

ВІДГУК
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Біланик Ірини Богданівни
«Необмежені множини умовної збіжності
гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду»
поданої на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 111 «Математика»

Актуальність теми. Методи раціональної апроксимації аналітичних функцій пов'язані із застосуванням неперервних дробів, апроксимацій Паде та їх багатовимірних узагальнень. Основи аналітичної теорії неперервних дробів були закладені ще у роботах Л. Ейлера, Дж. Валліса, Ж. Л. Лагранжа, К. Ф. Гаусса, Т. Йо. Стільтьєса, П. Л. Чебишова. Вони мали значний вплив на розвиток математики. Принцип відповідності між степеневими рядами і неперервними дробами привів до побудови апроксимацій Паде, які є певним узагальненням неперервних дробів. Сучасний стан досліджень в аналітичній теорії неперервних дробів відображений у монографіях О. Перрона, Г. С. Уолла, У. Джоунса і В. Трона, Л. Лорентцен і Х. Воделанда, А. Коут та В. Бревек-Петерсон, Б. Вердонк, Х. Воделанда, У. Джоунса. Значна частина публікацій присвячена проблемі збіжності неперервних дробів.

Запропоновані різними авторами багатовимірні узагальнення неперервних дробів використовувались для розв'язання задач алгебри та теорії чисел. Для наближення функцій багатьох змінних В. Я. Скоробогатько у 1966 році застосував гіллясті ланцюгові дроби. Аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів була розвинута у роботах його учнів. Результати досліджень були підсумовані у монографіях П. І. Боднарчука і В. Я. Скоробогатька, В. Я. Скоробогатька, Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської.

В процесі формування аналітичної теорії гіллястих ланцюгових дробів були виділені три основні класи таких дробів: гіллясті ланцюгові дроби з N гілками розгалуження, гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними і двовимірні неперервні дроби.

Для побудови відповідних гіллястих ланцюгових дробів до кратних степеневих рядів найбільш ефективними, як показали дослідження

Р. І. Дмитришина, виявилися гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, аналітична теорія яких інтенсивно розвивається останнім часом. Побудовано алгоритми розвинення кратних степеневих рядів у відповідні та приєднані гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними у роботах Р. І. Дмитришина, С. В. Шарина, О. Є. Баран. Д. І. Боднар, Р. І. Дмитришин, Т. М. Антонова, О. Є. Баран, М. М. Бубняк встановили ознаки збіжності таких дробів та оцінки похибок апроксимації їх підхідними дробами при накладанні певних умов на елементи цих дробів.

Тому актуальною є задача розробки нових методів дослідження збіжності та встановлення ефективних ознак збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними та їх числових аналогів – гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

Структура та зміст роботи. Дисертація складається зі вступу та чотирьох розділів. У першому розділі наведено основні означення, формулювання відомих теорем, які використовувались у процесі дослідження. Означення S -фігурної збіжності, запропоноване дисертанткою, що наводиться у цьому розділі, суттєво використовується при доведенні основних результатів дисертації.

У другому розділі встановлений критерій збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з додатними елементами, низка достатніх умов збіжності таких дробів, які є аналогами відомих ознак збіжності неперервних дробів Зейделя, Прінгсхайма, Штерна–Штольца. Один із підрозділів присвячений обґрунтуванню розвинень відношення лінійно-незалежних розв'язків лінійного однорідного рекурентного рівняння третього порядку у гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження та досліджено умови його збіжності у випадку додатних елементів.

Третій розділ присвячений дослідженню параболічних множин умовної збіжності. Встановлено багатовимірні узагальнення відомих класичних параболічних теорем в теорії неперервних дробів, зокрема ознаки збіжності Трона, Трона–Джоунса. Остання ознака збіжності доведена лише для двовимірних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Деякі з

отриманих результатів були застосовані при дослідженні збіжності багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними.

У четвертому розділі основна увага приділена встановленню оцінок швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях. Доведено багатовимірний аналог теореми Ван Флека, досліджено швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів на різних підмножинах кутової області $\{|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$ (теореми 4.2-4.4). Доведено теорему (теорема 4.5) про оцінку швидкості збіжності у спарених кутових множинах. Деякі з отриманих результатів було застосовано при встановленні оцінок швидкості збіжності багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Дисертаційна робота присвячена розвитку нових підходів до дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Розроблено методи дослідження збіжності таких дробів: для встановлення ознак збіжності – перехід до гіллястого ланцюгового дробу меншої розмірності; для доведення оцінок швидкості збіжності – використання відомих оцінок похибок апроксимації підхідними дробами неперервних дробів. Останній метод, який базується на використанні S -фігурної збіжності, дає точніші і близькі до одновимірного випадку оцінки апроксимації підхідними дробами. Його не можна застосувати для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів з N гілками розгалужень через структурні особливості таких дробів. Проте, в аналітичній теорії гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду ці методи, на мій погляд, є перспективними.

Використовуючи запропоновані методи для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, встановлено критерій збіжності у випадку додатних компонентів, низку ознак збіжності, що є багатовимірними аналогами відомих класичних теорем про збіжність неперервних дробів та оцінки похибок апроксимації у кутових областях. Продемонстровано можливості використання отриманих результатів при дослідженні багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Достовірність результатів забезпечується строгими доведеннями теорем, які з достатньою повнотою наведені у дисертаційній роботі.

Апробація результатів і повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях. Результати дисертації опубліковано у 23 працях, серед яких: 5 статей у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях, 4 статті опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати доповідалися та обговорювалися на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, конференціях молодих вчених, зокрема та тих, які проходять в Інституті математики НАН України та наукових семінарах.

Зауваження. Відмітимо деякі зауваження, які не ставлять під сумнів правильність доведених результатів і не зменшують загального позитивного враження від дисертаційної роботи.

1. Як побажання для подальших досліджень, доцільно було б встановити оцінки похибок апроксимації не тільки в кутових, але і в параболічних областях як це зроблено у статті В. Б. Грагга і Д. Д. Ворнера [137].

2. При доведенні теореми 4.5 основний акцент робиться на оцінці швидкості збіжності. Можливо, доцільно було б більш детально зупинитись на питанні збіжності гіллястого ланцюгового дробу, хоча сама збіжність дробу, як стверджує дисертант, впливає із результату, отриманого Т. М. Антоною (теорема 1.16).

3. Теорема Ван Флека, параболічні теореми мають критеріальний характер. При доведенні використовується необхідна ознака збіжності неперервних дробів Штерна–Штольца. Аналога такої теореми для гіллястих ланцюгових дробів немає. Тому для багатовимірних узагальнень класичних результатів доцільно було б встановити необхідну ознаку збіжності гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами. Це може бути також побажанням для подальших досліджень дисертантки.

4. Допущено окремі граматичні та орфографічні помилки.

Висновки. Дисертаційна робота Біланик Ірини Богданівни на тему «Необмежені множини умовної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду» відповідає спеціальності 111 – «Математика» та всім вимогам Постанови Кабінету Міністрів України №167 від 06 березня 2019 р. «Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії» (із змінами, внесеними згідно з Постановою КМ №979 від 21 жовтня 2020 р.), а її автор, Біланик Ірина Богданівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – «Математика та статистика» за спеціальністю 111 – «Математика».

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
відділу обчислювальної математики
Інституту математики НАН України

