I_m - I\|_h < \varepsilon$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $m \ge m_0(\varepsilon)$, то

$$\sup\{|f_m(x) - f_0(x)|\exp\{xh(x)\}\colon x \ge 0\} < \varepsilon$$

і, отже, $|f_m(x) - f_0(x)|\exp\{xh(x)\} < \varepsilon$ для кожного $\varepsilon > 0$, всіх $m \ge m_0(\varepsilon)$ і всіх $x \ge 0$. Отож, якщо $m \ge m_0(\varepsilon)$ і $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, то з умови $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$ випливає, що

$$|I_m(\sigma) - I(\sigma)| \le$$

$$\le \int\limits_0^\infty |f_m(x) - f(x)|e^{xh(x)}e^{-xh(x)}e^{x\sigma}dF(x) < \varepsilon \int\limits_0^\infty e^{-xh(x)}e^{x\sigma}dF(x) \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_0^\infty e^{-x(h(x)-\sigma_2)}dF(x) \le \varepsilon \int\limits_0^\infty F(x)de^{-x(h(x)-\sigma_2)} \le \varepsilon \int\limits_0^\infty e^{K_1x}de^{-x(h(x)-\sigma_2)} \le K_2\varepsilon,$$

де $K_j = \mathrm{const} > 0$. Звідси випливає, що $I_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $I(\sigma)$ на $[\sigma_1, \sigma_2]$. $\square$

Зауваження 6.3. Твердження, протилежне до твердження 6.9, є хибним. Дійсно, нехай для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ і $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 1 \le x < 2; \\ n, & 2n \le x < 2(n+1), \end{cases} \qquad f_m(x) = \begin{cases} \alpha_{m,n} > 0, & x = 2n-1; \\ 0, & x \ne 2n-1. \end{cases}$$

Тоді для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$

$$I_m(\sigma) = \int\limits_0^\infty f_m(x)e^{x\sigma}dF(x) = \sum_n f_m(2n)e^{2n\sigma} = 0,$$

тобто $I_m(\sigma) \to I_0(\sigma)$ при $m \to \infty$ для всіх $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$. З іншого боку, якщо $\alpha_{m,1} - \alpha_{0,1} \ge \eta > 0$ для всіх $m \ge 1$, то

$$\|I_m - I_0\|_h = \sup\{|f_m(x) - f_0(x)|\exp\{xh(x)\}\colon x \ge 0\} \ge$$
$$\ge |f_m(1) - f_0(1)|\exp\{h(1)\} = |\alpha_{m,1} - \alpha_{0,1}|\exp\{h(1)\} \ge \eta\exp\{h(1)\} > 0.$$

Повернемося до вивчення дуальних просторів. Для $(LS_h, \|\cdot\|_h)$ через LS_h^* ми позначимо дуальний простір, тобто LS_h^* — сім'я всіх неперервних лінійних функціоналів на $(LS_h, \|\cdot\|_h)$. Нехай

$$\Lambda(I) = \int\limits_1^\infty f(x)g(x)dF(x),$$

де g — дійсна функція на $(1; +\infty)$ така, що

$$\int\limits_1^\infty |f(x)g(x)|dF(x) < +\infty.$$

Тоді Λ є лінійним функціоналом.

Твердження 6.10. *Для того, щоб $\Lambda \in LS_h^*$, достатньо збіжності інтегралу*

$$\int_1^{\infty} |g(x)| \exp\{-xh(x)\} dF(x) < +\infty. \tag{6.39}$$

Доведення. За означенням маємо

$$\|\Lambda(I)\|_h = \sup\{|\Lambda(I)| \colon \|I\|_h \le 1\} \le$$

$$\le \sup\left\{\int_0^{\infty} |f(x)|e^{xh(x)}|g(x)|e^{-xh(x)} dF(x) \colon \sup_{x>0} |f(x)|e^{-xh(x)} \le 1\right\} \le$$

$$\le \int_1^{\infty} |g(x)|e^{-xh(x)} dF(x) < +\infty,$$

тобто $\Lambda \in LS_h^*$. □

Гіпотеза. *Кожен обмежений лінійний функціонал Λ, визначений для $I \in (LS_h, \|\cdot\|_h)$, має вигляд*

$$\Lambda(I) = \int_1^{\infty} f(x)g(x) dF(x), \quad I(\sigma) = \int_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma} dF(x).$$

Нижче ми доведемо цю гіпотезу для ряду Діріхле (6.35), але спочатку наведемо деякі наслідки.

Нехай Ω — клас додатних необмежених функцій Φ на $(-\infty; +\infty)$ таких, що похідна Φ' додатна неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ позначимо через φ обернену функцію до Φ' і

$$\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$$

— функція, асоційована з Φ у сенсі Ньютона. Відомо [177, с. 30], що якщо $\Phi \in \Omega$, то $\ln \mu(\sigma, I) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$ тоді і тільки тоді, коли $\ln |f(x)| \le -x\Psi(\varphi(x))$ для всіх $x \ge x_0$. З огляду на це твердження в [178] вводиться клас LS_{Φ} інтегралів (6.34) з дійсними функціями f такими, що

$$|f(x)| \exp\{x\Psi(\varphi(x))\} \to 0, \quad x \to +\infty$$

і на LS_{Φ} визначено

$$\|I\|_{\Phi} = \sup\{|f(x)| \exp\{x\Psi(\varphi(x))\} \colon x \ge 0\}.$$

Якщо ми виберемо $h(x) = \Psi(\varphi(x))$, то $LS_h = LS_{\Phi}$, то отримаємо наступне твердження.

Наслідок 6.8. *Нехай $\Phi \in \Omega$, $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$. Тоді $(LS_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ є нерівномірно опуклим банаховим простором. Якщо $(I_m) \subset LS_\Phi$ збігається до $I \in LS_\Phi$ за нормою $\|\cdot\|_\Phi$, то $I_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $I(\sigma)$ на компактній підмножині $\mathbb{R}$. Якщо*

$$\int\limits_1^\infty |g(x)| \exp\{-x\Psi(\varphi(x))\} dF(x) < +\infty,$$

то функціонал $\Lambda(I) = \int_1^\infty f(x)g(x)dF(x)$ належить дуального простору LS_Φ^*.

Розглянемо банахові простори інтегралів Лапласа-Стілт'єса скінченного узагальненого порядку. Для цього через L позначимо клас неперервних невід'ємних на $(-\infty; +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0) \geq 0$ для $x \leq x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \leq x \to +\infty$. Будемо казати, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і

$$\alpha((1 + o(1))x) = 1 + o(1))\alpha(x), \quad x \to +\infty.$$

Далі, $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного фіксованого $c \in (0; +\infty)$, тобто α є повільно зростаючою функцією. Очевидно, що $L_{\mathrm{si}} \subset L^0$.

Якщо $\alpha \in L$ і $\beta \in L$, то границя

$$\varrho_{\alpha,\beta}[I] := \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, I))}{\beta(\sigma)}$$

називається *узагальненим* (α, β)*-порядком* I. Щоб мати формулу для знаходження $\varrho_{\alpha,\beta}[I]$, будемо казати ([177, с. 21]), що $|f|$ має регулярну варіацію відносно F, якщо існують $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $h > 0$ такі, що

$$\int\limits_{x-a}^{x+b} |f(t)| dF(t) \geq h|f(x)|$$

для всіх $x \geq a$. Позначимо

$$\kappa_{\alpha,\beta}[f] := \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{|f(x)|}\right)}.$$

У [177, с. 77–81] доведено таке твердження.

Лема 6.6 ([177])**.** *Нехай функції $\alpha \in L_{\mathrm{si}}$ і $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні і $\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} = O(1)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$. Припустимо, що $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x\beta^{-1}(c\alpha(x)))$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$. Тоді $\varrho_{\alpha,\beta}[I] \leq \kappa_{\alpha,\beta}[f]$. Якщо, крім того, $|f|$ має регулярну варіацію відносно F, тоді $\varrho_{\alpha,\beta}[I] = \kappa_{\alpha,\beta}[f]$.*

Нам також буде потрібна наступна лема.

Лема 6.7 ([176]). *Якщо $\beta \in L$ і*

$$B(\delta) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\beta((1+\delta)x)}{\beta(x)},\ \delta > 0,$$

тоді для того, щоб $\beta \in L^0$, необхідно і досить, щоб $B(\delta) \to 1$ при $\delta \to +0$.

З леми 6.7 випливає, що якщо $\beta \in L^0$, то для кожного фіксованого $t > 0$ існує таке $\tau = \tau(t) > 0$, що

$$\beta^{-1}((1+t)x) > (1+\tau)\beta^{-1}(x), \quad x > x_0, \tag{6.40}$$

бо якщо існує $(x_k) \uparrow +\infty$ таке, що

$$\beta^{-1}((1+t)x_k) \le (1+o(1))\beta^{-1}(x_k),\ k \to \infty,$$

тоді для $y_k = \beta^{-1}(x_k)$ маємо $(1+t)\beta(y_k) \le \beta((1+o(1))y_k)$ при $k \to \infty$, що неможливо.

Якщо $\kappa_{\alpha,\beta}[f] < +\infty$, тоді

$$\ln|f(x)| \le -x\beta^{-1}\Big(\frac{\alpha(x)}{\kappa_{\alpha,\beta}[f]+o(1)}\Big),\ \ x \to +\infty.$$

Тому для кожного $\kappa \in (\kappa_{\alpha,\beta}[f]; +\infty)$ з (6.40) випливає, що

$$|f(x)|\exp\left\{x\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\kappa}\right)\right\} \le$$
$$\exp\left\{-x\left(\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\kappa_{\alpha,\beta}[I]+o(1)}\right) - \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\kappa}\right)\right)\right\} \to 0 \tag{6.41}$$

при $x \to +\infty$. Через $LS_{(\alpha,\beta;\kappa)}$ позначимо клас інтегралів (6.34) з дійснозначними функціями f такими, що $\kappa_{\alpha,\beta}[f] < \kappa$. Використавши (6.41), на $LS_{(\alpha,\beta;\kappa)}$ можемо визначити

$$\|I\|_{(\alpha,\beta;\kappa)} = \sup\{|f(x)|\exp\{x\beta^{-1}(\alpha(x)/\kappa)\}\colon x \ge 0\}.$$

Наслідок 6.9. *Нехай $\alpha \in L$, $\beta \in L^0$, $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$. Тоді $(LS_{(\alpha,\beta;k)}, \|\cdot\|_{(\alpha,\beta;k)})$ є нерівномірно опуклим банаховим простором для кожного $\kappa \in (\varkappa_{\alpha,\beta}[I]; +\infty)$. Якщо $(I_m) \subset LS_{(\alpha,\beta;k)}$ збігається до $I \in LS_{(\alpha,\beta;k)}$ за $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta;k)}$, то $I_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $I(\sigma)$ на компактній підмножині $\mathbb{R}$. Якщо*

$$\int\limits_1^\infty |g(x)|\exp\{-x\beta^{-1}(\alpha(x)/k))\}dF(x) < +\infty,$$

то функціонал

$$\Lambda(I) = \int\limits_1^\infty f(x)g(x)dF(x)$$

належить дуального простору $LS^*_{(\alpha,\beta;k)}$.

Розглянемо випадок, коли $I(\sigma) = D(\sigma)$ є рядом Діріхле (6.35) з дійсними коефіцієнтами d_n. Припустимо, що цей ряд абсолютно збігається для всіх $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ і скажемо, що $D \in S_h$, якщо $|d_n| \exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\} \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо позначити

$$\|D\|_h = \sup\{|d_n| \exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\} \colon n \geq 1\}$$

тоді з теореми 6.14 ми отримуємо таке твердження.

Наслідок 6.10. *Якщо $\ln n(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то $(S_h, \|\cdot\|_h)$ є нерівномірним банаховим простором.*

Наступне твердження доповнює твердження 6.9.

Твердження 6.11. *Якщо $\ln n(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то для того, щоб $(D_m) \subset S_h$ збігався до $D \in S_h$ за $\|\cdot\|_h$ необхідно і достатньо, щоб $D_m(\sigma)$ рівномірно сходилася до $D(\sigma)$ на кожній компактній підмножині $\mathbb{R}$.*

Доведення. Необхідність випливає з твердження. Навпаки, нехай $D_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $D(\sigma)$ над кожним $B = [\sigma_1, \sigma_2]$, де

$$D_m(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{m,n} \exp\{\lambda_n \sigma\}.$$

Тоді $|d_{m,n} - d_n| \exp\{\lambda_n \sigma_1\} < \varepsilon$ для всіх $n \geq 1$ і всіх $m \geq m_0 = m_0(\varepsilon, \sigma_1)$, звідки

$$|d_{m,n} - d_n| \exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\} \leq \varepsilon \exp\{-\lambda_n(\sigma_1 - h(\lambda_n))\}.$$

Вибираючи $\sigma_1 = h(\lambda_n)$, ми отримаємо $|d_{m,n} - d_n| \exp\{\lambda_n h(\lambda_n)\} \leq \varepsilon$ для кожного ε, усіх $n \geq 1$ та всіх $m \geq m_0^* = m_0^*(\varepsilon, n)$, тобто $\|D_m - D\|_h \to 0$ при $m \to \infty$. $\square$

Для $D \in (S_h, \|\cdot\|_h)$ через S_h^* ми позначаємо дуальний простір і нехай

$$\Lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n,$$

де g_n — дійсна послідовність така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} < +\infty. \tag{6.42}$$

Тоді Λ є лінійним функціоналом, і ми доведемо нашу гіпотезу для $I(\sigma) = D(\sigma)$.

Твердження 6.12. *Кожен обмежений лінійний функціонал Λ, визначений для $(S_h, \|\cdot\|_h)$, має вигляд*

$$\Lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n, \quad D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp\{\lambda_n \sigma\}, \tag{6.43}$$

де g_n — дійсна послідовність, що задовольняє (6.42).

Доведення. Як і в доведенні твердження 6.10 з огляду на (6.42) маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n g_n| \le \sup_{n\ge 1} |d_n| e^{\lambda_n h(\lambda)} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| e^{-\lambda_n h(\lambda_n)} = \|D\|_h \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| e^{-\lambda_n h(\lambda_n)} < +\infty,$$

тобто Λ є добре визначеним функціоналом на $(S_h, \|\cdot\|_h)$. Крім того,

$$|\Lambda(D)| \le \|D\|_h \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| e^{-\lambda_n h(\lambda_n)},$$

звідки

$$\|\Lambda\|_h \le \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\}. \tag{6.44}$$

І навпаки, спочатку зауважимо, що якщо $D \in (S_h, \|\cdot\|_h)$ і

$$D_m(\sigma) = \sum_{n=1}^{m} d_n e^{\lambda_n \sigma}$$

тоді

$$\|D_m - D\|_h = \sup_{n>m} |d_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} \to 0$$

при $m \to \infty$ і за твердженням 6.9 $D_m(\sigma)$ рівномірно збігається до $D(\sigma)$ на кожній компактній підмножині $\mathbb{R}$. Отже, якщо $\Lambda \in S_h^*$ і ми визначимо $\Lambda(e^{\sigma\lambda_n}) = g_n$ для кожного n, тоді

$$\Lambda(D) = \Lambda\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} d_n \exp\{\sigma\lambda_n\}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} d_n \Lambda(\exp\{\sigma\lambda_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n.$$

Тепер доведемо, що $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n g_n| \le \|\Lambda\|_h$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n g_n| < +\infty$. Для цього візьмемо $p \in \mathbb{N}$ і

$$d_n = \begin{cases} \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\}\mathrm{sgn}(g_n), & 1 \le n \le p; \\ 0, & n > p. \end{cases}$$

Якщо визначимо

$$D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp\{\lambda_n \sigma\},$$

то $D \in S_h$ та $\|D\|_h = 1$. Отже,

$$|\Lambda(D)| = \left|\sum_{n=1}^{p} \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\}\mathrm{sgn}(g_n)\Lambda(\exp\{\sigma\lambda_n\})\right| = \sum_{n=1}^{p} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\},$$
$$|\Lambda(D)| \le \|\Lambda\|_h \|D\|_h = \|\Lambda\|_h,$$

тоді

$$\sum_{n=1}^{p} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} \le \|\Lambda\|_h, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} =$$

$$= \sup_p \sum_{n=1}^{p} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} \le \sup_p \|\Lambda\|_h = \|\Lambda\|_h. \tag{6.45}$$

З нерівностей (6.44) і (6.45) випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \exp\{-\lambda_n h(\lambda_n)\} = \|\Lambda\|_h.$$

$\square$

Простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку. У просторах цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку можна ввести іншу метрику. Нагадаємо, що якщо $\alpha \in L$, $\beta \in L$ і ряд Діріхле (6.35) цілий, то

$$\varrho_{\alpha,\beta}[D] := \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, D))}{\beta(\sigma)},$$

де

$$M(\sigma, D) = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| e^{\sigma\lambda_n},$$

називається *узагальненим* (α, β)*-порядком* D ([43]). З леми 6.6 випливає наступна добре відома лема (див. [43], а також [177, с. 21]).

Лема 6.8 ([43]). *Нехай функції* α *і* β *задовольняють умови леми 6.6. Якщо* $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ *при* $n \to \infty$ *для кожного* $c \in (0; +\infty)$, *то*

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|d_n|}\right)}.$$

Для фіксованого $\varrho < +\infty$ через $\overline{S}_\varrho$ позначимо клас цілих рядів Діріхле (6.35), для яких $\varrho_{\alpha,\beta}[D] \le \varrho$. Тоді за лемою 6.8

$$|d_n| \le \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + o(1)}\right)\right\}, \quad n \to \infty. \tag{6.46}$$

Використовуючи ідею статті [82] (див. також [39, 88]), для $q \in \mathbb{N}$ визначимо

$$\|D\|_{\varrho;q} = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\}.$$

З (6.46) і (6.40) випливає, що

$$|d_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\} \le$$
$$\le \exp\left\{-\lambda_n \left(\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + o(1)}\right) - \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right)\right\} \le$$
$$\le \exp\left\{-\xi \lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + o(1)}\right)\right\}, \quad n \to \infty,$$

для деякого $\xi = \xi(q) > 0$. Отож, оскільки $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \to \infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, $\|D\|_{\varrho;q}$ існує для кожного $q \in \mathbb{N}$, і легко перевірити, що $\|D\|_{\varrho;q}$ є нормою в $\overline{S}_{\varrho}$.

Очевидно, $\|D\|_{\varrho;q} \le \|D\|_{\varrho;q+1}$. Тому [81], сім'я $\|D\|_{\varrho;q}\colon q \in \mathbb{N}$ індукує на $\overline{S}_{\varrho}$ унікальну топологію таку, що $\overline{S}_{\varrho}$ стає локальним опуклим векторним простором, і ця топологія задана метрикою d, де

$$d(D_1,\, D_2) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{\|D_1 - D_2\|_{\varrho;q}}{1 + \|D_1 - D_2\|_{\varrho;q}}. \tag{6.47}$$

Простір з метрикою d позначимо $\overline{S}_{\varrho,d}$.

Теорема 6.15. *Якщо функції α, β і послідовність (λ_n) задовольняють умови леми 6.8, то $\overline{S}_{\varrho,d}$ є простором Фреше.*

Доведення. Досить показати, що $\overline{S}_{\varrho,d}$ є повним. Отже, нехай (D_j) є d-послідовністю Коші на $\overline{S}_{\varrho,d}$ і поки що для даного $\varepsilon > 0$ існує $m_j = m_j(\varepsilon)$ таке, що $\|D_j - D_k\|_{\varrho;q} < \varepsilon$ для всіх $j,\, k \ge j_0$ і $q \in \mathbb{N}$; отже, для цих j, k і q маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n^{(j)} - d_n^{(k)}| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\} < \varepsilon, \tag{6.48}$$

тобто, $|d_n^{(j)} - d_n^{(k)}| < \varepsilon$ та $(d_n^{(j)})_{j\ge1})$ є послідовністю Коші. Тому $d_n^{(j)} \to d_n$ при $j \to \infty$. Якщо взяти $k \to \infty$ в (6.48), то для $j \ge j_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n^{(j)} - d_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\} < \varepsilon, \tag{6.49}$$

і, отже, беручи $j = j_0$ в (6.49), ми отримуємо для фіксованого q

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n^{(j_0)} - d_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\} < \varepsilon,$$

звідки з (6.46) з $d_n^{(j_0)}$ замість d_n отримуємо

$$\begin{gathered}|d_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\} \le |d_n^{(j_0)}| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\} + \varepsilon \le \\ \le \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + o(1)}\right)\right\} \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\} + \varepsilon \le 2\varepsilon,\end{gathered}$$

тобто,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|d_n|}\right)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{2\varepsilon} + \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho+1/q}\right)\right)} = \varrho + \frac{1}{q}.$$

За лемою 6.8 з огляду на довільність q отримуємо, що $\varrho_{\alpha,\beta}[D] \le \varrho$. Таким чином, використовуючи (6.49), знову бачимо, що $\|D_j - D\|_{\varrho;q} < \varepsilon$ для $j \ge j_0$. $\square$

Для $\overline{S}_{\varrho,d}$ через $\overline{S}^*_{\varrho,d}$ позначимо дуальний простір. Доведемо аналог твердження 6.12.

Твердження 6.13. *Нехай функції α, β і послідовність (λ_n) задовольняють умови леми 6.8. Тоді кожен неперервний лінійний функціонал Λ на $\overline{S}_{\varrho,d}$ має вигляд (6.43) тоді і тільки тоді, коли для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $q \in \mathbb{N}$*

$$|g_n| \le K \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\}, \quad K = \mathrm{const} > 0. \tag{6.50}$$

Доведення. Нехай $\Lambda \in \overline{S}^*_{\varrho,d}$, тоді якщо $D_m \to D$ в $\overline{S}_{\varrho,d}$, то $\Lambda(D_m) \to \Lambda(D)$.

Тепер нехай d_n задовольняє (6.46) і

$$D_m(s) = \sum_{n=1}^{m} d_n e^{s\lambda_n}.$$

Тоді $D_m \to D$ в $\overline{S}_{\varrho,d}$ (зверніть увагу, що $D_m \in \overline{S}_{\varrho,d}$). Щоб переконатися в цьому, достатньо довести, що $D_m \to D$ за нормою $\|\cdot\|_{\varrho,q}$ для кожного $q \in \mathbb{N}$.

Тож нехай q — фіксоване ціле число. Виберемо $\varepsilon \in (0; 1/q)$. Тоді за допомогою (6.40) можемо визначити ціле число $m = m(\varepsilon)$ таке, що

$$|d_n| \le \exp\left\{-\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + \varepsilon}\right)\right\}, \ n \ge m+1,$$

і це випливає, як вище,

$$\|D_m - D\|_{\varrho,q} = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n e^{s\lambda_n} \right\|_{\varrho,q} \le$$
$$\le \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp\left\{-\lambda_n \left(\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + \varepsilon}\right) - \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right)\right\} \to 0, \ m \to \infty.$$

Звідси та з неперервності Λ маємо

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda(D_m) = \Lambda(D)$$

у топології, визначеній d.

Зауважимо, що

$$\Lambda(D_m) = \sum_{n=1}^{m} d_n g_n,$$

де $g_n = \Lambda(e^{\sigma\lambda_n})$. Оскільки Λ є неперервним на $(\overline{S}_{\varrho,d}, \|\cdot\|_{\varrho,q})$, для кожного $q \in \mathbb{N}$ існує $K > 0$ (незалежна від q) така, що

$$|g_n| = |\Lambda(e^{\sigma\lambda_n})| \le K \|e^{\sigma\lambda_n}\|_{\varrho,q}$$

і тому, використовуючи означення норми $\|e^{\sigma\lambda_n}\|_{\varrho,q}$, отримуємо (6.50).

Щоб довести іншу частину, нехай тепер g_n задовольняє (6.50). Тоді

$$|\Lambda(D)| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \exp\left\{\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{\varrho + 1/q}\right)\right\}, \quad q \in \mathbb{N},$$

і тому $|\Lambda(D)| \leq K\|\Lambda(D)\|_{\varrho,q}$ для всіх $q \in \mathbb{N}$. Отже, $\Lambda \in (\overline{S}_{\varrho,d}, \|\cdot\|_{\varrho,q})^*$ для всіх $q \in \mathbb{N}$. Оскільки $\|D\|_{\varrho;q} \leq \|D\|_{\varrho;q+1}$, то з (6.47) випливає, що

$$\overline{S}^*_{\varrho,d} = \bigcup_{q\geq 1} (\overline{S}_{\varrho,d}, \|\cdot\|_{\varrho,q})^*.$$

Отже, $\Lambda \in \overline{S}^*_{\varrho,d}$. $\square$

Основні здобутки шостого розділу:

1) встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса і побудовано приклад на точність цього твердження;
2) отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки інтегралів Лапласа-Стілт'єса;
3) досліджено банахів простір інтегралів Лапласа-Стілт'єса;
4) досліджено властивості простору Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Результати шостого розділу опубліковано в статтях [96,122,178,179], а також доповідалися на конференціях [98, 125] і наукових семінарах.

ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано ряд актуальних задач теорії аналітичних функцій, а саме, отримано відповіді на декілька відкритих проблем. Серед вагомих здобутків дисертаційної роботи можна віднести наступні:

1) отримано аналоги співвідношення Бореля та нерівності Вімана для цілих і аналітичних функцій від однієї змінної, отримано новий опис виняткової множини у цих співвідношеннях;
2) вперше перевірено наявність ефекту Леві для цілих та аналітичних у крузі функцій у випадку коли послідовність випадкових величин, які є множниками тейлорових коефіцієнтів випадкової аналітичної функції, може не бути рівномірно обмеженою;
3) уточнено нерівність типу Вімана з [75], побудовано приклад на точність цієї нерівності та перевірено наявність ефекту Леві для цілих функцій від багатьох комплексних змінних;
4) описано “кількість” тих цілих функцій, для яких нерівність типу Вімана можна покращити;
5) для цілих функцій від багатьох комплексних змінних, заданих лакунарними рядами за однорідними поліномами, отримано точні аналоги нерівності Бітляна-Гольдберга;
6) вперше встановлено аналоги нерівності типу Вімана та перевірено наявність ефекту Леві для аналітичних функцій з областями збіжності
   (а) $\mathbb{C}^p$;
   (б) $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$;
   (в) $\mathbb{D}^p$;

   де $l, p \in \mathbb{N},\ p > l,\ p \geq 2$, та побудовані приклади на їх точність у кожній з цих множин;
7) вперше отримані аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області Рейнхарда, а також перевірено наявність ефекту Леві для цих функцій;
8) доведено аналоги нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками;
9) отримані оцінки зверху і знизу для ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих функцій та деяких аналітичних функцій;
10) побудовано приклади на точність цих оцінок, як для випадкових цілих функцій, так і для випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі;
11) встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса і побудовано приклад на точність цього твердження;
12) отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки інтегралів Лапласа-Стілт'єса;
13) досліджено властивості банахового простору інтегралів Лапласа-Стілт'єса;

14) досліджено простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Результати отримані сучасними методами теорії функцій та теорії ймовірностей.

Отримані результати можуть бути застосовані як у теорії аналітичних функцій, так в інших галузях математики, а саме у теорії ймовірностей.

Результати дисертації опубліковано у фахових виданнях і були оприлюднені на багатьох міжнародних наукових конференціях та спеціалізованих наукових семінарах. Це підтверджує їх достовірність.

Список використаних джерел

1. Гольдберг А.А. Три приклади цілих функцій. *Допов. АН УРСР.* 1963. Т. 4. С. 443–446.
2. Зікрач Д.Ю., Скасків О.Б. Про опис виняткової множини у співвідношенні Бореля для кратних рядів Діріхле з обмеженням зверху на зростання. *Мат. Студ.* 2009. Т. 32. № 2. С. 139–147.
3. Зрум О.В., Скасків О.Б. Про нерівність Вімана для випадкових цілих функцій від двох змінних. *Мат. Студ.* 2005. Т. 23. № 2. С. 149–160.
4. Кулявець Л.В., Мулява О.М. Про зростання класу цілих рядів Діріхле. *Карпат. мат. публ.* 2014. Т. 5. № 2. С. 300–309.
5. Куриляк А.О., Скасків О.Б. Нерівність типу Вімана для аналітичних в крузі функцій і категорії Бера. *Наук. вісн. Чернів. унів.: Зб. наук. праць. Математика.* 2011. Т. 1. № 4. С. 73–79.
6. Куриляк А.О., Шаповаловська Л.О., Скасків О.Б. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2014. Т. 2. № 2–3. 130–135.
7. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей".* Тези доповідей, Івано-Франківськ. 2014. С. 72–73.
8. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для аналітичних функцій у полікрузі. *Міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана.* Тези доповідей. Чернівці. 2014. С. 234–235.
9. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу".* Тези доповідей. Івано-Франківськ. 2015. С. 37–38.
10. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових функцій аналітичних в полікрузі. *Наукова конференція присв'ячена 100-річчю К.М. Фішмана та М.К. Фаге.* Тези доповідей. Чернівці. 2015. С. 63–64.
11. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Скасків С.Р. Аналоги нерівності Вімана і ефект Леві для аналітичних функцій у бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2015. Т. 3. № 3–4. С. 102–110.
12. Куриляк А., Скасків О., Цвігун Л. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ з швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Друга Всеук-*

раїнська наукова конференція “Прикладні задачі математики”. Тези доповідей. Івано-Франківськ. 2016. С. 11–12.

13. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками. *Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”.* Тези доповідей. Івано-Франківськ. 2017. С. 12–13.
14. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л., Шаповаловська Л.О. Нерівність Вімана для функцій аналітичних у полікрузі з швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”.* Тези доповідей. Івано-Франківськ. 2017. С. 98–99.
15. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. *Буковин. мат. журн.* 2017. Т. 5. № 3–4. 90–97.
16. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. *Прикарпат. Вісн. НТШ. Число.* 2018. Т. 1. № 45. С. 26–36.
17. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л. Про виняткову множину у нерівності Вімана для випадкових цілих функцій декількох змінних. *Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”.* Тези доповідей. Івано-Франківськ. 2018. С. 67–68.
18. Куриляк А., Скасків О. Нерівність типу Вімана для степеневих рядів з швидко коливними коефіцієнтами в кратно-кругових областях. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2022. Т. 93. С. 83–96.
19. Луцишин М.Р., Про максимальний член цілого ряду Діріхле з комплексними показниками і монотонними коефіцієнтами. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1998. Т. 51. С. 33–36.
20. Овчар І., Скасків О. Про нерівність типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2010. Т. 72. С. 232–242.
21. Овчар І.Є., Скасків О.Б. Деякий аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра. *Карпат. мат. публ.* 2013. Т. 5. № 2. С. 305–309.
22. Посіко О.С., Скасків О.Б., Шеремета М.М. Оцінки інтеграла Лапласа-Стілт’єса. *Мат. Студ.* 2004. Т. 21. № 2. С. 179–186.
23. Скасків О.Б. Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле. *Доп. АН УРСР, сер. А.* 1984. Т. 11. С. 22–124.
24. Скасків О.Б. Про поведінку максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле. *Доп. АН УРСР, сер. А.* 1988. Т. 8. С. 19–21.

25. Скасків О.Б. Про наявність виняткових значень у співвідношенні типу Бореля для цілих рядів Діріхле. *Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.* 1988. Т. 30. С. 53–54.
26. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами та рядами Діріхле. Докторська дисертація, Львів, 1995. 299 с.
27. Скасків О.Б. Про класичну нерівність Вімана для цілих рядів Діріхле. *Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех-мат.* 1999. Т. 54. С. 180–182.
28. Скасків О.Б., Філевич П.В. Про величину виняткової множини в теоремі Вімана. *Мат. Студ.* 1999. Т. 12. № 1. С. 31–36.
29. Скасків О.Б., Тракало О.М. Про класичну нерівність Вімана для цілих кратних рядів Діріхле. *Матем. методи і фіз.-мех. поля.* 2000. Т. 43. № 3. С. 34–39.
30. Скасків О.Б., Тракало О.М. Про винятковиу множину у відношенні Бореля для кратних цілих рядів Діріхле. *Мат. Студ.* 2001. Т. 15. № 2. С. 163–172.
31. Скасків О.Б., Тракало О.М. Точна оцінка виняткової множини у відношенні Бореля для цілих функцій кількох комплексних змінних. *Мат. Студ.* 2002. Т. 18. № 1. С. 53–56.
32. Скасків О.Б., Тракало О.М. Асимптотичні оцінки інтегралів Лапласа. *Мат. Студ.* 2002. Т. 18. № 2. С. 125–146.
33. Скасків О.Б., Зрум О.В. Про виняткову множину в нерівностях Вімана для цілих функцій. *Мат. Студ.* 2004. Т. 21. № 1. С. 13–24.
34. Скасків О.Б., Зрум О.В. Нерівність типу Вімана для цілих функцій від двох комплексних змінних зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* 2005. Т. 48. № 4. С. 78–87.
35. Скасків О.Б., Зрум О.В. Про уточнення нерівності Фентона для цілих функцій двох комплексних змінних. *Мат. Вісн. НТШ.* 2006. Т. 3. С. 56–68.
36. Скасків О.Б. Випадкові лакунарні степеневі ряди та нерівність Вімана. *Мат. Студ.* 2008. Т. 30. № 1. С. 101–106.
37. Скасків О.Б., Куриляк А.О. Прямі аналоги нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі. *Карпат. мат. публ.* 2010. Т. 2. № 1. С. 109–118.
38. Скасків О.Б., Бандура А.І. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів і цілих функцій. Львів–Івано-Франківськ: ЛНУ-ІНФТУНГ. 2015. 108 с.
39. Фединяк С.І. Простір цілих рядів Діріхле. *Карпат. мат. публ.* 2013. Т. 5. № 2. С. 336–340.

40. Філевич П.В. Деякі класи цілих функцій, у яких нерівність Вімана-Валірона можна майже напевно уточнити. *Мат. Студ.* 1996. Т. 6. С. 59–66.
41. Філевич П.В. Оцінки типу Вімана-Валірона для випадкових аналітичні функції в одиничному крузі. *Інт. перетв. та їх заст. до крайових задач. Київ: Інститут мат.* 1997. Т. 15. С. 227–238.
42. Філевич П.В. Точна оцінка величини виняткової множини у відношенні Бореля для цілих функцій. *Укр. мат. журн.* 2001. Т. 53. № 2. С. 286–288.
43. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. К.: ІСДО. 1993. 168 с.
44. Barata J.C.A., Husein M.S. The Moore–Penrose pseudoinverse: A tutorial review of the theory. *Braz. J. Phys.* 2012. V. 42. P. 146–165.
45. Benatar J., Borichev A., Sodin M. Zero distribution of power series and binary correlation of coefficients. *arXiv:2104.04812.* 2021.
46. Bitlyan I.F., Gol'dberg A.A. Wiman-Valiron theorem for entire functions of several variables. *Vest. Len. Univ., ser. mat., mech. and astr.* 1959. V. 2. № 13. P. 27–41.
47. Borel E. Lecons sur les series a termes positifs. Paris: Gauthier-Villars. 1902.
48. Borichev A., Nishry A., Sodin M. *Entire functions of exponential type represented by pseudo-random and random Taylor series.* J. Anal. Math. 2017. V. 133. P. 361–396.
49. Buckley J., Sodin M. Fluctuations of the increment of the argument for the Gaussian entire function. *J. Stat. Phys.* 2017. V. 168. P. 300–330.
50. Buckley J., Nishry A., Peled R., Sodin M. Hole probability for zeroes of gaussian Taylor series with finite radii of convergence. *Probab. Theory Related Fields.* 2018. V. 171. P. 377–430.
51. Buckley J., Nishry A. Gaussian complex zeroes are not always normal: limit theorems on the disc. *Probab. Math. Phys.* 2022. V. 3. № 3. P. 675–706.
52. Bergweiler W. On meromorphic function that share three values and on the exceptional set in Wiman-Valiron theory. *Codai. Math. J.* 1990. V. 13. № 1. P. 1–9.
53. Calys E.G. A note on the order and type of integral functions. *Riv. Math. Univ. Parma.* 1964. V. 5. P. 133–137.
54. Davies L.P. Some results on the distribution of zeros of random entire functions. *Proc. London Math. Soc.* 1973. V. 26. № 3. P. 99–141.
55. Erdős P., Rényi A. On random entire function. *Zastosowania Mat.* 1969. V. 10. P. 47–55.
56. Erdős P., Macintyre A.J. Integral functions with gap power series. Proc. *Edinb. Math. Soc.* (2) 1953. V. 10. P. 62–70.
57. Fenton P.C. Some results of Wiman–Valiron type for integral functions of finite lower order. *Ann. of Math.* (2) 1976. V. 103. P. 237–252.

58. Fenton P.C. The minimum modulus of gap power series. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 1978. V. 21. P. 49–54.
59. Fenton P.C. Wiman–Valiron theory for entire functions of finite lower growth. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1979. V. 252. P. 221–232.
60. Fenton P.C. A note on the Wiman-Valiron method. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 1993. V. 37. P. 53–55.
61. Fenton P.C. Wiman-Valiron theory in two variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1995. V. 347. № 11. P. 4403–4412.
62. Fenton P.C. A glance at Wiman-Valiron theory. *Contemp. Math.* 2005. V. 382. № 11. P. 131–139.
63. Fenton P.C., Strumia M.M. Wiman–Valiron theory in the disk. *J. London Math. Soc.* (2) 2009. V. 79. P. 478–496.
64. Fenton P.C., Rossi J. ODEs and Wiman–Valiron theory in the unit disk. *J. Math. Anal. Appl.* 2010. V. 367. № 1. P. 137–145.
65. Fenton P.C., Rossi J. Wiman–Valiron theory in simply connected domains. *Comput. Methods Funct. Theory.* 2011. V. 11. № 1. P. 229–235.
66. Filevych P.V. Correlation between the maximum modulus and maximal term of random entire functions. *Mat. Stud.* 1997. V. 7. № 2. P. 157–166.
67. Filevych P.V. On the London theorem concerning the Borel relation for entire functions. *Ukrainian Math. J.* 1998. V. 50. № 11. P. 1801–1804.
68. Filevych P.V. Asymptotic relations between the means of Dirichlet series and their applications. *Mat. Stud.* 2002. V. 19. № 2. P. 127–140.
69. Filevych P.V. Wiman-Valiron type inequalities for entire and random entire functions of finite logarithmic order. *Siberian Math. J.* 2003. V. 42. № 3. P. 579–586.
70. Filevych P.V. The Baire categories and Wiman's inequality for entire functions. *Mat. Stud.* 2003. V. 20. № 2. P. 215–221.
71. Ghosh S., Nishry A. Gaussian complex zeros on the hole event: the emergence of a forbidden region. *Comm. Pure Appl. Math.* 2019. V. 72. № 1. P. 3–62.
72. Godwin H.J. On generalizations of Tchebycheff's inequality. *J. Amer. Statist. Assoc.* 1955. V. 50. № 271. P. 923–945.
73. Gol'dberg A.A., Levin B.Ya., Ostrovsky I.V. Entire and meromorphic functions. *Itogi Nauki i Tekhn., Fundamental directions.* 1990. V. 85. P. 5–186.
74. Gol'dberg A.A., Ostrovskii I.V. Value distributions of meromorphic functions, With an appendix by A. Eremenko and J.K. Langley. AMS. Providence, RI. 2008.
75. Gopala Krishna J., Nagaraja Rao I.H. Generalised inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* 1977. V. 41. P. 203–219.

76. Gopala Krishna J. Generalised inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* 1977. V. 41. P. 203–219.
77. Hayman W.K. A generalization of Stirling's formula. *J. Reine Angew. Math.* 1956. V. 169. P. 67–95.
78. Hayman W.K. On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 1965. V. 14A. P. 93–128.
79. Hayman W.K. The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method. *Canad. Math. Bull.* 1974. V. 17. № 3. P. 317–358.
80. Hayman W.K. Subharmonic functions. Academic Press. London, 1989. V. 2.
81. Husain T. The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces. Clarendon Press. Oxford, 1965.
82. Husain T., Kamthan P.K. Spaces of entire functions represented by Dirichlet series. *Collect. Math.* 1968. V. 19. № 3. P. 203–216.
83. Juneja O.P., Srivastava B.L. On a Banach space of a class of Diriclet series. *Indian J. Pure Appl. Math.* 1981. V. 12. № 4. P. 521–529.
84. Kahane J.P. Some random series of functions. Cambridge University Press, 1985. 305 p.
85. Kiro A., Nishry A. Fluctuations for zeros of gaussian Taylor series. *J. London Math. Soc. (2)*. 2021. V. 104. P. 1172–1203.
86. Kővari T. On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc. *J. London Math. Soc. (2)*. 1966. V. 41. P. 129–137.
87. Krishnapur M. Overcrowding estimates for zeroes of random analytic function. *J. Stat. Phys.* 2006. V. 124. P. 1399–1423.
88. Kumar A., Srivastava G.S. Spaces of entire functions of slow growth represented by Dirichlet series. *Port. Math.* 1994. V. 51. № 1. P. 3–11.
89. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequalities without exceptional sets for random entire functions of several variables. *Mat. Stud.* 2012. V. 38. № 1. P. 35–50.
90. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Chyzhykov I.E. Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions. *Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź*. 2012. V. 62. № 3. P. 17–33.
91. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Mat. Stud.* 2013. V. 39. № 2. P. 134–141.
92. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents. *Mat. Stud.* 2013. V. 40. № 1. P. 108–112.
93. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Skaskiv S.R. Wiman's type inequality and Levy's phenomenon for random analytic functions in the unit disc. *International conference "Complex analysis and related topics"*. Lviv. 2013. P. 41–42.

94. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zrum O.V. Levy's phenomenon for entire functions of several variables. *International conference "Complex analysis and related topics"*. Abstracts. Lviv. 2013. P. 45–46.
95. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman's inequality for the Laplace integrals. *Int. Journal of Math. Analysis*. 2014. V. 8. № 8. P. 381–385.
96. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On Borel's type relation for the Laplace–Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2014. V. 42. № 2. P. 134–142.
97. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O. Wiman's inequality for entire functions of several complex variables with rapidly oscillating coefficients. *Mat. Stud.* 2015. V. 43. № 1. P. 16–26.
98. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On the Borel's type relation for Laplace-Stiltjes integrals. *International V. Skorobohatko mathematical conference*. Abstracts. Drohobych. 2015. P. 90.
99. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc. *Ukr. Math. J.* 2016. V. 68. № 1. P. 83–93.
100. Kuryliak A., Skaskiv O., Tsvigun V. Levy's phenomenon for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. *Mat. Stud.* 2016. V. 46. № 2. P. 121–129.
101. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Tsvigun V.L. Levy's fenomenon for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. *International Conference "Complex Analysis and Related Topics"*. Abstracts, International conf., Lviv, 2016. P. 53–54.
102. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of Dirichlet series with random exponents. *Int. J. Appl. Math.* 2017. V. 30. № 3. P. 229–238.
103. Kuryliak A. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *Mat. Stud.* 2017. V. 47. № 1. P. 10–19.
104. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach*. Abstracts. Lviv. 2017. P. 123–124.
105. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. The abscissa of absolute convergence of Dirichet series with randon exponents. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach*. Abstracts. Lviv. 2017. P. 136–137.
106. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Tsvigun V.L. On exceptional set in Wiman's type inequality for entire functions of several variables. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach*. Abstracts. Lviv. 2017. P. 140–141.
107. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's type inequality for multiple power series in an unbounded cylinder domain. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 1. P. 29–51.

108. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of random multiple Dirichlet series. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 2. P. 122–137.
109. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's inequality for analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ with rapidly oscillating coefficients. *Carpathian Math. Publ.* 2018. V. 10. № 1. P. 133–142.
110. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain. *The IV conference in mathematics and computer science "Congresio-mathematica"*. Abstracts. Olstun. 2018. P. 26.
111. Kuryliak A., Skaskiv O., Skaskiv S. Levy's phenomenon for analytic functions in the polydisc. Eur. J. Math. 2020. V. 6. P. 138–152.
112. Kuryliak A.O., Panchuk S.I., Skaskiv O.B. Bitlyan-Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term. *Mat. Stud.* 2020. V. 54. № 2. P. 135–145.
113. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h-measure of an exceptional sets. *Carpathian Math. Publ.* 2020. V. 12. № 2. P. 492–498.
114. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality on multiple-circular domain. *International Conference Complex analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A.A. Gol'dberg.* Abstracts, Lviv, 2021, P. 30–31.
115. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Bukovinian Math. J.* 2021. V. 9. № 1. P. 56–63.
116. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *Axioms*. 2021. V. 10. № 4. 348.
117. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman-type inequality in a multiple-circular domain: Lévy's phenomenon and exceptional sets. *Ukrainian Math. J.* 2022. V. 74. № 5. P. 743–756.
118. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Levy's phenomenon for analytic functions in multiple-circular domain. *International online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*. Abstracts. Ivano-Frankivsk. 2022. P. 46–47.
119. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *International conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 80th Anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007).* Abstracts. Lutsk. 2022. P. 18–19.
120. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *Axioms*. 2023. V. 12. № 3. 255.
121. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Analytic Gaussian functions in the unit disc: probability of zeros absence. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 1. P. 29–45.

122. Куриляк А.О., Шеремета М.М. Про простори Банаха і Фреше інтегралів Лапласа–Стілтьєса. *Нелінійні коливання.* 2021. V. 24. № 2. C. 185–196. Engl. transl.: Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces and Frechet spaces of Laplace–Stieltjes integrals. *J. Math. Sci. (US).* 2023. V. 270. № 2. P. 280–293.
123. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 2. P. 178–186.
124. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Sub-Gaussian random variables and Wiman's inequality. *Carpathian Math. Publ.* 2023. V. 15. № 1. P. 306–314.
125. Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces of Laplace-Stieltjes integrals. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics.* Abstracts. Chernivtsi. 2023. P. 83.
126. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics.* Abstracts. Chernivtsi. 2023. P. 84.
127. Li H., Wang J., Yao X., Ye Z. Inequalities concerning maximum modulus and zeros of random entire functions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* 2023. P. 1–22.
128. Littlewood J.E., Offord A.C. On the distribution of zeros and α-values of a random integral function. *Ann. of Math. (II).* 1948. V. 49. 885–952; *errata.* 1948. V. 50. P. 990–991.
129. Littlewood J.E. Collected Papers. 2 Vols. Oxford Univ. Press, 1982.
130. Lévy P. Sur la croissance de fonctions entière. *Bull. Soc. Math. France.* 1930. V. 58. P. 29–59; P. 127–149.
131. Macintyre A.J. Laplace's transformation and integral functions. *J. London Math. Soc. (2).* 1939. V. 45. P. 1–20.
132. Mahola M.P., Filevych P.V. The value distribution of a random entire function. *Mat. Stud.* 2010. V. 34. № 2. P. 120–128.
133. Mahola M.P., Filevych P.V. The angular value distribution of random analytic functions. *Mat. Stud.* 2012. V. 37. № 1. P. 34–51.
134. Mahola M.P., Filevych P.V. The angular distribution of zeros of random analytic functions. *Ufa Math. J.* 2012. V. 4. P. 115–127.
135. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1920. V. 26. P. 394–395.
136. Nazarov F., Sodin M., Volberg A. Transportation to random zeroes by the gadient flow. *Geom. Funct. Anal.* 2007. V. 17. P. 887–935.

137. Nazarov F., Sodin M., Volberg A. The Jancovici-Lebowitz-Manificat law for large fluctuations of random complex zeroes. *Comm. Math. Phys.* 2008. V. 284. P. 833–865.
138. Nazarov F., Sodin M. Fluctuations in random complex zeroes: asymptotic normality revisited. *Int. Math. Res. Not. IMRN.* 2011. V. 24. P. 5720–5759.
139. Nazarov F., Nishry A., Sodin M. Distribution of zeroes of Rademacher Taylor series. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6).* 2016. V. 25. № 4. P. 759–784.
140. Nishry A. The hole probability for gaussian entire functions. *arxiv:0909.12v3.* 2009.
141. Nishry A. Asymptotics of the hole probability for zeros of random entire functions. *Int. Math. Res. Not. IMRN.* 2010. V. 15. P. 2925–2946.
142. Nishry A. The hole probability for Gaussian entire functions. *Israel J. Math.* 2011. V. 186. P. 197–220.
143. Nishry A. Hole probability for entire functions represented by Gaussian Taylor series. *J. Anal. Math.* 2012. V. 118. P. 493–507.
144. Nishry A. Topics in the value distribution of random analytic functions. *arXiv:1310.7542v2.* 2013.
145. Nishry A., Paquette E. Gaussian analytic functions of bounded mean oscillation. *Anal. PDE.* 2023. V. 16. № 1. P. 89–117.
146. Offord A.C. The distribution of the values of an entire function whose coefficients are independent random variables. *Proc. Lond. Math. Soc. (3).* 1965. V. 14A. P. 199–238.
147. Offord A.C. The distribution of zeros of series whose coefficients are independent random variables. *Indian J. Math.* 1967. V. 9. P. 175–196.
148. Offord A.C. The distribution of the values of a random functions in the unit disk. *Studia Math.* 1972. V. 41. P. 71–106.
149. Offord A.C. Lacunary entire functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1993. V. 114. P. 67–83.
150. Ostrovskii I.V. Application of a rule of Wiman and Valiron to the study of the characteristic functions of probability laws. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1962. V. 143. № 3. P. 532–535.
151. Paley R.E.A.C., Zygmund A. A note on analytic function in the unit circle. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1932. V. 28. P. 262–265.
152. Panchuk S.I., Skaskiv O.B. Lacunary multiple power series and Wiman's inequality. *International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach.* Abstract of Reports. Lviv. 2012. P. 172–173.
153. Penrose R. A generalized inverse for matrices. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1955. V. 51. P. 406–413.
154. Penrose R. On best approximate solution of linear matrix equations. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1956. V. 52. P. 17–19.

155. Pólya G. Über des Zusammengang zwichen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Glide der zugehörigen Taylorschen Reihe. *Acta Math.* 1916. V. 40, 311–319.
156. Pólya G., Szegő G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin: Springer. V. 2, 1925.
157. Pólya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreichen. *Math. Z.* 1929. V. 29. P. 549–640.
158. Peres Yu., Virag B. Zeros of i.i.d. gaussian power series: a conformally invariant deteminantal process. *Acta Math.* 2005. V. 194. P. 1–35.
159. Posiko O.S., Sheremeta M.M. Asymptotic estimates for Laplace-Stieltjes integrals. *Ukr. Math. Visn.* 2005. V. 2. № 4. 541–549. (in Ukrainian); English transl. in *Ukr. Math. Bull.* 2005. V. 2. № 4. P. 547–555.
160. Rosenbloom P.C. Probability and entire functions. *Stud. Math. Anal. and Related Topics, Stanford: Calif. Univ. Press.* 1962. P. 325–332.
161. Salem R., Zygmund A. Some properties of trigonometric series whose terms have random sign. *Acta Math.* 1954. V. 91. P. 245–301.
162. Salo T.M., Skaskiv O.B., Trakalo O.M. On the best possible description of exeptional set in Wiman-Valiron theory for entire function. *Mat. Stud.* 2001. V. 16. № 2. P. 131–140.
163. Salo T.M., Skaskiv O.B. Minimum modulus of lacunary power series and h-measure of exceptional sets. *Ufa Math. J.* 2017. V. 9. № 4. P. 135–144.
164. Savage I.R. Probability inequalities of the Tchebycheff type. *National Bureau of Standards.* 1961. V. 65B. № 3. P. 211–222.
165. Schumitzky A. Wiman-Valiron theory for entire functions of several complex variables. Ph.D. Dissertation, Ithaca: Cornell Univ., 1965.
166. Schumitzky A. A probabilistic approach to the Wiman-Valiron theory for entire functions of several complex variables. *Complex Variables* 1989. V. 13. P. 85–98.
167. Seneta E. Regularly varying functions. Lect. Notes Math. Springer-Verlag. Berlin. V. 508, 1976.
168. Shapovalovska L.O., Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *International conference "Complex analysis and related topics".* Abstracts. Lviv. 2013. P. 71.
169. Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. On the radius of convergence of random gap power series. *Int. J. Math. Anal.* 2015. V. 9. № 38. P. 1889–1893.
170. Sheremeta M.M. Winan-Valiron's method for entire functions represented by Dirichlet series. *Dokl. USSR Akad. Nauk SSSR.* 1978. V. 30. № 4. P. 488–497.
171. Sheremeta M.M. Analogues of Wiman's theorem for Dirichlet series. *Math. USSR-Sb.* 1981. V. 38. № 1. P. 95–107.

172. Sheremeta M.M. Equivalence of the logarithms of the maximum modulus and the maximum term of an entire series of Dirichlet. *Math. Notes*. 1987. V. 42. № 2. P. 624–630.
173. Sheremeta M.M. On the derivative of an entire Dirichlet series. *Math. USSR-Sb.* 1988. V. 65. № 1. P. 133–145.
174. Sheremeta M.M. A relation between the maximal term and maximum of the modulus of the entire Dirichlet series. *Math. Notes*. 1992. V. 51. № 5. P. 522–526.
175. Sheremeta M.M. On a property of the entire Dirichlet series with decreasing coefficients. *Ukr. Mat. Zhurn.* 1993. V. 45. № 6. 843–853. (in Ukrainian); English transl. in *Ukr. Math. J.* 1993. V. 45. № 6. P. 929–942.
176. Sheremeta M.M. On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristics of entire functions. *Mat. Stud*. 2003. V. 19. № 1. P. 73–82.
177. Sheremeta M.M. Asymptotical behaviour of Laplace-Stiltjes integrals. Lviv: VNTL Publishers, 2010. 211 p.
178. Sheremeta M.M., Dobushovskyy M.S., Kuryliak A.O. On a Banach space of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud*. 2018. V. 48. № 2. P. 143–149.
179. Sheremeta M.M., Kuryliak A.O. On the growth of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2018. V. 50. № 1. P. 22–35.
180. Shtrelitz S.I. Asymptotic properties of analytic solutions of differential equations. Vilnius: Mintis. 1972. 468 p.
181. Skaskiv O.B. Behavior of the maximum term of a Dirichlet series that defines an entire function. *Math. Notes*. 1985. V. 37. № 1. P. 24–28.
182. Skaskiv O.B. On the minimum of the absolute value of the sum for a Dirichlet series with bounded sequence of exponents. *Math. Notes*. 1994. V. 56. № 5. P. 1177–1184.
183. Skaskiv O.B. On the Polya conjecture concerning the maximum and minimum of the modulus of an entire function of finite order given by lacunary power series. *Anal. Math.* 1990. V. 16. № 2. P. 143–157.
184. Skaskiv O.B. On certain relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series. *Math. Notes*. 1999. V. 66. № 2. P. 223–232.
185. Skaskiv O.B. On the classical Wiman's inequality for entire Dirichlet series. *Visn. Lviv. un-tu, ser. mekh.-mat.* 1999. V. 54. P. 180–182.
186. Skaskiv O.B. On the central exponent of absolutely convergent Dirichlet series. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky.* 2000. V. 10. P. 27–30.
187. Skaskiv O.B. Estimates of measures of exeptional sets in the Wiman-Valiron theory. *Nonlinear. Bound. Probl. Collect. Sc. Proc.* 2001. V. 11. № 2001. Donetsk, P. 186–190.

188. Skaskiv O.B. A generalized Borel relation for entire Dirichlet series. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky.* 2004. V. 6. P. 32–36.
189. Skaskiv O.B., Trakalo O.M. On the stability of the maximum term of the entire Dirichlet series. *Ukr. Mat. Zh.* 2005. V. 57. № 4. 571–576. (in Ukrainian); English transl. in *Ukrainian Math. J.* 2005. V. 57. № 4. P. 686–693.
190. Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. The best possible description of exceptional set in Borel's relation for multiple Dirichlet series. *Mat. Stud.* 2008. V. 30. № 2. P. 189–194.
191. Skaskiv O.B., Stasyuk Ya.Z. On the equivalence of the sum and the maximal term of the Dirichlet series with monotonous coefficients. *Mat. Stud.* 2009. V. 31. № 1. P. 37–46.
192. Skaskiv O.B., Stasyuk Ya.Z. On the equivalence of the sum and the maximal term of the Dirichlet series absolutely convergent in the half-plane. *Carpat. Mat. Publ.* 2009. V. 1. № 1. P. 100–106.
193. Skaskiv O.B., Kuryliak A.O. Maximum modulus of entire functions of two variables and arguments of coefficients of double power series. *Mat. Stud.* 2011. V. 36. № 2. P. 162–175.
194. Skaskiv O.B., Kuryliak A.O. The probability of absence zeros in the disc for some random analytic functions. *Math. Shevchenko Sci. Soc.* 2011. V. 8. P. 335–352.
195. Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2011. V. 35. № 2. P. 131–141.
196. Sodin M. Zeroes of Gaussian analytic functions. *arXiv:0410343v1.* 2004.
197. Sodin M., Tsirelson B. Random complex zeros. I. Asymptotic normality. *Israel J. Math.* 2004. V. 144. P. 125–149.
198. Sodin M. Zeroes of Gaussian analytic functions. *European Congress of Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, Switzerland.* 2005. P. 445–458.
199. Sodin M., Tsirelson B. Random complex zeros. III. Decay of the hole probability. *Israel J. Math.* 2005. V. 147. P. 371–379.
200. Sodin M., Tsirelson B. Random complex zeros. II. Perturbed lattice. *Israel J. Math.* 2006. V. 152. P. 105–124.
201. Srivastava R.S.L. On the order and type of integral functions. *Riv. Math. Univ. Parma (N.S.).* 1959. V. 1. P. 249–255.
202. Srivastava, R.S.L. On the order and type of integral functions. *Riv. Math. Univ. Parma (N.S.).* 1961. V. 2. P. 265–270.
203. Steinhaus J.M. Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergezreis einer Potenzreihe ihre natürlische Grence ist. *Mat. Z.* 1929. V. 31. P. 408–416.

204. Steele J.M. Sharper Wiman inequality for entire functions with rapidly oscillating coefficients. *J. Math. Anal. Appl.* 1987. V. 123. P. 550–558.
205. Suleimanov N.M. Estimates of Wiman–Valiron type for power series with finite radius of convergence, and their sharpness. *Dokl. Akad. Nauk.* 1980. V. 253. № 4. P. 822–824.
206. Suleimanov N.M. Estimates of Wiman–Valiron type for solutions of differential equations. *Differ. Uravn.* 1982. V. 18. № 1. P. 176–177.
207. Tian F. Growth of random Dirichlet series. *Acta Math. Sc.* 2000. V. 20B. № 3. P. 390–396.
208. Trenogin V.A. Functional analysis. Textbook. M: Nauka, 1980. 495 p.
209. Valiron G. Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6).* 1914. V. 5. P. 117–257.
210. Valiron G. Sur le maximum du module des fonctions entieres. *C.r. Acad. Sci.* 1918. V. 166. P. 605–608.
211. Valiron G. Sur un theoreme de M. Hadamard. *Bull. Sci. Math.* 1923. V. 47. № 1. 177–192.
212. Valiron G. Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet. *Bulletin de la S. M. F.* 1924. V. 52. P. 166–174.
213. Valiron G. Theory of integral functions. New York. Chelsea, 1949.
214. Valiron G. Functions analytiques. Paris. Press Univer. de France, 1954.
215. Wiman A. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliebe der zugehörigen Taylorischen Reiche. *Acta Math.* 1914. V. 37. P. 305–326.
216. Wiman A. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten betrage beigegebenen Argumente der Function. *Acta Math.* 1916. V. 41. P. 1–28.
217. Wittich H. Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955. 164 p.
218. Zikrach D.Yu., Skaskiv O.B. Asymptotic external estimation of the exeptional sets of Laplace-Stieltjes integrals. *Nauk. Visn. Chern. Univ. Math.* 2011. V. 1. № 3. P. 38–43.

ДОДАТОК А

Статті у наукових іноземних та вітчизняних виданнях, що індексуються у міжнародних базах даних Scopus або Web of Science

1. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc. *Ukr. Math. J.* 2016. V. 68. № 1. P. 83–93. Режим доступу до журналу: `https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1823` **(Scopus)** *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
2. Kuryliak A. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *Mat. Stud.* 2017. V. 47. № 1. P. 10–19. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.47.1.10-19` **(Scopus)**.
3. Sheremeta M.M., Dobushovskyy M.S., Kuryliak A.O.: On a Banach space of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2017. V. 48. № 2. P. 143–149. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.48.2.143-149` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
4. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of Dirichlet series with random exponents. *Int. J. Appl. Math.* 2017. V. 30. № 3. P. 229–238. Режим доступу до журналу: `http://www.diogenes.bg/ijam/contents/2017-30-3/2/index.html` **(Scopus)** *(Особистий внесок: остаточні варіанти доведень наслідків 10 і 13).*
5. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's type inequality for multiple power series in an unbounded cylinder domain. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 1. P. 29–51. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.49.1.29-51` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of random multiple Dirichlet series. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 2. P. 122–137. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.49.2.122-137` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення тверджень 7 і 10).*
7. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's inequality for analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ with rapidly oscillating coefficients. *Carpathian Math. Publ.* 2018. V. 10. № 1. P. 133–142. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.133-142` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
8. Sheremeta M.M., Kuryliak A.O.: On the growth of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2018. V. 50. № 1. P. 22–35. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.50.1.22-35` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

9. Kuryliak A., Skaskiv O., Skaskiv S. Levy's phenomenon for analytic functions in the polydisc. *Eur. J. Math.* 2020. V. 6. P. 138–152. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.1007/s40879-019-00363-2` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
10. Kuryliak A.O., Panchuk S.I., Skaskiv O.B. Bitlyan-Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term. *Mat. Stud.* 2020. V. 54. № 2. P. 135–145. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.30970/ms.54.2.135-145` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
11. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h-measure of an exceptional sets. *Carpathian Math. Publ.* 2020. V. 12. № 2. P. 492–498. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/cmp.12.2.492-498` **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
12. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *Axioms.* 2021. V. 10. № 4. 348. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.3390/axioms10040348` **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
13. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman-type inequality in a multiple-circular domain: Lévy's phenomenon and exceptional sets. *Ukrainian Math. J.* 2022. V. 74. № 5. P. 743–756. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.37863/umzh.v74i5.7137` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
14. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *Axioms.* 2023. V. 12. № 3. 255. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.3390/axioms12030255` **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
15. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Analytic Gaussian functions in the unit disc: probability of zeros absence. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 1. P. 29–45. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.30970/ms.59.1.29-45` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
16. Куриляк А.О., Шеремета М.М. Про простори Банаха і Фреше інтегралів Лапласа–Стілтьєса. *Нелінійні коливання.* 2021. Т. 24. № 2. С. 185–196. Engl. transl. Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces and Frechet spaces of Laplace–Stieltjes integrals. *J. Math. Sci. (US).* 2023. V. 270. № 2. P. 280–293. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.1007/s10958-023-06346-9` **(Scopus)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

17. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 2. P. 178–186. Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.30970/ms.59.2.178-186 **(Scopus)**.

18. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Sub-Gaussian random variables and Wiman's inequality. *Carpathian Math. Publ.* 2023. V. 15. № 1. P. 306–314. Режим доступу до журналу: https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.306-314 **(Scopus, Web of Science)** *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

Статті в інших наукових виданнях і збірниках матеріалів конференцій, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

19. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On Borel's type relation for the Laplace–Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2014. V. 42. № 2. P. 134–142. Режим доступу до журналу: http://matstud.org.ua/texts/2014/42_2/134-142.html *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

20. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Bukovinian Math. J.* 2021. V. 9. № 1. P. 56–63. Режим доступу до журналу: https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/1030 *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

21. Куриляк А., Скасків О. Нерівність типу Вімана для степеневих рядів з швидко коливними коефіцієнтами в кратно-кругових областях. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2022. Т. 93. С. 83–96. Режим доступу до журналу: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.083-096 *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

22. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zrum O.V. Levy's phenomenon for entire functions of several variables. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 45–46. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

23. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 123–124. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

24. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Tsvigun V.L. On exceptional set in Wiman's type inequality for entire functions of several variables. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 140–141. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

25. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л. Про виняткову множину у нерівності Вімана для випадкових цілих функцій декількох змінних. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 27 лютого – 2 березня, 2018 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2018. С. 67–68. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
26. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain. *The IV conference in mathematics and computer science "Congresio-mathematica"* (Mierki, Poland, 20–23 September, 2018). Abstracts, Olstun, 2018. P. 26.
27. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality on multiple-circular domain. *International Conference Complex analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A.A. Gol'dberg* (Lviv, 28 June – 1 July, 2020). Abstracts, Lviv, 2021. P. 30–31. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
28. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Levy's phenomenon for analytic functions in multiple-circular domain. *International online conference "Current trends in abstract and applied analysis"* (Ivano-Frankivsk, 12–15 May, 2022). Abstracts, Ivano-Frankivsk, 2022. P. 46–47. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
29. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *International conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 80th Anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine Professor Alexander Stepanets (1942–2007)* (Lutsk, 6–10 June, 2022). Abstracts, Lutsk, 2022. P. 18–19. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
30. Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces of Laplace-Stieltjes integrals. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 83. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
31. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 84. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*

Публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

32. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Mat. Stud.* 2013. V. 39. № 2. P. 134–141. Режим доступу до журналу: `http://matstud.org.ua/texts/2013/39_2/134-141.html` *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
33. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents. *Mat. Stud.* 2013. V. 40. № 1. P. 108–112. Режим доступу до журналу: `http://matstud.org.ua/texts/2013/40_1/108-112.html` *(Особистий внесок: доведення теореми 2).*
34. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman's inequality for the Laplace integrals. *Int. Journal of Math. Analysis.* 2014. V. 8. № 8. P. 381–385. Режим доступу до журналу: `https://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2014/ijma-5-8-2014/ovcharIJMA5-8-2014.pdf` *(Особистий внесок: доведення теореми 1).*
35. Куриляк А.О., Шаповаловська Л.О., Скасків О.Б. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2014. Т. 2. № 2–3. С. 130–135. Режим доступу до журналу: `https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/80` *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються та обговорення та аналіз отриманих результатів).*
36. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O. Wiman's inequality for entire functions of several complex variables with rapidly oscillating coefficients. *Mat. Stud.* 2015. V. 43. № 1. P. 16–26. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.43.1.16-26` *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються та обговорення та аналіз отриманих результатів).*
37. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Скасків С.Р. Аналоги нерівності Вімана і ефект Леві для аналітичних функцій у бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2015. Т. 3. № 3–4. С. 102–110. Режим доступу до журналу: `https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/129` *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
38. Kuryliak A., Skaskiv O., Tsvigun V. Levy's phenomenon for analytic functions in $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. *Mat. Stud.* 2016. T. 46. № 2. P. 121–129. Режим доступу до журналу: `https://doi.org/10.15330/ms.46.2.121-129` *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
39. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. *Буковин. мат. журн.* 2017. Т. 5. № 3–4. С. 90–97. Режим доступу до журналу:

https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/262 *(Особистий внесок: доведення твердження 5).*

40. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. *Прикарпат. Вісн. НТШ. Число.* 2018. Т. 1. № 45. С. 26–36. Режим доступу до журналу: https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/10/7 *(Особистий внесок: доведення твердження 1.4).*
41. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Skaskiv S.R. Wiman's type inequality and Levy's phenomenon for random analytic functions in the unit disc. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 41–42. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
42. Shapovalovska L.O., Kuryliak A.O., Skaskiv, O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 71. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
43. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей"* (Ворохта, 24 лютого – 2 березня, 2014 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2014. P. 72–73. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
44. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для функцій аналітичних у полікрузі. *Міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана* (Чернівці, 30 червня – 5 липня, 2014 року). Тези доповідей, Чернівці, 2014. P. 234–235. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
45. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2015. С. 37–38. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
46. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових функцій аналітичних в полікрузі. *Наукова конф. присв. 100-річчю К.М. Фішмана та М.К. Фаге* (Чернівці, 1–4 липня, 2015

року). Тези доповідей, Чернівці: ЧНУ, 2015. С. 63–64. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*

47. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On the Borel's type relation for Laplace-Stiltjes integrals. *International V. Skorobohatko mathematical conference* (Drohobych, 25–28 August, 2015). Abstracts, Drohobych, 2015. P. 90. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
48. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Tsvigun V.L. Levy's fenomenon for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. *International conference "Complex Analysis and Related Topics"* (Lviv, 30 May – 4 June, 2016). Abstracts, Lviv, 2016. P. 53–54. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
49. Куриляк А., Скасків О., Цвігун Л. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Друга Всеукр. наук. конф. "Прикладні задачі математики"* (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня, 2016 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2016. С. 11–12. *(Особистий внесок: доведення отриманих тверджень).*
50. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л., Шаповаловська Л.О. Нерівність Вімана для функцій аналітичних у полікрузі з швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 98–99. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
51. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. The abscissa of absolute convergence of Dirichet series with randon exponents. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 136–137. *(Особистий внесок: постановка задач, що розглядаються, обговорення та аналіз отриманих результатів).*
52. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 12–13. *(Особистий внесок: доведення наслідку 5).*