

ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації Біланик Ірини Богданівни на тему «Необмежені множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду» на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика» з галузі знань 11 «Математика та статистика»

Актуальність теми дослідження і отриманих результатів. Неперервні дроби та їх узагальнення, апроксимації Паде, є ефективним апаратом для наближення аналітичних функцій. Для розв'язання задачі про побудову дробово-раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних В. Я. Скоробогатько ввів у розгляд багатовимірні узагальнення неперервних дробів – гіллястих ланцюгових дробів. Для побудови цих наближень використовувались також багатовимірні апроксимації типу Паде. А. П. Голуб, Л. О. Чернецька поширили метод багатовимірних моментних зображень В. К. Дзядика на багатовимірний випадок і побудували багатовимірні раціональні апроксимації функції багатьох змінних.

Неперервні дроби, гіллясті та інтегральні ланцюгові дроби використовувались у роботах Х. Й. Кучмінської, І. І. Демківа, М. М. Пагірі, В. Семашко для інтерполяції функцій та функціоналів.

Основи аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду були закладені у роботах: П. І. Боднарчука, Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, М. О. Недашковського, М. С. Сявавка та ін. Однак, за аналогією з неперервними дробами, побудувати розвинення кратного степеневому ряду у гіллястий ланцюговий дріб на основі принципу відповідності не вдалося. У випадку двох змінних для цієї мети були використані двовимірні неперервні дроби, які стали об'єктом досліджень Х. Й. Кучмінської, М. О'Доногоє, Дж. Мерфі, Б. Вердонк, А. Кейт, В. Семашка, О. М. Сусь, Т. М. Антонової та ін. При переході до багатьох змінних конструкція цих дробів значно ускладнюється.

У 1976 році Д. І. Боднар запропонував до розгляду гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, які стали ефективним апаратом для побудови дробово-раціональних наближень аналітичних функцій багатьох змінних. Аналітична теорія таких дробів розвивалася у роботах Д. І. Боднара, Р. І. Дмитришина, С. В. Шарина, Т. М. Антонової, О. Є. Баран, М. М. Бубняк та ін. Зокрема, Р. І. Дмитришин означив та дослідив різні класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, побудував відповідні та приєднані гіллясті ланцюгові дроби для кратних степеневих рядів,

встановив умови їх збіжності. Пошук ефективних ознак збіжності, зокрема, ознак типу множин збіжності представляє науковий інтерес.

Актуальною є розробка нових методів дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, встановлення оцінок похибок апроксимації та їх використання для доведення ефективних достатніх ознак збіжності цих дробів.

Актуальною є також задача дослідження збіжності та встановлення оцінок похибок апроксимації гіллястих ланцюгових дробів з числовими елементами, оскільки для наближення дійсних чисел часто використовуються підхідні дроби їх розвинень у правильні неперервні дроби, які дають найкращі раціональні наближення. Така потреба виникає у прикладних задачах, наприклад, у роботах А. О. Лопушанського, О. В. Лопушанського, С. В. Шарина, Г. І. Себе, Д. Ласку та ін.

Канонічні чисельники та канонічні знаменники підхідних дробів неперервних дробів задовольняють тричленні рекурентні співвідношення Валліса. Дослідженню рекурентних співвідношень присвячені, зокрема, роботи Т. П. Гоя, Р. А. Заторського, С. В. Шарина, Р. Фрончака, У. Акбаби, А. Х. Дегера, Т. Коматцу. Розгляд об'єктів, які задовольняють рекурентні співвідношення вищих порядків приводять до багатовимірних узагальнень неперервних дробів. Для гіллястих ланцюгових дробів такі рекурентні співвідношення, взагалі кажучи, не виконуються. Актуальним є виділення класу гіллястих ланцюгових дробів, канонічні чисельники і знаменники яких є лінійно-незалежними розв'язками лінійного однорідного рекурентного співвідношення четвертого порядку та дослідження збіжності цих дробів.

У даній дисертаційній роботі проведеного дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами. Встановлено критерій та ознаки збіжності таких дробів, які є багатовимірними узагальненнями відомих ознак збіжності неперервних дробів. Обґрунтовано формули розкладу відношення лінійно-незалежних розв'язків чотиричленного однорідного рекурентного рівняння у гіллястий ланцюговий дріб, отримано умови його збіжності. Встановлено багатовимірний аналог параболічної теореми. Доведено допоміжну лему про стійкість до збурень неперервного дробу, елементи якого задовольняють умовам теореми Джоунса-Трона, використовуючи цей результат доведено двовимірне узагальнення цієї теореми. Досліджено збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях. Встановлено достатню ознаку збіжності таких гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з частинними чисельниками рівними одиниці, а також отримано різні оцінки швидкості збіжності в частинах кутових областей. У випадку, коли гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду

мають дійсні додатні частинні чисельники встановлено оцінки швидкості їх збіжності. Ці результати використано при дослідженні збіжності та встановленні оцінок швидкості збіжності багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними.

Таким чином, дисертаційне дослідження є актуальним і містить, нові науково обґрунтовані теоретичні результати, що мають істотне значення для аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів і в суміжних галузях теорії чисел та теорії наближення аналітичних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Основним результатом дисертаційного дослідження є розробка нових методів дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Один із полягає у доведенні ознак збіжності з урахуванням розмірності дробу, перехід від N -вимірних до $(N-1)$ -вимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Інший – суттєво використовує оцінки швидкості збіжності неперервних дробів при оцінці швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Використовуючи ці методи, отримані нові наукові результати в аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними: встановлено критерій збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з додатними елементами та ефективні достатні умови збіжності цих дробів; обґрунтовано розв'язання відношення лінійно-незалежних розв'язків лінійного однорідного рекурентного рівняння четвертого порядку у гіллястий ланцюговий дріб, встановлено умови його збіжності; досліджено збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з частинними чисельниками, які належать параболічним областям, зокрема, встановлені багатовимірний аналог теореми Трона про спарені параболічні множини збіжності та Джоунса-Трона про параболічні множини збіжності для двовимірних дробів; доведено багатовимірний аналог теореми Ван Флека про кутову область збіжності та встановлено оцінки швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з частинними чисельниками рівними одиниці в частинах цих областей, зокрема, багатовимірні аналоги оцінок встановлених Єнсенем, Грагом та Варнером для неперервних дробів; отримані ознаки збіжності та оцінки похибок апроксимації були застосовані при дослідженні збіжності та оцінок швидкості збіжності багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійною науковою працею. У спільних роботах з науковим керівником останньому

належать постановки задач та аналіз отриманих результатів. У спільній роботі з Д. І. Боднаром і Л. М. Буяк Біланик І. Б. обґрунтувала алгоритм розвинення відношення лінійно незалежних розв'язків однорідного лінійного чотиричленного рекурентного рівняння у гіллястий ланцюговий дріб та дослідила збіжність цього добу.

Ступінь достовірності результатів дослідження забезпечується повними математичними доведеннями математичних результатів, наведених дисертації.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати дисертації можуть бути використані в аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів, теорії апроксимації функцій багатьох змінних, комплексному аналізу, теорії чисел. Ці результати знайдуть застосування у наукових дослідженнях, які проводяться у ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», Інституті прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Національному університеті «Львівська політехніка», Інституті математики НАН України та інших наукових установах і вищих навчальних закладах України.

Повнота викладу матеріалів дисертації в публікаціях та особистий внесок здобувача в публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано у 23 працях, серед них 5 статей (1 стаття у науковому фаховому виданні України та 4 статті у періодичних наукових фахових виданнях, які індексуються у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection) та 18 тез доповідей.

Перелік основних публікацій Біланик Ірини Богданівни за темою дисертації

1. Bilanyk I., Bodnar D. Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements. Carpathian Math. Publ. 2017, 9 (1), 13-21. <https://doi.org/10.15330/cmp.9.1.13-21> (Web of Science).

2. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у кутових областях. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017, 60 (3) 60-69.

(Те same: Bodnar D. I., Bilanyk I. B. On the convergence of branched continued fractions of a special form in angular domains. J. Math. Sci. 2020, 246 (2), 188-200. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04729-w>) (Scopus)

3. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L. Representation of a quotient of solutions of a four-term linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction. Carpathian Math. Publ. 2019, **11** (1), 33-41. <https://doi.org/10.15330/CMP.11.1.33-41> (Scopus та Web of Science)

4. Bilanyk I. A truncation error bound for some branched continued fractions of the special form. Mat. Stud. 2019, **52** (2), 115-123. <https://doi.org/10.30970/ms.52.2.115-123> (Scopus)

5. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінки швидкості поточної та рівномірної збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2019, **62** (4), 72-82.

<http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/3270/3440>
(Фахове видання)

Перелік додаткових публікацій за темою дисертації

1. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (4 – 27 лютого 2016 р., Ворохта). Тези допов. – Івано-Франківськ: Прикарпатський націон. ун-т ім. Василя Стефаника, 2016. – С. 57.

2. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Критерій збіжності гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (22 – 25 лютого 2017 р., Ворохта). Тези допов. – Івано-Франківськ: Прикарпатський націон. ун-т ім. Василя Стефаника, 2017. – С. 54.

3. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про параболічні області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Міжнар. наук. конф. «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяч. 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, проф. О. І. Степанця (28 травня – 3 червня 2017 р., Слов'янськ). Тези допов. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. – С. 43.

4. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Бубняк М. М. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Міжнар. конф. молодих математиків, присвяч. 100-річчю з дня народження академіка НАН України, проф. Ю. О. Митропольського (7 – 10 червня 2017 р., Київ). Тези допов. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. – С. 40.

5. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу»

(27 лютого – 2 березня 2018 р., Ворохта). Тези допов. – Івано-Франківськ: Прикарпатський націон. ун-т ім. Василя Стефаника, 2018 – С. 37.

6. Біланик І. Б., Боднар Д. І., Чорний В. З. Про оцінку швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки та математики» (22 – 25 травня 2018 р., Львів). Тези допов. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018. – Т. 3. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018>

7. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях», присвяч. 50-річчю ф-ту матем. та інформ. Чернівецького націон. ун-ту ім. Ю. Федьковича (17 – 19 вересня 2018 р., Чернівці). Тези допов. – Чернівці: Чернівецький націон. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2018. – С. 167.

8. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Кутові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. VI Всеукр. наук. конф. ім. Б. В. Васишина «Нелінійні проблеми аналізу» (26 – 28 вересня 2018 р., Івано-Франківськ). Тези допов. – Івано-Франківськ: Прикарпатський націон. ун-т ім. Василя Стефаника, 2018. – С. 8.

9. Bilanyk I., Bodnar D., Buyak L, Voznyak O. Representation of a quotient of solutions of a linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (25 лютого – 1 березня 2019 р., Ворохта). Тези допов. – Івано-Франківськ: Прикарпатський націон. ун-т ім. Василя Стефаника, 2019. – С. 22.

10. Біланик І. Б. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів у параболічних областях. Конф. молодих вчених «Підстригачівські читання – 2019»

(Львів, 27 – 29 травня 2019 р., Львів). – Режим доступу до ресурсу: <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Bilanyk.pdf>

11. Біланик І. Б. Оцінка швидкості збіжності двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у деяких кутових областях. Міжнар. конф. молодих математиків (6 – 8 червня 2019 р., Київ). Тези допов. – Київ : Ін-т математики НАН України, 2019. – С. 102.

12. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду в кутових областях. Міжнар. наук. конф. «Функціональні методи теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV» присвяч. 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (20 – 26

червня 2019 р., Світязь, Україна). Тези допов. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2019. – С. 33.

13. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. Vovnyak O. G. Some unlimited convergence domains of branched continued fractions of the special form. Всеукр. наук. конф. «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 70-річчя В. Ф. Бабенка (3 – 5 жовтня 2019 р., Дніпро). Тези допов. – Дніпро: ДНУ ім. О. Гончара, 2019. – С. 52.

14. Bodnar D. I. Bilanyk I. B. On convergence of branched continued fractions of the special form with positive elements. Int. Conf. «Infinite Dimensional Analysis and Topology» dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky (October 16 – 20, 2019, Ivano-Frankivsk). Books of abstracts. – Ivano-Frankivsk, 2019. – P. 7.

15. Біланик І. Б., Боднар Д. І. Оцінка швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (26 лютого – 1 березня 2020 р., Ворохта). Тези допов. – Івано-Франківськ: Прикарпатський націон. ун-т ім. Василя Стефаника, 2020. – С. 35-36.

16. Біланик І. Б. Оцінка швидкості поточної збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними. Конф. молодих вчених «Підстригачівські читання – 2020» (Львів, 26 – 28 травня 2020 р., Львів). – Режим доступу до ресурсу: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Bilanyk.pdf>

17. Bilanyk I., Voznyak O. On the convergence of multidimensional S -fractions with independent variables. 11th International Skorobohatko mathematical conference (October 26–30, 2020, Lviv, Ukraine). Books of abstracts. – Lviv, 2020. – P. 14.

18. Bilanyk I., Bodnar D., Voznyak O. Multidimensional analogue of Thron's theorem about twin parabolic convergence regions for continued fractions. International Online Workshop on Approximation Theory (March 19-21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine). Book of abstracts. – Ivano-Frankivsk, 2021. – P. 8-9.

Загальний висновок. Дисертаційна робота Біланик Ірини Богданівни «Необмежені множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду» є завершеним науковим дослідженням в рамках поставлених мети і завдань, виконане дисертанткою особисто. Отримані результати свідчать про належний рівень наукової підготовки авторки.

Зміст, структура, оформлення дисертації та кількість публікацій відповідають вимогам «Тимчасового порядку присудження ступеня доктора філософії» (Постанова Кабінету Міністрів України від 6.03.2019 р. № 167), наказу МОН України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до

оформлення дисертації» та відповідає напрямку наукового дослідження освітньо-наукової програми ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» зі спеціальності 111 «Математика».

Під час виконання дисертації аспірантка дотримувалась принципів академічної доброчесності. За результатами перевірки та аналізу матеріалів дисертації не було виявлено ознак академічного плагіату, самоплагіату, фабрикації, фальсифікації.

Враховуючи високий рівень виконаних досліджень, актуальність теми, новизну отриманих результатів, їх теоретичне та практичне значення рекомендуємо дисертацію Біланік Ірини Богданівни «Необмежені множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду» до захисту на здобуття ступеня доктора філософії у разовій спеціалізованій вченій раді за спеціальністю 111 Математика.

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
проректор з науково-педагогічної роботи
ДВНЗ «Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника»



С. В. Шарин

кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри диференціальних
рівнянь і прикладної математики
ДВНЗ «Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника»



Т. П. Гой

