Хмельницький національний університет
Міністерство освіти і науки України

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника"
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Тарасевич Алла Валеріївна

УДК 512.548

ДИСЕРТАЦІЯ

КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ І ТОТОЖНОСТЕЙ НА ТЕРНАРНИХ КВАЗІГРУПАХ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
__________________ А.В. Тарасевич

Науковий керівник
Сохацький Федір Миколайович
доктор фізико-математичних наук,
доцент

Хмельницький — 2021

АНОТАЦІЯ

Тарасевич А. В. Класифікація функційних рівнянь і тотожностей на тернарних квазігрупах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — Хмельницький національний університет. — ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано -Франківськ, 2021.

В різних галузях науки постала потреба вивчення багатомісних функцій. Під *багатомісною операцією*, що визначена на деякій множині Q, розуміємо довільне зіставлення кожній n-вибірці (вибіркам довжини n) елементів множини Q деякого однозначно визначеного елемента множини Q. При цьому n називається арністю, а Q — носієм даної операції. Носій може бути як скінченною, так і нескінченною множиною. При визначені функції, елемент зіставляється не обов'язково кожній вибірці, проте в цій роботі розглядаються лише операції, тому слова "функція" і "операція" є синонімами.

В дисертації вивчаються лише оборотні операції. Унарна, тобто одномісна, операція називається *оборотною*, якщо вона є підстановкою, тобто взаємно однозначним перетворенням носія. Багатомісна операція називається *оборотною*, якщо вона оборотна по кожній своїй змінній. Нехай f є n-арною операцією. Замінимо k змінних в термі $f(x, y, \ldots, u)$ елементами носія. Отриманий терм визначає на носієві $(n-k)$-арну операцію, яка називається *ретрактом* операції f. Якщо довільний одномісний ретракт операції оборотний, то сама операція називається *оборотною*. Довільний ретракт оборотної операції також оборотний. *Ізотопом* довільної операції називається композиція цієї операції та підстановок носія. Ізотоп оборотної операції також оборотний.

При вивченні багатомісних оборотних операцій розглядаються різні

розклади однієї і тієї ж операції. Це призводить до вивчення функційних рівнянь. До того ж проблеми класифікації також є нагальними. А саме, класифікація оборотних операцій, квазігрупових функційних рівнянь, квазігрупових тотожностей і многовидів має бути вивченою. Для розв'язання цих проблем застосовується метод парастрофних симетрій. Суть цього методу полягає в тому, що поняття парастрофії розповсюджується на класи квазігруп, зокрема на многовиди квазігруп, на тотожності, на функційні рівняння, трансляції і взагалі на всі поняття, які вводяться в теорії квазігруп. При чому, парастрофія вводиться так, що симетрична група діє на відповідних об'єктах. Це дозволяє здійснювати класифікцію відповідних об'єктів: оборотних функцій, квазігруп, многовидів квазігруп, квазігрупових функційних рівнянь тощо.

Нехай n-арна операція f оборотна, то рівносильність формул

$$f(x, y, \dots, u) = v \quad \text{та} \quad g(x', y', \dots, u') = v',$$

де x', y', $\dots$, u', v' — перестановка σ змінних x, y, $\dots$, u, v, визначає n-арну операцію g, яку називають *σ-парастрофом* операції f. Довільний парастроф оборотної операції є n-арною оборотною операцією. Парастроф, який визначений перестановкою i-тої змінної та $(n+1)$-ї змінної v, називається *i-тим діленням операції f*. Симетрична група S степеня $n+1$ визначає дію на множині всіх n-арних оборотних операцій фіксованого носія, зіставляючи кожній перестановці σ і оборотній операції f її σ-парастроф g. При цьому для кожної операції стабілізатор цієї дії називається *групою парастрофних симетрій операції*, а орбіта — *парастрофною орбітою операції*.

Алгебра, яка складається з носія, оборотної операції (головна операція), визначеної на носії, та всіх її ділень називається *квазігрупою*. Квазігрупи називаються *ізотопними* (*парастрофними*), якщо ізотопні (відповідно, парастрофні) головні операції. Розглянемо квазігрупи з фіксованим носієм і арністю n. Зіставлення кожній квазігрупі та перестановці σ із симетричної групи S степеня $n+1$ σ-парастрофа даної квазігрупи є дією групи S на множині квазігруп. При цьому для кожної квазігрупи стабілізатор цієї дії називається *групою парастрофних симетрій квазігрупи*, а орбіта — *парастрофною орбітою квазігрупи.*

Клас квазігруп $\mathfrak{K}$, які є σ-парастрофами квазігруп з даного класу n-арних квазігруп $\mathfrak{N}$, називається *σ-парастрофом* класу $\mathfrak{N}$. σ-парастроф многовида квазігруп також є многовидом квазігруп. Зіставлення кожній парі, яка складається з перестановки σ та многовида квазігруп $\mathfrak{N}$, σ-парастрофа многовида $\mathfrak{N}$, є дією симетричної групи S степеня $n+1$ на множині квазігрупових многовидів. При цій дії стабілізатор називається *групою парастрофних симетрій многовида*, а орбіта — *парастрофною орбітою многовида*, яка є множиною многовидів парастрофних даному.

Тотожність називається квазігруповою, якщо її функційні символи інтерпритуються, тобто замінюються, квазігруповими операціями. Отже, функційні символи є функційними змінними, які набувають значень в множині оборотних операцій носія. Тому тотожність є функційним рівнянням.

В даній роботі під функційним рівнянням розуміємо універсально замкнену формулу, яка є рівністю двох термів, що не містять ні предметних, ні функційних сталих. Інакше кажучи, розглядається рівність двох термів, які складаються з предметних змінних та квазігрупових функційних змінних і розділових знаків. "Квазігрупових" означає, що всі функційні змінні набувають значень в множині оборотних функцій деякого носія. Крім того, всі предметні змінні зв'язані квантором загальності. Якщо всі квазігрупові функційні змінні також зв'язані квантором загальності, то так отриману формулу називають *гіпертотожністю.* Якщо ж в отриманій фомулі є принамні одна вільна функційна змінна, то така формула називається функційним рівнянням. Тут розглядаємо лише функційні рівняння, в яких всі функційні змінні вільні та називаємо їх *квазігруповими функціними рівняннями.* σ-парастрофом функційної змінної F називаємо функційну змінну, яка набуває значення σ-парастрофа значення змінної F.

Розв'язком функційного рівняння називаємо пару: носій і послідовність значень всіх його функційних змінних, яке перетворює дане функційне рівняння в істине висловлення. Отже, розв'язком квазігрупового функційного рівняння є квазігрупова алгебра, тобто алгебра, сигнатура якої складається з оборотних операцій. Тому всі розв'язки квазігрупового функційного рівняння є многовидом квазігрупових алгебр. Якщо всі функційні змінні попарно парастрофні, то розв'язком є многовид квазігруп, а функційне рівняння є квазігруповою тотожністю.

Функційні рівняння називаються: *рівносильними*, якщо многовиди їх розв'язків збігаються; парастрофно рівносильними, якщо многовиди їх розв'язків парастрофні; *парастрофно первинно рівносильними*, якщо одне з них можна отримати з іншого заміною предметних чи функційних змінних і застосуванням первинних гіпертотожностей. Парастрофно первинно рівносильні тотожності є парастрофно рівносильними, але не навпаки. Рівняння називається *n-арним*, якщо всі функційні змінні набувають значень в множині n-арних оборотних операцій. Якщо n-арні функційні рівняння парастрофно первинно рівносильні, то існує набір підстановок із симетричної групи S степеня n такі, що деяка послідовність відповідних парастрофів компонент розв'язку першого рівняння є розв'язком другого рівняння.

Квазігрупове функційне рівняння називається: *узагальненим*, якщо всі функційні змінні попарно різні; *квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має дві появи; *тривіальним*, якщо воно має квазігрупові розв'язки лише на одноелементних носіях.

В розділі 2 доведено, що кожне квазігрупове функційне рівняння довжини один та два парастрофно первинно рівносильне принаймні одному із наведених функційних рівнянь: два рівняння довжини один та сім рівнянь довжини два. Далі доведено, що всі пари рівнянь парастрофно первинно нерівносильні. З цією метою для кожної пари рівнянь будується приклад, який доводить їх парастрофно первинну нерівносильність. На завершення розділу описуються розв'язки кожного з рівнянь, а також розв'язки в класі лінійних тернарних квазігруп.

В розділі 3 вивчаються функційні рівняння довжини три. Спочатку проведена їх мінімізація: доведено, що кожне квазігрупове нетривіальне функційне рівняння довжини три парастрофно первинно рівносильне принаймні одному із 38 наведених функційних рівнянь. Причому, наведено їх розподіл за предметними типами: одне рівняння типу (8,0,0,0), чотири рівняння типу (6,2,0,0), п'ять рівнянь типу (5,3,0,0), чотири рівняння типу (4,4,0,0), десять рівнянь типу (4,2,2,0), десять рівнянь типу (3,3,2,0), чотири рівняння типу (2,2,2,2). В пункті 3.2 знайдено всі розв'язки рівнянь типу (5,3,0,0) в класі тернарних лінійних квазігруп.

В розділі 4 вивчаються квадратичні тернарні квазігрупові нетривіальні функційні рівняння і тотожності довжини три. А саме, встановлено, що з точністю до парастрофно первинної рівносильності існує чотири квадратичних тернарних квазігрупових нетривіальних функційних рівнянь довжини три і знайдено їх перелік; знайдено множини всіх розв'язків кожного з наведених рівнянь на довільному носієві; знайдено також множини всіх розв'язків кожного з наведених рівнянь на довільному носієві в класі універсальних луп; описано квадратичні квазігрупові тотожності з точністю до рівносильності в класі універсальних луп; в класі універсальних луп описано квазігрупові многовиди, які визначаються квадратичними тотожностями.

Ключові слова: тернарна квазігрупа, оборотна функція, парастрофно первинна рівносильність, функційне рівняння, предметний тип, довжина функційного рівняння, універсальна лупа, квазігрупа Штейнера, тотожність, середня лупа, уніпотентна лупа, моток, булевий моток.

ABSTRACT

Tarasevych A. V. Classification of functional equations and identities on ternary quasigroups. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — algebra and number theory. — Khmelnytsky National University. – Vasyl' Stefanyk Prycarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2021.

In various branches of science there is a need to study multiary functions. By a *multiary operation*, defined on some set Q, we mean an arbitrary assign to each n-tuple (the tuple of the length n) of elements from the set Q, a uniquely defined element in set Q. In this case, n is called an *arity* and Q is the *carrier* of this operation. The carrier can be a finite or an infinite set. In the definition of a function, the element is not necessarily assigned to each tuple. Since only operations are considered in this paper, the words "function" and "operation" are synonymous.

In the dissertation only invertible operations are studied. A unary operation is called *invertible*, if it is a surjectively injective transformation, i.e., a self-bijection of the carrier. A multiary operation is called *invertible* if it is invertible in each of its variables. Let f be an n-ary operation. Replace some k individual variables in the term $f(x, y, \dots, u)$ with elements of a carrier. The resulting term defines $(n-k)$-ary operation on the carrier. Then the obtained operation is called a *retract* of the operation f. If an arbitrary unary retract of an operation is invertible, then the operation itself is called *invertible*. An arbitrary retract of a invertible operation is also invertible. The *isotope* of an arbitrary operation is the composition of this operation and self-bijections of the carrier. The isotope of an invertible operation is also invertible.

Consideration of the multiary invertible operations and different decompositions of the same operation leads to the necessity of functional equation

research. Moreover, the problems of classification are also urgent. Namely, the classification of invertible operations, quasigroup functional equations, the quasigroup identities and varieties should be studied. To solve these problems, a parastrophic symmetry method is applied. The essence of this method lies in the parastrophy concept extension to classes of quasigroups, varieties of quasigroups, quasigroup identities, functional equations, translations, and to all concepts introduced in the theory of quasigroups. Moreover, parastrophy is introduced in such a way that the symmetric group acts on the corresponding objects. This allows to classify the respective objects: invertible functions, quasigroups, varieties of quasigroups, functional equations, etc.

Let an n-ary operation f be invertible, then the equivalence of the formulas

$$f(x, y, \ldots, u) = v \quad \text{and} \quad g(x', y', \ldots, u') = v',$$

where x', y', $\ldots$, u', v' is a permutation σ of the variables x, y, $\ldots$, u, v, defines the n-ary operation g which is called the *σ-parastrophe* of the operation f. An arbitrary parastrophe of an invertible operation is an n-ary invertible operation. A parastrophe defined by the permuting of the i-th variable and the $(n+1)$-th variable v is called the *i-th division of the operation f*. The symmetric group S of degree $n+1$ determines an action on the set of all n-ary invertible operations of a fixed carrier, assigning to each permutation σ and to each operation f its σ-parastrophe g. In this case for each operation, the stabilizer of this action is called *parastrophic symmetry group of the operation*, and the orbit is *parastrophic orbit of the operation.*

An algebra consisting of a carrier, an invertible operation (the *main operation*) defined on the carrier, and all its divisions is called a *quasigroup.* Quasigroups are called *isotopic* (*parastrophic*) if the main operations are isotopic (respectively parastrophic). Consider quasigroups with a fixed carrier and arity n. The assigning to each quasigroup and to each permutation σ from the symmetric group S of degree $n+1$ the σ-parastrophe of this quasigroup is the action of the group S on the set of quasigroups. In this case for each quasigroup, the stabilizer of this action is called the *parastrophic symmetries group of the quasigroup*, and the orbit is *the parastrophic orbit of the quasigroup.*

The class of quasigroups $\mathfrak{K}$ which are σ-parastrophes of quasigroups from this class of n-ary quasigroups $\mathfrak{N}$, is called *a* σ-parastrophe of the class $\mathfrak{N}$. The σ-parastrophe of a quasigroup variety is also a quasigroup variety. Assigning to each pair consisting of the permutation σ and the variety of quasigroups $\mathfrak{N}$, the σ-parastrophe of the variety $\mathfrak{N}$ is an action of the symmetric group S of degree $n+1$ on the set of quasigroup varieties. In this action, the stabilizer is called a *parastrophic symmetry group of the variety*, and the orbit is a *parastrophic orbit of the variety* which is the set of varieties being parastrophic to it.

An identity is called quasigroup, if its functional symbols are interpreted, i.e. replaced by quasigroup operations. Therefore, the functional symbols are functional variables that acquire values in the set of invertible operations of the carrier. Therefore, identity is a functional equation.

In this work, the functional equation is understood as a universally closed formula which is the equality of two terms that contain neither individual nor functional constants. In other words, it is considered the equality of two terms consisting of individual variables and quasigroup functional variables and punctuation marks. “Quasigroup” means that all functional variables take on values in the set of invertible functions of a carrier. In addition, all individual variables are bound by universal quantifiers. If all quasigroup functional variables are also bound by universal quantifiers, then the obtained formula is called a *hyperidentity.* If the resulting formula has at least one free functional variable, then such a formula is called a *functional equation.* Here we consider only functional equations in which all functional variables are free and we call them *quasigroup functional equations.* σ-parastrophe of the functional variable F is a functional variable that acquires the value of σ-parastrophe of the value of the variable F.

The solution of a functional equation is called a pair: the carrier and the sequence of values of all its functional variables which converts this functional equation into a true statement. Therefore, the solution of a quasigroup functional equation is a quasigroup algebra, i.e. an algebra whose signature consists of invertible operations. Consequently, all solutions of a quasigroup functional equation are a set of quasigroup algebras. If all functional variables are pairwise parastrophic, then the solution is a quasigroup variety and the functional equation is a quasigroup identity.

Functional equations are called: *equivalent* if the varieties of their solutions coincide; *parastrophically equivalent*, if the varieties of their solutions are parastrophic; *parastrophically primary equivalent*, if one of them can be obtained from the other by replacing the individual or functional variables and the use of primary superidentities. Parastrophically primary equivalent identities are parastrophically equivalent but the inverse statement is false. An equation is called n-ary if all functional variables take their values in the set of n-ary invertible operations. If n-ary unctional equations are parastrophically primarily equivalent, then there is a tuple of substitutions from the symmetric group S of degree n such that some sequence of corresponding parastrophes of the solution components of the first equation is the solution of the second equation.

A quasigroup functional equation is called: *generalized* if all functional variables are pairwise different; *quadratic*, if each individual variable has two occurrences; *trivial*, if it has quasigroup solutions only on one-element carrier.

In Section 2 it is proved that each quasigroup functional equation of the length one and two is parastrophically primarily equivalent to at least one of the listed functional equations: two equations of the length one and seven equations of the length two. It is further proved that all pairs of equations are parastrophically primarily non-equivalent. For this purpose, an example is constructed for each pair of equations which proves their parastrophic primary non-equivalence. At the end of the section, the solutions of each of the equations are described, as well as the solutions in the class of linear ternary quasigroups.

In Section 3, functional equations of the length three are studied. First, they are minimized: it is proved that each quasigroup nontrivial functional equation of length three is parastrophically primarily equivalent to at least one of the 38 listed functional equations. Moreover, their distribution according to individual types is given: one equation of the type (8,0,0,0), four equations of the type (6,2,0,0), five equations of the type (5,3,0,0), four equations of the type (4,4,0,0), ten equations of the type (4,2,2,0), ten equations of the type (3,3,2,0), four equations of the type (2,2,2,2). In point 3.2, all solutions of equations of the type (5,3,0,0) in the class of ternary linear quasigroups are found.

In Section 4, quadratic ternary quasigroup functional equations and identities of the length three are studied. Namely, it has been established that there are four quadratic ternary quasigroup nontrivial functional equations of the length three up to the parastrophic primary equivalence and their list has been found; the sets of all solutions of each of these equations on an arbitrary carrier has been established; the sets of all solutions of each of the listed equations on an arbitrary carrier in the class of universal variety has been also found; quadratic quasigroup identities have been described up to equivalence in the universal loop varieties; the quasigroup varieties defined by the quadratic identities have been described in the variety of the universal loops.

Key words: ternary quasigroup, invertible function, parastrophically primary equivalence, functional equation, individual type, length of a functional equation, universal loop, Steiner quasigroup, identity, middle loop, unipotent loop, skein, boolean skein.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sokhatsky F., Krainichuk H., Tarasevych A. A classification of generalized functional equations on ternary quasigroups // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2017. – No. 1-2. — P. 97–107.

2. Тарасевич А.В., Крайнічук Г.В. Про класифікацію узагальнених функційних рівнянь довжини три на тернарних квазігрупах // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. — 2018. — № 1-2. — С. 83–97.

3. Tarasevych A. On parastrophically primary non-equivalence of generalized functional equations of type (5; 3; 0; 0) // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2019. — No. 1-2.— P. 97–107.

4. Sokhatsky F., Tarasevych A. Classification of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of the length three // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11 (1). — P. 179–192.

5. Sokhatsky F. M., Tarasevych A. V. On ternary quasigroup quadratic identities of the small length // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2020. — Вип. 18. — С 150–161.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Крайнічук Г. В., Тарасевич А. В. Про тернарні квазігрупові функційні рівняння найменшої довжини // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання — 2017», 23–25 травня 2017 р.— Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. — URL:

http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/theses (дата звернення: 25.12.2020).

2. Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В. Про класифікацію квазігрупових функційних рівнянь від двох функційних змінних// Наук. конф. професорсько-викладацького складу, наук. працівників і здобувачів наук. ступеня за підсумками наук.-дослід. роботи за період 2015-2016 рр. (Вінниця, 15-18 травня, 2017 р.): матеріали у 2-х томах. – Том 1. – Вінниця, Донецький національний ун-т імені Василя Стуса, 2017. – С. 194–195.

3. Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В. Про класифікацію функційних рівнянь на тримісних оборотних функціях. // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського. 7-10 червня, 2017 р., Київ. Тези доповідей. – К: Інститут математики НАН України, 2017 – С.18.

4. Tarasevych Alla V., Krainichuk Halyna V. On classification of ternary quasigroup functional equations in three functional variables. // International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 April 2018, Balti: Communications. – Balti, 2018. – P. 91-92.

5. Tarasevych A., Sokhatsky F. Classification of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of length three ////The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02–06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2019. – P. 112.

6. Tarasevych A. General solutions of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of length three //The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bun-

yakovsky. July 02–06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2019. – P. 111.

7. Tarasevych A. On generalized ternary quasigroup functional equations of the type $(5;3;0;0)$// International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 14-17, 2020. Abstracts. – Kyiv: Taras Shevchenko National University, 2020. – P. 78.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Q — множина, носій.

$f(q_1, q_2, q_3)$ — тернарна операція (функція) f.

$\mathcal{O}_3$ — сукупність усіх тернарних операцій визначених на Q.

f — головна операція.

${}^{(14)}f$ — ліве ділення операції f.

${}^{(24)}f$ — середнє ділення операції f.

${}^{(34)}f$ — праве ділення операції f.

${}^{\sigma}f$ — σ-*парастроф* операції f.

Δ_3 — множина всіх тернарних оборотних операцій.

$\mathrm{Po}(f)$ — парастрофна орбіта операції f.

$\mathrm{Ps}(f)$ — група парастрофних симетрій операції f.

e — нейтральний елемент квазігрупи $(Q; f)$.

$\mathcal{Q} := \{a, b, c, a_1, \dots\}$ — множина фіксованих елементів із Q (предметні сталі, тобто константи).

$\mathcal{F} := \{f, g, h, f_1, f_2, \dots\}$ — множина функційних символів, які позначають одну і лише одну операцію, що визначена на Q (функційні сталі).

$\mathcal{X} := \{x, y, x_1, x_2, \dots\}$ — множина предметних змінних, які набувають значень в множині Q.

$\mathfrak{F} := \{F, F_1, F_1, \dots\}$ — множина функційних змінних, які набувають значень в множині функцій, що визначені на множині Q.

$:=$ — рівність за означенням.

$\preccurlyeq$ — лексикографічний порядок предметних змінних.

$\mathfrak{U}$ — многовид усіх тернарних універсальних луп.

$\mathfrak{B}$ — многовид булевих мотків.

ВСТУП

Актуальність теми. Розвиток різних галузей наук, а особливо комп'ютерних, спричинює вивчення багатомісних функцій. До того ж, як функцій визначених на скінченних множинах, так і функцій визначених на нескінченних множинах. Інакше кажучи, створення загальної теорії багатомісних функцій. Під n-місною або n-арною функцією ми розуміємо однозначне співставлення вибіркам n елементів довільно вибраної множини Q деякого елемента цієї ж множини, Q називаємо носієм, а число n арністю функції. Функція називається операцією, якщо кожна вибірка має образ. Проте в даній праці терміни функція і операція вважаються синонімами.

Як і серед одномісних функцій, серед багатомісних функцій чільне місце займають оборотні функції. Проте оборотність у багатомісному випадку визначається у різий спосіб. Ми під оборотністю розуміємо оборотність по кожній змінній: багатомісну функцію називаємо оборотною, якщо для довільної змінної довільна фіксація всіх інших змінних визначає одномісну оборотну функцію, тобто підстановку носія. Серед неперервних функцій дійсної змінної — це в точності функції, які монотонні по кожній змінній. В алгебрі пара, яка складається з носія та оборотної n-арної операції називається квазігрупою арності n.

Багатомісну функцію можна утворити з функцій меншої арності за допомогою їх послідовного виконання, тобто композиції. Одне з питань, яке постає при композиції — це знаходження умов, за яких дві композиції визначають одну й ту ж функцію. Прирівнявши ці композиції, ми отримуємо функційне рівняння.

У багатьох дослідженнях [11] виникає обернена задача — коли багатомісну функцію можна подати у вигляді композицій інших функцій, які "кращі" в певному розумінні: чи то мають меншу арність, чи краще визначені, чи мають кращі властивості. І в цьому випадку також постає питання: коли два розклади однакові? І знову ми приходимо до функційного рівняння.

Наприклад, в книзі [10] знайдено всі розв'язки функційного рівняння загальної асоціативності на множині багатомісних квазігруп, а потім за допомогою отриманого результату доведено ізотопність відповідних компонент повних розкладів довільної багатомісної оборотної функції за допомогою безповторних композицій. У дисертації [90] також за допомогою попереднього розв'язання функційного рівняння загальної асоціативності узагальнено цей результат для функцій, які сильно залежать від усіх своїх змінних і удосконалено його, довівши, що повні розклади такої функції майже однакові.

Розвиваючи даний напрямок дослідження, низка авторів вивчали розв'язки більш загальних функційних рівнянь. Першим узагальненням були врівноважені функційні рівняння, тобто рівняння, які є рівністю безповторних термів довільної довжини. Сюди можна віднести праці Алімпіч Б. [5], [6], Білоусова В.Д. [12], [15], Білявської Г. Б. [17], Крапєжа О. [57], [60], Мальцева А.І. [65], Мендельсона Н.С. [64], Сада А. [80], Сирбу П., Сохацького Ф.М. [82], Стояковича З. [93], Табарова А.Х. [95], Штейна С.К. [94] та інших.

Класи універсальних алгебр, які мають найкращий інструментарій для їх вивчення, є многовиди, тобто класи алгебр, які замкнені стосовно прямих добутків, гомоморфізмів та підалгебр. Згідно теореми Біркгофа [23], [71], це в точності універсальні алгебри, які визначаються тотожностями. При цьому тотожністю називають рівність двох термів, які побудовані з предметних змінних та символів операцій. Кажуть, що алгебра належить даному класу, якщо при підстановці замість символів операцій даної алгебри ми отримуємо рівність, яка виконується при довільних значеннях предметних змінних. Отже, символи операцій є функційними змінними, а тотожність означає, що на кожному носієві даного класу алгебр ліва і права частини тотожності є розкладами деякої багатомісної операції. Тому тотожності також можна трактувати як функційні рівняння. А розв'язком функційного рівняння є многовид відповідних алгебр.

Якщо ми маємо оборотну функцію f на носієві Q, то надаючи значення всім n змінним, крім x_i, рівність $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ однозначно визначає значення змінної x_i. Цим самим визначена операція ${}^{[i]}f$, яку називають i-тим діленням операції f. Тоді оборотність операції f визначається певними тотожностями в алгебрі $(Q; f, {}^{[1]}f, \ldots, {}^{[n]}f)$. Ці тотожності називають первинними. Оскільки вони виконуються для довільних оборотних операцій, то вони називаються гіпертотожностями. Якщо в кожному діленні здійснювати перестановку змінних, то отримаємо всього $(n{+}1)!$ оборотних операцій, які називають парастрофами операції f і кожний з них ${}^{\sigma}f$ визначається певною перестановкою σ множини $\{1, \ldots, n{+}1\}$. Клас алгебр, які є σ-парастрофами квазігруп даного класу, називається σ-парастрофом даного класу квазігруп. Симетрична група S_{n+1} діє на множині n-арних оборотних операцій довільного носія і на довільній множині парастрофних між собою класів квазігруп. Парастроф многовида квазігруп також є многовидам квазігруп. Основи парастрофної симетрії квазігруп і класів квазігруп закладені Ф. Сохацьким [85].

Якщо тотожності визначають один і той самий многовид квазігруп, то вони називаються рівносильними, а якщо парастрофні многовиди, то парастрофно рівносильними. Якщо ж одну тотожність чи функційне рівняння можна отримати з іншої тотожності чи функційного рівняння за допомогою первинних гіпертотожностей чи переіменувань предметних або функційних змінних, то такі тотожності чи функційні рівняння називають парастрофно-первинно рівносильними. Довільні парастрофно-первинно рівносильні тотожності є парастрофно рівносильними, але навпаки це не так.

Останнім часом тернарні квазігрупи знаходять своє застосування в різних галузях математики: геометрії [29], [3], [74]; теорії вузлів [68]; криптографії [27], [28], [25], [26], , [107] та інших галузях науки. Тому дослідження функційних рівнянь на тернарних квазігрупах є однією із важливих задач. Їх дослідження на бінарних квазігрупах проводилось в багатьох працях. Зокрема, опис функційних рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності на квазігрупах. Класифікація функційних рівнянь малої функційної довжини на бінарних квазігрупах проводилась в працях В. Білоусова, С. Крапежа, С. Крістіча, Я. Дуплака, Ф. Сохацького, Р. Коваль, Г. Крайнічук, Ю. Мовсисяна.

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційного дослідження* є вивчення тернарних квазігрупових функційних рівнянь малої довжини та класифікація відповідних многовидів квазігруп.

Задачі дослідження:

- класифікувати або мінімізувати узагальнені функційні рівняння малої функційної довжини з точністю до парастрофно-первинної рівносильності;
- розв'язати представники функційних рівнянь з різних класів;
- класифікувати узагальнені квадратичні тотожності довжини три в класі універсальних луп з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності та описати відповідні многовиди.

Об'єктом дослідження є квазігрупові функційні рівняння та їх розв'язки, тернарні тотожності на квазігрупах, універсальні лупи та тернарні квазігрупи.

Предметом дослідження є відношення між квазігруповими функційними рівняннями та тотожностями, а також між многовидами, які вони визначають. А саме, відношення рівносильності та парастрофної рівносильності на тотожностях, відношення парастрофно-первинної рівносильності на квазігрупових функційних рівняннях та відношення парастрофності на многовидах квазігруп.

Методи дослідження. У дисертації використовуються методи дослідження багатомісних квазігруп, методи дослідження функційних рівнянь, загальні методи алгебри і комбінаторні методи.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати, які представлені в дисертації, отримані автором самостійно, вони є новими і суть їх така:

— класифіковано нетривіальні узагальнені функційні рівняння довжин один та два з точністю до парастрофно-первинної рівносильності на тернарних квазігрупах, знайдено представники різних класів і розв'язки кожного з них;

— доведено, що кожне узагальнене функційне рівняння довжини три на тернарних квазігрупах парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному із наведених 38 рівнянь;

— виписано усі лінійні та лінійно-ідемпотентні розв'язки рівнянь із отриманих 5 класів розбиття предметного типу (5,3,0,0) функційної довжини три на множині тернарних квазігрупових операцій;

— класифіковано нетривіальні узагальнені квадратичні функційні рівняння довжини три з точністю до парастрофно-первинної рівносильності на тернарних квазігрупах, знайдено представники різних класів і розв'язки кожного з них;

— класифіковано квадратичні тотожності довжини три в класі універсальних луп з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності, а також описано відповідні многовиди.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати мають теоретичний характер і є певним внеском у теорію неасоціативних структур, скінченних тримісних оборотних функцій, дослідженні функційних рівнянь в алгебрі. Здійснена в дисертаційній роботі класифікація має особливе значення не лише з точки зору математики, але і дає можливість використання її в природничих та технічних науках. Так деякі з представлених результатів дисертації вже взяті для подальшого дослідження, зокрема Александаром Крапєжом [56].

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійно завершеною науковою роботою, в якій висвітлені власні ідеї і розробки, що дозволили вирішити поставлені завдання. У роботу включені лише результати, які належать автору. У спільних із науковим керівником працях Ф.М. Сохацькому належать твердження 6 із [86], теорема 4 із [87] та теорема 7 із [88]. У статті [86] Крайнічук Г.В. належать твердження 5; у роботі [97] – ідея побудови доведення леми 1 та структурна логіка побудови доведення теореми 1.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на таких конференціях і семінарах:

(I) Конференція молодих учених «Підстригачівські читання — 2017» (м. Львів, Україна, 23–25 травня 2017 р.).

(II) Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100–річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського.(м. Київ, Україна, 7–10 червня 2017 р.).

(III) Міжнародна конференція з математики, інформатики та інформаційних технологій, присвячена відомому вченому Валентину Білоусову (м. Бєльці, Республіка Молдова, 19-21 квітня 2018 р.).

(IV) XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215–річчю В. Буняковського (м. Вінниця, Україна, 02–06 липня 2019 р.).

(V) Міжнародна математична конференція, присвячена 60–річчю кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, Україна, 14–17 липня 2020 р.).

(VI) Міжкафедральний науковий семінар факультету програмування та комп'ютерних і телекомунікаційних систем Хмельницького національного університету Міністерства освіти і науки України (м. Хмельницький, 2021 р., керівник — доктор фізико-математичних наук, проф. Бедратюка Л. П.).

(VII) Міжкафедральний науковий семінар кафедр алгебри та геометрії, математичного і функціонального аналізу, диференціальних рівнянь і прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» (м. Івано-Франківськ, 2021 р., керівник — доктор фізико-математичних наук, проф. Загороднюк А. В.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 12 наукових працях, з них 5 — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України [86], [87], [88], [96], [97], серед яких 1 — у фаховому виданні, яке включене до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus" та "Web of Science" [87], 5 — у матеріалах міжнародних наукових конференцій [54], [98] – [101] , 2 — у матеріалах наукових конференцій молодих учених України [50], [55].

Обсяг і структура дисертації Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 108 найменувань, і додатків. Повний обсяг роботи – 145 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ТЕРНАРНІ КВАЗІГРУПИ, ФУНКЦІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ТОТОЖНОСТІ

1.1. Огляд літератури та результатів за тематикою дисертації

Вперше узагальнення класичних алгебричних структур на n-арні структури зроблено Р. Каснером [45] у статті "Розширення групових понять". Р. Кернер [46] стверджував, що одним із найперспективніших методів у теоретичній фізиці є вивчення багатоарних алгебр, тобто тернарних чи n-арних алгебр за допомогою яких в законі замінюють бінарну композицію.

Нині теорія n-арних систем має багато застосувань: застосування у фізиці [67], [106], [69]; диференціальній та афінній геометріях [42], [79], [30]; застосування в теорії автоматів [36], [37]; криптографії [24], [25]. Наприклад, в [69] відмічено, що: "...однією з основних особливостей поняття групи симетрій є зв'язок з бінарними операціями, тоді, як природа математичних операцій сама по собі не вказує на бінарність, як на єдино виділене відношення. До того ж, логіка справді послідовних досліджень вимагає, щоб поряд з бінарними операціями розглядались і n-арні. Потенційну плідність такого підходу демонсструють досить цікаві результати, які отримані на основі заміни білінійної симетричної форми, яка лежить в основі поняття метрики, на полілінійну" [70]. До монографій, які частково чи цілком присвячені теорії багатомісних груп відносять: А.К.Сушкевича [92, 1937], В.Д.Білоусова [10, 1972], С.А.Русакова [77, 78, 1992,1998], А.М.Гальмака [33, 2003], Я.Ушана [105, 2003].

Центральну роль в теорії n-арних квазігруп відіграють n-арні групи. Визначення багатомісної групи таке ж як і в бінарному випадку:

багатомісною групою називається асоціативна квазігрупа. При цьому операція називається *квазігруповою*, якщо вона оборотна на кожному місці та *асоціативною*, якщо результат її дворазового застосування до однієї і тієї ж послідовності не залежить від розташування дужок. Але, на відміну від бінарного випадку, асоціативність багатомісної операції визначається не однією тотожністю, а серією тотожностей, кожна з яких стверджує про незмінність результату при "пересуванні" дужок з i-того на j-те місце. Ці тотожності називаються тотожностями *частинної асоціативності*, а для фіксованих i, j така тотожність називається $(i;j)$-*асоціативністю*.

При вивченні основ теорії багатомісних груп природним є питання про залежність між тотожностями частинної асоціативності. Вперше це питання вивчалось в трьох працях Х.Терстона [103, 1954], в яких дано певну відповідь в класі сюр'єктивних групоїдів із скороченнями. Однак ці статті були невідомими і надалі їх результати не ввійшли до зазначених вище монографій. Більше того, В.Д.Білоусов [10] відмічає дану задачу як невідому і формулює її узагальнений варіант ([10, Задачі 2,3,с.217]). В [81] доведено, довільний частинно асоціативний групоїд з оборотним елементом є асоціатом сорту $(r;s;n)$, де $r|s|n$, тобто $(i;j)$-асоціативний для всіх пар $(i;j)$ таких, що $i \equiv j \equiv 0 \pmod r$ та $i \equiv j \pmod s$.

Паралельно з питанням про залежність між тотожностями частинної асоціативності в працях різних авторів вивчалось питання про розкладання таких операцій, тобто про можливість подання у вигляді композиції інших операцій, що визначені на цій же множині. Те, що частинно асоціативна квазігрупова операція розкладається за допомогою деякої групової операції та деяких квазігрупових операцій тривіально випливає із теореми, яка відома як теорема Білоусова про чотири квазігрупи [2, 1960]. Проблемним є питання про повне описання їх розкладів.

В [81] знайдено повний розклад операції довільного асоціату сорту $(r;s;n)$, який має кратно r оборотний елемент, і встановлено, що вивчення таких асоціатів зводиться до вивчення асоціатів сорту $(1; s; n)$ з оборотними елементами. Доведено, що підмножина оборотних елементів збігається з квазігруповим підасоціатом, який названо *поліагрупою сорту* $(s; n)$. З доведеного зокрема випливає, що довільна поліагрупа $(Q; f)$ сорту $(s; n)$, подібно до багатомісної групи, є ітерацією деякої бінарної групи $(Q; +)$, її автоморфізму φ та певного елемента a.

Множини з тернарними операціями, що мають різні властивості, описували багато авторів. Наприклад, Р. Баєр [8], Х. Прюфер [75] вивчали застосування тернарних груп у проективній геометрії. Дж. Керхтен [47] досліджував тернарні групові операції.

На даний час ростає інтерес до вивченння багатомісних квазігруп завдяки їх звязку з перешкодно-стійкими кодами та кореляційно-імунними функціями, що забезпечує можливість застосування дослідження в теорії кодування [76], [43] та криптографії [20], [19], [104], [108].

Питанння про подання функції у вигляді композиції функцій від меншої кількості змінних важливо не лише в неперервній (тринадцята проблема Гільберта), а і в дискретній (класи Поста) математиці. Природнє питання про існування нероздільних n-арних квазігруп відоме, як одна з проблем В.Д. Білоусова [10]. Частковий розв'зок цієї проблеми були отримані різними авторами. А Д.С.Кротов, В.Н. Потапов, П.В. Соколова в своїй праці [43] дали повний розязок цієї проблеми. а саме, побудовані нероздільні n-арні квазігрупи довільного порядку більше 3 та довільної арності більше 2.

Тернарні квазігрупи "зручно" використовувати у теорії кодування. Оскільки, графік n-арної квазігрупи – це МДР-код довжини 2. Клас циклічних МДР-кодів широко використовують при передачі повідомлень по каналах зв'язку з перешкодами. При дослідженні класів кодів важливо визначити три параметри: довжину коду, потужність коду та відстань коду. Побудова нелінійних МДР-кодів застосовується в криптографії.

Значну увагу викликають праці: М.М.Глухова [20], який подає методи побудови МДР-кодів, використовуючи теорію груп; С.Гонсалеса, Е.Коусела , В.Маркова, А. Нечаева [21], [22], у яких наведено алгоритм побудови нелінійних МДР-кодів з великою довжиною. Також у [21] наведений алгоритм побудови n-ортогональних n-арних операцій. Цей алгоритм узагальнено в [32]. Ці автори пропонують алгоритм побудови ортогональних n-арних операцій, який називають алгоритмом складання блоків. Вхідні дані алгоритму – це дві серії різних операцій сутності, що розподіляються блоками. Алгоритм складається з двох частин: алгоритму композиції для побудови n-арних операцій з ортогональними ретрактами із заданих блоків операцій та блочно-рекурсивного алгоритму для побудови ортогональних n-арних операцій з отриманих операцій. Дані результати ілюструють приклади ортогональних n-арних операцій, які можна побудувати блочно-рекурсивним алгоритмом і неконструювати відомим тривіальним рекурсивним алгоритмом.

Ортогональні n-арні квазігрупи застосовують при плануванні експеременту та розробці статистичних даних.

Інший напрям застосування тернарних квазігруп – це розробка статистичних даних експеременту [44]. У даному напрямку дослідження використовують ортогональні n-арні квазігрупи, латинські куби (комбінаторні аналоги тернарних квазігруп), які є похідними від латинських квадратів. Вперше ортогональні латинскі квадрати були дослідженні Л.Эйлером, а перші відомості про латинські куби з'явилися лише в 40-х роках минулого століття. Оскільки, латинські куби почали вивчатися відносно недавно, то значна частина теорії про них ще не побудована. Деякі результати їх побудови описані А. Крузом [18], М. Коголом [62], К. Ліндер [40], Т.Евансом [31].

Задача про існування системи ортогональних латинских квадатів і кубів є дуже важливою. Звернемо увагу, що визначення латинського куба першого порядку в плануванні експериментів є деяким узагальненням комбінаторного визначення латинського куба. Латинським кубом розміру n першого порядку називають кубічну таблицю із n елементів, розташовану в n^3 комірках, таким чином, що кожен елемент є у таблиці n^2 разів, і зустрічається в кожній із трьох площин, паралельних до координатних площин XYZ, XOZ, YOZ, рівно n разів.

Деякий латинський куб розміру n першого порядку можна накласти на інший латинський куб розмірності n першого порядку, так щоб кожен елемент одного куба зустрівся точно n разів з кожним елементом іншого куба. Такі два латинських куба називають *ортогональними латинськими кубами* першого порядку. При накладанні трьох і більше ортогональних латинських кубів будується гіпер-греко латинський куб.

Повному факторному експерименту для n^3, де $(n < 2)$ відповідає кубічне розміщення з n елементів, що містить n^3 позицій. Трьом ребрам куба відповідають фактори A, B, C з рівнями $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Якщо ввести в план четвертий фактор D і рівні цього фактору $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ розмістити у відповідних до дослідів точках кубічного розміщення, то одержимо латинський куб розміру n першого порядку [38].

У наслідок різновекторності застосування багатомісних оборотних функцій виникає мотивація дослідників до їх вивчення та побудови, особливо це стосується тернарних квазігруп.

Одним із методів побудови багатомісних операцій є безповторна композиція операцій меншої арності. Перевага цієї комозиції має три пункти. Перші два пункти описав В.Білоусов у книзі [10], а саме: безповторна композиція двох оборотних операцій завжди оборотна; компоненти розкладу оборотної операції в безповторну композицію оборотних операцій мають меншу арність ніж сама операція. Третій пункт переваги безповторної композиції розкрив у своїй дисертації Ф. Сохацький [90]. Він довів, що безповорна композиція скінченних операцій є оборотною тоді і тільки тоді, коли всі компоненти оборотні.

При вивченні розкладів квазігруп за допомогою безповторних композицій важливо описати квазігрупи, які нероздільні, тобто квазігрупи, які не розкладаються за допомогою безповторної композиції. Наприклад такими, як показано в праці Ф. М. Сохацького [84]. У цій роботі доведено, що серед роздільних луп з властивістю оборотності арності більше двох є лише лупи, які є похідними від бінарних груп експоненти 2. Тому всі інші IP-лупи нероздільні.

Приклад побудови тернарної лупи з властивістю оборотності здійснив В. І. Оной за допомогою асоціативно-комутативного кільця із одиницею.

Д. С. Кротову вдалося побудувати нероздільні багатомісні квазігрупи порядку $4r$ такі, що всі їхні ретракти отримані фіксуванням однієї змінної є роздільними. Для даної побудови були використані часткові булеві функції.

Прирівнявши два розклади однієї і тієї ж функції, отримуємо функційне рівняння. Розв'язання рівняння в деяких випадках описує частину розкладів багатомісної функції. Наприклад, Білоусов у [10] розв'язав рівняння узагальненої асоціативності на багатомісними функціях. Використавши отриманий результат, Білоусов довів, що між двома повними розкладами багатомісної оборотної функції за допомогою позиційної суперпозиції можна встановити взаємно-однозначну відповідність при якій відповідні компоненти ізотопні.

Цей результат був узагальнений і уточнений Сохацьким [90, 1986]. Він розв'язав функційне рівняння узагальненої асоціативності над скінченними функціями, які сильно залежать від кожної своєї змінної, тому є узагальненням оборотності (кожна оборотна функція сильно залежить від кожної своєї змінної). За допомогою отриманого результату Сохацький розв'язав проблему А.В. Кузнецова для k-значної логіки, довівши, що будь-які два повні розклади сильнозалежної функції за допомогою безповторної композиції є майже однаковими. До цього часу цей результат був відомий лише при $k = 2, 3$. А саме, в 1958 році майже однаковість розкладів булевих функцій без фіктивних змінних довів А.В. Кузнецов [61]), а при $k = 3$, майже однаковість сильно залежних функцій отримав Л.М. Сосинський [91, 1964].

Крім того, в значній кількості праць проводилось дослідження врівноважених функційних рівнянь на оборотних, тобто квазігрупових, функціях. При цьому функційні рівняння називаються врівноваженими, якщо їх ліва і права частини є безповторними термами, які складаються з однакових змінних [13], [14].

Визначальні тотожності квазігрупи виконуються для всіх оборотнтних операцій. Тому їх називають первинними гіпертотожностями [66]. Отже, на множині квазігрупових функційних рівнянь, тобто функційних рівнянь на квазігрупах, введено відношення еквівалентності [85] при якому два рівняння називають рівносильними, якщо одне рівняння із іншого можна отримати за скінченну кількість кроків, кожний з яких є перейменуванням функційних чи предметних змінних, або застосуванням первинних гіпертотожностей. Дане відношення називають парастрофно-первинно рівносильним.

Розв'язком функційнного рівняння називають послідовність функцій, підстановка яких в рівняння перетворює його в істинне висловлення.

Якщо n-арні функційні рівняння парастрофно-первинно рівносильні, то існує перестановка σ із симетричної групи S_{n+1} степення $n + 1$, така, що будь-який розв'язок другого рівняння є перестановкою σ деяких компонентів фіксованних парастрофів розв'язку першого рівняння.

Тому природньо постало питання про класифікацію функційних рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Оскільки розглядаються лише рівняння, які не містять ні функційних, ні предметних сталих, то кожне функційне рівняння можна розглядати, як тотожність класів квазігрупових алгебр, сигнатура яких складається з функційних змінних, що входять у дане рівняння. Зокрема, це означає, що функційне рівняння є квазігруповою тотожністю, якщо всі функційні змінні попарно-парастрофні.

Нагадаємо, що з двох функційнних змінних друга змінна є σ-парастрофом першої, якщо вона набуває значень σ-парастрофа операції f перша змінна набуває значення f. Отже, сукупність розв'язків функційнного рівняння – це многовид квазігрупових алгебр.

Такий підхід дозволяє класифікувати квазігрупові тотожності та многовиди, які вони визначають. Для цього встановлюються дії групи S_{n+1} на оборотних функціях і квазігрупах фіксованого носія, на квазігрупових тотожностях та на відповідних многовидах. Орбіти цих дій називають парастрофними орбітами, а стабілізатори називають групами парастрофних симетрій і зрозуміло, що вони є підгрупами групи S_{n+1}.

При $n = 2$ питання парастрофної рівносильності квадратичних рівнянь Крапєж і Кристич звели до ізоморфності відповідних графів.

Інший підхід до цього питання було розроблено Ф.Сохацьким [82] та Р.Коваль [48]. А потім розроблений метод узагальнено на неквадратичні функційні рівняння та розвинуто у працях Ф.Сохацького [85] та Г.Крайнічук [51], [52], [53]. Зокрема отримано такі результати: дано повну класифікацію узагальнених квазігрупових функційних рівнянь до функційної довжини чотири з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та розв'язано представники з усіх отриманих блоків відповідного розбиття, а також знайдено розв'язки узагальнених дистрибутивно-подібних функційних рівнянь без квадратів на множині квазігрупових операцій. Використовуючи результати класифікації узагальнених функційних рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, отримано дві класифікації тотожностей довжиною 2 і 3 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності, а також описано розподіл відповідних многовидів квазігруп на пучки згідно з парастрофною симетрією.

Як вище було зазначено останім часом зріс інтерес до небінарних квазігруп, тому природньо постає питання про вивчення і класифікацію тернарних функційних рівнянь. Хоча такі рівняння розглядалися деякими авторами і знаходились їх розв'язки [102], [1], [93]. Але цілісне дослідження не проводились, хоча деяку інформацію можна отимати поклавши $n = 3$ у n-арні, функційні рівняння, які досліджувались: Бранкою Алімпіч(врівноваженні функційні рівняння на багатомісних квазігрупах) [4], Білоусовим (функійне рівняння узагальненої асоціативності та функційне рівняння ij-асоціативних квазігруп) [9].

1.2. Опис методів дослідження

У дисертації використаний метод парастрофної симетрії, розроблений в роботі [85] та методи дослідження багатомісних квазігруп [10]. Саме дослідження складається з декількох етапів. На першому етапі функційні рівняння досліджуються не беручи до уваги зв'язок між функційними змінними, тобто розглядаються узагальнені функційні рівняння, в яких всі функційні змінні попарно різні. А саме, замість довільного функційного рівняння φ розглядається розглядається його узагальнення φ', яке отримуємо з φ заміною всіх функційних змінних попарно різними змінними. Якщо φ' і φ'_1 парастрофно-первинно рівносильні, то φ і φ_1 також парастрофно-первинно рівносильні. Навпаки це не так. Проте вивчення узагальнених рівнянь дозволяє значно скоротити перебір. Наприклад, тернарних рівнянь від двох змінних є $81 \cdot 24 \cdot 12 = 23\,328$. З них узагальнених 81, а з точністю до парастрофно-первинної рівносильності — лише сім (теорема 2.2). Функційне рівняння є тотожністю в квазігрупі, якщо всі функційні змінні попарно парастрофні. Отже, всі тотожності розпреділені на сім класів, причому тотожності з різних класів парастрофно-первинно нерівносильні.

Наприклад, розглянемо узагальнене функційне рівняння (2.7). Це рівняння є узаагальненням тотожностей ${}^{\sigma}F(x,x,x) = {}^{\tau}F(x,x,x)$ Позначимо в ньому змінну ${}^{\sigma}F$ через F, тоді змінна ${}^{\tau}F$ буде ${}^{\sigma^{-1}\tau}F$. Тому тотожність матиме вигляд $F(x,x,x) = {}^{\pi}F(x,x,x)$, де $\pi := \sigma^{-1}\tau$. Оскільки група парастрофних симетрій даної тотожності є S_3, то маємо лише чотири тотожності (при $\tau = \iota, (14), (24), (34)$). При $\tau = \iota$ тотожність тривіальна. Для того, щоб показати парастрофно-первинну нерівнослильність тотожностей будуємо приклад який задовольняє одну тотожність, але жоден його парастроф не задовольняє іншу тотожність.

1.3. Тернарна казігрупа

Для кращого розуміння викладеного дослідження нагадаємо основні означення та поняття.

Назва тернарної операції походить від латинського слова ternarius, що в перекладі означає «потрійний». *Тернарною операцією* f визначеною на множині Q називають зіставлення будь-якій впорядкованій трійці (q_1, q_2, q_3) елементів з Q точно одного елементу q з множини Q. Іншими словами, тернарна операція f – це відображення з Q^3 в Q, яке записують $f(q_1,\, q_2,\, q_3) = q$. Множину Q називають *носієм.*

Сукупність усіх тернарних операцій визначених на Q позначають $\mathcal{O}_3$. Визначають множення тернарних операцій, як

$$\begin{aligned}
(f \underset{1}{\oplus} f_1)(x_1,x_2,x_3) &:= f(f_1(x_1,x_2,x_3),x_2,x_3),\\
(f \underset{2}{\oplus} f_1)(x_1,x_2,x_3) &:= f(x_1,f_1(x_1,x_2,x_3),x_3),\\
(f \underset{3}{\oplus} f_1)(x_1,x_2,x_3) &:= f(x_1,x_2,f_1(x_1,x_2,x_3)),\\
e_i(x_1,x_2,x_3) &:= x_i,\ i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Кожна з визначених суперпозицій є асоціативною [30]. Отже, алгебри $(\mathcal{O}_3; \underset{1}{\oplus}, e_1)$, $(\mathcal{O}_3; \underset{2}{\oplus}, e_2)$, $(\mathcal{O}_3; \underset{3}{\oplus}, e_3)$ – це моноїди.

Тернарну операцію f називають *оборотною*, якщо вона оборотна в кожному моноїді $(\mathcal{O}_3; \underset{i}{\oplus}, e_i)$.

Операція f – *головна* і її обернені в $(\mathcal{O}_3; \underset{1}{\oplus}, e_1)$, $(\mathcal{O}_3; \underset{2}{\oplus}, e_2)$, $(\mathcal{O}_3; \underset{3}{\oplus}, e_3)$ позначають ${}^{(14)}f$, ${}^{(24)}f$, ${}^{(34)}f$ і називають *лівим*, *середнім* і *правим діленням* відповідно. Іншими словами, операція f – оборотна, якщо виконуються рівності

$$f({}^{(14)}f(x,y,z),y,z) = x, \qquad (1.1) \qquad\qquad {}^{(14)}f(f(x,y,z),y,z) = x, \qquad (1.4)$$

$$f(x,{}^{(24)}f(x,y,z),z) = y, \qquad (1.2) \qquad\qquad {}^{(24)}f(x,f(x,y,z),z) = y, \qquad (1.5)$$

$$f(x,y,{}^{(34)}f(x,y,z)) = z, \qquad (1.3) \qquad\qquad {}^{(34)}f(x,y,f(x,y,z)) = z. \qquad (1.6)$$

Якщо операція f оборотна, то алгебру $(Q; f, {}^{(14)}f, {}^{(24)}f, {}^{(34)}f)$ (коротко, $(Q; f)$) називають *тернарною квазігрупою* [85]. Усі ділення оборотної операції також є оборотними, а отже є їх діленнями [10].

Під *парастрофом* [16] тернарної квазігрупи розуміють перестановку σ координатних появ предметних змінних шляхом заміни кожної впорядкованої четвірки (x,x,x,x) на $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$. Інакше кажучи, існує 24 операції для кожної тернарної оборотної операції, які визначають співвідношенням

$${}^{\sigma}f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = x_{\sigma(4)} \iff f(x_1,x_2,x_3) = x_4,$$

називають *парастрофами* тернарної квазігрупи, а операцію ${}^{\sigma}f$ називають *σ-парастрофом* операції f. Деякі з них можуть збігатися. Квазігрупа називається *тотально симетричною* [73] за умови, що всі її парастрофи збігаються. Оскільки парастрофи квазігрупи задовольняють рівності

$${}^{\sigma}({}^{\tau}f) = {}^{\sigma\tau}f \quad \text{and} \quad {}^{\iota}f = f, \qquad (1.7)$$

то симетрична група S_4 визначає дію на множині Δ_3 всіх тернарних оборотних операцій, визначених на тому ж носії. Введемо такі позначення:

- $\mathrm{Po}(f)$ — орбіта операції f, яка називається парастрофною орбітою операції f;

- $\mathrm{Ps}(f)$ — стабілізатор операції f, який називається групою парастрофних симетрій операції f;

З теореми про дію групи на множині випливає таке твердження.

Лема 1.1. *Мають місце такі твердження*

- *парастрофні орбіти оборотних операцій утворюють розбиття множини Δ_3 всіх оборотних операцій множини Q;*
- *парастрофні симетрії утворюють групу, яка є підгрупою симетричної групи четвертої степені, тобто $\mathrm{Ps}(f) \leqslant S_4$;*
- $\mathrm{Ps}({}^{\sigma}f) = \sigma \mathrm{Ps}(f)\sigma^{-1}$
- $|\mathrm{Ps}(f)| \cdot |\mathrm{Po}(f)| = 24$.

Клас $\mathfrak{A}$ називають квазігруповим, якщо він є сукупністю квазігруп. $\mathfrak{A}$ Зокрема, з цього факту випливає, що кількість різних парастрофів оборотної операції є множником 24. Точніше, ця кількість рівна $24/|\mathrm{Ps}(f)|$, де $\mathrm{Ps}(f)$ позначає стабілізатор групи f під цією дією, яку називають *групою парастрофних симетрій* операції f. Отже, тотально симетрична квазігрупа – це квазігрупа, група парастрофних симетрій якої є S_4. Якщо група парастрофних симетрій тернарної квазігрупи тривіальна, то квазігрупа має 24 різних парастрофи і її називають *асиметричною*.

Клас $\mathfrak{A}$ називають квазігруповим, якщо він є сукупністю квазігруп.

σ-парастрофом квазігрупового класу $\mathfrak{A}$ називають клас σ-$\mathfrak{A}$, який є сукупністю всіх σ-парастрофів квазігруп із класу $\mathfrak{A}$.

σ-парастрофом квазігрупової тотожності називають тотожність, яка отримана з даної, заміною головної операції на її σ^{-1} парастроф.

У статті [85] встановлена така теорема:

Теорема 1.1. *Якщо многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожностями, то многовид σ-$\mathfrak{A}$ визначається σ-парастрофами цих тотожностей.*

Елемент e квазігрупи $(Q; f)$ називають *нейтральним*, якщо для всіх x з Q виконуються рівності

$$f(x,e,e) = x, \qquad f(e,x,e) = x, \qquad f(e,e,x) = x.$$

На відміну від бінарної квазігрупи, нейтральний елемент не обов'язково єдиний у тернарній квазігрупі.

Квазігрупу називають *лупою* [72], якщо вона має нейтральний елемент. Наприклад, нехай $(Q; +)$ – група експоненти два і операція f визначається рівністю

$$f(x,y,z) := x + y + z.$$

Не важко помітити, що кожен елемент квазігрупи є нейтральним у $(Q; f)$. Таку квазігрупу будемо називати універсально нейтральною. А саме, тернарну квазігрупу $(Q; f)$ будемо називати *лівою*, *середньою*, *правою універсально нейтральною*, якщо виконуються відповідні рівності:

$$f(x,y,y) = x, \qquad f(y,x,y) = x, \qquad f(y,y,x) = x.$$

Називатимемо тернарну квазігрупу *універсально нейтральною*, якщо всі три тотожності мають місце. Зауважимо, що наведена у прикладі тернарна квазігрупа не лише універсально нейтральна, але й тотально симетрична. Квазігрупу, яка є універсально нейтральною і тотально симетричною, називають *квазігрупою Штейнера* [35], [93], або *мотком* [34]. Таким чином, кожна тернарна квазігрупа Штейнера - це лупа і, до того ж, кожен її елемент нейтральний.

Оборотну операцію f називають *безповторно-розкладною*, якщо існують дві бінарні оборотні операції g, h і бієкція $\sigma \in S_3$ така, що

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(h(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}), x_{3\sigma}).$$

З теореми 1 у [90] випливає такий результат.

Наслідок 1.1. *Якщо тернарна квазігрупа Штейнера* $(Q; f)$ *є безповторно-розкладною, тоді існує група* $(Q; +)$ *експоненти два така,* *що*

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

Тернарну квазігрупу Штейнера для якої виконується умова з твердження 1.1 називають *булевим мотком* [34], [7] .

Двогранна (діедральна) група порядку 8 розглядається, як група симетрій квадрата [63]. Зазначимо, що в загальному випадку діедральна група є групою симетрій правильного багатокутника, що включає в себе оберти та осьові симетрії.

1.4. Функційні рівняння та тотожності

Між поняттями "тотожності" та "функційного рівняння" є досить великий перетин. Під поняттям тотожність насправді розуміють в одному випадку вислів мови першого порядку, в іншому випадку – це предикат мови другого порядку, а саме:

- "вислів", наприклад, в множині дійсних чисел $(\mathbb{R};\cdot)$, істиною є така тотожність
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) \;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z); \tag{1.8}$$
- "предикат", наприклад, клас напівгруп визначається такою тотожністю
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) \;\; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \tag{1.9}$$

тобто тотожність асоціативності для множення дійсних чисел – це вислів, а у твердженні "асоціативність визначає клас напівгруп", теж в літературі вживається термін – 'тотожність', хоча насправді тут – це 'предикат'. У випадку (1.8) символ $(\cdot)$ – то є функційна стала, а в випадку (1.9), символ $(\cdot)$ – то функційна змінна. Саме в другому випадку тотожність доцільно називати 'функційним рівнянням', а клас всіх напівгруп є класом всіх розв'язків функційного рівняння асоціативності. Слід розрізняти ці два поняття, тому збережемо назву 'тотожність' лише для (1.8), а (1.9) називатимемо 'функційне рівняння'.

Для визначення функційного рівняння випишемо додаткові позначення та означення, які були введені в статті Ф. М. Сохацького [85].

Нехай Q — базова множина і нехай маємо такі позначення:

- $\mathcal{Q} := \{a, b, c, a_1, \dots\}$ — множина фіксованих елементів із Q (предметні сталі, тобто константи);
- $\mathcal{F} := \{f, g, h, f_1, f_2, \dots\}$ — множина функційних символів, які позначають одну і лише одну операцію, що визначена на Q (функційні сталі);
- $\mathcal{X} := \{x, y, x_1, x_2, \dots\}$ — множина предметних змінних, які набувають значень в множині Q;
- $\mathfrak{F} := \{F, F_1, F_1, \dots\}$ — множина функційних змінних, які набувають значень в множині функцій, що визначені на множині Q, причому функційна змінна арності n набуває значень лише серед n-місних функцій.

Означення терма:

1) кожна змінна із $\mathcal{X}$ і кожна константа із $\mathcal{Q}$ є термом;
2) якщо $f \in \mathcal{F}$ є n-арна функція, $F \in \mathfrak{F}$ є n-арна функційна змінна і $T_1, \dots, T_n$ є термами, то $f(T_1, \dots, T_n)$, $F(T_1, \dots, T_n)$ є термами;
3) інших термів не існує.

Терм називається *словом*, якщо він не має жодної функційної змінної. Нехай T терм, тоді $[T]$ і $\langle T \rangle$ відповідно позначають множини всіх предметних і функційних змінних, які з'являються в записі терма T.

Нехай $[T_1] \cup [T_2] := \{x_1, \dots, x_n\}$ and $\{F_1, F_2, \dots, F_k\} \subseteq \langle T_1 \rangle \cup \langle T_2 \rangle$, тоді формула

$$(\forall F_1)(\forall F_2) \dots (\forall F_k)(\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)(T_1 = T_2) \tag{1.10}$$

називається *універсальною (квантифікованою) рівністю.* Скрізь в дисертації позначатимемо таку рівність без кванторів.

Означення 1.1 (Ф. М. Сохацький [85, с. 81]). *Універсальна рівність (1.10) називається функційним рівнянням на Q, якщо вона має принаймні одну вільну функційну змінну, інакше вона є висловом і тоді цей вислів називається:*

- тотожністю*, якщо вона є висловом і цей вислів істинний;*
- протиріччям*, якщо цей вислів хибний.*

Означення 1.2 (Ф. М. Сохацький [85, с. 81]). *Функційне рівняння називається чистим, якщо воно не має ні функційних, ні предметних сталих.*

Означення 1.3. *Предметним типом функційного рівняння назвемо послідовність $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, де k позначає кількість предметних змінних рівняння враховуючи їх повторення, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k$, n_i — кількість появ i-тої змінної, до того ж, $n_i \geqslant 2$ при $n_i \neq 0$.*

Означення 1.4 (Ф. М. Сохацький [85, с. 81]). *Значення лексикографічної послідовності всіх вільних функційних змінних даного функційного рівняння називається його розв'язком, якщо рівняння стає тотожністю після підстановки компонентів розв'язку замість вільних функційних змінних.*

Функційне рівняння, яке має предметну чи функційну сталу, "прив'язане" до носія, а чисті функційні рівняння можна розглядати на всіх носіях і на кожному носієві воно має свою множину розв'язків. Отже, розв'язком чистого функційного рівняння є пара: носій і послідовність функцій, що визначена на ньому, а всі розв'язки функційного рівняння класом алгебр, в яких виконується тотожність, яка утворюється після підстановки операцій сигнатури в дане функційне рівняння. Отже, розв'язком функційного рівняння є многовид алгебр.

Означення 1.5 (Ф. М. Сохацький [85, с. 81]). *Формула (1.10) називається* універсальною квазігруповою рівністю*, якщо функційні сталі* *є квазігруповими операціями і передбачається, що функційні змінні набувають значень в множині квазігрупових операцій носія.*

Квазігрупові гіпертотожності досліджував Ю. Мовсісян [66]. Нова редакція означення та перелік всіх бінарних гіпертотожностей виписані Ф. М. Сохацьким [85].

Первинні квазігрупові гіпертотожності — це чисті квазігрупові тотожності (чисті функційні рівняння), які випливають із означення оборотних операцій та їх парастрофів. Для бінарного випадку ці гіпертотожності такі:

$$\begin{aligned}
&{}^{\sigma}({}^{\tau}F) = {}^{\sigma\tau}F, && {}^{s}F(x,y) = F(y,x),\\
&{}^{\ell}F(F(x,y),y) = x, && F({}^{\ell}F(x,y),y) = x,\\
&{}^{r}F(x,F(x,y)) = y, && F(x,{}^{r}F(x,y)) = y,\\
&{}^{s\ell}F(x,F(y,x)) = y, && F({}^{s\ell}F(x,y),x) = y,\\
&{}^{sr}F(F(y,x),y) = x, && F(y,{}^{sr}F(x,y)) = x.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Нехай Δ_3 — множина усіх оборотних тернарних функцій, визначених на носії Q. Відношення (1.1)–(1.6) та (1.7) справджуються для всіх функцій з Δ_3. Іншими словами, наступні *гіпертотожності* істинні над множиною Δ_3:

$$\left.\begin{aligned}
&{}^{\sigma}({}^{\tau}F) = {}^{\sigma\tau}F, \quad {}^{\iota}F = F, && {}^{(14)}F(F(x,y,z),y,z) = x;\\
&{}^{(24)}F(x,F(x,y,z),z) = y; && {}^{(34)}F(x,y,F(x,y,z)) = z,\\
&F(x_1,x_2,x_3) = {}^{\sigma}F(x_{1\sigma},x_{2\sigma},x_{3\sigma}), \quad \sigma \in S_3. &&
\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Гіпертотожності (1.12) називають *первинними* [85].

Зауваження 1.1. *Зауважимо, що перейменувавши предметні змінні у функційному рівнянні, ми отримаємо різні формули, які є записами одного й того ж функційного рівняння, оскільки всі предметні змінні у цих формулах зв'язані кванторами загальності.*

Розв'язок функційного рівняння — це послідовність функцій (операцій), що визначені на множині, яка після підстановки замість функційних змінних їх значень із послідовності при лексикографічному порядку, перетворює дане рівняння в істинне висловлення. Лексикографічний порядок предметних змінних означає, що їх появи записуються відповідно до алфавітного порядку змінних.

Означення 1.6. *Два функційні рівняння рівносильні на носієві, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків на даному носієві. Два чистих функційних рівняння називають рівносильними, якщо вони рівносильні на кожному носієві, тобто якщо вони мають один і то й же многовид розв'язків.*

Два функційні рівняння називаються парастрофно-первинно рівносильними, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків:

- застосування гіпертотожностей (1.11) та (1.12);
- заміна сторін рівняння;
- перейменування предметних змінних;
- перейменування функційних змінних.

Уточнимо перетворення "застосування гіпертотожностей (1.11) та (1.12)". Наприклад, згідно цьому перетворенню змінна x замінюється на терм $F(x, y, z)$ і всі підтерми $^{(14)}F(F(x, y, z), y, z)$ та $F(^{(14)}F(x, y, z), y, z)$ замінюються на x. Аналогічно відбувається застосування інших гіпертотожностей (1.11) та (1.12).

Отже, жодне із перетворень парастрофно-первинної рівносильності не змінює кількості різних предметних змінних. Тому парастрофно-первинно рівносильні функційні рівняння мають однакову кількість різних предметних змінних. Іншими словами, істиною є така лема.

Лема 1.2. *Якщо функційні рівняння мають різну кількість різних предметних змінних, то вони парастрофно-первинно нерівносильні.*

Підтермом рівняння є підтерм його лівої чи правої сторони. Підтерм терма T називається *власним*, якщо він не збігається ні з T, ні з предметною змінною. Функційну змінну F терма $F(t_1, t_2, t_3)$ назвемо *головною*.

Нехай $T_1 = T_2$ тернарне функційне рівняння довжини три, (F, G_i, G_j)– лексекографічна послідовність його функційних змінних, тобто, $i < j$. Послідовність (f, g, h) оборотних тернарних функцій визначених на множині Q є *розв'язком* $T_1 = T_2$, якщо після заміни F на f, G_1 на g та G_2 на h, отримуємо істинне твердження $t_1 = t_2$, тобто $t_1 = t_2$ є тотожністю. Квазігрупове функційне рівняння називають *тривіальним*, якщо воно має розв'язки лише на одноелементній множині [85].

В даній дисертації розглядаються лише нетривіальні функційні рівняння, тому передбачається, що кожна предметна змінна має принаймні дві появи. Якщо кожна предметна змінна має точно дві появи, то такі рівняння називають *квадратичними*.

Лексикографічним перейменуванням предметних змінних є перейменування всіх перших появ цих змінних відповідно до їх лексикографічного порядку.

Лема 1.3. *Нехай $\upsilon = \omega$ і $\upsilon' = \omega'$ – парастрофно-первинно рівносильні узагальнені тернарні функційні рівняння. Тоді існують біекція $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ в S_4 та біекція τ з $\{1, \ldots, m\}$ така, що кожен розв'язок $(f_1, \ldots, f_m)$ послідовності $({}^{\sigma_1}f_{1\tau}, \ldots, {}^{\sigma_m}f_{(m)\tau})$ є розв'язком рівняння $\upsilon' = \omega'$.*

У цьому випадку, $(\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ називається *визначальною системою біекцій* рівнянь $\upsilon = \omega$ і $\upsilon' = \omega'$.

З леми випливає достатня умова для парастрофно-первинної нерівносильності тернарних узагальнених функційних рівнянь. Тобто, наступне твердження є істинним.

Наслідок 1.2. *Якщо для кожної біекції τ з $\{1,\dots,m\}$ і біекцій $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ існує розв'язок $(f_1,\dots,f_m)$ з $\upsilon=\omega$ такий, що $({}^{\sigma_1}f_{1\tau},{}^{\sigma_2}f_{2\tau},{}^{\sigma_3}f_{3\tau})$ не є розв'язком $\upsilon'=\omega'$, то функційні рівняння $\upsilon=\omega$ і $\upsilon'=\omega'$ парастрофно-первинно нерівносильні.*

Нехай функційне рівняння містить m незалежних змінних. Квазігрупа $(Q;f)$ є розв'язком рівняння $\upsilon=\omega$, якщо послідовність $(\underbrace{f,\dots,f}_{m\text{ times}})$ є її розв'язком.

Наслідок 1.3. *Якщо тотально симетрична квазігрупа є розв'язком одного із функційних рівнянь і не є розв'язком іншого функційного рівняння, то ці рівняння парастрофно-первинно нерівносильні.*

Наслідок 1.4. *Якщо тотально симетрична функція є розв'язком одного функційного рівняння, але вона не є розв'язком іншого функційного рівняння, то ці рівняння парастрофно-первинно нерівносильні.*

Теорема 1.2. *Нехай квазігрупа задовольняє тотожність від трьох предметних змінних, які задовольняють умовам: множини підтермів довжини один мають дві змінні і ці множини попарно різні, множина змінних підтерма довжини два має три змінних. Тоді дана квазігрупа ізотопна деякій групі.*

Елемент e називається *лівим*, *правим*, *середнім нейтральним* оборотної операції $(\circ)$, якщо істина відповіна тотожність:

$$0\circ x=x,\qquad x\circ 0=x,\qquad x\circ x=0.$$

В цьому випадку, квазігрупа $(Q;\circ,0)$ є *лівою*, *правою*, *середньою лупою* відповідно. Більш детальну інформацію можна знайти в [89]. Відмітимо, що лівий парастроф середньої лупи є лівою лупою, а правий парастроф є правою лупою.

Квазігрупа $(Q;\circ)$ називається *груповим ізотопом*, якщо вона ізотопна деякій групі. Якщо

$$x\circ y=\alpha(x)+a+\beta(y),\quad \alpha 0=\beta 0=0, \tag{1.13}$$

де $(Q; +, 0)$ — група, то вибірка $(+, \alpha, \beta, a)$ називається *канонічним розкладом що визначений елементом 0* групового ізотопу $(Q; \circ)$.

Теорема 1.3 ([83]). *Кожний елемент групового ізотопу однозначно визначає його канонічний розклад.*

Твердження 1.1. *Якщо комутативна середня лупа $(Q; \circ, 0)$ є груповим ізотопом, то його канонічний розклад, який визначений елементом 0, є*

$$x \circ y = \alpha(x) + \alpha(y)$$

де $(Q; +, 0)$ є групою експоненти два, тобто вона є тотальньо симетричною групою.

Доведення. Нехай $(Q; \circ, 0)$ — комутативна середня лупа, яка є груповим ізотопом і нехай (1.13) є її канонічний розклад визначений елементом 0. Оскільки груповий ізотоп комутативний, то $\alpha = \beta$. Більше того, $0 = 0 \circ 0 = \alpha(0) + a + \beta(0) = a$. Рівність $x \circ x = 0$ означає, що $\alpha(x) + \alpha(x) = 0$. Замінюючи $\alpha(x)$ на x, отримуємо рівність $x + x = 0$, яка означає, що група $(Q; +, 0)$ має експоненту два. $\square$

РОЗДІЛ 2

КЛАСИФІКАЦІЯ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕРНАРНИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДОВЖИНИ ОДИН І ДВА

Користуючись тотожностями, які визначають оборотні функції, тобто квазігрупові операції, а також заміною змінних, ми можемо переходити від одного квазігрупового функційного рівняння до іншого і навпаки. Цим самим на множині квазігрупових функційних рівнянь визначено відношення еквівалентності, яке названо відношення парастрофної рівносильності. В один клас цієї еквівалентності належать рівняння, множини розв'язків яких на однакових носіях виразимі одна через іншу за допомогою переходу до парастрофів операцій. Тому природно постає питання про класифікацію функційних рівнянь з точністю до парастрофної рівносильності та розв'язання чи дослідження функційних рівнянь, які становлять трансверсаль[1] отриманих класів еквівалентності. Крім того, ставиться питання про виокремлення квазігрупових фукційних рівнянь, які рівносильні системі "коротших" таких рівнянь, тобто рівнянь, кожне з яких має меншу кількість функційних чи предметних змінних. В даній роботі під довжиною розуміємо кількість функційних змінних, які входять в запис рівняння.

У цьому розділі дано класифікацію тернарних функційних рівнянь довжини один (теорема 2.1) та довжини два (теорема 2.2). А також знайдено загальні розв'язки функційних рівнянь, які становлять деяку трансверсаль розбиття, яке відповідає відношенню парастрофної рівносильності цієї рівносильності, тобто є максимальною множиною парастрофно нерівносильних квазігрупових функційних рівнянь.

[1] *Трансверсаллю* сукупності множин називають вибірку по одному елементу з кожної множини.

2.1. Функційні рівняння довжини один

У даному підрозділі вивчаються узагальнені нетривіальні тернарні квазігрупові функційні рівняння від однієї функційної змінної, тобто функційної довжини один. Дано класифікацію з точністю до парастрофно-первинної рівносильності тернарних квазігрупових рівняння функційної довжини один та знайдено лінійні розв'язки отриманих рівнянь.

2.1.1. Класифікація функційних рівнянь довжини один.

Оскільки кожне нетривіальне узагальнене квазігрупове функційне рівняння має принаймні дві появи кожної предметної змінної, тоді виконується таке твердження.

Теорема 2.1. *Кожне узагальнене тернарне квазігрупове нетривіальне функційне рівняння довжини один парастрофно-первинно рівносильне точно одному з таких рівнянь:*

$$F(x,x,x)=x, \tag{2.1}$$

$$F(x,y,y)=x. \tag{2.2}$$

Доведення. Тернарне квазігрупове рівняння з однією функційною змінною має вигляд:

$$F(u_1,u_2,u_3)=u_4.$$

Множина предметних змінних $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ рівняння не може мати ні три ні чотири різні предметні змінні, позаяк тоді одна із змінних матиме одну появу, а це означатиме, що квазігрупове функційне рівняння є тривіальним, тобто має розв'язок лише на одноелементній множині. Тому дана множина має одну або дві різні незалежні предметні змінні.

Якщо функційне рівняння має одну незалежну змінну, то таке функційне рівняння має вигляд (2.1).

Якщо ж рівняння має дві різні предметні змінні, скажімо x та y, то це буде одне з таких рівнянь:

$$F(x,y,y)=x, \qquad F(y,x,y)=x, \qquad F(y,y,x)=x. \tag{2.3}$$

Перше рівняння з переліку (2.3) збігається з рівнянням (2.2).

У другому рівнянні з (2.3) переставимо першу та другу предметні змінні, а в третьому рівнянні з (2.3) — першу і третю предметні змінні, в результаті отримаємо такі рівняння відповідно:

$$^{(12)}F(x,y,y)=x, \qquad ^{(13)}F(x,y,y)=x.$$

В отриманих рівняннях замінимо $^{(12)}F$ і $^{(13)}F$ на F, в результаті матимемо рівняння (2.2).

Припустимо, що рівняння (2.1) та (2.2) парастрофно-первинно рівносильні. Нехай операція f є розв'язком рівняння (2.1). Це означає, що деякий парастроф f є роз'язком рівняння (2.2). Перевіримо це припущення.

Нехай $\mathbb{Z}_5$ – кільце цілих чисел за модулем 5. Операція f, визначена на $\mathbb{Z}_5$, таким виразом:

$$f(x,y,z):=2x+2y+2z$$

є розв'язком квазігрупового рівняння (2.1). Справді,

$$f(x,x,x)=2x+2x+2x=6x=x.$$

Операція f – оборотна, всі її парастрофи мають вигляд:

$$^{(14)}f(x,y,z)=3x-y-z,$$

$$^{(24)}f(x,y,z)=-x+3y-z,$$

$$^{(34)}f(x,y,z)=-x-y+3z.$$

Справді,

$$f(^{(14)}f(x,y,z),y,z)=2(3x-y-z)+2y+2z=6x-2y-2z+2y+2z=x,$$

$$^{(14)}f(f(x,y,z),y,z)=3(2x+2y+2z)-y-z=6x+6y+6z-y-z=x.$$

Отже,

$$^{(14)}f \underset{1}{\oplus} f = f \underset{1}{\oplus} {}^{(14)}f = e_1,$$

тому операція $^{(14)}f$ є лівим діленням операції f. Це означає, що операція f оборотна в моноїді $(\mathcal{O}_3; \underset{1}{\oplus}, e_1)$.

$$f(x, {}^{(24)}f(x,y,z), z)=2x+2(-x+3y-z)+2z=2x-2x+6y-2z+2z=y,$$

$$^{(24)}f(f(x,y,z),y,z)=-x+3(2x+2y+2z)-z=-x+6x+6y+6z-z=y.$$

Отже,

$$^{(24)}f \underset{2}{\oplus} f = f \underset{2}{\oplus} {}^{(24)}f = e_2,$$

тому операція $^{(24)}f$ є середнім діленням операції f. Це означає, що операція f оборотна в моноїді $(\mathcal{O}_3; \underset{2}{\oplus}, e_2)$.

$$f(x,y, {}^{(34)}f(x,y,z),y,z)=2x+2y+2(-x-y+3z)=2x+2y+2x-2y+6z=z,$$

$$^{(34)}f(x,y,f(x,y,z))=-x-y+3(2x+2y+2z)-y-z=-x-y+6x+6y+6z=z.$$

Отже,

$$^{(34)}f \underset{3}{\oplus} f = f \underset{3}{\oplus} {}^{(34)}f = e_3,$$

тому операція $^{(34)}f$ є лівим діленням операції f. Це означає, що операція f оборотна в моноїді $(\mathcal{O}_3; \underset{3}{\oplus}, e_3)$. Оскільки операція f оборотна в кожному із моноїдів $(\mathcal{O}_3; \underset{1}{\oplus}, e_1)$, $(\mathcal{O}_3; \underset{2}{\oplus}, e_2)$, $(\mathcal{O}_3; \underset{3}{\oplus}, e_3)$, то, згідно з означенням, вона є оборотною.

З означення операції f випливає, що результат $f(x,y,z)$ не залежить від перестановки змінних x, y, z, тому $S_3 \subseteq \mathrm{Ps}(f)$. Отже, операція f має не більше чотирьох різних парастрофів: f, $^{(14)}f$, $^{(24)}f$, $^{(34)}f$. Очевидно, що всі вони попарно різні і жодна з них не є розв'язком (2.2). Справді,

$$\begin{aligned} f(0,1,1) \ &= 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 4 \notin \{3,2\} = \\ &= \{{}^{(14)}f(0,1,1), {}^{(24)}f(0,1,1), {}^{(34)}f(0,1,1)\}, \end{aligned}$$

$$^{(14)}f(0,1,1) = 3 \notin \{2\} = \{{}^{(24)}f(0,1,1), {}^{(34)}f(0,1,1)\},$$

де

$$^{(14)}f(0,1,1) = 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 3,$$

$$^{(24)}f(0,1,1) = (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 2,$$

$$^{(34)}f(0,1,1) = (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 1 = 2,$$

тому $f \neq {}^{(14)}f$, $f \neq {}^{(24)}f$, $f \neq {}^{(34)}f$, ${}^{(14)}f \neq {}^{(24)}f$, ${}^{(14)}f \neq {}^{(34)}f$. Позаяк

$$\begin{aligned} {}^{(24)}f(0,2,3) &= (-1)\cdot 0 + 3\cdot 2 + (-1)3\cdot 1 = 3 \neq \\ &\neq 2 = (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 3 = {}^{(34)}f(0,2,3), \end{aligned}$$

то ${}^{(24)}f \neq {}^{(34)}f$. Отже, функції f, ${}^{(14)}f$, ${}^{(24)}f$, ${}^{(34)}f$ попарно різні.

Покажемо, що жодна з них не є розв'язком рівняння (2.2), тобто рівності

$$f(x,y,y) = x, \qquad {}^{(14)}f(x,y,y) = x,$$

$${}^{(24)}f(x,y,y) = x, \qquad {}^{(34)}f(x,y,y) = x$$

не є тотожностями. Враховуючи вирази операцій, дані рівності рівносильні таким рівностям:

$$2x + 2y + 2y = x, \qquad 3x - y - y = x,$$

$$-x + 3y - y = x, \qquad -x - y + 3y = x.$$

Легко бачити, що кожна з цих рівностей порушується в точці $(1,0,0)$.

З леми 1.3 випливає протиріччя. Це означає, що припущення неправильне. Тому, рівняння (2.1) та (2.2) парастрофно-первинно нерівносильні. □

2.1.2. Розв'язування функційних рівнянь довжини один.

Враховуючи теорему (2.1), означення ідемптентної квазігрупи та означення ліво-універсально-нейтральної квазігрупи випливає, що розв'язком функційного рівняння (2.1) є ідемпотентна квазігрупа, а розв'язком функційного рівняння (2.2) є ліво-універсально-нейтральна квазігрупа. Знайдемо лінійні розв'язки функційних рівнянь довжини один.

Для зручності доведення, перейменуємо предметні змінні у рівнянні (2.2) відповідно до циклу (xy). Маємо:

$$F(x, x, y) = y. \tag{2.4}$$

Наслідок 2.1. *Лінійна функція $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ над полем P є розв'язкам рівняння (2.1), тоді і тільки тоді, коли $d = 0$, $a+b+c = 1$.*

Доведення. Нехай лінійна функція f є розв'язком рівняння (2.1), тоді для всіх x виконується тотожність

$$f(x, x, x) = x.$$

Скориставшись визначенням лінійної функції f, вищевказану тотожність подамо у вигляді

$$ax + bx + cx + d = x.$$

Підставимо $x = 0$. Маємо $d = 0$, тому при $x = 1$, $a + b + c = 1$.

Навпаки, нехай $d = 0$ і $a + b + c = 1$, тоді

$$x = (a + b + c) \cdot x + 0 = ax + bx + cx + d = f(x, x, x). \quad \square$$

Наслідок 2.2. *Лінійна функція $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ над полем P є розв'язкам рівняння (2.4), тоді і тільки тоді, коли $d = 0$, $c = 1$, $b = -a$.*

Доведення. Нехай функція f є розв'язком рівняння (2.4), тоді для всіх x і y виконується тотожність

$$f(x, x, y) = y \tag{2.5}$$

Використавши означення лінійної функції f, тотожність (2.5) подамо у вигляді:

$$ax + bx + cy + d = y.$$

Підставимо почергово: $x = y = 0$, $x = 0$ і $y = 0$. Отримуємо: $d = 0$, $c = 1$, $b = -a$.

Якщо $d = 0$, $c = 1$, $b = -a$, то

$$y = (a + (-a))x + 1 \cdot y + 0 =$$
$$= (a + b)x + cy + d = ax + bx + cy + d = f(x, x, y). \quad \square$$

2.2. Функційні рівняння довжини два.

У даному підрозділі класифіковано з точністю до парастрофно-первинної рівносильності тернарні квазігрупові рівняння функційної довжини два, тобто від двох функційних змінних. Знайдені усі розв'язки отриманих рівнянь.

2.2.1. Класифікація функційних рівнянь довжини два.

Спочатку для повної класифікації доведемо допоміжні твердження.

Твердження 2.1. *Будь-яке узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини два парастрофно-первинно рівносильне рівнянню виду:*

$$F_1(u_1, u_2, u_3) = F_2(u_4, u_5, u_6); \tag{2.6}$$

де предметні змінні u_i, $i = \overline{1,6}$ розташовані в лексикографічному порядку.

Доведення. Нехай $v = \omega$ — будь-яке узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини два. Оскільки рівняння має дві функційних змінних, позначимо їх F_1 та F_2 то, враховуючи їх розташування, можливі такі випадки:

1) функційні змінні розташовані по одну сторону рівняння;

2) функційні змінні в різних частинах рівняння.

Якщо функційні змінні знаходяться по одну сторону, то це буде одне з таких рівнянь:

$$F_1(F_2(t_1, t_2, t_3), t_4, t_5) = t_6,$$

$$F_1(t_1, F_2(t_2, t_3, t_4), t_5) = t_6,$$

$$F_1(t_1, t_2, F_2(t_3, t_4, t_5)) = t_6,$$

Нехай предметна змінна x не належить множині предметних змінних $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$. Підставимо замість змінної x обидві частини першого рівняння в очевидну рівність

$$^{(14)}F_1(x, t_4, t_5) = {}^{(14)}F_1(x, t_4, t_5);$$

обидві частини другого рівняння в рівність

$$^{(24)}F_1(t_1, x, t_5) = {}^{(24)}F_1(t_1, x, t_5);$$

обидві частини третього рівняння в рівність

$$^{(34)}F_1(t_1, t_2, x) = {}^{(34)}F_1(t_1, t_2, x).$$

В результаті отримаємо рівняння

$$^{(14)}F_1(F_1(F_2(t_1, t_2, t_3), t_4, t_5), t_4, t_5) = {}^{(14)}F_1(t_6, t_4, t_5);$$

$$^{(24)}F_1(t_1, F_1(t_1, F_2(t_2, t_3, t_4), t_5), t_5) = {}^{(24)}F_1(t_1, t_6, t_5);$$

$$^{(34)}F_1(t_1, t_2, F_1(t_1, t_2, F_2(t_3, t_4, t_5))) = {}^{(34)}F_1(t_1, t_2, t_6).$$

Застосуємо до цих рівнянь третю, четверту і п'яту гіпертотожності із (1.12):

$$F_2(t_1, t_2, t_3) = {}^{(14)}F_1(t_6, t_4, t_5);$$

$$F_2(t_2, t_3, t_4) = {}^{(24)}F_1(t_1, t_6, t_5);$$

$$F_2(t_3, t_4, t_5) = {}^{(34)}F_1(t_1, t_2, t_6).$$

Перепозначимо F_2 через F_1 та ${}^{(14)}F_1$, ${}^{(24)}F_1$, ${}^{(34)}F_1$ через F_2. В результаті отримаємо рівняння виду (2.6). Залишилося перейменувати перші появи різних предметних змінних у лексикографічному порядку. □

Лема 2.1. *Кожне чисте узагальнене нетривіальне тернарне функційне рівняння довжини два належить точно до одного із чотирьох предметних типів:* $(6, 0, 0)$, $(4, 2, 0)$, $(3, 3, 0)$, $(2, 2, 2)$.

Доведення. Оскільки всі функційні змінні у рівнянні функційної довжини два є тернарними, то кількість предметних змінних дорівнює 6, враховуючи їх повторення. Оскільки рівняння квазігрупове і нетривіальне, то кожна предметна змінна повторюється щонайменше два рази, тому таке рівняння має не більше ніж три різні незалежні предметні змінні, тобто предметний тип (a, b, c), де $a, b, c > 1$ і $a+b+c = 6$. Занумеруємо предметні змінні так, що змінні в лексикографічному порядку мають незростаючу кількість своїх появ. Тому досить розглядати лише функційні рівняння із змінними x, y, z в яких x має a появ, y — b появ, z — c появ, тобто лише рівняння типів (a, b, c), де $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$ і $a + b + c = 6$. Ці умови задовольняють лише такі вибірки:

- якщо рівняння має одну незалежну предметну змінну, то його предметний тип $(6, 0, 0)$;
- якщо рівняння має дві різні незалежні змінні, то його предметний тип: $(4, 2, 0)$, $(3, 3, 0)$;
- якщо рівняння з трьома різними незалежними змінними, то його предметний тип лише: $(2, 2, 2)$.

Отже, всього 4 різних предметних типів тернарних функційних рівнянь довжини два. □

Теорема 2.2. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 7 узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини 2, які розділені на:*

предметний тип $(6, 0, 0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(x, x, x) = F_2(x, x, x), \tag{2.7}$$

предметний тип $(4, 2, 0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(x, x, x) = F_2(x, y, y), \tag{2.8}$$

$$F_1(x, x, y) = F_2(x, x, y), \tag{2.9}$$

предметний тип $(3, 3, 0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(x, x, x) = F_2(y, y, y), \tag{2.10}$$

$$F_1(x, x, y) = F_2(x, y, y), \tag{2.11}$$

предметний тип $(2, 2, 2)$ *— це рівняння:*

$$F_1(x, x, y) = F_2(y, z, z), \tag{2.12}$$

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z). \tag{2.13}$$

Доведення. Оскільки, досліджуємо нетривіальні квазігрупові функційні рівняння, то кожна предметна змінна має принаймні дві появи. Тому множина $\{u_1, \ldots, u_6\}$, яку називаємо *множиною предметних змінних*, може бути одно-, дво- або триелементною.

Якщо множина змінних має одну незалежну предметну змінну, то, згідно з лемою 2.1 це рівняння має предметний тип $(6, 0, 0)$, а відповідно до твердження 2.1, рівняння має вигляд (2.7).

Нехай множина незалежних предметних змінних двоелементна. Тоді можливі два випадки:

- одна із предметних змінних, скажімо y, з'являється двічі, то, відповідно до леми 2.1, таке рівняння має предметний тип $(4, 2, 0)$. Якщо предметна змінна y має обидві появи лише в одній зі сторін рівняння, то, згідно з твердженням 2.1, це буде рівняння (2.8). Якщо предметна змінна y з'являється в обох частинах рівняння, то відповідно до твердження 2.1, це буде рівняння (2.9);

- кожна з предметних змінних з'являється тричі, то, відповідно до леми 2.1, таке рівняння має предметний тип $(3, 3, 0)$. Якщо всі появи однієї змінної знаходяться в одній частині рівняння, то рівняння має вигляд (2.10). За іншої умови — це рівняння (2.11).

Нехай множина незалежних предметних змінних має три елементи, тоді кожна предметна змінна з'являється двічі і предметний тип такого рівняння є $(2, 2, 2)$. Отже, відповідно до твердження 2.1, є два випадки: ліва частина рівняння має дві різні незалежні предметні змінні, тоді це буде рівняння (2.12), а якщо ліва частина рівняння має три незалежні предметні змінні, то це рівняння (2.13).

Залишилося довести попарну нерівносильність функційних рівнянь (2.7)–(2.11). Доведення подамо в такій таблиці.

	(2.8)	(2.9)	(2.10)	(2.11)	(2.12)	(2.13)
(2.7)	лема 1.2	лема 1.2	лема 1.2	лема 1.2	лема 1.2	лема 1.2
(2.8)	$\times$	прикл. 1	Шт	Шт	лема 1.2	лема 1.2
(2.9)	$\times$	$\times$	Шт	Шт	лема 1.2	лема 1.2
(2.10)	$\times$	$\times$	$\times$	прикл. 2, $2'$	лема 1.2	лема 1.2
(2.11)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	лема 1.2	лема 1.2
(2.12)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	прикл. 3

Тернарна квазігрупа Штейнера $(Q; f)$ визначається як тотально симетрична універсальна лупа. Нагадаємо, що лупа називається універсальною, якщо в ній кожний елемент є нейтральним, тобто виконуються тотожності:

$$f(x, y, y) = x, \quad f(y, x, y) = x, \quad f(y, y, x) = x. \tag{2.14}$$

Оскільки тотальна симетричність спричинює комутативність тернарної операції. то в довільній тотально симетричній квазігрупі ці тотожності рівносильні. Звідси при $y = x$ випливає, що довільна універсальна лупа, а, отже і тернарна квазігрупа Штейнера, ідемпотентна, тобто

$$f(x, x, x) = x. \tag{2.15}$$

Тотальна симетрія означає, що всі парастрофи збігаються:

$$^{\sigma}f = f, \quad \sigma \in S_4. \tag{2.16}$$

Згідно лемі 1.3, для того, щоб встановити парастрофно-первинну нерівносильність кожного з рівнянь (2.8), (2.9) кожному з рівнянь (2.10), (2.11), покажемо, що пара $(f;f)$ є розв'язком і рівняння (2.8), і рівняння (2.9), але для всіх перестановок σ, τ множини $\{0,1,2,3\}$ пара $({}^{\sigma}f, {}^{\tau}f)$ не є розв'язком ні рівняння (2.10) ні рівняння (2.11). Доведемо це.

Справді, для всіх x, y із Q маємо

$$f(x,x,x) \overset{(2.15)}{=} x \overset{(2.14)}{=} f(x,y,y).$$

Отже, пара $(f;f)$ є розв'язком рівняння (2.8). Оскільки

$$f(x,x,y) \overset{(2.14)}{=} y \overset{(2.14)}{=} f(x,x,y),$$

то пара $(f;f)$ є розв'язком рівняння (2.9).

Нехай тепер σ, τ — довільні перестановки множини $\{0,1,2,3\}$, тоді для всіх x, y із Q маємо

$${}^{\sigma}f(x,x,x) \overset{(2.16)}{=} f(x,x,x) \overset{(2.15)}{=} x \neq y \overset{(2.15)}{=} f(y,y,y) \overset{(2.16)}{=} {}^{\tau}f(y,y,y).$$

Отже, пара $({}^{\sigma}f, {}^{\tau}f)$ не є розв'язком рівняння (2.10). Оскільки

$${}^{\sigma}f(x,x,y) \overset{(2.16)}{=} f(x,x,y) \overset{(2.14)}{=} y \neq x \overset{(2.14)}{=} f(x,y,y) \overset{(2.16)}{=} {}^{\tau}f(x,y,y),$$

то пара $({}^{\sigma}f, {}^{\tau}f)$ є розв'язком рівняння (2.11).

Отже, за наслідком 1.3 функційні рівняння (2.8) та (2.10), (2.8) та (2.11), (2.9) та (2.10), (2.9) та (2.11), парастрофно-первинно нерівносильні.

Якщо в комірці, що знаходиться на перетині (i)-того рядка та (j)-того стовпця написано "лема 1.2", то рівняння (i) та (j) мають різну кількість незалежних предметних змінних, що згідно з лемою 1.2 означає що вони парастрофно-первинно нерівносильні. Справді, рівняння (2.7) має одну незалежну предметну змінну, рівняння (2.8)–(2.11) мають дві різних незалежних предметних змінних, а рівняння (2.12) та (2.13) – по три різних незалежних предметних змінних. Це означає відповідно до леми 1.2, що рівняння (2.7) парастрофно-первинно нерівносильне жодному із рівнянь (2.8)–(2.13), а рівняння (2.12) парастрофно-первинно нерівносильне жодному із рівнянь (2.7)–(2.11) так само як і рівняння (2.13) парастрофно-первинно нерівносильне жодному із рівнянь (2.7)–(2.11).

Залишається довести парастрофно-первинну нерівносильність трьох пар рівнянь, для кожної з яких в таблиці на перетині рядка і стовпця зроблено відповідний запис. А саме для пари рівнянь (2.8) та (2.9) запис "прикл. 1" означає, що доведення дано нижче у пункті Приклад 1. Для пари рівнянь (2.10) та (2.11) запис "прикл. 2" означає, що доведення дано нижче у пункті Приклад 2. А для пари рівнянь (2.12) та (2.13) запис "прикл. 3" означає, що доведення дано нижче у пункті Приклад 3.

Приклад 1. Нехай $\mathbb{Z}_3$ — поле лишків за модулем 3 і операція h визначена такою формулою

$$h(x, y, z) := x + y + z.$$

Очевидно, що пара функцій (h, h) є розв'язком рівняння (2.9).

Припустимо, що рівняння (2.8) та (2.9) парастрофно-первинно рівносильні. Відповідно до леми 1.3, існують перестановки σ, π з множини $\{0, 1, 2, 3\}$ такі, що пара $({}^{\sigma}h, {}^{\pi}h)$ є розв'язком рівняння (2.8). покажемо, що це не так, тобто довільна пара парастрофів $({}^{\sigma}h, {}^{\pi}h)$ операції h не є розв'язком рівняння (2.8).

Оскільки група $(\mathbb{Z}_3; +)$ комутативна, то група парастрофних симетрій операції h включає S_3. Оскільки $|S_3| = 6$ і, згідно лемі 1.1,

$$|\mathrm{Ps}(f)| \cdot |\mathrm{Po}(f)| = 24,$$

то функція h має не більше 4 різних парастрофи.

Покажемо, що функції, які визначені рівностями

$${}^{(14)}h(x, y, z) := x - y - z,$$

$${}^{(24)}h(x, y, z) := -x + y - z,$$

$${}^{(34)}h(x, y, z) := -x - y + z$$

є парастрофами операції f. Для цього перевіримо виконання тотожніх рівностей (1.1)–(1.6):

$${}^{(14)}h\Big(h(x, y, z), y, z\Big) = (x + y + z) - y - z = x + y + z - y - z = x,$$

$$h\left({}^{(14)}h(x,y,z),y,z\right)=(x-y-z)+y+z=x-y-z+y+z=x,$$
$${}^{(24)}h\Big(h(x,y,z),y,z\Big)=-x+(x+y+z)-z=-x+x+y+z-z=y,$$
$$h\left({}^{(24)}h(x,y,z),y,z\right)=x+(-x+y-z)+z=x-x+y-z+z=y,$$
$${}^{(34)}h\Big(h(x,y,z),y,z\Big)=-x-y+(x+y+z)=-x-y+x+y+z=z,$$
$$h\left({}^{(34)}h(x,y,z),y,z\right)=x+y+(-x-y+z)=x+y-x-y+z=z.$$

Отже, функції h, ${}^{(14)}h$, ${}^{(24)}h$, ${}^{(34)}h$ є парастрофами операції h. До того ж вони попарно різні. Це випливає із такого твердження: T1: "Якщо в групі $(Q;+)$ для всіх x, y, z виконується рівність

$$\alpha(x)+\beta(y)+\gamma(z)=\alpha'(x)+\beta'(y)+\gamma'(z),$$

де $\alpha(0)=\beta(0)=\gamma(0)=\alpha'(0)=\beta'(0)=\gamma'(0)=0$, то $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$." Для доведення цього твердження слід підставити по черзі в дану рівність $y=z=0$, $x=z=0$, $x=y=0$.

Оскільки довільна пара тернарних обротних операцій є розв'язком рівняння (2.9), то відповідно до леми 1.3 парастрофна рівносильність рівнянь (2.9) та (2.8) означає існування парастрофів σ, τ таких, що для довільного f пара $({}^{\sigma}f,{}^{\tau}f)$ є розв'язком рівняння (2.8). Нехай h – операція, яка визначена в умові прикладу 1, тоді пара

$$\left({}^{\sigma}({}^{\sigma^{-1}}h),{}^{\tau}({}^{\sigma^{-1}}h)\right)=({}^{\sigma\sigma^{-1}}h,{}^{\tau\sigma^{-1}}h)=(h,{}^{\tau\sigma^{-1}}h)=(h,{}^{\nu}h)$$

є розв'язком рівняння (2.8), де $\nu:=\tau\sigma^{-1}$. Оскільки

$$h(x,x,x)=x+x+x=0,$$

то з того, що пара $(h,{}^{\nu}h)$ є розв'язком рівняння (2.8) випливає виконання тотожної рівності

$$0={}^{\nu}h(x,y,y).$$

Позаяк операція h має чотири різних парастрофи, то $\nu=\iota$, (14), (24), (34). Оскільки

$${}^{\iota}h(x,y,y)=x+y+y=x-y,\quad {}^{(14)}h(x,y,y)=x-y-y=x+y,$$

$$^{(24)}h(x,y,y) = -x + y - y = -x, \quad ^{(34)}h(x,y,y) = -x - y + y = -x,$$

то має місце принаймні одна із таких тотожностей

$$0 = x - y, \quad 0 = x + y, \quad 0 = -x, \quad 0 = -x.$$

Але кожна з цих тотожностей виконується лише в одноелементній квазігрупі, а вибрана квазігрупа $(\mathbb{Z}_3; h)$ має три елементи. Отримане протиріччя доводить, що функційні рівняння (2.8) і (2.9) – парастрофно-первиннно нерівносильні.

Приклад 2. Нехай $\mathbb{Z}_3$ — кільце за модулем 3 і операція h визначена такою формулою

$$h(x,y,z) := x + y + z.$$

Пара (h, h) є розв'язком рівняння (2.10). Справді,

$$h(x,x,x) = x + x + x = 3x = 0 = 3y = y + y + y = h(y,y,y).$$

Припустимо, що рівняння (2.10) та (2.11) — парастрофно-первинно рівносильні, тоді існують перестановки σ, τ такі, що для кожного розв'язку (h, h) рівняння (2.10) пара $(^{\sigma}h, {}^{\tau}h)$ є розв'язком рівняння (2.11). Покажемо, що припущення хибне.

Оскільки пара (h, h) є розв'язком рівняння (2.10), тоді пара $(^{\sigma}h, {}^{\tau}h)$ є розв'язком рівняння (2.11), тобто, для всіх $x, y \in \mathbb{Z}_3$ виконується тотожність

$$^{\sigma}h(x,x,y) = {}^{\tau}h(x,y,y). \tag{2.17}$$

В попередньому прикладі ми довели, що операція h має чотири різні парастрофи: h, $^{(14)}h$, $^{(24)}h$, $^{(34)}h$:

$$h(x,y,z) := x + y + z, \quad ^{(14)}h(x,y,z) := x - y - z,$$

$$^{(24)}h(x,y,z) := -x + y - z, \quad ^{(34)}h(x,y,z) := -x - y + z.$$

Тому можемо обчислити ліву і праву частини рівняння (2.17):

$$
{}^{\sigma}h(x,x,y) = \begin{cases} -x+y, & \text{якщо } \sigma = \iota, \\ -y, & \text{якщо } \sigma = (14), \\ -y, & \text{якщо } \sigma = (24), \\ x+y, & \text{якщо } \sigma = (34), \end{cases}
$$

$$
{}^{\tau}h(x,y,y) = \begin{cases} x-y, & \text{якщо } \tau = \iota, \\ x+y, & \text{якщо } \tau = (14), \\ -x, & \text{якщо } \tau = (24), \\ -x, & \text{якщо } \tau = (34), \end{cases}
$$

Отже, в даній квазігрупі виконується принаймні одна із таких тотожностей:

$$
\begin{array}{ccc}
-x+y = x-y, & -x+y = x+y, & -x+y = -x, \\
-y = x-y, & -y = x+y, & -y = -x, \\
x+y = x-y, & x+y = x+y, & x+y = -x.
\end{array}
$$

тобто

$$
\begin{array}{ccc}
x = y, & x = 0, & y = 0, \\
x = 0, & x = y, & x = y, \\
y = 0, & x+y = x+y, & x = y.
\end{array}
$$

У всіх цих випадках (2.17), крім восьмого, виконання тотожності можливе лише в одноелементній квазігрупі, а обрана нами квазігрупа має три елементи. Випадок, коли не отримуємо протиріччя визначаться рівностями $\sigma = (34)$ та $\tau = (14)$. Для цього випадку побудуємо приклад $2'$.

Приклад $2'$**.** Нехай $Q := \{0, 1, \ldots, 80\}$ — 81-елементна множина. Позначимо через $(Q; +, 0)$ ізоморфну копію групи

$$
\mathbb{Z}_3^4 := \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3,
$$

а через $(Q; \cdot, 0)$ позначимо ізоморфну копію комутативної неасоціативної лупи Муфанг. Зауважимо, що лупи $(Q; +, 0)$ і $(Q; \cdot, 0)$ мають спільний нейтральний елемент 0 і обидві вони мають степінь три, тобто мають місце такі тотожності:

$$
3x = x + x + x = 0, \quad x^3 = x \cdot x \cdot x = 0, \quad \text{тому} \quad -2x = x, \quad x^{-2} = x.
$$

Визначимо операції g, h, поклавши

$$g(x,y,z) := x+y+z, \qquad h(x,y,z) := (x\cdot y)\cdot z.$$

Зауважимо, що парастрофи ${}^{(34)}g$ та ${}^{(14)}h$ визначаються за такими формулами:

$${}^{(34)}g(x,y,z) := -x-y+z, \qquad {}^{(14)}h(x,y,z) := (x\cdot z^{-1})\cdot y^{-1}.$$

Для цього перевіримо виконання тотожніх рівностей (1.1)–(1.6):

$${}^{(34)}g(x,y,g(x,y,z)) = -x-y+(x+y+z) = z,$$

$$g(x,y,{}^{(34)}g(x,y,z)) = x+y+(-x-y+z) = z,$$

$${}^{(14)}h(h(x,y,z),y,z) = (xy\cdot z)z^{-1}\cdot y^{-1} = x,$$

$${}^{(14)}h(h(x,y,z),y,z) = (xz^{-1}\cdot y^{-1})y\cdot z = x.$$

Пара операцій (g,h) є розв'язком рівняння (2.10):

$$g(x,x,x) := x+x+x = 0 = y\cdot y\cdot y = h(y,y,y).$$

Покажемо, що пара $({}^{(34)}g, {}^{(14)}h)$ не є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.11). Припустимо, що це не так, тобто виконується тотожність

$${}^{(34)}g(x,x,y) = {}^{(14)}h(x,y,y).$$

Підставимо замість функцій ${}^{(34)}g$ і ${}^{(14)}h$ їх значення:

$$-x-x+y = (x\cdot y^{-1})\cdot y^{-1}.$$

Лупа Муфанг діасоцітивна, тобто будь-які два елементи породжують групу, тому дужки можемо опустити:

$$-2x+y = x\cdot y^{-2}.$$

Позаяк $-2x = x$ і $y^{-2} = y$, тому для всіх x і y виконується рівність $x+y = x\cdot y$, тобто лупи $(Q;+,0)$ та $(Q;\cdot,0)$ збігаються. Але одна з них асоціативна, а інша — ні.

Протиріччя, отримані в прикладах 2 та $2'$, доводять парастрофно-первиннну нерівносильність функційних рівнянь (2.10) і (2.11).

Приклад 3. Нехай $(Q;+)$ — довільна група експоненти два, $(Q;\cdot)$ — група, яка не ізоморфна групі $(Q;+)$. Така пара груп існує, наприклад, на восьми елементній множині. Визначимо операції h та g, поклавши

$$h(x,y,z) := x+y+z, \qquad g(x,y,z) := x\cdot y\cdot z^{-1}, \tag{2.18}$$

тоді $(Q;h)$ – квазігрупа Штейнера. Пара (h,g) є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.12). Справді,

$$h(x,x,y) = x+x+y = y = y\cdot z\cdot z^{-1} = g(y,z,z).$$

Припустимо, що рівняння (2.12) та (2.13) парастрофно-первинно рівносильні, тоді згідно леми 1.3, існують перестановки σ, τ із симетричної групи четвертого степеня S_4 такі, що пара $({}^{\sigma}g, {}^{\tau}h)$ або пара $({}^{\tau}h, {}^{\sigma}g)$ є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.13), тобто виконується тотожність

$${}^{\sigma}g(x,y,z) = {}^{\tau}h(x,y,z).$$

Дана тотожність означає виконання рівності ${}^{\sigma}g = {}^{\tau}h$. Застосуємо до обох її частин σ^{-1}-парастроф:

$${}^{\sigma^{-1}}({}^{\sigma}g) = {}^{\sigma^{-1}}({}^{\tau}h).$$

Скористаємось співвідношенням (1.7): $g = {}^{\sigma^{-1}\tau}h$. Позаяк h є тотально симетричною квазігрупою, то всі її парастрофи збігаються, тому $g = h$, тобто для всіх x, y, z виконується рівність

$$x\cdot y\cdot z^{-1} = x+y+z.$$

З цієї рівності при $z=0$ отримуємо рівність $x\cdot y\cdot 0^{-1} = x+y$, з якої випливає ізотопність груп $(Q;\cdot)$ та $(Q;+)$. Але ізотопні групи є ізоморфними, що суперечить їх вибору. Отримане протиріччя говорить про неправильність припущення, тому рівняння (2.12) та (2.13) парастрофно-первинно нерівносильні. $\square$

2.2.2. Розв'язування функційних рівнянь довжини два

У цій частині наведено розв'язки тернарних функційних рівнянь на тернарних квазігруп. Для кращого розуміння викладеного матеріалу введемо основні означення.

Нехай h — довільна операція, тоді перетворення δ_h, яке визначене рівністю

$$\delta_h(x) := h(x, x, x),$$

називається *головною діагоналлю* операції h.

Лівою (середньою, чи правою) діагональною площиною назвемо перетворення d_l (d_m, d_r), яке задовільняє відповідну рівність

$$d_l(x, y) := f(x, y, y), \qquad d_m(x, y) := f(y, x, y), \qquad d_r(x, y) := f(y, y, x).$$

Тернарну функцію f назвемо *ліво-, середньо- та право- нейтральною операцією*, якщо вона задовольняє відповідну тотожність:

$$f(x, y, y) = x, \qquad f(y, x, y) = x, \qquad f(y, y, x) = x.$$

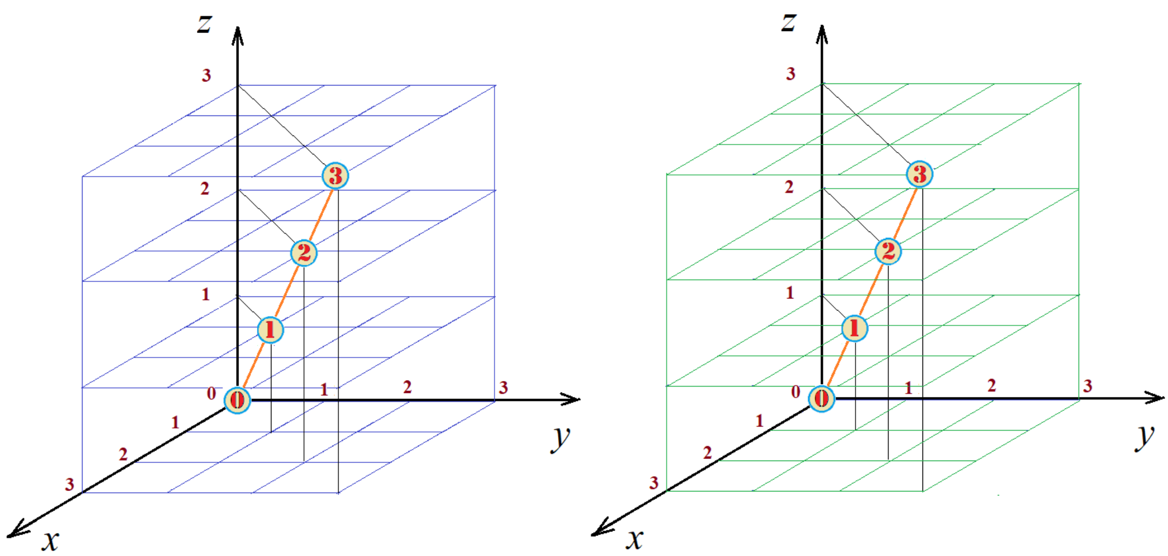

Рис. 1: Пара латинських кубів, що є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.7)

Твердження 2.2. *Пара оборотних функцій (f, g) є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.7) тоді і тільки тоді, коли їх головні діагоналі однакові.*

Доведення. Пара оборотних функцій (f, g) є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.7) на носії Q тоді і тільки тоді, коли рівність

$$f(x,x,x) = g(x,x,x)$$

виконується для всіх $x \in Q$, тобто вона є тотожністю. Це співвідношення рівносильне до $\delta_f = \delta_g$. $\square$

Твердження 2.3. *Пара оборотних функцій (f_1, f_2) визначених на носії Q є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.8) тоді і тільки тоді, коли існують ліво-нейтральна функція h та перестановка δ множини Q такі, що*

$$f_1(x,x,x) = \delta(x), \qquad f_2(x,y,z) = \delta^{(14)}h(x,y,z).$$

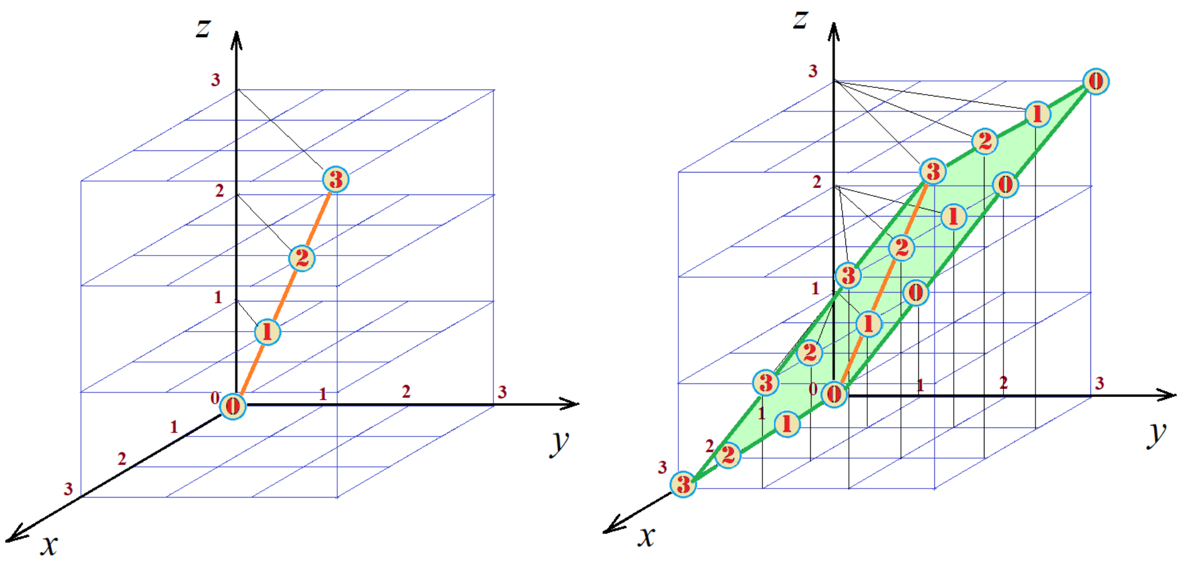

Рис. 2: Пара латинських кубів, що є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.8)

Доведення. Нехай пара (f_1, f_2) оборотних операцій є розв'язком узагальненого фунційного рівняння (2.8), тобто, виконується тотожність

$$f_1(x,x,x) = f_2(x,y,y).$$

Звідси, $f_2(x,y,y) = \delta_1(x)$, тоді

$$^{(14)}f_2(\delta_1(x), y, y) = x. \tag{2.19}$$

Зауважимо, що діагональ δ_1 є підстановкою носія, оскільки вона є зсувом операції f_2. Визначимо функцію h, поклавши

$$h(x, y, z) := {}^{(14)}f_2(\delta_1(x), y, z). \tag{2.20}$$

Із відношення (2.19) випливає, що функція h — ліво-нейтральна. Але з тотожності (2.20) випливає, що ця функція ізострофна до f_2, тому вона оборотна.

Навпаки, якщо функція h — ліво-нейтральна, тоді парастроф ${}^{(14)}h$ функції h теж ліво-нейтральний. Тому

$$f_2(x, y, y) = \delta x,$$

$${}^{(14)}h(x, y, y) = \delta(x) = f_1(x, x, x).$$ □

Твердження 2.4. *Пара оборотних функцій є розв'язком функційного рівняння (2.9) тоді і лише тоді, коли їх ліві діагональні площини збігаються.*

Доведення. Істиність твердження випливає з означення лівої діагональної площини. □

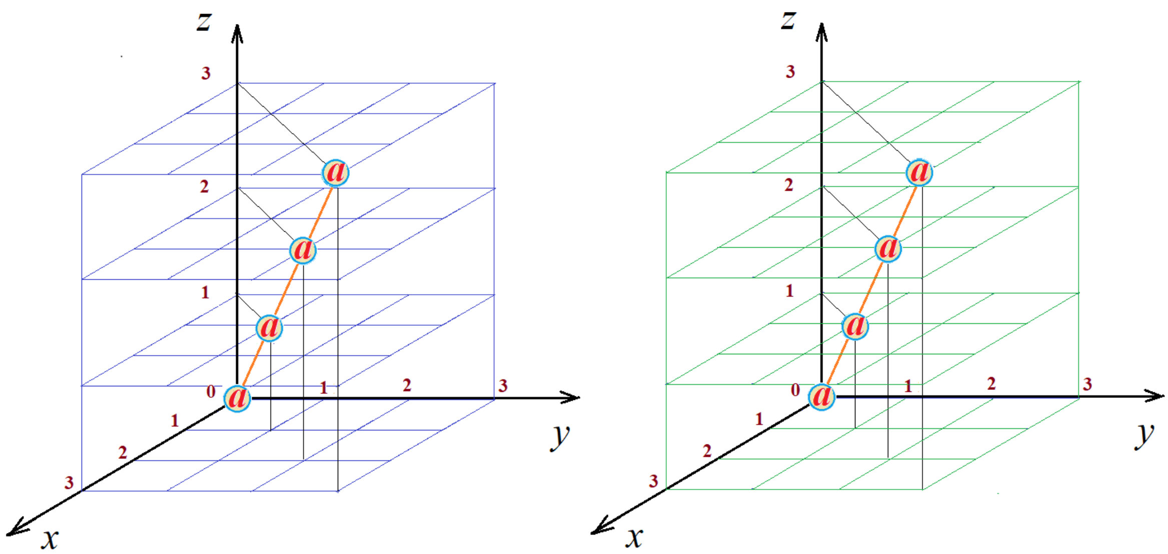

Рис. 3: Пара латинських кубів, що є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.10)

Тернарну функцію f визначену на множині Q називають *уніпотентною*, якщо існує елемент $a \in Q$ такий, що для всіх $x \in Q$ виконується рівність $f(x, x, x) = a$.

Твердження 2.5. *Пара тернарних оборотних функцій є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.10) тоді і лише тоді, коли ці функції є уніпотентними і елемент уніпотентності є загальним.*

Доведення. Істиність твердження випливає з існування уніпотентних функцій та загального елемента уніпотентності. □

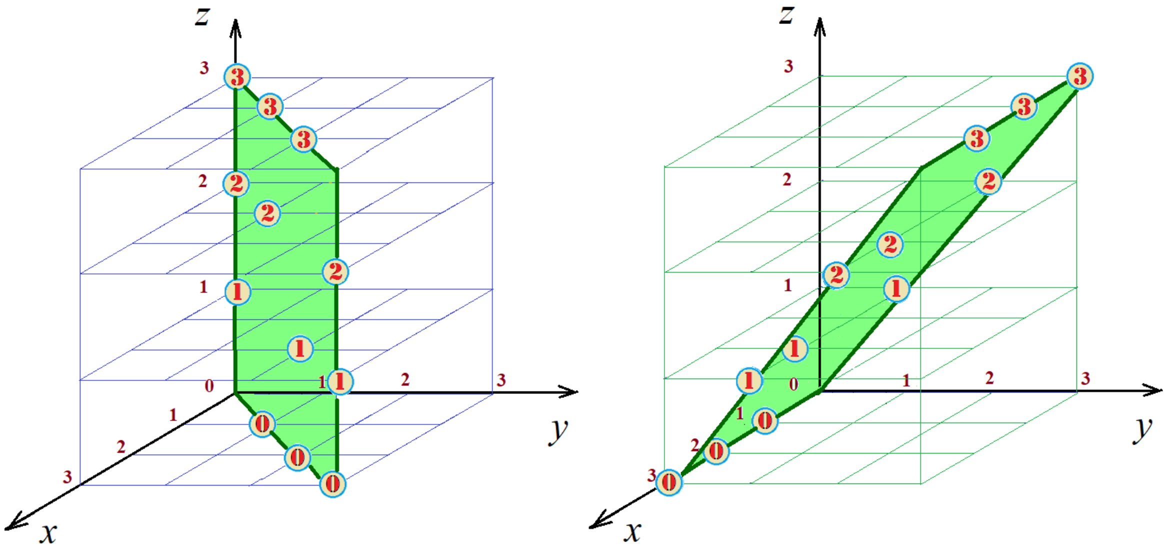

Рис. 4: Пара латинських кубів, що є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.11)

Твердження 2.6 (Г. В. Крайнічук [86, с. 105]). *Пара тернарних оборотних функцій (f, g) є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.11) тоді і тільки тоді, коли подвійна функція лівої діагоналі функції f збігається з лівою діагоналлю функції g.*

Твердження 2.7 (Ф. М. Сохацький [86, с. 106]). *Пара тернарних оборотних функцій (f_1, f_2) є розв'язком узагальненого функціонального рівняння (2.12) тоді і тільки тоді, коли існують ліво-нейтральна функція h та перестановка α множини Q такі, що*

$$f_1(x, y, z) = h(x, y, \alpha z), \qquad f_2(y, z, z) = \alpha h(x, x, y).$$

Доведення. Істиність твердження випливає з рівності $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z)$. □

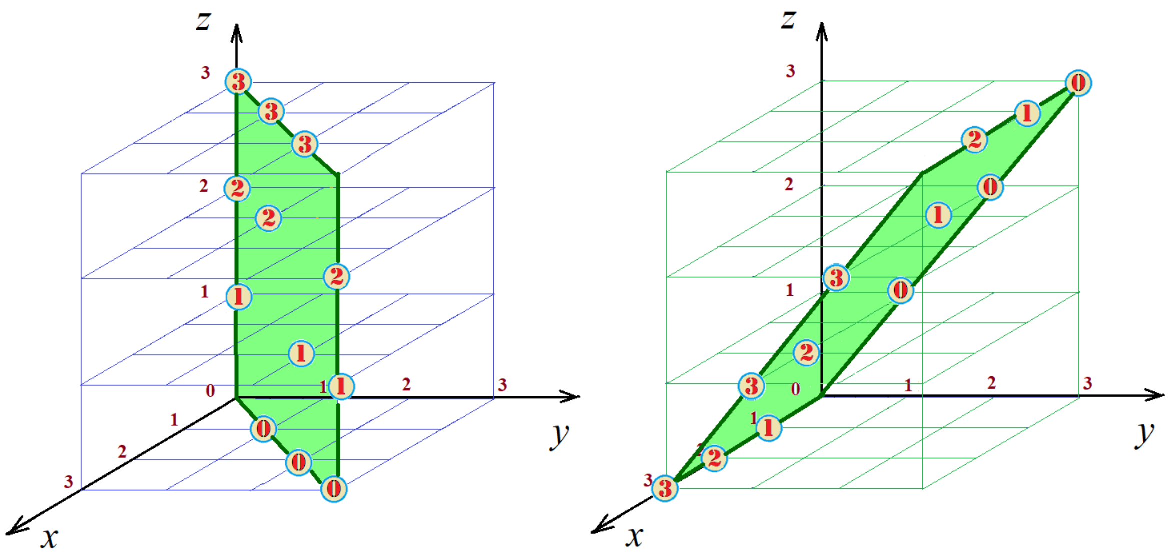

Рис. 5: Пара латинських кубів, що є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.12)

Твердження 2.8. *Пара функцій є розв'язком функційного рівняння (2.13) тоді і лише тоді, коли ці функції збігаються.*

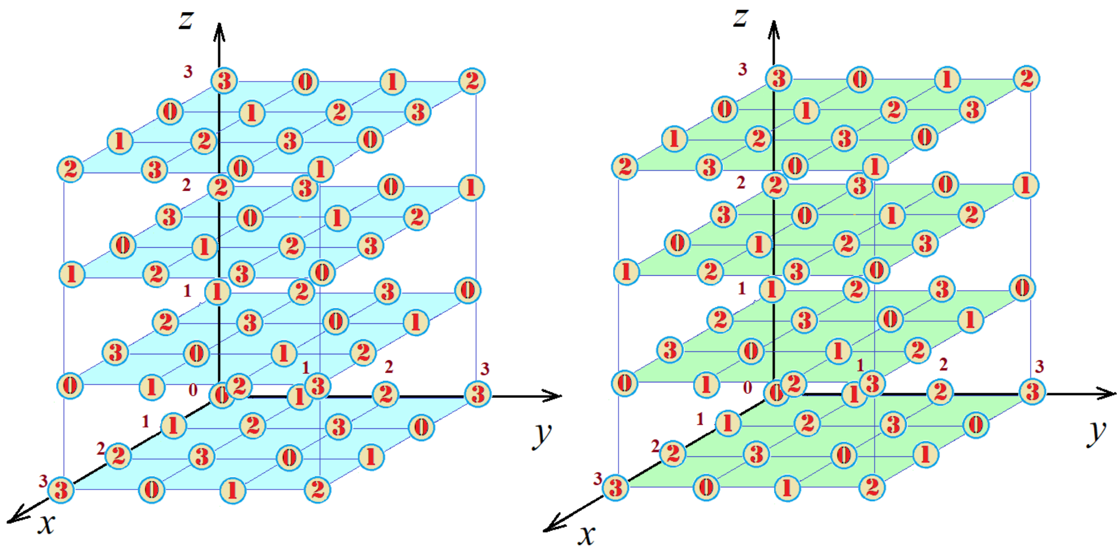

Рис. 6: Пара латинських кубів, що є розв'язком узагальненого функційного рівняння (2.13)

Розв'яжемо тернарні функційні рівняння довжини два на на множині лінійних функцій.

Нехай $(Q, +, 0)$ — довільна група, на якій визначені функції такими рівностями

$$f_1(x, y, z) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + d_1, \qquad f_2(x, y, z) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + d_2. \quad (2.21)$$

Твердження 2.9. *Пара тернарних лінійних функцій* (f_1, f_2)

визначених рівностями (2.21) є розв'язком рівняння (2.7), *тоді і тільки тоді, коли* $d_1 = d_2$ *і* $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$.

Доведення. Нехай пара (f_1, f_2) тернарних функцій є розв'язками рівняння (2.7), тоді для всіх x виконуться тотожність

$$f_1(x, x, x) = f_2(x, x, x).$$

Враховуючи рівності (2.21), цю тотожність можна переписати, як

$$\alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x + d_1 = \alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 x + d_2.$$

Підставимо $x = 0$, отримаємо $d_1 = d_2$ та рівність

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2.$$

Навпаки, нехай $d_1 = d_2$ і $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$, тоді (f_1, f_2) — розв'язок функційного рівняння (2.7). Дійсно:

$$f_1(x, x, x) = (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)x + d_1 = (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)x + d_2 = f_2(x, x, x). \;\square$$

Твердження 2.10. *Пара тернарних лінійних функцій* (f_1, f_2) *є розв'язком рівняння* (2.8) *тоді і тільки тоді, коли* $d_1 = d_2$, $\gamma_2 = -\beta_2$, $\alpha_1 = \alpha_2 - \beta_1 + \gamma_1$.

Доведення. Нехай розв'язком функційного рівняння (2.8) є пара (f_1, f_2), тоді для всіх x і y виконується тотожність

$$f_1(x, x, x) = f_2(x, y, y). \tag{2.22}$$

Враховуючи рівності (2.21), тотожність (2.22) рівносильна до

$$\alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x + d_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 y + d_2.$$

Підставимо $x = y = 0$. Маємо $d_1 = d_2$.

Підставимо $x = 0$. Маємо $\gamma_2 = -\beta_2$.

А при $y = 0$, отримуємо $\alpha_1 = \alpha_2 - \beta_1 - \gamma_1$.

Нехай $d_1 = d_2$, $\gamma_1 = -\beta_2$, $\alpha_1 = \alpha_2 - \beta_1 - \gamma_1$. Тоді

$$f_1(x, x, x) = \alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x + d_1 = (\alpha_2 - \beta_1 - \gamma_1)x + \beta_1 x + \gamma_1 x + d_2 =$$
$$= \alpha_2 x - \beta_1 x - \gamma_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x + d_2 = \alpha_2 x + d_2 + \gamma_2 - \gamma_2.$$

Оскільки γ_2 і β_2 — автоморфізми, то

$$f_1(x,x,x) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 y + d_2 = f_2(x,y,y). \ \Box$$

Твердження 2.11. *Пара тернарних лінійних функцій* (f_1, f_2) *є розв'язком рівняння* (2.9) *тоді і тільки тоді, коли* $d_1 = d_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$

Доведення. Нехай (f_1, f_2) — розв'язок функційного рівняння (2.9), тоді для всіх x та y виконується тотожність

$$f_1(x,x,y) = f_2(x,x,y)$$

Скориставшись рівностями (2.21), ця тотожність рівносильна до

$$\alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 y + d_1 = \alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 y + d_2.$$

При $x = y = 0$, маємо $d_1 = d_2$.

Якщо $x = 0$, то $\gamma_1 = \gamma_2$.

Якщо $y = 0$, то $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$.

Пара (f_1, f_2) є розв'язком функційного рівняння (2.9), бо

$$f_1(x,x,y) = \alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 y + d_1 = (\alpha_1 + \beta_1)x + \gamma_1 y + d_1 =$$
$$= (\alpha_2 + \beta_2)x + \gamma_2 y + d_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 y + d_2 = f_2(x,x,y). \ \Box$$

Твердження 2.12. *Пара тернарних лінійних функцій* (f_1, f_2) *є розв'язком рівняння* (2.10) *тоді і тільки тоді, коли* $d_1 = d_2$, $\gamma_2 = -\alpha_2 - \beta_2$, $\gamma_1 = -\alpha_1 - \beta_1$.

Доведення. Нехай (f_1, f_2) є розв'язком функційного рівняння (2.10), тоді для всіх x та y виконується тотожність

$$f_1(x,x,x) = f_2(y,y,y).$$

Застосувавши до цієї тотожності (2.21), маємо

$$\alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 y + d_1 = \alpha_2 y + \beta_2 y + \gamma_2 y + d_2.$$

Підставимо $x = y = 0$, маємо $d_1 = d_2$.

Підставимо $x = 0$, тоді $\gamma_2 = -\alpha_2 - \beta_2$.

Підставимо $y = 0$, тоді $\gamma_1 = -\alpha_1 - \beta_1$.

Пара (f_1, f_2) є розв'язком рівняння (2.10). Справді, бо

$$f_1(x,x,x) = \alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x + d_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x + (-\alpha_1 - \beta_1)x + d_2 =$$
$$= \alpha_1 x + \beta_1 x - \alpha_1 x - \beta_1 x + d_2 = -\gamma_2 x + \gamma_2 x + d_2 =$$
$$= -(-\alpha_2 - \beta_2)x + \gamma_2 x + d_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 x + d_2 = f_2(x,x,y). \quad \square$$

Твердження 2.13. *Пара тернарних лінійних функцій* (f_1, f_2) *є розв'язком рівняння* (2.11)*, тоді і тільки тоді, коли* $d_1 = d_2$*,* $\gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2$*,* $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2$*.*

Доведення. Нехай (f_1, f_2) — це розв'язок рівняння (2.11). Тоді для всіх x та y наступна тотожність виконується

$$f_1(x,x,y) = f_2(x,y,y).$$

Скористаємось (2.21), тоді

$$\alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 y + d_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 y + d_2$$

При $x = y = 0$, маємо $d_1 = d_2$.

Якщо $x = 0$, тоді $\gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2$.

Для $y = 0$, маємо $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2$.

Пара тернарних функцій (f_1, f_2) є розв'язком рівняння (2.11), якщо $d_1 = d_2$, $\gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2$, й $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2,$ бо

$$f_1(x,x,y) = \alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 y + d_1 = (\alpha_1 + \beta_1)x + (\beta_2 + \gamma_2)y + d_2 =$$
$$= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_1 y + d_2 = f_2(x,y,y). \quad \square$$

Твердження 2.14. *Пара тернарних лінійних функцій* (f_1, f_2) *є розв'язкам рівняння* (2.12) *тоді і тільки тоді, коли* $d_1 = d_2$*,* $\gamma_2 = -\beta_2$*,* $\gamma_1 = \alpha_2$*,* $\alpha_1 = -\beta_1$*.*

Доведення. Нехай пара лінійних функцій (f_1, f_2) є розв'язком функційного рівняння (2.12), тоді для всіх x,y та zвиконується тотожність

$$f_1(x,x,y) = f_2(y,z,z).$$

Взявши до уваги (2.21), маємо

$$\alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 y + d_1 = \alpha_2 y + \beta_2 z + \gamma_2 z + d_2.$$

Якщо $x = y = z = 0$, отримуємо $d_1 = d_2$.

При $x = y = 0$, маємо $\gamma_2 = -\beta_2$.

Якщо $x = z = 0$, тоді $\gamma_1 = \alpha_2$.

Підставивши $y = z = 0$, маємо $\alpha_1 = -\beta_1$.

Нехай виконуються рівності: $d_1 = d_2$, $\gamma_2 = -\beta_2$, $\gamma_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 = -\beta_1$, тоді

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x + d_1 = (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_2 y + d_2 = \\ &= 0 + \alpha_2 y + d_2 = \alpha_2 y + 0 \cdot z + d_2 = \alpha_2 y + (-\gamma_2 + \gamma_2)z + d_2 = \\ &= \alpha_2 y + \beta_2 z + \gamma_2 z + d_2 = f_2(x, y, z), \end{aligned}$$

а отже, (f_1, f_2) — це розв'язок рівняння (2.12). □

Твердження 2.15. *Пара тернарних лінійних функцій* (f_1, f_2) *є розв'язком рівняння* (2.13) *тоді і тільки тоді, коли* $d_1 = d_2$, $\gamma_2 = -\beta_2$, $\gamma_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 = -\beta_1$.

Доведення. Припустимо, що (f_1, f_2) — розв'язок рівняння (2.13). Тоді для всіх x, y, z виконується тотожність

$$f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z).$$

Скориставшись (2.21), маємо:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + d_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + d_2.$$

При $x = y = z = 0$, отримуємо $d_1 = d_2$.

Якщо $x = y = 0$, тоді $\gamma_1 = \gamma_2$.

Для $x = z = 0$, тоді $\beta_1 = \beta_2$.

Якщо $y = z = 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2$.

Нехай виконуються рівності $d_1 = d_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, тоді

$$f_1(x, y, z) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + d_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + d_1 = f_2(x, y, z)$$

тобто пара (f_1, f_2) — це розв'язок рівняння (2.13). □

Висновки до розділу 2

У цьому розділі вивчаються тернарні квазігрупові нетривіальні функційні рівняння довжин один та два.

Основні результати розділу:

- знайдено описання тернарних квазігрупови нетривіальних функційних рівнянь довжини один;
- знайдено описання тернарних квазігрупови нетривіальних функційних рівнянь довжини два;
- побудовано приклади квазігруп, які розрізняють отримані функційні рівняння.

Результати цього розділу опубліковані у [50], [54], [55], [86].

РОЗДІЛ 3

УЗАГАЛЬНЕНІ НЕТРИВІАЛЬНІ ТЕРНАРНІ ФУНКЦІЙНІ РІВНЯННЯ ДОВЖИНИ ТРИ

У даному розділі розпочато дослідження узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь довжини три з використанням методу класифікації рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Детально вивчено та мінімізовано рівняння на тернарних квазігрупах. Як окремий тип $(5,3,0,0)$ описано розв'язки нетривіальних рівнянь, компоненти яких є лінійними відносно однієї й тієї ж довільної комутативної групи. Описано мінімізацію тернарних рівнянь типу $(5,3,0,0)$ відносно інших типів тернарних рівнянь довжини три. Дано класифікацію тернарних квадратичних рівнянь довжини три та розв'язано представників отриманих класів рівнянь на множині тернарних квазігруп.

3.1. Мінімізація рівнянь функційної довжини три

Даний підрозділ є продовженням вивчення функційних рівнянь на тернарних квазігрупах. Зведено усі узагальнені тернарні квазігрупові функційні рівняння довжини три до найменшої можливої кількості функційних рівнянь парастрофно-первинними перетвореннями. Основним результатом є така теорема:

Теорема 3.1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує не більше, як 38 нетривіальних узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини 3, які розділені за всіма можливими предметними типами:*

предметний тип $(8,0,0,0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),x,x) = F_3(x,x,x); \tag{3.1}$$

предметний тип $(6, 2, 0, 0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,x,x), \tag{3.2}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),x,x) = F_3(x,y,y), \tag{3.3}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(x,x,y), \tag{3.4}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),x,x) = F_3(x,x,y); \tag{3.5}$$

предметний тип $(5, 3, 0, 0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(F_2(y,y,y),x,x) = F_3(x,x,x), \tag{3.6}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(x,y,y), \tag{3.7}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,x,y), \tag{3.8}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(x,x,y), \tag{3.9}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),x,y) = F_3(x,x,y); \tag{3.10}$$

предметний тип $(4, 4, 0, 0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(y,y,y), \tag{3.11}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,y,y), \tag{3.12}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),x,y) = F_3(x,x,y), \tag{3.13}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),y,y) = F_3(x,x,y); \tag{3.14}$$

предметний тип $(4, 2, 2, 0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(F_2(y,y,z),x,z) = F_3(x,x,x), \tag{3.15}$$

$$F_1(F_2(y,y,z),x,x) = F_3(x,x,z), \tag{3.16}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,z,z), \tag{3.17}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),y,z) = F_3(x,y,z), \tag{3.18}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),x,z) = F_3(x,x,z), \tag{3.19}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(x,z,z), \tag{3.20}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),x,z) = F_3(x,y,z), \tag{3.21}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),y,z) = F_3(x,x,z), \tag{3.22}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),z,z) = F_3(x,x,y), \tag{3.23}$$

$$F_1(F_2(x,y,z),x,x) = F_3(x,y,z); \tag{3.24}$$

предметний тип $(3,3,2,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(y,z,z), \tag{3.25}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),y,z) = F_3(y,y,z), \tag{3.26}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),z,z) = F_3(y,y,y), \tag{3.27}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(y,z,z), \tag{3.28}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),z,z) = F_3(x,x,y), \tag{3.29}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),y,z) = F_3(x,x,z), \tag{3.30}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),y,z) = F_3(x,y,z), \tag{3.31}$$

$$F_1(F_2(x,x,z),x,y) = F_3(y,y,z), \tag{3.32}$$

$$F_1(F_2(x,y,z),x,y) = F_3(x,y,z), \tag{3.33}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),x,y) = F_3(x,z,z); \tag{3.34}$$

предметний тип $(2,2,2,2)$ *— це рівняння:*

$$F_1(z,x,F_2(x,y,y)) = F_3(z,u,u), \tag{3.35}$$

$$F_1(F_2(x,y,y),z,z) = F_3(x,u,u), \tag{3.36}$$

$$F_1(F_2(x,y,z),u,u) = F_3(x,y,z), \tag{3.37}$$

$$F_1(F_2(x,y,z),x,u) = F_3(y,z,u). \tag{3.38}$$

Доведення цієї теореми побудоване на додаткових твердженнях, лемі та теоремах, які описані в цьому підрозділі нижче. А саме, леми 3.1 про класифікацію функційних рівнянь за предметними типами, твердження класифікації функційних рівнянь за розташуванням функційних змінних (твердження 3.1) та відповідно розташування предметних змінних у рівняннях (твердження 3.2), твердження класифікації тернарних рівнянь за кількістю появ незалежних предметних змінних відносно вказаних типів функційних рівнянь (теорема 3.2, теорема 3.3, теорема 3.4, лема 3.7).

3.1.1. Допоміжні твердження

Для кращого розуміння викладеного доведення теореми 3.1, попередньо вводимо означення визначальної функційної змінної, а також доводяться допоміжні твердження 3.1, твердження 3.2 та лема 3.1.

Означення 3.1. *Визначальною функційною змінною терму $F(u_1, \dots, u_n)$ називаємо функційний символ F арності n.*

Оскільки досліджуються функційні рівняння на тернарних квазігрупах, то визначальною функційною змінною терма $F(t_1, t_2, t_3)$ буде функційний символ F арності три.

Твердження 3.1. *Будь-яке узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини три парастрофно-первинно рівносильне рівнянню виду:*

$$F_1(F_2(t_1, t_2, t_3), t_4, t_5) = F_3(t_6, t_7, t_8), \tag{3.39}$$

де предметні змінні t_i, $i = \overline{1, 8}$ розташовані в лексикографічному порядку.

Доведення. Нехай $v = \omega$ — будь-яке узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини три. Оскільки рівняння має три функційних змінних, позначимо їх F_1, F_2, F_3, то, враховуючи їх розташування лівіше один відносно одного, можливі такі випадки:

(I) дві функційні змінні є в одній частині рівняння, а третя функційна змінна — в іншій частині рівняння;

(II) всі функційні змінні розташовані по одну сторону рівняння.

У випадку (I) рівняння має один власний підтерм і це підтерм виду $F_j(t_1,t_2,t_3)$, який росташований, скажімо, в лівій частині рівняння, інакше переставимо сторони рівняння. І тоді рівняння матиме один із таких видів:

$$F_i(F_j(t_1,t_2,t_3),t_4,t_5) = F_k(t_6,t_7,t_8),$$

$$F_i(t_4,F_j(t_1,t_2,t_3),t_5) = F_k(t_6,t_7,t_8),$$

$$F_i(t_4,t_5,F_j(t_1,t_2,t_3)) = F_k(t_6,t_7,t_8).$$

Із (1.12) випливають такі гіпертотожності:

$$^{(12)}F_j(u_2,u_1,u_3) = F_j(u_1,u_2,u_3), \quad {}^{(13)}F_j(u_3,u_2,u_1) = F_j(u_1,u_2,u_3). \quad (3.40)$$

де u_1, u_2, u_3 — довільні терми. Застосуємо їх до другого і третього функційного рівняння:

$$F_i(F_j(t_1,t_2,t_3),t_4,t_5) = F_k(t_6,t_7,t_8),$$

$$^{(12)}F_i(F_j(t_1,t_2,t_3),t_4,t_5) = F_k(t_6,t_7,t_8),$$

$$^{(13)}F_i(F_j(t_1,t_2,t_3),t_4,t_5) = F_k(t_6,t_7,t_8),$$

Переіменуємо функційні змінні в першому, другому і третьому рівняннях відповідно до таких матриць:

$$\begin{pmatrix} F_i & F_j & F_k \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ^{(12)}F_i & F_j & F_k \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ^{(13)}F_i & F_j & F_k \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}.$$

Переіменувавши предметні змінні в лексико-графічному порядку, в кожному із цих трьох випадків отримаємо функційне рівняння виду (3.39).

У випадку (II) рівняння має два власні підтерми, скажімо ν_1 та ν_2. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що підтерми в термові знаходяться на перших місцях, інакше скористаємось гіпертотожностями (3.40).

Якщо ν_1 є підтермом терма ν_2, то рівняння має вигляд

$$F_1(F_2(F_3(t_1,t_2,t_3),t_4,t_5),t_6,t_7) = t_8. \quad (3.41)$$

Якщо ж ν_1 не є підтермом терма ν_2, то

$$F_1(F_2(t_1,t_2,t_3),F_3(t_4,t_5,t_6),t_7) = t_8. \quad (3.42)$$

Обидві частини першого і обидві частини другого рівняння відповідно підставимо у такі очевидні рівності:

$$^{(14)}F_1(x,t_6,t_7) = {}^{(14)}F_1(x,t_6,t_7),$$

$$^{(14)}F_1(x,F_3(t_4,t_5,t_6),t_7) = {}^{(14)}F_1(x,F_3(t_4,t_5,t_6),t_7).$$

В результаті отримаємо

$$^{(14)}F_1(F_1(F_2(F_3(t_1,t_2,t_3),t_4,t_5),t_6,t_7),t_6,t_7) = {}^{(14)}F_1(t_8,t_6,t_7),$$

$$\begin{aligned} &{}^{(14)}F_1(F_1(F_2(t_1,t_2,t_3),F_3(t_4,t_5,t_6),t_7),F_3(t_4,t_5,t_6),t_7) = \\ &\qquad = {}^{(14)}F_1(t_8,F_3(t_4,t_5,t_6),t_7). \end{aligned}$$

В обох рівняннях скористаємося гіпертотожністю (1.12):

$$F_2(F_3(t_1,t_2,t_3),t_4,t_5) = {}^{(14)}F_1(t_8,t_6,t_7),$$

$$F_2(t_1,t_2,t_3) = {}^{(14)}F_1(t_8,F_3(t_4,t_5,t_6),t_7).$$

В другому рівнянні перейдемо до (12)-парастрофа:

$$F_2(t_1,t_2,t_3) = {}^{(12)(14)}F_1(F_3(t_4,t_5,t_6),t_8,t_7).$$

В першому рівнянні та в останньому рівнянні здійснимо заміну функційних змінних, які визначаються такими матрицями:

$$\begin{pmatrix} F_2 & F_3 & {}^{(14)}F_1 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} {}^{(12)(14)}F_1 & F_3 & F_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}.$$

Предметні змінні переіменуємо в лексикографічному порядку. В результаті в обох випадках отримаємо рівняння виду (3.39).

Функційна змінна F_2 розташована на першому місці у лівому термі. Якщо це не так, то із врахуванням комутування перейдемо до відповідного парастрофа F_1. Зауважимо, що рівняння має лише один власний підтерм, і F_2 — є його визначальною змінною. Предметні змінні в кожному термі чи підтермі, який має визначальну змінну, розташовані в лексикографічному порядку. Якщо це не так, то здійснимо лексикографічне розташування відповідних предметних змінних. □

Твердження 3.2. *У будь-якому чистому тернарному квазігруповововому рівнянні функційної довжини три, яке має однакову кількість появ двох і більше незалежних предметних змінних лівіше буде розташована перша поява тієї змінної, число появ якої розташоване лівіше у предметному типі.*

Доведення випливає із Твердження 3.1 та означень: предметного типу функційного рівняння та лексикографічного розташування предметних змінних. Справді, якщо це не так, достатньо здійснити лексикографічне розташування відповідних предметних змінних та комутування підтермів, тобто застосування гіпертотожностей (3.40). □

Лема 3.1. *Кожне чисте узагальнене нетривіальне тернарне функційне рівняння довжини три належить точно до одного з семи предметних типів:* $(8, 0, 0, 0)$, $(6, 2, 0, 0)$, $(5, 3, 0, 0)$, $(4, 4, 0, 0)$, $(4, 2, 2, 0)$, $(3, 3, 2, 0)$, $(2, 2, 2, 2)$.

Доведення. Оскільки всі функційні змінні у рівнянні функційної довжини три є тернарними, то кількість предметних змінних дорівнює 8, враховуючи їх повторення. Оскільки рівняння квазігрупове і нетривіальне, то кожна предметна змінна повторюється щонайменше два рази, тому таке рівняння має не більше ніж чотири різні незалежні предметні змінні, тобто предметний тип (a, b, c, d), де $a, b, c, d > 1$ і $a + b + c + d = 8$. Занумеруємо предметні змінні так, що змінні в лексикографічному порядку мають незростаючу кількість своїх появ. Тому досить розглядати лише функційні рівняння із змінними x, y, z, u в яких x має a появ, y — b появ, z — c появ, а u має d появ, тобто лише рівняння типів (a, b, c, d), де $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 2$ і $a + b + c + d = 8$. Ці умови задовольняють лише такі вибірки:

- якщо рівняння має одну незалежну предметну змінну, то його предметний тип $(8, 0, 0, 0)$;

- якщо рівняння має дві різні незалежні змінні, то воно має один із таких предметних типів: $(6,2,0,0)$, $(5,3,0,0)$, $(4,4,0,0)$;
- якщо рівняння має три різні незалежні змінні, то воно має один із таких предметних типів: $(4,2,2,0)$, $(3,3,2,0)$;
- якщо рівняння має чотири різні незалежні змінні, то воно має предметний тип $(2,2,2,2)$.

Отже, всього 7 різних предметних типів тернарних функційних рівнянь. □

3.1.2. Рівняння з однією предметною змінною

Теорема 3.2. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(8,0,0,0)$ *парастрофно-первинно рівносильне функційному рівнянню (3.1).*

Доведення. З умови теореми випливає, що узагальнене тернарне функційне рівняння довжини три має одну незалежну предметну змінну, а згідно з лемою 3.1, його предметний тип $(8,0,0,0)$ і предметна множина одноелементна. Оскільки рівняння має три функційних змінних, то можливе таке їх розташування:

(I) всі функційні змінні є в одній частині рівняння;

(II) дві функційні змінні розташовані в одній частині рівняння, а одна функційна змінна — в іншій.

У першому випадку можливе таке розташування дужок із врахуванням комутування та лексикографічного розташування функційних змінних:

$$F_1(F_2(F_3(x,x,x)x,x),x,x) = x,$$

$$F_1(F_2(x,x,x),F_3(x,x,x),x) = x.$$

До першого рівняння застосуємо зовнішнє ділення для операції ${}^{(14)}F_1$, в результаті отримаємо рівняння, в якому в одній частині рівняння одна функційна змінна, в другій частині рівняння — дві. Згідно з пунктом 1 та пунктом 3 Твердження 3.1, отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (3.1). З другого рівняння після застосування зовнішнього середнього ділення операції F_1 отримаємо рівняння (3.1), отже, ці рівняння між собою теж парастрофно-первинно рівносильні.

Другий випадок описує рівняння, які згідно з Твердженням 3.1 парастрофно-первинно рівносильні рівнянню (3.1). □

3.1.3. Рівняння з двома предметними змінними

Відповідно до леми 3.1 рівняння, які мають дві незалежних предметних змінних, можливі таких типів $(6, 2, 0, 0)$, $(5, 3, 0, 0)$ та $(4, 4, 0, 0)$. Розглянемо мінімізацію рівнянь окремо кожного з вказаних типів.

Мінімізація рівнянь типу $(6, 2, 0, 0)$.

Лема 3.2. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(6, 2, 0, 0)$ *парастрофно первинно рівносильне принаймні одному з чотирьох рівнянь: (3.2), (3.3), (3.4), (3.5).*

Доведення. Будь-яке узагальнене тернарне функційне рівняння предметного типу $(6, 2, 0, 0)$, згідно з означенням типу, має дві незалежних предметних змінних, перша з яких має шість появ, а друга — дві появи. Відповідно до лексикографічного порядку розташування предметних змінних, у рівнянні шість появ предметної змінної x та дві появи предметної змінної y. Згідно з твердженням 3.1, кожне з цих рівнянь має розташування дужок у вигляді формули (3.39).

Розглянемо різне розсташування предметних змінних в рівнянні (3.39). Спочатку припустимо, що всі появи предметної змінної y знаходяться у власному підтермі $F_2(u_1, u_2, u_3)$, тобто власний підтерм, враховуючи лексикографічне росташування предметних змінних, має вигляд: $F_2(x, y, y)$.

Тому рівняння має вигляд

$$F_1(F_2(x,y,y),x,x)=F_3(x,x,x).$$

Обидві частини рівняння підставимо замість предметної змінної z в очевидну рівність:

$$^{(14)}F_1(z,x,x)={}^{(14)}F_1(z,x,x).$$

В результаті отримаємо

$$^{(14)}F_1(F_1(F_2(x,y,y),x,x),x,x)={}^{(14)}F_1(F_3(x,x,x),x,x).$$

Скористаємося однією із гіпертотожностей (1.12):

$$^{(14)}F_1(F_3(x,x,x),x,x)=F_2(x,y,y).$$

В цьому рівнянні перейменуємо функційні змінні у відповідності з матрицею

$$\begin{pmatrix} ^{(14)}F_1 & F_3 & F_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

В результаті отримаємо рівняння (3.3).

Нехай у власному підтермі предметна змінна y має одну появу, тоді, враховуючи лексикографічний порядок змінних, власний підтерм рівняння (3.39) має вигляд $F_2(x,x,y)$. Якщо інша поява змінної y знаходиться по одну сторону із власним підтермом, то рівняння має вигляд

$$F_1(F_2(x,x,y),x,y)=F_3(x,x,x), \tag{3.43}$$

а якщо інша поява змінної y знаходиться по різні сторони із власним підтермом, то рівняння таке

$$F_1(F_2(x,x,y),x,x)=F_3(x,x,y). \tag{3.44}$$

Обидві частини цих рівнянь підставимо в такі очевидні рівності:

$$^{(14)}F_1(z,x,y)={}^{(14)}F_1(z,x,y),$$

$$^{(14)}F_1(z,x,x)={}^{(14)}F_1(z,x,x).$$

В результаті отримаємо

$$^{(14)}F_1(F_1(F_2(x,x,y),x,y),x,y) = {}^{(14)}F_1(F_3(x,x,x),x,y),$$

$$^{(14)}F_1(F_1(F_2(x,x,y),x,x),x,x) = {}^{(14)}F_1(F_3(x,x,y),x,x).$$

В лівих частинах цих рівностей застосуємо гіпертотожності із (1.12):

$$F_2(x,x,y) = {}^{(14)}F_1(F_3(x,x,x),x,y),$$

$$F_2(x,x,y) = {}^{(14)}F_1(F_3(x,x,y),x,x).$$

В першому і другому рівнянні здійснимо переіменування функційних змінних за допомогою такої матриці

$$\begin{pmatrix} {}^{(14)}F_1 & F_3 & F_2 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

В результаті отримаємо рівняння (3.4) і (3.5).

І, нарешті, нехай предметна змінна y не має жодної появи у власному підтермі, тоді можливі три варіанти росташування появ змінної y: обидві появи по одну сторону із власним підтермом, обидві появи по різні сторони із власним підтермом і появи змінної y взаємно по різні сторони рівняння. В результаті отримуємо три функційні рівняння

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,x,x),$$

$$F_1(F_2(x,x,x),x,x) = F_3(x,y,y),$$

$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(x,x,y),$$

які збігаються з рівняннями (3.2), (3.3), (3.4). □

Мінімізація рівнянь типу $(5,3,0,0)$.

Лема 3.3. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(5,3,0,0)$ *парастрофно первинно рівносильне принаймні одному з п'яти рівнянь: (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10).*

Доведення. Будь-яке узагальнене тернарне функційне рівняння предметного типу $(5,3,0,0)$ згідно з означенням має дві незалежних предметних змінних, перша з яких має п'ять появ, а друга — три появи. Відповідно до лексикографічного порядку розташування предметних змінних, у рівнянні п'ять появ предметної змінної x та три появи предметної змінної y. Згідно з твердженням 3.1, кожне з цих рівнянь має розташування дужок у вигляді формули (3.39).

Нехай всі три появи предметної змінної y знаходяться у власному підтермі, тоді маємо рівняння (3.6).

Якщо дві появи предметної змінної y у власному підтермі, то предметна змінна x має появу у власному підтермі і розташована на першому місці, згідно лексикографічного порядку предметних змінних, тобто маємо два рівняння:

$$F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(x,x,y),$$

$$F_1(F_2(x,y,y),x,y) = F_3(x,x,x).$$

Перше рівняння збігається з (3.9). До другого рівняння застосуємо зовнішнє ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідне перейменування функційних змінних, в результаті отримаємо рівняння (3.7).

Якщо предметна змінна y має одну появу у власному підтермі, то згідно з комутуванням та лексикографічним порядком у формулі (3.39): $u_1 = u_2 = x$, а $u_3 = y$. Якщо інших дві появи предметної змінної y зліва, то маємо рівняння:

$$F_1(F_2(x,x,y),y,y) = F_3(x,x,x),$$

для якого застосуємо зовнішнє ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідне перейменування функційних змінних, в результаті отримаємо рівняння (3.8). Якщо інших дві появи предметної змінної y справа, то маємо, враховуючи комутування та лексикографічний порядок, рівняння:

$$F_1(F_2(x,x,y),x,x) = F_3(x,y,y),$$

для якого застосуємо зовнішнє ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідне перейменування функційних змінних, в результаті отримаємо рівняння (3.9). Якщо інших дві появи предметної змінної y знаходяться по різні сторони, то рівняння збігається (3.10). Якщо власний терм немає жодної появи предметної змінної y, тоді у формулі (3.39) маємо таки випадок:

$$u_1 = u_2 = u_3 = x,$$

тоді можливих таких три рівняння з врахуванням комутування та лексикографічного розташування змінних:

$$F_1(F_2(x, x, x), y, y) = F_3(x, x, y),$$

$$F_1(F_2(x, x, x), x, y) = F_3(x, y, y),$$

$$F_1(F_2(x, x, x), x, x) = F_3(y, y, y).$$

Перше і друге рівняння збігається з рівняннями (3.8) і (3.7) відповідно.

Третє рівняння відповідно до зовнішнього ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (3.6). □

Мінімізація рівнянь типу $(4, 4, 0, 0)$.

Лема 3.4. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(4, 4, 0, 0)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з чотирьох рівнянь: (3.11), (3.12), (3.13), (3.14).*

Доведення. В будь-якому узагальненому тернарному функційному рівнянні предметного типу $(4, 4, 0, 0)$ згідно з лемою 3.1 є дві незалежних предметних змінних, кожна з яких має чотири появи. Нехай кожне з цих рівнянь має вигляд формули (3.39) і чотири появи предметної змінної x та чотири появи предметної змінної y. Оскільки узагальнене тернарне функційне рівняння предметного типу $(4, 4, 0, 0)$ має однакову кількість появ двох предметних змінних x та y, а тому згідно твердження 3.2 предметна змінна x розташована у власному підтермі і стоїть на першому місці згідно з формулою (3.39). Якщо це не так, то застосуємо комутування у власному підтермі, який набуде вигляду: $F_2(u_1, u_2, u_3)$, де $u_1 = x$, $u_2, u_3 \in \{x, y\}$.

Якщо $u_2 = u_3 = x$, то отримуємо два рівняння: (3.11) і (3.12).

Якщо $u_2 = u_3 = y$, то можливо побудувати три рівняння: (3.13) та

$$F_1(F_2(x, y, y), y, y) = F_3(x, x, x),$$

$$F_1(F_2(x, y, y), x, x) = F_3(x, y, y).$$

Рівняння (3.12) отримуємо з другого рівняння після застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних. З останнього рівняння після застосування перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (13)-комутування у власному підтермі та термі з визначальною зміною F_3 отримаємо рівняння (3.14).

Якщо $u_2 \neq u_3$, то маємо три рівняння: (3.14) і

$$F_1(F_2(x, x, y), x, x) = F_3(y, y, y),$$

$$F_1(F_2(x, x, y), x, y) = F_3(x, y, y).$$

Застосуємо у першому з двох вищенаведених рівнянь зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування предметних змінних відповідно до циклу (yx), перейменування відповідних функційних змінних та (13)-комутування у термі з визначальною змінною F_3, як результат, отримаємо рівняння (3.12). Парастрофно-первинна рівносильність між другим рівнянням та рівнянням (3.13) випливає із застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних у другому рівнянні. □

Отже, основним результатом мінімізації функційних рівнянь функційної довжини три на тернарних квазігрупах від двох різних незалежних предметних змінних є така теорема.

Теорема 3.3. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини три від двох різних незалежних* *предметних змінних парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з таких 13 рівнянь:*

– предметного типу $(6, 2, 0, 0)$*: (3.2), (3.3), (3.4), (3.5);*

– предметного типу $(5, 3, 0, 0)$*: (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10);*

– предметного типу $(4, 4, 0, 0)$*: (3.11), (3.12), (3.13), (3.14).*

Доведення грунтується на об'єднанні доведень лем 3.2, 3.3 та 3.4 з урахуванням леми 3.1. □

3.1.4. Рівняння з трьома предметними змінними

Відповідно до леми 3.1 рівняння, які мають три незалежних предметних змінних, можливі таких типів $(4, 2, 2, 0)$ та $(3, 3, 2, 0)$. Враховуючи цей факт в цьому підрозділі будемо розглядати мінімізацію рівнянь окремо кожного з вказаних типів.

Мінімізація рівнянь типу $(4, 2, 2, 0)$**.**

Лема 3.5. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(4, 2, 2, 0)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з десяти рівнянь: (3.15)–(3.24).*

Доведення. З умови теореми випливає, що узагальнене тернарне функційне рівняння довжини три має три незалежних предметних змінних, одна з яких має чотири появи, а дві інших — по дві появи. Згідно з лемою 3.1, його предметний тип $(4, 2, 2, 0)$. Нехай у рівнянні чотири появи предметної змінної x та по дві появи предметних змінних y та z відповідно. Згідно з твердженням 3.1, кожне з цих рівнянь має розташування дужок у вигляді формули (3.39).

Розглянемо випадки коли власний підтерм не має x, тоді предметна змінна y стоїть на першому місці згідно твердження 3.2. Якщо це не так, то застосуємо комутування у власному підтермі. Предметна змінна y точно розташована у даному підтермі, адже рівняння має по дві появи y і z, а змінна F_2 тернарна. Отже, власний підтерм має вигляд: $F_2(u_1, u_2, u_3)$, де $u_1 = y$, $u_2, u_3 \in \{y, z\}$.

Якщо $u_2 \neq u_3$, то маємо рівняння (3.15) і (3.16). Якщо $u_2 = u_3$, то маємо два рівняння:

$$F_1(F_2(y, z, z), x, y) = F_3(x, x, x),$$

$$F_1(F_2(y, z, z), x, x) = F_3(x, x, y).$$

Після взаємного перейменування y і z та (13)-комутування у власному підтермі із першого рівняння отримаємо рівняння (3.15), а з другого — рівняння (3.16).

Розглянемо випадки коли власний підтерм має лише одну змінну x, тоді вона знаходиться на першому місці, згідно лексикографічного порядку. Отже, у власному підтермі з формули (3.39): $u_1 = x$, $u_2, u_3 \in \{y, z\}$.

Якщо $u_2 = u_3 = y$, то маємо три рівняння: (3.19), (3.20) та

$$F_1(F_2(x, y, y), z, z) = F_3(x, x, x),$$

в якому взаємно перейменуємо змінні y та z і зовнішнім діленням операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних, отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно рівносильне (3.17).

Якщо $u_2 \neq u_3$, то маємо три рівняння: (3.18), (3.24) та

$$F_1(F_2(x, y, z), x, y) = F_3(x, x, z),$$

в якому взаємно перейменуємо змінні y та z і зовнішнім діленням операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних, отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно рівносильне (3.21).

Розглянемо випадки, коли власний підтерм має дві появи змінної x, тоді згідно з лексикографічним порядком у власному підтермі з формули (3.39): $u_1 = u_2 = x$, $u_3 \in \{y, z\}$. Якщо $u_3 = y$, то маємо п'ять рівнянь: (3.21), (3.22), (3.23) та

$$F_1(F_2(x, x, y), x, x) = F_3(y, z, z),$$

$$F_1(F_2(x,x,y),x,y) = F_3(x,z,z).$$

Перше рівняння парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (3.16), а друге – рівнянню (3.19) за зовнішнім діленням операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних циклу (yz).

Нарешті випадок, коли власний підтерм складається з однієї предметної змінної, а саме змінної x, тобто $u_1 = u_2 = u_3 = x$, тоді маємо рівняння (3.17),(3.18) та:

$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(y,z,z),$$
$$F_1(F_2(x,x,x),x,z) = F_3(y,y,z),$$
$$F_1(F_2(x,x,x),z,z) = F_3(x,y,y).$$

Друге рівняння можна отримати з першого після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (yz) та застосування (13)-комутування у термі з визначальною змінною F_3. Крім того із другого рівняння отримуємо рівняння (3.15), за умови застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних. Третє рівняння, парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (3.17), бо його отримуємо з рівняння (3.17) після взаємного перейменування предметних змінних z й y. $\square$

Мінімізація рівнянь типу $(3,3,2,0)$**.**

Лема 3.6. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(3,3,2,0)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з десяти рівнянь: (3.25)–(3.34).*

Доведення. В будь-якому узагальненому тернарному функційному рівнянні предметного типу $(3,3,2,0)$ згідно леми 3.1 є три незалежних предметних змінних, перші дві з яких мають по три появи, а третя – дві появи. Нехай кожне з цих рівнянь має вигляд формули (3.39) і три появи предметної змінної x, три появи предметної змінної y та дві появи предметної змінної z.

Оскільки квадратична змінна у рівнянні одна, то розглянемо випадок, коли предметна змінна z не має жодної появи у власному підтермі.

Згідно твердження 3.2 достатньо розглянути випадки коли предметна змінна x розташована у власному підтермі рівняння, тоді нехай вона стоїть на першому місці. Якщо це не так, то застосуємо комутування у власному підтермі. Отже, власний підтерм має вигляд: $F_2(u_1, u_2, u_3)$, де $u_1 = x$, $u_2, u_3 \in \{x, y\}$.

Якщо $u_2 = u_3 = y$, то маємо п'ять таких функційних рівнянь: (3.28), (3.29), (3.30), (3.34) і

$$F_1(F_2(x, y, y), x, z) = F_3(x, y, z).$$

До останнього рівняння застосувати взаємне перейменування предметних змінних x та y разом з (12)-комутуванням у термі з визначальною змінною F_3 та (13)-комутуванням у власному підтермі, як наслідок, маємо рівняння (3.31).

Якщо у власному підтермі рівняння предметних змінних x три появи, тобто $u_1 = u_2 = u_3 = x$, то маємо три рівняння: (3.25), (3.26), (3.27).

Якщо у власному підтермі рівняння дві появи предметних змінних x, тобто $u_2 = x$, $u_3 = y$, то маємо п'ять рівнянь: рівняння (3.31) та

$$F_1(F_2(x, x, y), x, y) = F_3(y, z, z);$$
$$F_1(F_2(x, x, y), x, z) = F_3(y, y, z);$$
$$F_1(F_2(x, x, y), y, y) = F_3(x, z, z);$$
$$F_1(F_2(x, x, y), z, z) = F_3(x, y, y).$$

Із вищенаведеного першого рівняння отримуємо рівняння (3.34) після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (13)-комутування у власному підтермі й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_1. Рівняння (3.30) отримаємо з другого рівняння, а третє рівняння — з рівнянням (3.28), після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (13)-комутування у власному підтермі. У четвертому рівнянні застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних, (13)-комутування у власному підтермі та термі з визначальною змінною F_3, отримаємо рівняння (3.29).

Якщо у власному підтермі немає жодної появи предметної змінної x, то ним можуть бути лише предментні змінні y. Але при взаємному перейменуванні предметних змінних за циклом (xy), переходимо до випадку, коли у власному підтнрмі всі появи змінної x, тобто маємо рівняння парастрофно-первинно рівносильні рівнянням (3.25), (3.26), (3.27).

Розглянемо випадок, коли предметна змінна z має одну появу у власному підтермі, тобто $u_2 = y$, а $u_3 = z$, то маємо рівняння (3.33) і ще чотири таких:

$$F_1(F_2(x, y, z), x, x) = F_3(y, y, z);$$

$$F_1(F_2(x, y, z), x, z) = F_3(x, y, y);$$

$$F_1(F_2(x, y, z), y, y) = F_3(x, x, z);$$

$$F_1(F_2(x, y, z), y, z) = F_3(x, x, y).$$

З першого рівняння отримуємо третє рівняння після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (12)-комутування у власному підтермі. У третьому рівнянні послідовно виконаємо такі перетворення: зовнішнє ділення зліва операції F_1, внутрішнє ліве ділення за змінної z, перейменування відповідних функційних змінних, (13)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 і F_3 й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_1, отримаємо рівняння (3.32). Після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (12)-комутування у власному підтермі й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_3 другого рівняння маємо четверте рівняння. Рівняння (3.31) отримуємо з четвертого рівняння після застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних.

Якщо $u_2 = x$, а $u_3 = z$, то маємо рівняння (3.32) і ще три рівняння:

$$F_1(F_2(x, x, z), x, z) = F_3(y, y, y);$$
$$F_1(F_2(x, x, z), y, y) = F_3(x, y, z);$$
$$F_1(F_2(x, x, z), y, z) = F_3(x, y, y).$$

Застосуємо до першого рівняння зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних та перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy), отримаємо рівняння (3.26). Парастрофно-первинна рівносильність між другим рівнянням та рівнянням (3.32) очевидна після застосування у другому рівнянні внутрішнього лівого ділення за змінної z, перейменування відповідних функційних змінних та (13)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 і F_3 й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_1. У третьому рівнянні застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних, отримаємо рівняння (3.30).

І нарешті останній випадок, коли квадратична змінна має обидві появи у власному підтермі, тобто $u_2 = u_3 = z$, то маємо три рівняння:

$$F_1(F_2(x, z, z), x, x) = F_3(y, y, y),$$
$$F_1(F_2(x, z, z), x, y) = F_3(x, y, y),$$
$$F_1(F_2(x, z, z), y, y) = F_3(x, x, y).$$

До першого рівняння застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних та предметних змінних відповідно до циклу (xy), отримаємо рівняння (3.25). Для доведення парастрофно-первинної рівносильності між другим рівнянням та рівнянням (3.34) достатньо застосувати зовнішнє діленням зліва операції F_1й перейменування відповідних функційних змінних у другому рівнянні. Отримаємо рівняння (3.28) з третього рівняння після застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних, перейменування предметних змінних відповідно до циклу (yx) та (13)-комутування у власному підтермі. $\Box$

Теорема 3.4. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини три від двох різних незалежних предметних змінних парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з таких 20 рівнянь:*
– предметного типу $(4,2,2,0)$*: (3.15)–(3.24);*
– предметного типу $(3,3,2,0)$*: (3.25)–(3.34).*

Доведення грунтується на об'єднанні доведень лем 3.5 та 3.6 з урахуванням леми 3.1. $\Box$

3.1.5. Рівняння з чотирма предметними змінними

Відповідно до леми 3.1 рівняння, які мають чотири незалежних предметних змінних, можливі лише одного типу $(2,2,2,2)$. А такі рівняння називають квадратичними [48], [49], [59], тому враховуючи цей факт в цьому підрозділі дано мінімізацію квадратичних рівнянь функційної довжини три на тернарних квазігрупах.

Лема 3.7. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(2,2,2,2)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з чотирьох рівнянь: (3.35), (3.36), (3.37), (3.38).*

Доведення. У будь-якому узагальненому тернарному функційному рівнянні предметного типу $(2,2,2,2)$ згідно з лемою 3.1 є чотири незалежних предметних змінних, кожна з яких має по дві появи. Нехай кожне з цих рівнянь має вигляд формули (3.39) та по дві появи кожної з предметних змінних: x, y, z та u. Припускаємо, що безповторна предметна змінна у власному підтермі розташована на першому місці, якщо це не так, то застосуємо комутування. Така предметна змінна завжди існує, оскільки рівняння квадратичне, а змінна F_2 тернарна. Тоді згідно з твердженням 3.2 власний підтерм має вигляд: $F_2(u_1,u_2,u_3)$, де $u_1=x$, $u_2=y$, $u_3\in\{y,z\}$.

Якщо $u_3 = y$, то можливі три випадки: рівняння (3.36) та рівняння:

$$F_1(F_2(x, y, y), x, z) = F_3(z, u, u), \tag{3.35$*$}$$

$$F_1(F_2(x, y, y), z, u) = F_3(x, z, u). \tag{3.37$*$}$$

У рівнянні (3.35*) застосуємо (13)-комутування у термі з визначальною змінною F_1, отримаємо рівняння (3.35).

До рівняння (3.37*) послідовно застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1, а потім операції F_2 та перейменуємо відповідні функційні змінні, перейменуємо предметні змінні відповідно до циклу (zyu), отримаємо рівняння (3.37).

Якщо $u_3 = z$, то можливі два випадки: друга поява змінної x розташована зліва або справа. Якщо друга поява змінної x розташована в лівій частині, то маємо рівняння (3.38) та рівняння

$$F_1(F_2(x, y, z), x, y) = F_3(z, u, u).$$

Застосуємо до останнього рівняння зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних, перейменування предметних змінних відповідно до циклів (zx) та (uy), (13)-комутування та (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_3, отримаємо рівняння (3.37*), яке парастрофно-первинно рівносильне до (3.37). Якщо друга поява x розташована у правій частині рівняння, то маємо три рівняння:

$$F_1(F_2(x, y, z), u, u) = F_3(x, y, z);$$

$$F_1(F_2(x, y, z), y, z) = F_3(x, u, u);$$

$$F_1(F_2(x, y, z), y, u) = F_3(x, z, u).$$

Рівняння (3.37*), яке парастрофно-первинно рівносильне до (3.37) отримуємо з першого рівняння після застосування ряду послідовних перетворень, а саме: внутрішнього лівого ділення за змінної z, зовнішнє ділення справа операції F_3, перейменування відповідних функційних змінних, перейменування предметних змінних відповідно до циклів (zx)

та (yu), а також (23)-комутування та (12)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 й F_3. У другому рівнянні застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменуємо відповідні функційні змінні, перейменуємо предметні змінні відповідно до циклу (uy), а також здійснемо (23)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 та F_3, отримаємо рівняння (3.37*), яке парастрофно-первинно рівносильне до (3.37). У третьому рівнянні перейменуємо предметні змінні відповідно до циклу (xy) та застосуємо (23)-комутування у власному підтермі, маємо рівняння (3.38). □

3.2. Розв'язування тернарних рівнянь типу $(5, 3, 0, 0)$

При аналізі парастрофно-первинної рівносильності рівнянь типу $(5, 3, 0, 0)$ потрібно мати множини їх розв'язків. Тому знаходимо ці множини їх розв'язків, компоненти яких є лінійними відносно однієї і тієї ж довільної комутативної групи.

Нехай $(Q; +, 0)$ – довільна комутативна група, на якій визначені три операції такими рівностями:

$$f_i(x, y, z) = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + a_i, \tag{3.45}$$

де α_i, β_i, γ_i є автоморфізмами комутативної групи $(Q; +, 0)$, де вільний елемент $a_i \in Q$, $\quad i = 1, 2, 3$.

Теорема 3.5. *Трійка операцій (f_1, f_2, f_3) визначених рівностями (3.45) є розв'язком рівняння*

– *(3.6) тоді і тільки тоді, коли*

$$a_3 = a_1 + \alpha_1 a_2, \quad \gamma_2 = -\alpha_2 - \beta_2, \quad \gamma_3 = \beta_1 + \gamma_1 - \alpha_3 - \beta_3; \tag{3.46}$$

– *(3.7) тоді і тільки тоді, коли*

$$a_3 = \alpha_1 a_2 + a_1, \quad \beta_3 = \gamma_1 - \gamma_3, \quad \alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) + \beta_1; \tag{3.47}$$

– *(3.8) і тоді і тільки тоді, коли*

$$a_3 = \alpha_1 a_2 + a_1, \quad \gamma_3 = \beta_1 + \gamma_1, \quad \beta_3 = \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) - \gamma_3; \tag{3.48}$$

– *(3.9) тоді і тільки тоді, коли*

$$a_3 = \alpha_1 a_2 + a_1, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_2, \quad \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 - \alpha_3; \tag{3.49}$$

– *(3.10) тоді і тільки тоді, коли*

$$a_3 = \alpha_1 a_2 + a_1, \quad \gamma_3 = \alpha_1\gamma_2 + \gamma_1, \quad \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1 - \alpha_3. \tag{3.50}$$

Доведення Трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій є розв'язком функційного рівняння (3.6) тоді і тільки тоді, коли для всіх x і y виконується

$$f_1(f_2(y, y, y), x, x) = f_3(x, x, x).$$

З урахуванням рівності (3.45), ця тотожність рівносильна

$$\alpha_1(\alpha_2 y + \beta_2 y + \gamma_2 y + a_2) + \beta_1 x + \gamma_1 x + a_1 = \alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3 x + a_3.$$

Оскільки α_1 є автоморфізмом, то маємо рівносильну тотожність

$$(\beta_1 + \gamma_1)x + \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)y + \alpha_1 a_2 + a_1 = (\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3)x + a_3.$$

Підставимо по черзі $x = y = 0$, $x = 0$ та $y = 0$, отримуємо $\alpha_1 a_2 + a_1 = a_3$, $\alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 0$, $\beta_1 + \gamma_1 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3$. Очевидно, що ці рівності еквівалентні (3.46).

Трійка (f_1, f_2, f_3) є розв'язком рівняння (3.7) тоді і тільки тоді, коли для всіх x, y виконується

$$f_1(f_2(x, x, x), x, y) = f_3(x, y, y)$$

Враховуючи (3.45), маємо

$$\alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 x + a_2) + \beta_1 x + \gamma_1 y + a_1 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 y + a_3.$$

Отримана рівність рівносильна $\alpha_1 a_2 + a_1 = a_3$, $\alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = \alpha_3$, $\gamma_1 = \beta_3 + \gamma_3$ а це, в свою чергу, рівносильне (3.47).

Трійка (f_1, f_2, f_3) є розв'язком рівняння (3.8) тоді і тільки тоді, коли для всіх x, y виконується

$$f_1(f_2(x, x, x), y, y) = f_3(x, x, y)$$

Це означає, що

$$\alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 x + a_2) + \beta_1 y + \gamma_1 y + a_1 = \alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3 y + a_3.$$

Отримана рівність рівносильна

$$\alpha_1 a_2 + a_1 = a_3 \quad \beta_1 + \gamma_1 = \gamma_3, \quad \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = \alpha_3 + \beta_3.$$

Отже, маємо (3.48).

Трійка (f_1, f_2, f_3) – це розв'язок рівняння (3.9) тоді і тільки тоді, коли для всіх x, y виконується

$$f_1(f_2(x, y, y), x, x) = f_3(x, x, y).$$

Зокрема, якщо взяти до уваги (3.45), отримаємо

$$\alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 y + a_2) + \beta_1 x + \gamma_1 x + a_1 = \alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3 y + a_3.$$

Ця тотожність рівносильна рівностям $\alpha_1 a_2 + a_1 = a_3$, $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_3 + \beta_3$, $\alpha_1(\beta_2 + \gamma_2) = \gamma_3$. Отримані рівності збігаються з (3.49).

Трійка (f_1, f_2, f_3) є розв'язком (3.10) тоді і тільки тоді, коли для всіх x, y виконується

$$f_1(f_2(x, x, y), x, y) = f_3(x, x, y).$$

Беручи до уваги (3.45), ця тотожність має вигляд

$$\alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 y + a_2) + \beta_1 x + \gamma_1 y + a_1 = \alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3 y + a_3.$$

$\alpha_1 a_2 + a_1 = a_3$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_3$, $\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1 = \gamma_3$ рівносильні до (3.48). $\square$

Нехай так визначена функція:

$$f_1(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + a$$

над комутативною групою $(Q; +; 0)$ є ідемпотентною, тобто, $f(x, x, x) = x$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha + \beta + \gamma = \iota$ і $a = 0$. Тому, канонічний розклад трійки операцій (f_1, f_2, f_3), яка задовольняє (3.45) є такий:

$$f_i(x, y, z) = \alpha_i x + \beta_i y + (\iota - \alpha_i - \beta_i) z, \tag{3.51}$$

де α_i, β_i, $\iota - \alpha_i - \beta_i$ є автоморфізмами комутативної групи $(Q; +, 0)$, $\quad i = 1, 2, 3$.

Наслідок 3.1. *Трійка (f_1, f_2, f_3) оборотних ідемпотентних функцій, визначених над комутативною групою $(Q; +; 0)$ рівністю (3.51) є розв'язком рівняння*

- *(3.6) тоді і тільки тоді, коли $|Q| = 1$;*
- *(3.7) тоді і тільки тоді, коли $\alpha_3 = \alpha_1 + \beta_1$;*
- *(3.8) тоді і тільки тоді, коли $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_3$;*
- *(3.9) тоді і тільки тоді, коли $\beta_3 = \alpha_1\alpha_2 + \iota - \alpha_1 - \alpha_3$;*
- *(3.10) тоді і тільки тоді, коли $\beta_3 = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \beta_1 - \alpha_3$.*

Доведення Нехай трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій, визначених на комутативній групі $(Q; +; 0)$ рівнянням (3.51), де α_i, β_i, $\iota - \alpha_i - \beta_i$ є автоморфізмами групи.

Якщо (f_1, f_2, f_3) є розв'язком рівняння (3.6), то за пунктом 1 Теореми 3.5 маємо $\gamma_2 = -\alpha_2 - \beta_2$, але $\gamma_2 = \iota - \alpha_2 - \beta_2 = \iota + \gamma_2$. Тому, $\iota = 0$, тобто, $x = a$ для всіх $x \in Q$ і для деякого $a \in Q$. Це означає, що Q – одноелементна.

Нехай (f_1, f_2, f_3) – розв'язок функційного рівняння (3.7). Відповідно, з

(3.47):

$$\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + (\iota - \alpha_2 - \beta_2)) + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$(\iota - \alpha_1 - \beta_1) - (\iota - \alpha_3 - \beta_3) = -\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3 =$$
$$= -\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \beta_3 = \beta_3.$$

Тому рівність (3.47) рівносильна до $\alpha_3 = \alpha_1 + \beta_1$.

Нехай (f_1, f_2, f_3) розв'язок функційного рівняння (3.8). Із рівностей (3.48)

$$\beta_3 = \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2 + \iota - \alpha_2 - \beta_2) - \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_3.$$

Ось тому, друга рівність (3.48) слідує з отриманої рівності:

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= \iota - \alpha_3 - \beta_3 = \iota - \alpha_3 - (\alpha_1 - \alpha_3) = \\ &= \iota - \alpha_1 = \beta_1 + (\iota - \alpha_1 - \beta_1) = \beta_1 + \gamma_1.\end{aligned}$$

Відповідно, пункт 3) цієї теореми ріносильний до пункту 3) теореми 3.5.

Нехай (f_1, f_2, f_3) розв'язок функційного рівняння (3.9). Він рівносильний до рівності (3.49). Справді,

$$\beta_3 = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + (\iota - \alpha_1 - \beta_1) - \alpha_3 = \alpha_1\alpha_2 + \iota - \alpha_1 - \alpha_3.$$

Друга рівність з (3.49) рівносильна до отриманої. Тоді,

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= \iota - \alpha_3 - \beta_3 = \iota - \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - \iota + \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1(\iota - \alpha_2) = \\ &= \alpha_1(\beta_2 + \iota - \alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1\beta_2 + \alpha_1(\iota - \alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_2.\end{aligned}$$

Накінець, нехай (f_1, f_2, f_3) розв'язок функційного рівняння (3.10). Тоді, пункт 5 теореми 3.5 справджується. Тоді третя рівність слідує з другої:

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= \iota - \alpha_3 - \beta_3 = \iota - \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 - \beta_1 + \alpha_3 = \\ &= \iota - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 - \beta_1 = (\iota - \alpha_1 - \beta_1) + \alpha_1 + \alpha_1(\iota - \alpha_2 - \beta_2 + \iota) = \\ &= \gamma_1 + \alpha_1 + \alpha_1\gamma_2 - \alpha_1 = \gamma_1 + \alpha_1\gamma_2.\end{aligned}$$

$\square$

3.3. Мінімізація тернарних рівнянь типу $(5, 3, 0, 0)$

Кожне узагальнене тернарне функційне рівняння довжини три є парастрофно первинно рівносильне принаймні одному з функційних рівнянь, перелічених в 3.1. Рівняння, що мають різну кількість різних предметних змінних, не є парастрофно первинно рівносильними (Лема 1.2). Ось чому, кожне функційне рівняння довжини три з двома різними предметними змінними є парастрофно первинно рівносильними принаймні одному з функційних рівнянь (3.2)–(3.14) (Теорема 3.1).

Твердження 3.3. *Кожне функційне рівняння довжини три типу (5;3;0;0) є парастрофно-первинно нерівносильне жодному з решти функційних рівнянь довжини три.*

Доведення. З означення тернарної квазігрупи Штейнера випливає, що довільна квазігрупа Штейнера є розв'язком кожного з функційних рівнянь (3.2)–(3.5) і (3.11)–(3.14). Але ця квазігрупа не є розв'язком жодного з рівнянь (3.6)–(3.10). Згідно Наслідку 1.4, твердження є істинним. □

Теорема 3.6. *Функційне рівняння (3.6) є парастрофно первинно рівносильним жодному з решти функційних рівнянь довжини три.*

Доведення. Беручи до уваги Твердження 3.3, достатньо довести, що рівняння (3.6) не є парастрофно-первинно рівносильним до решти функційних рівнянь типу (5;3;0;0).

Припустимо, що функційне рівняння (3.6) є парастрофно-первинно рівносильним до кожного з функційних рівнянь (3.7), (3.8), (3.9), (3.10). Нехай розв'язок цих рівнянь складається з трьох ідемпотентних оборотних функцій (f_1, f_2, f_3), визначених на множині $|Q| > 1$. Якщо кожне з рівнянь (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) і рівняння (3.6) є парастрофно-первинно-рівносильними, тоді згідно з Лемою 1.3 існує перестановка τ в S_3 і перестановки σ_1, σ_2, σ_3 в S_4 такі, що трійка операцій

$$({}^{\sigma_1}f_{1\tau}, {}^{\sigma_2}f_{2\tau}, {}^{\sigma_3}f_{3\tau})$$

є розв'язком рівняння (3.6). Але трійка ідемпотентних оборотних операцій є розв'язком рівняння (3.6) тоді і тільки тоді, коли $|Q| = 1$. Прийшли до суперечності. Отже, функційне рівняння (3.6) не є парастрофно-первинно рівносильним до жодного з рівнянь (3.7), (3.8), (3.9), (3.10).

Отже, для завершення доведення теореми достатньо знайти приклади трійок ідемпотентних квазігруп, які є розв'язками функційних рівнянь (3.7)-(3.10) на деяких множинах та мають більше одного елемента. Для цього припущення використовуємо Наслідок 3.1.

Приклад 1. Нехай трійка ідемпотентних оборотних операцій, визначених в полі $\mathbb{Z}_5$ рівностями

$$f_2(x, y, z) = 2x + 2y + 2z,$$
$$f_3(x, y, z) = 2x + 3y + z,$$
$$f_1(x, y, z) = x + y + 4z.$$

Кожна з операцій ідемпотентна та оборотна. Більше того, трійка (f_1, f_2, f_3) є розв'язком функційного рівняння (3.7). Справді:

$$2x + 2x + 2x + x + 4y = 2x + 3y + y,$$

Звідки отримуємо $5x = 0$.

Отже, функційні рівняння (3.6) and (3.7) є парастрофно-первинно нерівносильні.

Приклад 2. Нехай трійка ідемпотентних оборотних операцій, визначених в полі $\mathbb{Z}_5$ рівностями

$$f_2(x, y, z) = 2x + 2y + 2z,$$
$$f_1(x, y, z) = 2x + 3y + z,$$
$$f_3(x, y, z) = x + y + 4z.$$

Трійка (f_1, f_2, f_3) є розв'язком функційного рівняння (3.8). Справді,

$$2(2x + 2x + 2x) + 3y + y = x + x + 4y,$$

Звідки отримуємо $10x = 0$.

Отже, функційні рівняння (3.6) та (3.8) є парастрофно-первинно нерівносильними.

Приклад 3. Нехай трійка ідемпотентних оборотних операцій, визначених в полі $\mathbb{Z}_5$

$$f_1(x, y, z) = x + 3y + 3z,$$

$$f_2(x, y, z) = x + 2y + 2z,$$

$$f_3(x, y, z) = x + y + 4z.$$

Трійка (f_1, f_2, f_3) є розв'язком функційного рівняння (3.8). Дійсно,

$$x + 2y + 2y + 3x + 3x = x + x + 4y,$$

Звідки маємо $5x = 0$.

Отже, функційні рівняння (3.6) та (3.9) є парастрофно-первинно нерівносильними.

Приклад 4. Трійка (f_1, f_2, f_2) ідемпотентних оборотних операцій, визначених в кільці за модулем 5, тобто $\mathbb{Z}_5$ такими рівностями:

$$f_1(x, y, z) = x + 4y + 2z,$$

$$f_2(x, y, z) = x + 2y + 2z,$$

$$f_3(x, y, z) = x + y + 4z,$$

які є розв'язком функційного рівняння (3.10). Справді,

$$(x + 2x + 2y) + 4x + 2y = x + x + 4y,$$

тобто $5x = 0$.

Таким чином, рівняння (3.6) і (3.10) не є парастрофно-первинно рівносильними.

Отже, теорему доведено. $\square$

Висновки до розділу 3

У цьому розділі встановлено мінімізацію узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь довжини три з використанням методу класифікації рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Як результат мінімізовано такі рівняння до 38 нетривіальних узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини три, які розділені за предметними типами:

$(8, 0, 0, 0)$ – одне рівняння,

$(6, 2, 0, 0)$ – 4 рівняння,

$(5, 3, 0, 0)$ – 5 рівнянь,

$(4, 4, 0, 0)$ – 4 рівняння,

$(4, 2, 2, 0)$ – 10 рівнянь,

$(3, 3, 2, 0)$ – 10 рівнянь,

$(2, 2, 2, 2)$ – 4 рівняння.

Для предметного типу $(5, 3, 0, 0)$ описано розв'язки нетривіальних рівнянь, компоненти яких є лінійними відносно однієї й тієї ж довільної комутативної групи. Описано мінімізацію тернарних рівнянь типу $(5, 3, 0, 0)$ відносно інших типів тернарних рівнянь довжини три.

Результати цього розділу опубліковано в працях: [96], [97], [98], [101].

РОЗДІЛ 4

КЛАСИФІКАЦІЯ І РОЗВ'ЯЗАННЯ КВАДРАТИЧНИХ РІВНЯНЬ І ТОТОЖНОСТЕЙ ДОВЖИНИ ТРИ

Дано класифікацію тернарних квадратичних рівнянь довжини три та розв'язано представників отриманих класів рівнянь на множині тернарних квазігруп. Встановлено, що існує точно чотири класи узагальнених квадратичних функційних рівнянь довжини три на оборотних функціях відносно парастрофно-первинної рівносильності.

4.1. Розв'язування квадратичних рівнянь довжини три

Для класифікації узагальнених квадратичних тернарних квазігрупових функційних рівнянь довжини три з точністю до парастрофно-первинної рівносильності потрібно знайти усі квазігрупові розв'язки представників кожного класу (3.35)–(3.38) отриманої мінімізації в лемі 3.7.

Для якісного розв'язування функційних рівнянь (3.35)–(3.38) на тернарних квазігрупах, необхідно довести додаткову лему.

Лема 4.1. *Нехай α, f – унарна і тернарна операції відповідно. Тоді рівність*

$$f(x, y, y) = \alpha x \tag{4.1}$$

рівносильна існуванню ліво-універсально-нейтральної оборотної операції g такої, що

$$f(x, y, z) = g(\alpha x, y, z). \tag{4.2}$$

Доведення. Визначимо операцію g, через

$$g(x, y, z) := f(\alpha^{-1}x, y, z). \tag{4.3}$$

Оскільки операція f оборотна і g є ізотопом операції f, то операція g теж оборотна. Беручи до уваги (4.1), маємо

$$x = f(\alpha^{-1}x, y, y) = g(x, y, y).$$

Отже, операція g – ліво-універсально-нейтральна. Застосувавши (4.3), отримаємо (4.2).

І навпаки, нехай g – ліво-універсально-нейтральна оборотна операція та нехай виконується відношення (4.2), тоді маємо

$$f(x, y, y) = g(\alpha x, y, y) = \alpha x,$$

тобто виконується (4.1) □

Теорема 4.1. *Трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій є розв'язком функційного рівняння (3.35) тоді і тільки тоді, коли існують ліво-універсально-нейтральні оборотні операції h_1, h_2, h_3 і підстановки α, β такі, що*

$$f_1(x, y, z) = h_1(\alpha x, y, \beta^{-1}z), \tag{4.4}$$

$$f_2(x, y, z) = h_2(\beta x, y, z), \tag{4.5}$$

$$f_3(x, y, z) = h_3(\alpha x, y, z). \tag{4.6}$$

Доведення. Нехай трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій визначених на Q буде розв'язком рівняння (3.35), тобто для всіх x, y, z, u тотожність

$$f_1(z, x, f_2(x, y, y)) = f_3(z, u, u) \tag{4.7}$$

справджується. Зокрема, якщо $u = a \in Q$, маємо

$$f_1(z, x, f_2(x, y, y)) = \alpha z, \tag{4.8}$$

де $\alpha z := f_3(z, a, a)$ – це підстановка Q, оскільки α – ліва трансляція оборотної операції f_3.

Крім того, з рівностей (4.8) та (4.7), отримуємо тотожність $f_3(z, u, u) = \alpha z$. Відповідно до леми 4.1, існує ліво-універсально нейтральна оборотна операція h_3 така, що виконується (4.6).

Застосувавши означення парастрофа до рівності (4.8), маємо

$$f_2(x,y,y) = {}^{(34)}f_1(z,x,\alpha z). \tag{4.9}$$

Якщо $z = a \in Q$ і $\beta x := {}^{(34)}f_1(a,x,\alpha a)$, то рівність (4.9) записується так: $f_2(x,y,y) = \beta x$. Зауважимо, що β – це підстановка на Q оскільки вона є трансляцією оборотної операції ${}^{(34)}f_1$. За лемою 4.1 з останнього відношення випливає існування ліво-універсально нейтральної оборотної операції h_2 такої, що рівність (4.5) є істинною.

Замінимо $f_2(x,y,y)$ на βx в (4.8), в результаті отримаємо рівність $f_1(z,x,\beta x) = \alpha z$. Нехай

$$h_1(x,y,z) := f_1(\alpha^{-1}x,y,\beta z),$$

тоді (4.4) виконується і

$$h_1(x,y,y) = f_1(\alpha^{-1}z,x,\beta x) = \alpha\alpha^{-1}x = x.$$

Тому h_1 – ліво-універсально нейтральна оборотна операція.

І навпаки, нехай операції h_1, h_2, h_3 – ліво-універсально нейтрально оборотні та операції f_1, f_2, f_3 визначаються (4.4), (4.5), (4.6) для деяких підстановок α, β множини Q. Тоді

$$\begin{aligned} f_1(z,x,f_2(x,y,y)) &= h_1(\alpha z,x,\beta^{-1}h_2(\beta x,y,y) = \\ &= h_1(\alpha z,x,\beta^{-1}\beta x) = h_1(\alpha z,x,x) = \alpha z = \\ &= h_3(\alpha z,u,u) = f_3(z,u,u). \end{aligned}$$

Тому трійка (f_1,f_2,f_3) є розв'язком рівняння (3.35). □

Теорема 4.2. *Трійка тернарних оборотних операцій (f_1,f_2,f_3) є розв'язком функційного рівняння (3.36) тоді і тільки тоді, коли існують ліво-універсально-нейтральні оборотні операції g_1, g_2, g_3 і підстаноки γ, δ такі що:*

$$f_1(x,y,z) = g_1(\gamma x,y,z), \tag{4.10}$$

$$f_2(x,y,z) = g_2(\delta x,y,z), \tag{4.11}$$

$$f_3(x,y,z) = g_3(\gamma\delta x,y,z). \tag{4.12}$$

Доведення. Нехай трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій є розв'язком рівняння (3.36), тобто, виконується тотожність

$$f_1(f_2(x,y,y),z,z) = f_3(x,u,u). \tag{4.13}$$

Зокрема, якщо $y = u = a \in Q$, маємо

$$f_1(f_2(x,y,y),a,a) = f_3(x,a,a).$$

Тоді $\alpha f_2(x,y,y) = \beta x$, де $\alpha x := f_1(x,a,a)$ і $\beta x := f_3(x,a,a)$ – підстановки, оскільки α і β – це трансляції оборотних операцій f_1 і f_3 відповідно. Звідси

$$f_2(x,y,y) = \alpha^{-1}\beta x.$$

Визначимо $\delta := \alpha^{-1}\beta$, тоді маємо $f_2(x,y,y) = \delta x$. Відповідно до леми 4.1, існує ліво-універсально-нейтральна оборотна операція g_2 така, що справджується рівність (4.11).

Підставимо δx в (4.13) замість $f_2(x,y,y)$, в результаті матимемо:

$$f_1(\delta x,z,z) = f_3(x,u,u). \tag{4.14}$$

Замінимо x на $\delta^{-1}x$ в рівності: $f_1(x,z,z) = f_3(\delta^{-1}x,u,u)$ для всіх x, z, u. Зокрема, коли $u = a \in Q$, маємо $f_1(x,z,z) = \gamma x$, де підстановка $\gamma x := f_3(\delta^{-1}x,a,a)$ є підстановкою носія Q, бо γ – ліва трансляція оборотної операції f_3. Тому відношення (4.10) справеджується для деякої ліво-універсально нейтральної операції g_1. Застосуємо (4.10) і (4.11) до (4.13), маємо:

$$\gamma\delta x = f_3(x,u,u).$$

Відповідно до леми 4.1, існує ліво-універсально нейтральна оборотна операція g_3 така, що виконується рівність (4.12).

Навпаки, нехай відношення (4.10), (4.11), (4.12) істинні для деяких ліво-універсально нейтральних операцій g_1, g_2, g_3 і підстановок γ, δ, тоді

$$\begin{aligned} f_1(f_2(x,y,y),z,z) &= g_1(\gamma g_2(\delta x,y,y),z,z) = \\ &= g_1(\gamma\delta x,z,z) = \gamma\delta x = g_3(\gamma\delta x,u,u) = f_3(x,u,u). \end{aligned}$$

Таким чином, трійка (f_1, f_2, f_3) є розв'язком рівняння (3.36). □

Теорема 4.3. *Трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій визначених на множині Q є квазігруповим розв'язком функційного рівняння (3.37) тоді і тільки тоді, коли операція f_2 є оборотною та існують підстановка μ та ліво-універсально нейтральна оборотна операція g така, що:*

$$f_3(x, y, z) = \mu f_2(x, y, z), \qquad f_1(x, y, z) = g(\mu x, y, z). \tag{4.15}$$

Доведення. Нехай трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій є розв'язком рівняння (3.37), тобто для всіх x, y, z, u виконується рівність

$$f_1(f_2(x, y, z), u, u) = f_3(x, y, z). \tag{4.16}$$

Зокрема, коли $u = a \in Q$ і $\mu x := f_1(x, a, a)$, маємо першу тотожність з (4.15). Підставимо μf_2 в (4.16) замість f_3. Отримаємо:

$$f_1(f_2(x, y, z), u, u) = \mu f_2(x, y, z).$$

Замінивши $f_2(x, y, z)$ на x, отримаємо $f_1(x, u, u) = \mu x$. Відповідно до леми 4.1, існують підстановка μ та ліво-універсально нейтральна оборотна операція g така, що друге відношення з (4.15) виконується.

І навпаки, нехай f_2 – тернарна оборотна опрація та ісує підстановка μ та ліво-універсально нейтральна оборотна операція g така що виконується відношення (4.15). Тоді

$$f_1(f_2(x, y, z), u, u) = g(\mu f_2(x, y, z), u, u) = g(f_3(x, y, z), u, u) = f_3(x, y, z).$$

Отже, трійка (f_1, f_2, f_3) є квазігруповим розв'язком рівняння (3.37). □

Теорема 4.4 (Ф. М. Сохацький [87, с. 186])**.** *Трійка (f_1, f_2, f_3) тернарних оборотних операцій, визначених на множині Q є розв'язком функційного рівняння (3.38) тоді і тільки тоді, коли існують бінарні оборотні операції $\circ$, $*$, $\diamond$ на Q такі, що*

$$\begin{aligned} f_1(y, x, u) &= (x \diamond y) * u, \\ f_2(x, y, z) &= x \overset{r}{\diamond} (y \circ z), \\ f_3(y, z, u) &= (y \circ z) * u. \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2. Класифікація квадратичних рівнянь довжини три

У цьому підрозділі знайдено класифікацію квадратичних тернарних функційних рівнянь довжини три. Для доведення основної теореми доведемо таке твердження:

Твердження 4.1. *Нехай $(Q;\cdot,e)$ буде довільною некомутативною групою, ρ є її нетотожнім автоморфізмом і*

$$f(x,y,z) := \rho x\cdot y\cdot z^{-1}. \tag{4.18}$$

Якщо для біекції $\sigma\in S_4$ існує біекція ν така, що для всіх x, y, z

$$\,^{\sigma}\!f(x,y,z) = \nu x, \tag{4.19}$$

тоді $\nu=\rho$ або $\nu=\rho^{-1}$.

Щоб довести твердження, розглянемо такі позначення:

$$t_{1\sigma} := x,\quad t_{2\sigma} := y,\quad t_{3\sigma} := y,\quad t_{4\sigma} := \nu x.$$

Тоді (4.19) можна записати як $\,^{\sigma}\!f(t_{1\sigma},t_{2\sigma},t_{3\sigma}) = t_{4\sigma}$. Згідно з означенням σ-парастрофа, записана остання рівність рівносильна рівності $f(t_1,t_2,t_3)=t_4$. Застосовуючи (4.18), отримаємо $\rho t_1\cdot t_2\cdot t_3^{-1}=t_4$, тобто

$$\rho t_1\cdot t_2 = t_4\cdot t_3. \tag{4.20}$$

Проаналізуємо взаємозв'язок, врахувавши, що два терми t_1, t_2, t_3, t_4 збігаються з y.

Якщо $t_1=y$, тоді (4.20) при $y=e$ слідує одна з таких рівностей: $\nu x\cdot x=e$ або $x=\nu x$. Отже, $\nu e=e$. Ось чому, (4.20) при $x=e$ слідує $\rho y\cdot y=e$ або $\rho y=y$. Оскільки $(\cdot)$ не є комутативною і ρ є нетотожнім автоморфізмом $(\cdot)$, тоді ні $\rho y=y^{-1}$ ні $\rho y=y$ не є істинною.

Якщо $t_1=x$, $t_2=\nu x$, тоді (4.20) при $x=e$ слідує $\nu e=y^2$. Звідси, коли $y=e$ маємо $\nu e=e$, отже $y^2=e$. Але група експоненти два є комутативною. В результаті отримали протиріччя припущенню.

Якщо $t_1 = x$ *і* $t_2 = y$*, тоді (4.20) при* $y = e$ *слідує* $\rho x = \nu x$*, а саме* $\nu = \rho$.

Нарешті, нехай $t_1 = \nu x$*, тоді (4.20) при* $y = e$ *означає одну з цих рівностей* $\rho\nu x \cdot x = e$ *або* $\rho\nu x = x$*. Перша рівність випливає з (4.20) коли* $t_2 = x$*. Тому,* $y^2 = e$ *і отже, група є комутативною. В результаті маємо суперечність припущення. Друга рівність означає* $\nu = \rho^{-1}$.

Таким чином, допоміжне твердження доведено.

Теорема 4.5. *Кожне узагальнене квадратичне тернарне квазігрупове функційне рівняння довжини три парастрофно-первинно рівносильне точно одному з таких рівнянь (3.35), (3.36), (3.37), (3.38).*

Доведення. Нехай $\upsilon = \omega$ — узагальнене квадратичне тернарне квазігрупове функційне рівняння довжини три. Змінюючи його сторони при необхідності, отримуємо рівняння, яке має одну з таких форм:

$$F_i(\ldots, F_j(\ldots), \ldots) = F_k(\ldots) \tag{4.21}$$

$$F_i(\ldots, F_j(\ldots, F_k(\ldots), \ldots), \ldots) = t, \tag{4.22}$$

$$F_i(\ldots, F_j(\ldots), \ldots, F_k(\ldots), \ldots) = t, \tag{4.23}$$

де t є деякою предметною змінною та $(\ldots)$ позначає деяку послідовність змінних або порожню послідовність.

Коли рівняння має форму (4.22) підставляємо обидві частини рівняння замість t' в терм ${}^{\sigma}F_i(\ldots, t', \ldots)$. В результаті отримуємо

$${}^{\sigma}F_i(\ldots, F_i(\ldots, F_j(\ldots, F_k(\ldots), \ldots), \ldots), \ldots) = {}^{\sigma}F_i(\ldots, t, \ldots),$$

де ${}^{\sigma}F_i$ є відповідним поділом F_i, тобто σ є (14), (24) або (34). Застосувавши відповідні первинні тотожністі (1.1)–(1.6), отримуємо

$$F_j(\ldots, F_k(\ldots) \ldots) = {}^{\sigma}F_i(\ldots, t, \ldots).$$

Отже, кожне функційне рівняння форми (4.22) є парастрофно-первинно рівносильним рівнянню форми (4.21).

Якщо функційне рівняння має форму (4.23), підставляємо обидві частини рівняння на v в цьому термі ${}^{\tau}F_i(\ldots, F_j(\ldots), \ldots, v, \ldots)$:

$$\begin{aligned} {}^{\tau}F_i(\ldots, F_j(\ldots), \ldots, F_i(\ldots, F_j(\ldots), \ldots, F_k(\ldots), \ldots), \ldots) = \\ = F_i'(\ldots, F_j(\ldots), \ldots, t, \ldots), \end{aligned}$$

де ${}^{\tau}F_i$ є відповідним поділом F_i. Застосувавши одну з первинних тотожностей (1.1)–(1.6), маємо

$$F_i'(\ldots, F_j(\ldots), \ldots, t, \ldots) = F_k(\ldots).$$

Таким чином, кожне функційне рівняння є парастрофно-первинно рівносильне функційному рівнянні форми (4.21).

Нехай функційне рівняння має вигляд (4.21). Застосовуючи відповідне перетворення парастрофа, отримуємо рівняння вигляду

$$F_i(\ldots, F_j(\ldots), \ldots) = F_k(\ldots).$$

Перейменувавши його функційні та предметні змінні в лексикографічному порядку, отримаємо

$$F_1(F_2(x, t_2, t_3), t_4, t_5) = F_3(t_6, t_7, t_8), \tag{4.24}$$

де $t_i \in \{x, y, z, u\}$. Позначимо лексикографічний порядок предметних змінних через $\preccurlyeq$. Якщо $t_2 \succcurlyeq t_3$, замінюємо підтерм $F_2(x, t_2, t_3)$ на підтерм ${}^{(23)}F_2(x, t_3, t_2)$, взаємно перейменуємо предметні змінні t_2 і t_3 та перейменуємо ${}^{(23)}F_2$ на F_2. В результаті отримаємо функційне рівняння вигляду (4.24), в якому $t_2 \preccurlyeq t_3$.

Далі вважаємо, що $t_4 \preccurlyeq t_5$ та $t_6 \preccurlyeq t_7 \preccurlyeq t_8$. І нарешті, можемо впорядкувати другі появи x, t_2, t_3. А саме, перейменовуємо їх у лексикографічному порядку, а потім перетворюємо їх на відповідний парастроф F_2. Те саме перетворення справедливе для пари t_4, t_5.

Таким чином, доведено, що кожне квадратичне функційне рівняння є парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (4.24), в якому: 1) перші появи предметних змінних мають лексикографічний порядок; 2) $t_2 \preccurlyeq t_3$,

$t_4 \preccurlyeq t_5$ і $t_6 \preccurlyeq t_7 \preccurlyeq t_8$; 3) другі появи x, t_2, t_3, а також другі появи t_4, t_5 розташовані в лексикографічному порядку.

Отже, відповідний підтерм є

$$1)\, F_2(x,x,y) \quad \text{або} \quad 2)\, F_2(x,y,z).$$

Випадок $F_2(x,y,y)$ неможливий, оскільки другі появи x і y мають бути в лексикографічному порядку.

Нехай відповідним підтермом буде $F_2(x,x,y)$. Якщо $y \in \{t_4, t_5\}$, тоді t_4 — це y, а t_5 — це z тому, маємо рівняння

$$F_1(F_2(x,x,y),y,z) = F_3(z,u,u).$$

Перетворимо F_1 та F_2 на (13)-парастрофи F_1 та F_2 у рівнянні. Отримуємо

$$^{(13)}F_1(y,z,{}^{(13)}F_2(y,x,x)) = F_3(z,u,u).$$

Взаємно перейменувавши x та y і перейменувавши функційні змінні в лексикографічному порядку, отримаємо функційне рівняння (3.35).

Якщо $y \notin \{t_4, t_5\}$, тоді є дві можливості для пари (t_4, t_5): (z,z) і (z,u). Отже, маємо два рівняння:

$$F_1(F_2(x,x,y),z,z) = F_3(y,u,u), \tag{4.25}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),z,u) = F_3(y,z,u). \tag{4.26}$$

Рівняння (4.25) є парастрофно-первинно рівносильним до (3.36) шляхом перетворення (13)-парастрофа F_2, взаємно перейменувавши x і y та замінивши ${}^{(13)}F_2$ на F_2.

Застосуємо гіпертотожність (1.4) до (4.26):

$$^{(14)}F_1(F_3(y,z,u),z,u) = F_2(x,x,y),$$

потім застосуємо гіпертотожність (1.3):

$$F_2(x,x,{}^{(34)}F_3(y,z,u)) = {}^{(14)}F_1(y,z,u).$$

Перетворимо F_2 на (13)-парастроф F_2 та перейменуємо функційні змінні в лексикографічному порядку:

$$F_1(F_2(y,z,u),x,x) = F_3(y,z,u).$$

Перейменувавши предметні змінні відповідно до циклу $(yxuz)$, отримаємо функційне рівняння (3.37).

Нехай відповідним підтермом буде $F_2(x,y,z)$. Оскільки другі появи впорядковані, тоді t_4 — це x і t_5 — це y або u. Отже, маємо два рівняння: рівняння (3.38) та

$$F_1(F_2(x,y,z),x,y) = F_3(z,u,u).$$

Застосуємо (1.1) до останнього функційного рівняння:

$$F_3({}^{(14)}F_2(x,y,z),u,u) = F_1(z,x,y).$$

Щоб отримати рівняння (3.37), перетворимо F_1 на (312)-парастроф F_1 і перейменуємо функційні змінні.

Залишається довести, що рівняння (3.35)–(3.38) попарно парастрофно-первинно нерівносильні. Відповідно до наслідку 1.2, можемо довести, що для кожної пари цих рівнянь і для кожної біекції σ_1, σ_2, σ_3, τ множини $\{1,2,3\}$ існує розв'язок (f_1,f_2,f_3) одного з рівняння такого, що $({}^{\sigma_1}f_{1\tau}, {}^{\sigma_2}f_{2\tau}, {}^{\sigma_3}f_{3\tau})$ не є розв'язком іншого. Зауважимо, що всі парастрофи тотально-симетричної квазігрупи і, зокрема, квазігрупи Штейнера, збігаються.

Довільна квазігрупа Штейнера є розв'язком кожного з функційних рівнянь (3.35), (3.36), (3.37). Припустимо, що квазігрупа Штейнера $(Q;f)$ є розв'язком рівняння (3.38). Теорема 4.4 означає, що f є суперпозицією без повторень двох бінарних квазігруп. Згідно з означенням, кожна квазігрупа Штейнера є лупою. Звідси, за наслідком 1.1 існує група $(Q;+)$ експоненти два така, що $f(x,y,z) = x+y+z$. Немає групи експоненти два порядку 10, але існують системи четвірок Штейнера (див. наприклад [?]) отже, існує квазігрупа Штейнера порядку 10, але це не може бути розв'язком рівняння (3.38). Отже, згідно наслідку 1.1, функційне рівняння (3.38) не є парастрофно-первинно рівносильним будь-якому з рівнянь (3.35), (3.36), (3.37).

Нехай (f_1, f_2, f_3) — довільна трійка операцій квазігрупи Штейнера, визначених на деякому носієві Q. Ці операції можуть бути ізоморфними, але всі вони попарно різні. Пара (f_1, f_2, f_3) є розв'язком обох функційних рівнянь: (3.35) і (3.36). Припустимо, $(f_{1\tau}, f_{2\tau}, f_{3\tau})$ — це розв'язок функційного рівняння (3.37) для деякого $\tau \in S_3$, тобто виконується тотожність

$$f_{1\tau}(f_{2\tau}(x, y, z), u, u) = f_{3\tau}(x, y, z).$$

Оскільки $f_{1\tau}$ є квазігруповою операцією Штейнера, то $f_{2\tau} = f_{3\tau}$. Існує суперечність цьому припущенню. Таким чином трійка $(f_{1\tau}, f_{2\tau}, f_{3\tau})$ не є розв'язком рівняння (3.37) для всіх $\tau \in S_3$. Отже, функційне рівняння (3.37) є парастрофно-первинно рівносильним ні (3.35), ні (3.36).

Отже, залишається довести парастрофно-первинно нерівносильність рівнянь (3.35) та (3.36).

Наведемо доведення парастрофно-первинної нерівносильності (3.35) та (3.36) за допомогою протиріччя. Припустимо, що (3.35) і (3.36) є парастрофно-первинно рівносильними. Позначимо відповідну визначальну послідовність біекцій через $(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Нехай $(Q; \cdot, e)$ — це довільна некомутативна група і γ, δ, $\gamma\delta$ є різними нетотожніми автоморфізмами групи $(Q; \cdot, e)$. Тоді, згідно Теореми 4.2, трійка (f_1, f_2, f_3) операцій, визначених рівностями

$$f_1(x, y, z) := \gamma x \cdot y \cdot z^{-1}, \qquad f_2(x, y, z) := \delta x \cdot y \cdot z^{-1}, \tag{4.27}$$
$$f_3(x, y, z) := \gamma\delta x \cdot y \cdot z^{-1}$$

є розв'язком рівняння (3.36). Лема 1.3 означає, що трійка

$$({}^{\sigma_1}f_{1\tau}, {}^{\sigma_2}f_{2\tau}, {}^{\sigma_3}f_{3\tau})$$

є розв'язком рівняння (3.35). За теоремою 4.1 існують ліво-універсально нейтральні операції h_1, h_2, h_3 і бієкції α, β такі, що

$$\begin{aligned} {}^{\sigma_1}f_{1\tau}(x,y,z) &= h_1(\alpha x, y, \beta^{-1}z), \\ {}^{\sigma_2}f_{2\tau}(x,y,z) &= h_2(\beta x, y, z), \\ {}^{\sigma_3}f_{3\tau}(x,y,z) &= h_3(\alpha x, y, z). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Якщо $y = z$, другим та третім рівнянням є

$${}^{\sigma_2}f_{2\tau}(x,y,y) = \beta x, \qquad {}^{\sigma_3}f_{3\tau}(x,y,y) = \alpha x.$$

Застосовуючи допоміжне твердження цієї теореми до останніх рівностей, маємо

$$\alpha, \beta \in \{\gamma, \gamma^{-1}, \delta, \delta^{-1}, \gamma\delta, \delta^{-1}\gamma^{-1}\}.$$

Замінимо z на βz в першій рівності (4.28), в результаті матимемо:

$${}^{\sigma_1}f_{1\tau}(x,y,\beta z) = h_1(\alpha x, y, z).$$

Якщо $y = z$, тоді

$${}^{\sigma_1}f_{1\tau}(x,y,\beta y) = \alpha x. \tag{4.29}$$

Введемо позначення: $t_{1\sigma_1} := x$, $t_{2\sigma_1} := y$, $t_{3\sigma_1} := \beta y$, $t_{4\sigma_1} := \alpha x$. Отже, (4.29) можна записати у вигляді ${}^{\sigma_1}f_{1\tau}(t_{1\sigma_1}, t_{2\sigma_1}, t_{3\sigma_1}) = t_{4\sigma_1}$. Застосовуючи означенння парастрофа, маємо $f_{1\tau}(t_1, t_2, t_3) = t_4$. Але $f_{1\tau}$ є однією із операцій f_1, f_2, f_3, саме тому можемо застосувати співвідношення (4.27): $\theta t_1 \cdot t_2 \cdot t_3^{-1} = t_4$, тобто

$$\theta t_1 \cdot t_2 = t_4 \cdot t_3,$$

де $\theta \in \{\gamma, \delta, \gamma\delta\}$.

Якщо x має появу в θt_1, тоді ми покладемо $x = 0$. В результаті отримаємо одну з рівностей $y = \beta y$ або $0 = y \cdot \beta y$. Перша рівність неможлива, оскільки автоморфізми γ, δ, $\gamma\delta$ нетотожні. Друга тотожність неможлива, оскільки група не є комутативною. Якщо x має появу в θt_1, тоді при $y = 0$ отримаємо ті самі суперечності.

Таким чином, припущення не відповідає дійсності, а отже, рівняння (3.35) і (3.36) не є парастрофно-первинно рівносильними.

Теорема 4.5 доведена. □

Отже, існує точно чотири класи узагальнених квадратичних функційних рівнянь довжини три на оборотних функціях відносно парастрофно-первинної рівносильності, а саме (3.35)–(3.38) є їх представниками, множини розв'язків яких знайдені в теоремах 4.1–4.4.

4.3. Функційні рівняння на універсальних лупах

Тернарна квазігрупа є універсальною лупою тоді і тільки тоді, коли її операція є універсально нейтральною, тобто кожний елемент є нейтральним. Із означення універсально нейтральної операції випливає, що кожна трійка універсально нейтральних операцій є розв'язком кожного з функційних рівнянь (3.35), (3.36), (3.37). Розв'язки рівняння (3.38) наведено в такій теоремі.

Теорема 4.6 (Ф. М. Сохацький [88, с. 154]). *Трійка* (f_1, f_2, f_3) *тернарних універсально нейтральних операцій, визначених на множині* Q *є розв'язком функційного рівняння (3.38):*

$$F_1(F_2(x, y, z), x, u) = F_3(y, z, u)$$

тоді і тільки тоді, якщо $f_1 = f_3$ *та існує бінарна комутативна середня лупа* $(Q; \circ)$ *така, що*

$$\begin{aligned} f_1(x, y, u) &= (x \circ y) \overset{\ell}{\circ} u, && (a) \\ f_2(x, y, z) &= x \overset{r}{\circ} (y \circ z), && (b) \end{aligned} \qquad (4.30)$$

4.4. Квадратичні тотожності довжини три

Функційне рівняння є *тотожністю* в многовиді квазігруп, якщо всі його функційні змінні попарно парастрофні. Наприклад,

$$F({}^{\sigma}F(x_1, x_2, x_3), x_1, x_4) = {}^{\tau}F(x_2, x_3, x_4), \qquad (4.31)$$

де $\sigma, \tau, \in S_4$, є квадратичною тотожністю довжини 3. Ця тотожність буде істинною в квазігрупі $(Q; f)$, якщо рівність

$$f({}^{\sigma}f(x_1, x_2, x_3), x_1, x_4) = {}^{\tau}f(x_2, x_3, x_4) \tag{4.32}$$

є істинною для всіх x_1, x_2, x_3, x_4 із Q. Ця рівність є *тотожністю в квазігрупі* $(Q; f)$.

$$\{1, 2\} \in \Big\{\{2\sigma, 3\sigma\}, \{1\sigma, 4\sigma\}\Big\} \cap \Big\{\{1\tau, 2\tau\}, \{3\tau, 4\tau\}\Big\}. \tag{4.33}$$

Теорема 4.7. *1. Нехай умова* (4.33) *є істинною. Тоді* (4.32) *є тотожністю в тернарній універсальній лупі* $(Q; f)$ *тоді і тільки тоді, коли існує комутативна середня лупа* $(Q; \circ, 0)$ *така, що*

$$f(x, y, z) = (x \circ y) \overset{\ell}{\circ} z; \tag{4.34}$$

2. Нехай умова (4.33) *є хибною. Тоді тотожність* (4.32) *є істинною в тернарній універсальній лупі* $(Q; f)$ *тоді і тільки тоді, коли існує група* $(Q; +, 0)$ *експоненти два така, що*

$$f(x, y, z) = x + y + z. \tag{4.35}$$

Зауважимо, що тотально-симетричні групи є точно групами експоненти два.

Доведення. Істиність тотожності (4.32) в універсальній лупі $(Q; f)$ означає, що трійка $(f, {}^{\sigma}f, {}^{\tau}f)$ є розв'язком функційного рівняння

$$F_1(F_2(x, y, z), x, u) = F_3(y, z, u)$$

Оскільки кожний парастроф універсальної лупи є також універсальною лупою, то згідно теореми 4.6, це рівносильно існуванню бінарної комутативної середньої лупи $(Q; \circ, 0)$ такої, що

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3, \\ {}^{\sigma}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \overset{r}{\circ} (x_2 \circ x_3), \\ {}^{\tau}f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3. \end{aligned}$$

Ці рівності рівносильні рівностям

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)=x_4 &\Leftrightarrow (x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3=x_4, && (a)\\ {}^{\sigma}f(x_1,x_2,x_3)=x_4 &\Leftrightarrow x_1\overset{r}{\circ}(x_2\circ x_3)=x_4, && (b)\\ {}^{\tau}f(x_1,x_2,x_3)=x_4 &\Leftrightarrow (x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3=x_4. && (c) \end{aligned} \tag{4.36}$$

Замінимо x_i на $x_{i\sigma}$ в (4.36,b) та x_i на $x_{i\tau}$ в (4.36,c) для всіх $i=1,2,3,4$, у результаті отримуємо рівносильні рівності до 4.36 відповідно:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)=x_4 &\Leftrightarrow (x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3=x_4,\\ {}^{\sigma}f(x_{1\sigma},x_{2\sigma},x_{3\sigma})=x_{4\sigma} &\Leftrightarrow x_{1\sigma}\overset{r}{\circ}(x_{2\sigma}\circ x_{3\sigma})=x_{4\sigma},\\ {}^{\tau}f(x_{1\tau},x_{2\tau},x_{3\tau})=x_{4\tau} &\Leftrightarrow (x_{1\tau}\circ x_{2\tau})\overset{\ell}{\circ} x_{3\tau}=x_{4\tau}. \end{aligned}$$

Використовуючи означення парастрофів тернарної оборотної операції отримуємо

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)=x_4 &\Leftrightarrow (x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3=x_4, && (a)\\ f(x_1,x_2,x_3)=x_4 &\Leftrightarrow x_{1\sigma}\overset{r}{\circ}(x_{2\sigma}\circ x_{3\sigma})=x_{4\sigma}, && (b)\\ f(x_1,x_2,x_3)=x_4 &\Leftrightarrow (x_{1\tau}\circ x_{2\tau})\overset{\ell}{\circ} x_{3\tau}=x_{4\tau}. && (c) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Застосувавши (4.37,a) до (4.37,b) і (4.37,c):

$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3,\\ &(x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3=x_4 \Leftrightarrow x_{1\sigma}\overset{r}{\circ}(x_{2\sigma}\circ x_{3\sigma})=x_{4\sigma},\\ &(x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3=x_4 \Leftrightarrow (x_{1\tau}\circ x_{2\tau})\overset{\ell}{\circ} x_{3\tau}=x_{4\tau}. \end{aligned}$$

За означенням ℓ- і r-парастрофів бінарної операції, такі співвідношення рівносильні співвідношенням

$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\circ x_2)\overset{\ell}{\circ} x_3, && (a)\\ &x_1\circ x_2=x_3\circ x_4 \Leftrightarrow x_{1\sigma}\circ x_{4\sigma}=x_{2\sigma}\circ x_{3\sigma}, && (b)\\ &x_1\circ x_2=x_3\circ x_4 \Leftrightarrow x_{1\tau}\circ x_{2\tau}=x_{3\tau}\circ x_{4\tau}. && (c) \end{aligned} \tag{4.38}$$

Отже, тотожність (4.32) рівносильна існуванню комутативної середньої лупи $(Q;\circ,0)$ такої, що виконується (4.38). Розглянемо пункти 1 і 2 цієї теореми.

1. Якщо рівність (4.33) істина, то виконується одна із систем рівностей:

$$\begin{aligned} \{1,2\}=\{2\sigma,3\sigma\} \quad &\text{і} \quad \{3,4\}=\{1\sigma,4\sigma\},\\ \{1,2\}=\{1\tau,2\tau\} \quad &\text{і} \quad \{3,4\}=\{3\tau,4\tau\}; \end{aligned}$$

$$\{1,2\} = \{1\sigma, 4\sigma\} \quad \text{і} \quad \{3,4\} = \{2\sigma, 3\sigma\},$$
$$\{1,2\} = \{1\tau, 2\tau\} \quad \text{і} \quad \{3,4\} = \{3\tau, 4\tau\};$$

$$\{1,2\} = \{2\sigma, 3\sigma\} \quad \text{і} \quad \{3,4\} = \{1\sigma, 4\sigma\},$$
$$\{1,2\} = \{3\tau, 4\tau\} \quad \text{і} \quad \{3,4\} = \{1\tau, 2\tau\};$$

$$\{1,2\} = \{1\sigma, 4\sigma\} \quad \text{і} \quad \{3,4\} = \{2\sigma, 3\sigma\},$$
$$\{1,2\} = \{3\tau, 4\tau\} \quad \text{і} \quad \{3,4\} = \{1\tau, 2\tau\};$$

тому істиність (4.38,b) і (4.38,c) рівносильна комутативності операції ($\circ$), а тому тотожність (4.32) рівносильна існуванню комутативної середньої лупи $(Q; \circ, 0)$, тобто пункт 1 доведено.

2. Нехай рівність (4.33) хибна і нехай існує група $(Q; +, 0)$ експоненти два така, що $(\circ) = (+)$ і (4.35) виконується, тоді (4.38) можна записати так:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \Leftrightarrow x_{1\sigma} + x_{4\sigma} = x_{2\sigma} + x_{3\sigma},$$
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \Leftrightarrow x_{1\tau} + x_{2\tau} = x_{3\tau} + x_{4\tau}.$$

Ці співвідношення істині для всіх σ, τ, оскільки група $(Q; +, 0)$ тотально-симетрична. Отже, тотожність (4.32) істина в універсальній лупі $(Q; f)$.

Навпаки, нехай тотожність (4.32) істинна в універсальній лупі $(Q; f)$. Отже, співвідношення (4.38) є істинним для деякої комутативної середньої лупи $(Q; \circ, 0)$. Підставимо $(x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3$ замісць x_4 в правих частинах співвідношень (4.38,b) і (4.38,c). Залежно від τ та σ, отримуємо вісім можливих тотожностей:

$$\big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) \circ x_{4\sigma} = x_{2\sigma} \circ x_{3\sigma}, \qquad x_{1\sigma} \circ \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) = x_{2\sigma} \circ x_{3\sigma},$$
$$x_{1\sigma} \circ x_{4\sigma} = \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) \circ x_{3\sigma}, \qquad x_{1\sigma} \circ x_{4\sigma} = x_{2\sigma} \circ \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big),$$

$$\big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) \circ x_{2\tau} = x_{3\tau} \circ x_{4\tau}, \qquad x_{1\tau} \circ \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) = x_{3\tau} \circ x_{4\tau},$$
$$x_{1\tau} \circ x_{2\tau} = \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) \circ x_{4\tau}, \qquad x_{1\tau} \circ x_{2\tau} = x_{3\tau} \circ \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big).$$

Оскільки (4.33) є хибною, то принаймні одне з них задовольняє умову теореми 1.2. Отже, комутативна середня лупа $(Q;\circ,0)$ ізотопна деякій групі. Згідно з твердженням 1.1, існує група $(Q;\oplus,0)$ експоненти два та підстановка α множини Q така, що $\alpha 0 = 0$ і $x \circ y = \alpha(x) \oplus \alpha(y)$. Отже, $x \overset{\ell}{\circ} y = \alpha^{-1}\big(x \oplus \alpha(y)\big)$ і тому

$$f(x,y,z) = (x \circ y) \overset{\ell}{\circ} z = \alpha^{-1}\big(\alpha(x) \oplus \alpha(y) \oplus \alpha(z)\big) = x + y + z,$$

де $x + y := \alpha^{-1}(\alpha(x) \oplus \alpha(y))$. З станньої рівності випливає, що α є ізоморфізмом між лупою $(Q;+,0)$ та групою $(Q;\oplus,0)$, тому $(Q;+,0)$ є групою експоненти два і виконується (4.35). □

4.5. Підмноговиди визначені квадратичними тотожностями довжини три

В многовиді всіх універсальних луп, який позначимо через $\mathfrak{U}$, розглянемо підмноговиди, які визначені квадратичними тотожностями довжини три. Серед таких многовидів є підмноговид многовида тернарних квазігруп Штейнера.

Теорема 4.8. *В многовиді $\mathfrak{U}$ всіх тернарних універсальних луп, кожна квадратична тотожність довжини три рівносильна точно одній із таких тотожностей:*

$$f(z,x,f(x,y,y)) = f(z,u,u), \tag{4.39}$$

$$f(x,u,f(y,u,z)) = f(x,y,z), \tag{4.40}$$

$$f(f(x,y,z),z,u) = f(y,x,u), \tag{4.41}$$

$$f(x,y,f(y,z,u)) = f(x,u,z), \tag{4.42}$$

$$f(f(x,y,z),u,y) = f(z,u,x). \tag{4.43}$$

Тотожність (4.40) досліджували в [34].

Теорема 4.9. *В многовиді всіх тернарних універсальних луп $\mathfrak{U}$, тотожності* (4.39)-(4.43) *визначають такі підмноговиди:*

1) тотожність (4.39) *визначає многовид* $\mathfrak{U}$*;*

2) тотожність (4.40) *визначає многовид* $\mathfrak{B}$ *булевих мотків, тобто клас всіх тернарних квазігруп* $(Q; f)$ *таких, що* $f(x, y, z) = x + y + z$ *для деякої булевої групи* $(Q; +)$*;*

3) тотожність (4.41) *визначає многовид* $\mathfrak{A}$ *всіх тернарних квазігруп* $(Q; f)$ *таких, що* $f(x, y, z) = (x \circ y) \overset{\ell}{\circ} z$ *для деякої комутативної середньої лупи* $(Q; \circ)$*;*

4) тотожність (4.42) *визначає многовид* ${}^{(13)}\mathfrak{A}$ *всіх тернарних квазігруп* $(Q; f)$ *таких, що* $f(x, y, z) = (z \circ y) \overset{\ell}{\circ} x$ *для деякої комутативної середньої лупи* $(Q; \circ)$*;*

5) тотожність (4.43) *визначає многовид* ${}^{(23)}\mathfrak{A}$ *всіх тернарних квазігруп* $(Q; f)$ *таких, що* $f(x, y, z) = (x \circ z) \overset{\ell}{\circ} y$ *для деякої комутативної середньої лупи* $(Q; \circ)$.

Отримані результати є частковою відповіддю на проблему О. Крапєжа про розв'язки функційного рівняння $F(x, x, y) = y$.

Доведення. Слідуючи загально прийнятим традиціям, чисті функційні рівняння, в яких всі функційні змінні парастрофні між собою, називатимемо тотожностями в класі всіх квазігруп. Згідно теоремі 4.5 кожна тотожність довжини три парастрофно-первинно рівносильна точно одній із таких тотожностей:

$$ {}^{\sigma_1}F(z, x, {}^{\sigma_2}F(x, y, y)) = {}^{\sigma_3}F(z, u, u), \tag{4.44} $$

$$ {}^{\sigma_4}F({}^{\sigma_5}F(x, y, y), z, z) = {}^{\sigma_6}F(x, u, u), \tag{4.45} $$

$$ {}^{\sigma_7}F({}^{\sigma_8}F(x, y, z), u, u) = {}^{\sigma_9}F(x, y, z), \tag{4.46} $$

$$ {}^{\sigma_{10}}F_1({}^{\sigma_{11}}F_1(x, y, z), x, u) = {}^{\sigma_{12}}F_1(y, z, u). \tag{4.47} $$

Оскільки кожний парастроф універсальної лупи є також універсальною лупою, і кожна трійка універсально нейтральних функцій є розв'язком рівнянь (4.44), (4.45), (4.46), то кожна тотожність, яка парастрофно рівносильна деякій тотожності форми (4.44), (4.45), (4.46) є істинною в універсальній лупі. Ось чому такі тотожності рівносильні і кожна з них визначає підмноговид $\mathfrak{U}$ всіх тернарних універсальних луп в $\mathfrak{U}$. Одна з цих тотожностей є (4.39) і тому пункт 1) теореми 4.9 доведено. Залишилось проаналізувати тотожності форми (4.47).

Для зручності перепозначимо змінні: $F := {}^{\sigma_{10}}F_1$. Застосуємо до обох частин σ_{10}^{-1}:

$$
{}^{\sigma_{10}^{-1}}F := {}^{\sigma_{10}^{-1}}({}^{\sigma_{10}}F_1) \overset{(1.12)}{=} {}^{\sigma_{10}^{-1}\sigma_{10}}F_1 = F_1.
$$

Покладемо $\sigma := \sigma_{10}^{-1}\sigma_{11}$, $\tau := \sigma_{10}^{-1}\sigma_{12}$, тоді

$$
{}^{\sigma_{11}}F_1 = {}^{\sigma_{10}^{-1}}({}^{\sigma_{11}}F) \overset{(1.12)}{=} {}^{\sigma_{10}^{-1}\sigma_{11}}F = {}^{\sigma}F;
$$

$$
{}^{\sigma_{12}}F_1 = {}^{\sigma_{10}^{-1}}({}^{\sigma_{12}}F) \overset{(1.12)}{=} {}^{\sigma_{10}^{-1}\sigma_{12}}F = {}^{\tau}F.
$$

Тому рівняння (4.47) запишеться у вигляді

$$
F({}^{\sigma}F(x, y, z), x, u) = {}^{\tau}F(y, z, u). \tag{4.48}
$$

Отже, дане рівняння збігається з (4.32).

Нехай $\mathfrak{A}$ позначає многовид універсальних луп $(Q; f)$, визначених тотожністю (4.48) і нехай (4.33) хибне. Тоді згідно пункту 2 теореми 4.7 існує лише один многовид, а саме многовид всіх булевих мотків. Отже, всі такі тотожності рівносильні і (4.40) є однією з них. Таким чином, пункт 2 теореми 4.9 також доведений.

Нехай (4.33) є істиною. Відповідно до теореми 4.5 ці тотожності парастрофно еквівалентні тотожності (4.35). Пригадаємо, що для парастрофної орбіти та групи парастрофних симетрій $\mathfrak{A}$ співвідношення

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Po}(\mathfrak{A}) := \left\{ {}^{\sigma}\mathfrak{A} \mid \sigma \in S_4 \right\}, \qquad \mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) := \left\{ \sigma \in S_4 \mid {}^{\sigma}\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \right\}, \\
|\mathrm{Po}(\mathfrak{A})| \cdot |\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})| = 24
\end{gathered} \tag{4.49}
$$

є істинними. Щоб визначити всі многовиди, які парастрофні многовиду $\mathfrak{A}$, доведемо таку лему.

Лема 4.2. *Група парастрофних симетрій многовиду $\mathfrak{A}$ є двогранною підгрупою групи S_4, а саме*

$$\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) = D_4 := \big\{\iota, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (1324), (14)(23), (1423)\big\}.$$

D_4 є підгрупою групи парастрофних симетрій $\mathrm{Ps}(f)$ довільної універсальної лупи $(Q; f)$ з $\mathfrak{A}$.

Доведення. Нехай ν — будь-який елемент групи парастрофних симетрій $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$, тобто ${}^{\nu}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. За теоремою 4.7, для довільної комутативної середньої лупи $(Q; \circ)$ ν-парастроф лупи $(Q; f)$, визначений (4.34) належить многовиду $\mathfrak{A}$. Отже, існує комутативна середня лупа $(Q; *)$ така, що

$$ {}^{\nu}f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 * x_2) \overset{\ell}{*} x_3 \tag{4.50}$$

для всіх $x_1, x_2, x_3 \in Q$. Іншими словами,

$$ {}^{\nu}f(x_1, x_2, x_3) = x_4 \Leftrightarrow (x_1 * x_2) \overset{\ell}{*} x_3 = x_4.$$

Замінимо x_i на $x_{i\nu}$ для всіх $i = 1, 2, 3, 4$:

$$ {}^{\nu}f(x_{1\nu}, x_{2\nu}, x_{3\nu}) = x_{4\nu} \Leftrightarrow (x_{1\nu} * x_{2\nu}) \overset{\ell}{*} x_{3\nu} = x_{4\nu}.$$

Використовуючи означення парастрофа тернарних бінарних квазігруп та ℓ-парастрофа бінарної квазігрупи, отримуємо

$$ f(x_1, x_2, x_3) = x_4 \Leftrightarrow x_{1\nu} * x_{2\nu} = x_{3\nu} * x_{4\nu}.$$

Застосовуючи (4.34), маємо

$$ (x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3 = x_4 \Leftrightarrow x_{1\nu} * x_{2\nu} = x_{3\nu} * x_{4\nu}. \tag{4.51}$$

Підставимо $(x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3$ для x_4 в правій частині співвідношення. Оскільки $4 \in \{1\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu\}$, то розглянемо чотири випадки.

Нехай $4 = 1\nu$, тоді отримаємо тотожність

$$ \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) * x_{2\nu} = x_{3\nu} * x_{4\nu}. \tag{4.52}$$

Якщо $\{1, 2\} \neq \{3\nu, 4\nu\}$, тоді за теоремою 1.2 лупа $(Q; \circ)$ ізотопна групі. Це суперечить припущенню. Отже, $\{1, 2\} = \{3\nu, 4\nu\}$ і $2\nu = 3$ і тому для ν

можливі два значення:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1423\end{pmatrix} \qquad \text{та} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}23\end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

В обох випадках тотожність (4.52) рівносильна

$$((x \circ y) \overset{\ell}{\circ} z) * z = x * y, \tag{4.54}$$

тобто

$$(x * y) \overset{\ell}{*} z = (x \circ y) \overset{\ell}{\circ} z,$$

що означає ${}^{\nu}f = f$. За Теоремою 4.7, це справедливо для всіх універсальних луп $(Q; f)$ з $\mathfrak{A}$, тоді бієкції (4.53) належать до $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$ і $\mathrm{Ps}(f)$.

Нехай $2\nu = 4$, тоді (4.51) рівносильна тотожності

$$x_{1\nu} * \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) = x_{3\nu} * x_{4\nu}. \tag{4.55}$$

Теорема 1.2 означає $\{1, 2\} = \{3\nu, 4\nu\}$ і $1\nu = 3$. Звідси, ν має два значення:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1324\end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

В обох випадках тотожність (4.55) еквівалентна тотожності (4.54) і тому перестановки (4.56) належать $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$ і $\mathrm{Ps}(f)$.

Нехай $3\nu = 4$, тоді отримаємо

$$x_{1\nu} * x_{2\nu} = \big((x_1 \circ x_2) \overset{\ell}{\circ} x_3\big) * x_{4\nu}. \tag{4.57}$$

Теорема 1.2 означає рівність $\{1\nu, 2\nu\} = \{1, 2\}$. Отже, є два значення для ν:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}34\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}34\end{pmatrix}.$$

В обох випадках (4.57) означає (4.54). Отже, ці підстановки належать $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$. Якщо $\{4\nu\} = 4$, то підстановки ι та (12) належать $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$.

Оскільки ми розглянули всі можливі випадки, то $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) = D_4$. □

За Лемою 4.2, ${}^{\nu}f = f$ для всіх $\nu \in D_4$, тоді рівність

$$S_4 = D_4 \cup (13)D_4 \cup (23)D_4 \tag{4.58}$$

означає, що достатньо розглянути (4.48) коли $\sigma, \tau \in \{\iota, (13), (23)\}$, тобто слід розглянути 9 тотожностей. Але формула (4.33) істинна тлише у випадку, коли $\sigma = (13)$ і $\tau = \iota$. Тому існує точно один многовид з точністю до парастрофної рівносильності, який визначається квадратичними тотожностями довжини три, що задовольняють умову (4.33) і одна із цих тотожностей є

$$f({}^{(13)}f(x_1, x_2, x_3), x_1, x_4) = {}^{\iota}f(x_2, x_3, x_4).$$

Отримуємо її з (4.62), поклавши $\sigma = (13)$ і $\tau = \iota$. За означенням парастрофії тернарних операцій (1.3.):

$$f(f(x_3, x_2, x_1), x_1, x_4) = f(x_2, x_3, x_4). \tag{4.59}$$

Замінивши ці змінні, отримаємо

$$f(f(x, y, z), z, u) = f(y, x, u). \tag{4.60}$$

Дана формула визначає многовид $\mathfrak{A}$. Отже, пункт 3 доведено.

Оскільки $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) = D_4$, то $\mathrm{Po}(\mathfrak{A})$ складається з $|S_4|/|D_4| = 24/8 = 3$ многовидів. З ріності (4.58) випливає, що

$$\mathrm{Po}(\mathfrak{A}) = \left\{\mathfrak{A},\ {}^{(13)}\mathfrak{A},\ {}^{(23)}\mathfrak{A}\right\}.$$

Щоб знайти тотожності, які визначають многовиди ${}^{(13)}\mathfrak{A}$ і ${}^{(23)}\mathfrak{A}$, згідно теореми(1.1) достатньо замінити f на ${}^{(13)}f$ та f на ${}^{(23)}f$ в (4.59):

$${}^{(13)}f({}^{(13)}f(x_3, x_2, x_1), x_1, x_4) = {}^{(13)}f(x_2, x_3, x_4),$$

$${}^{(23)}f({}^{(23)}f(x_3, x_2, x_1), x_1, x_4) = {}^{(23)}f(x_2, x_3, x_4).$$

За означенням парастрофії тернарних квазігруп (1.3.), ці тотожності рівносильні тотожностям

$$f(x_4, x_1, f(x_1, x_2, x_3)) = f(x_4, x_3, x_2),$$

$$f(f(x_3, x_1, x_2), x_4, x_1) = f(x_2, x_4, x_3).$$

Замінивши змінні, отримуємо

$$f(x, y, f(y, z, u)) = f(x, u, z),$$

$$f(f(x, y, z), u, y) = f(z, u, x).$$

Отже, пункти 4 і 5 теореми 4.8 доведені. А тому теореми 4.8 та 4.9 доведено.

Теорема 4.10. *Кожне тернарне квазігрупове рівняння парастрофно-первинно рівносильне точно одному з рівнянь:*

$$F(x, x, x) = x, \quad (i) \qquad\qquad F(x, y, y) = x. \quad (ii) \tag{4.61}$$

Тотожність (i) не є квадратичною, тому всі квадратичні тотожності належать до класу (ii) і їх можна записати таким чином

$${}^{\sigma}F(x, y, y) = x, \quad \sigma \in S_4.$$

Легко переконатися в справедливості такого наслідку.

Наслідок 4.1. *Кожна тернарна квазігрупова квадратична тотожність довжини один є парастрофно-первинно ріносильна принаймні одній із*

$$F(x, y, y) = x, \qquad F(y, x, y) = x, \qquad F(y, y, x) = x. \tag{4.62}$$

Для функційних рівнянь довжини три доведено таку теорему в [86].

Теорема 4.11. *Кожне тернарне квазігрупове рівняння парастрофно-первинно рівносильне точно одному з рівнянь:*

$$F_1(x, x, x) = F_2(x, x, x), \tag{4.63}$$

$$F_1(x, x, x) = F_2(x, y, y), \tag{4.64}$$

$$F_1(x, x, y) = F_2(x, x, y), \tag{4.65}$$

$$F_1(x, x, x) = F_2(y, y, y), \tag{4.66}$$

$$F_1(x, x, y) = F_2(x, y, y), \tag{4.67}$$

$$F_1(x, x, y) = F_2(y, z, z), \tag{4.68}$$

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z). \tag{4.69}$$

Отже, квадратичні тотожності довжини два належать класу (2.12) або (2.13). Тому таке твердження є істинним

Наслідок 4.2. *Кожна тернарна квазігрупова квадратична тотожність довжини два є парастрофно-первинно рівносильною принаймні одній із*

$$^{\tau}F(x,x,y) = F(y,z,z), \tag{4.70}$$

$$^{\sigma}F(x,y,z) = F(x,y,z), \tag{4.71}$$

де τ, $\sigma \in S_4$.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі вивчаються квадратичні тернарні квазігрупові нетривіальні функційні рівняння і тотожності довжини три. Основні результати розділу:

1) встановлено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує чотири квадратичних тернарних квазігрупових нетривіальних функційних рівнянь довжини три і знайдено їх перелік;

2) знайдено множину всіх розв'язків кожного з наведених рівнянь на довільному носієві;

3) знайдено також множину всіх розв'язків кожного з наведених рівнянь на довільному носієві в класі універсальних луп;

4) описано квадратичні квазігрупові тотожності з точністю до рівносильності в класі універсальних луп;

5) в класі універсальних луп описано квазігрупові многовиди, які визначаються квадратичними тотожносями.

Результати цього розділу опубліковані у [87], [88], [99], [100] і [101].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота має теоретичний характер і присвячена дослідженню тернарних квазігрупових нетривіальних функційних рівнянь малих довжин.

Знайдено описання тернарних квазігрупових нетривіальних функційних рівнянь довжини один та довжини два, побудовано приклади квазігруп, які розрізняють отримані функційні рівняння.

Мінімізовано узагальнені тернарні квазігрупові функційні рівняння довжини три з використанням методу класифікації рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Як результат, встановлено, що кожне узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння довжини три парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному із перерахованих 38 рівнянь, причому подано розподіл цих рівнянь за предметними типами. А саме, рівнянь предметного типу

- (8,0,0,0) існує 1 рівняння;
- (6,2,0,0) існує 4 рівняння;
- (5,3,0,0) існує 5 рівнянь;
- (4,4,0,0) існує 4 рівняння;
- (4,2,2,0) існує 10 рівнянь;
- (3,3,2,0) існує 10 рівнянь;
- (2,2,2,2) існує 4 рівняння.

Для предметного типу $(5, 3, 0, 0)$ описано розв'язки нетривіальних рівнянь, компоненти яких є лінійними відносно однієї й тієї ж довільної комутативної групи.

У роботі вивчаються квадратичні тернарні квазігрупові нетривіальні функційні рівняння і тотожності довжини три. Встановлено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує чотири квадратичних тернарних квазігрупових нетривіальних функційних рівнянь довжини три та виписано їх перелік; знайдено множину всіх розв'язків кожного з наведених рівнянь на довільному носієві в класі тернарних казігруп; знайдено множину всіх розв'язків кожного з наведених рівнянь на довільному носієві в класі універсальних луп; досліджено квадратичні квазігрупові тотожності з точністю до рівносильності в класі універсальних луп; описано квазігрупові многовиди, що визначаються цими квадратичними тотожностями в класі універсальних луп, які визначають п'ять підмноговидів, що розподіленні по трьох пучках, причому один з них є многовидом тернарних квазігруп Штейнера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамян Л. Р. *Тернарные сверхтождества ассоциативности* // Уч. записки ЕГУ, сер. Физика и Математика, 2003. — № 3. — С. 36–44.

2. Aczél J., Belousov V.D., Hosszù M. Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups// Acta math. –Acad. scient. Hung.: 1960. – Vol. XI, N 1 – 2. – P. 127–136.

3. Akivis M. A., Goldberg V. V., *The four-webs and the local differentiable ternary quasigroup that are determined by a quadruple of surfaces of codimension two*// Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. — 1974 — No. 5. — P. 12–24.

4. Алимпич Б.П. Уравнотежени закони на квазигрупама //Математички весник.- 1972.- Т.9(24).- С. 249–255.

5. Alimpić B.P. *A class of balanced laws on quasigroups (I)*// Publ. Inst. Math. (Beograd). — 1976 — No. 1(9). — P. 7-17.

6. Alimpić B.P. *A class of balanced laws on quasigroups (II)*// Publ. Inst. Math. (Beograd). — 1976 — No. 1(9). — P. 19-22.

7. Armanious M.H. *Existence of nilpotent SQS-skeins of class n* // An Combin. — 1990. — No. 29. — P. 97-105.

8. Baer R., Linear Algebra and Projective Geometry, Academic Press, New York 1952.— P. 325.

9. Белоусов В. Д. *Ассоциативные системы квазигрупп* // Успехи мат. наук. — 1958. — Т. 13, вып. 3(81). — С. 243.

10. Белоусов В. Д. *n-Арные квазигруппы* // Кишинев: Штиинца, 1972. — 225 с.

11. Белоусов В. Д. *Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами* // УМН. — 1965. — Т. 20, № 1(121). — С. 75–146.

12. Белоусов В. Д. *Уравнение общей медиальности* // Матем. исслед. Кишинев: Штиинца. — 1976. — Вып. 39. — С. 21–31.

13. Белоусов В. Д. *Уравновешенные тождества в квазигруппах* // Матем. сб. — 1966. — Т. 70(112), № 1. — С. 55–97.

14. Belousov V. D. *Balanced Identities in Algebras of Quasigroups* // Aequationes Math. — 1972. — Vol. 8. — P. 1–73.

15. Belousov V. D. *Some remarks on functional equation of generalized distributivity* // Aequationes Math. — 1968. — Vol. 1, 1/2. — P. 54–65.

16. Белоусов В. Д. Сандик М. Д. *n-арные квазигруппы и лупы* // Сиб. мат. журнал. — 1966. — № 7(1).— С. 31–54.

17. Белявская Г. *Квазигруппы: тождества с подстановками, линейность и ядра* // LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 71 с.

18. Cruse A. *On the finite completion of partial latin cubes* // J. Combinatorial Theory (A). — 1974. — Vol. 17. — P. 112-119.

19. Глухов М. М. *О применениях квазигрупп в криптографии* // Прикладная дискретная математика. — 2008. — № 2. — С. 28–32.

20. Глухов М. М. О методах построения систем ортогональных квазигрупп с использованием групп // Математические вопросы криптографии. — 2011. —Т. 2, №4. — С. 5–24.

21. Гонсалес С., Коусело Е., Марков В. Т., Нечаев А. А. Рекурсивные МДР-коды и рекурсивно дифференцируемые квазигруппы // Дискрет. матем. — 1998. — Т. 10, № 2. — С. 3–29.

22. Гонсалес С., Коусело Е., Марков В., Нечаев А. Параметры рекурсивных МДР-кодов // Дискрет. матем. — 2000. — Т. 12, № 4. — С. 3–24.

23. George Grätzer. Universal Algebra. Springer-Verlag New York. — 1979. — P.583.

24. Denes J. and Keedwell A.D. Some applications of non-associative algebraic systems in cryptology, P.U.M.A. — 2002. — 12, no.2. — P.147-195.

25. D'enes J. and D'enes T. *Non-associative algebraic system in cryptology. Protection against "meet in the middle" attack* // Quasigroups and Related Systems. — 2001. — No. 8. — P. 7–14.

26. Haridas, Deepthi, et al. "Probabilistically generated ternary quasigroup based stream cipher." Progress in Intelligent Computing Techniques: Theory, Practice and Applications. Springer, Singapore. — 2018. — P. 153-160.

27. Dimitrova, V., Mihajloska, H. Classification of ternary quasigroups of order 4 applicable in cryptography // 7 International Conference of Informatics and Information Technology (CIIT). — 2010. — P. 145–148.

28. Dimitrova V. An Application of Ternary Quasigroup String Transformations // ICT Innovations 2010 Web Proceedings.— 2010. — P. 251–259.

29. Dudek W.A. *Ternary quasigroups connected with the affine geometry* // Algebras Groups Geom. — 1999. — Vol. 16. — P. 329–354.

30. Dudek W.A., Trokhimenko V.S. Algebras of multiplace functions. Kremenchug: Christian down —2010. — 385p.

31. Evans, T. Latin cubes orthogonal to their transposes a ternary analogue of stein quasigroups. Aeq. Math. — 1973. — Vol. 9. — P. 296–297.

32. Fryz I.V., Sokhatsky F.M. Block composition algorithm for constructing orthogonal $n-ary$ operations // Discrete Math.— 2017. — Vol.340, Iss. 8. — P.1957-1966.

33. Гальмак А.М. n-Арные группы. Часть I. – Гомель,2003. – 196 с.

34. Guelzow Andreas J.*Semiboolean SQS-skeins, Journal of Algebraic Combinatorics.* — 1993. — Vol. 2— P. 147-153.

35. Ganter B., Werner H. *Co-Ordinatizing Steiner Systems.* Ann. Discrete Math. — 1980. — Vol. 7. — P. 3–24.

36. Grzymala-Busse J. W. Automorphisms of polyadic automata. Journal of the Association for Computing Machinery, 16:208 219, 1969.

37. Гварамия А.А. Квазимногообразия автоматов. Связи с квазигруппами.- Сиб. мат. жур. — 1985, том XXVI,No3. — с.11-30.

38. Gupta H., On permutation cubes and Latin cubes, Indian J. Pure Appl. Math. — 1974, no. 11. —- P. 1003–1021.

39. Jia X. W., Qin Z. P. The number of Latin cubes and their isotopy classes // J. Huazhong Univ. Sci. Technol. – 1999. – V. 27, N. 11. – P. 104–106.

40. Lindner C. itA finite partial idempotent latin cube can be embedded in a finite idempotent latin cube// — J. Combinatorial Theory (A). 21 — 1976 — Vol. 7. — P. 104-109.

41. Lindner C., Rosa A., *Steiner quadruple systems—a survey.* Discrete Math. 1978, **22**, 147–181.

42. Lohmus J., Real E. and Sorgsepp L. About nonassocoativity in mathematics and physics. — Acta Appl. math. — 1998, vol.50. — P. 3-31

43. Heden O., Krotov D. S. On the structure of non-full-rank perfect q-ary codes // Adv. Math. Commun. – 2011. – V. 5, N 2. – P. 149–156.

44. Ахназарова С.А., Карафов В.В. Статистические методы планирования и обработки експериментов.-М: МХТИ. 1972r-Verlag US, 2009. — 810 p.

45. Kasner. R. An extension of the group concepts. Bulletin of the American Mathematical Society. — 1904.— 291 p.

46. Kerner R. Ternary algebraic structures and their applications in physics, preprint Univ. P. M.Curie, Paris, 2000. — 15 p.

47. Certaine J. *The ternary operation of a group* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — P. 869-877.

48. Юрій Р. Ф. *Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях*: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 — Вінниця: Вінницький держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, 2006. — 133 с.

49. Коваль Р. Ф. *Класифікація квадратичних функційних рівнянь малої довжини на квазігрупах* // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 111–127.

50. Крайнічук Г. В., Тарасевич А. В. Про тернарні квазігрупові функційні рівняння найменшої довжини // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання — 2017», 23–25 травня 2017 р.— Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. — URL: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/theses (дата звернення: 25.12.2020).

51. Крайнічук Г. В. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини чотири* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2018. — № 1/2. — С. 21–51.

52. Крайнічук Г. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей довжини три* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2017. — № 1/2. — С. 37–66.

53. Крайнічук Г. В. *Класифікація квазігрупових функційних рівнянь типу* $(3;3;0)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1/2. — С. 33–41.

54. Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В. Про класифікацію квазігрупових функційних рівнянь від двох функційних змінних// Наук. конф. професорсько-викладацького складу, наук. працівників і здобувачів наук. ступеня за підсумками наук.-дослід. роботи за період 2015-2016 рр. (Вінниця, 15-18 травня, 2017 р.): матеріали у 2-х томах. – Том 1. – Вінниця, Донецький національний ун-т імені Василя Стуса, 2017. – С. 194–195.

55. Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В. Про класифікацію функційних рівнянь на тримісних оборотних функціях. // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського. 7-10 червня, 2017 р., Київ. Тези доповідей. – К: Інститут математики НАН України, 2017 – С.18.

56. Krapež A. Generalized quadratic functional equations on ternary quasigroups. *AAA 100 - Arbeitstagung Allgemeine Algebra.* Krakow, February 7, 2021.pp. 1–28.

57. Krapež A. *Generalized balanced functional equations on n-ary groupoids* // Proceedings of the symposium n-ary structures, Skopje. — 1982. — P. 13–16.

58. Krapež A. *Generalized quadratic quasigroup equations with three variables* // Quasigroups Related Systems. — 2009. — Vol. 17. — P. 253–270.

59. Krapež A. *Strictly Quadratic Functional Equations on Quasigroups I* // Publ. Inst. Math. — 1981. — Vol. 29, № 43. —P. 138.

60. Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V. *Parastrophically uncancellable quasigroup equations* // Aequationes Math. — 2010. — Vol. 79. — P. 261–280.

61. Кузнецов А. В. *О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики* Тр.МИАН СССР. — 1958, том 51. — С.186–225.

62. Kochol M., Relatively narrow Latin parallelepipeds that cannot be extended to a Latin cube, Ars Combin. —- 1995.— Vol. 40 (1995),— P. 247–260.

63. Литвинчук І. В.*Об одном свойстве представлений диедральной группы порядка 8 над полем характеристики 2* // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія : Математика і інформатика. - 2016. - Вип. 2. - С. 55-58. 9–163.

64. Mendelsohn N. S. *A natural generalization of Steiner triple systems* // Computers in Number Theory. Academic Press, New York. — 1971.— P. 323–338.

65. Мальцев А.И. *Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп* // Математический сборник — 1966.— Вып. 69, № 1. — С. 3-12.

66. Movsisyan Yu. M. *Hyperidentities and Related Concepts, I* Armenian Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 9, no 2. — P. 146–222.

67. Nambu.Y. Generalized Hamiltonian mechanics. Physical Review Journals, D7:2405–2412, 1973.

68. Niebrzydowski, Maciej. Ternary quasigroups in knot theory// arXiv: Geometric Topology – 2017: n. pag.

69. Павлов Д.Г. Симметрии и геометрические инварианты/ Д.Г. Павлов / Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.– Москва – 2 (6), Vol 3, 2006, с.21–32.

70. Павлов Д.Г. Обобщение аксиом скалярного произведения/ Д.Г. Павлов / Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.– Москва – 1, 2004, с.5–19.

71. Phillips J. D., Pushkashu D. I., Shcherbacov A. V., Shcherbacov V. A. *On Birkhoff's quasigroup axioms* // J. Algebra. — 2016. — Vol. 457. — P. 7–17.

72. Plugfelder H. O. *Quasigroups and Loops: Introduction* // Sigma series in PureMath., Heldermann Verlag, Berlin, 1990. — Vol. 7. — 147 p.

73. Polonijo M. *Abelian totally symetric n-quasigroups*// Proceedings of the symposium "n-ary structures", Skopje. – 1982. No. 185– P. 193.

74. Polonijo M. *On affine Steiner ternary algebras*// Publ. Inst. Math. (Beograd). – 1982 – No. 31(45). – P. 177-182.

75. Prüfer H. *Theorie der Abelschen Gruppen*// Math. Z. —1924 — P. 166-187.

76. Phelps K. T. A general product construction for error correcting codes // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods.– 1984. – V. 5, N2. – P. 224–228.

77. Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы.Силовская теория n-ных групп. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.

78. Русаков С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 182 с.

79. Sabinin L.V. Smooth quasigroups and loops, Mathematics and its Applications, 492, Dordrecht, KluwerAcademic Publishers, 1999.

80. Sade A. *Entropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroupes* // Ann. Soc. Sci. Brux., Sér. I. — 1959. — Vol. 73. — P. 302–309.

81. Сохацький Ф. М. Асоціати та розклади багатомісних операцій //Дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.06. — Вінниц. держ. пед. ун-т ім.

Михайла Коцюбинського, НАН України, Ін-т математики. — К.,2006. — 334 с.

82. Сохацький Ф. М. *Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах* // Укр. мат. журн. — 2004. — Т.56. — № 9. – С. 1259–1266.

83. Сохацький Ф. М. *Про ізотопи груп I* // Укр. мат. журн. — 1995. — Т 47, № 10. — С. 1387–1389.

84. Сохацкий Ф.Н. Многоместные разделимые квазигруппы со свойсвом обратимости// Матем.исслед. – 1990.- Вып.113.- С.89-99.

85. Sokhatsky F. M. *Parastrophic symmetry in quasigroup theory* // Visnyk Donetsk national university, Ser. A: natural sciences. — 2016. — No. 1–2. — P. 70–83.

86. Sokhatsky F., Krainichuk H., Tarasevych A. *A classification of generalized functional equations on ternary quasigroups* // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2017. – No. 1-2. — P. 97–107.

87. Sokhatsky F., Tarasevych A. *Classification of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of the length three* // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11 (1). — P. 179–192.

88. Sokhatsky F. M., Tarasevych A. V. *On ternary quasigroup quadratic identities of the small length* // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2020. — Вип. 18. — С. 150–161.

89. Sokhatsky Fedir M. *On pseudoisomorphy and distributivity of quasigroups* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2016. — No. 2(81). — P. 125–142.

90. Сохацкий Ф.Н. О разложении операций с помощью бесповторной суперпозиции. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук.– Кишинев// Штиинца. — 1986— 121 с.

91. Сосинский Л. М. О представлении функций бесповторными суперпозициями в трехзначной логике // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1964. Вып. 12. С. 57-68.

92. Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп. – Харьков-Киев:ДНТВУ, 1937. – 176 с.

93. StojakovićZ. *Single identities for Mendelsohn and Steiner 3-quasigroups* // Bull. Austral. Math. Soc. 1996. — Vol.53(3). — P. 419–424.

94. Stein Sherman K.*On the foundations of quasigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 85. — P. 228–256.

95. Табаров А. Х. *Ядра, линейность и уравновешенные тождества в квазигруппах* // Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Кишинёв, 1992. — 92 с.

96. Tarasevych A. *On parastrophically primary non-equivalence of generalized functional equations of type (5; 3; 0; 0)* // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2019. — No. 1-2.— P. 97–107.

97. Тарасевич А.В., Крайнічук Г.В. *Про класифікацію узагальнених функційних рівнянь довжини три на тернарних квазігрупах* // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. — 2018. — № 1-2. — С. 83–97.

98. Tarasevych Alla V., Krainichuk Halyna V. On classification of ternary quasigroup functional equations in three functional variables. // International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, 19-21 April 2018, Balti: Communications. – Balti, 2018. – P. 91-92.

99. Tarasevych A., Sokhatsky F. Classification of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of length three //The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th an-

niversary of V. Bunyakovsky. July 02–06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2019. – P. 112.

100. Tarasevych A. General solutions of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of length three //The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02–06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2019. – P. 111.

101. Tarasevych A. On generalized ternary quasigroup functional equations of the type $(5;3;0;0)$// International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 14-17, 2020. Abstracts. – Kyiv: Taras Shevchenko National University, 2020. – P. 78.

102. Taylor M.A. *Belousov equations on ternary quasigroups* //Aequationes Math. – 1994 – Vol. 48– P. 35–54.

103. Thurston H.A. Some properties of partly-associative operations. Proc. Amer. Math. Soc. 5, (1954). 487–497.

104. Тужилин М. Э. *Латинские квадраты и их применение в криптографии* // Прикладная дискретная математика. — 2012. — № 3(17). — С. 47–52.

105. Ušan Janez. n-Groups in the light of the neutraloperations // Mathematica Moravica. – 2003. – Special Vol. – 162 p.

106. L Vainerman and R Kerner. On special classes of n-algebras. Journal of Mathematical Physics, 1996.

107. Shcherbacov V. A. *Elements of Quasigroup Theory and Applications* // London: Chapman and Hall/CRC. Chapman and Hall/CRC. — 2017. — P. 576.

108. Shcherbacov V. A. Quasigroups in cryptology // Comput. Sci. J. Mold.– 2009.– V. 17, N 2.– P. 193–228.

ДОДАТКИ

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sokhatsky F., Krainichuk H., Tarasevych A. A classification of generalized functional equations on ternary quasigroups // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2017. – No. 1-2. — P. 97–107.

2. Тарасевич А.В., Крайнічук Г.В. Про класифікацію узагальнених функційних рівнянь довжини три на тернарних квазігрупах // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. — 2018. — № 1-2. — С. 83–97.

3. Tarasevych A. On parastrophically primary non-equivalence of generalized functional equations of type (5; 3; 0; 0) // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2019. — No. 1-2.— P. 97–107.

4. Sokhatsky F., Tarasevych A. Classification of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of the length three // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11 (1). — P. 179–192.

5. Sokhatsky F. M., Tarasevych A. V. On ternary quasigroup quadratic identities of the small length // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2020. — Вип. 18. — С 150–161.

6. Крайнічук Г. В., Тарасевич А. В. Про тернарні квазігрупові функційні рівняння найменшої довжини // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання — 2017», 23–25 травня 2017 р.— Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. — URL: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/theses (дата звернення:25.12.2020).

7. Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В. Про класифікацію квазігрупових функційних рівнянь від двох функ-

ційних змінних // Збірник наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса за 2015-2016 рр, 25 травня 2017 р., Вінниця.

8. Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В. Про класифікацію функційних рівнянь на тримісних оборотних функціях. // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського. 7-10 червня, 2017 р., Київ. Тези доповідей. – К: Інститут математики НАН України, 2017.

9. Tarasevych Alla V., Krainichuk Halyna V. On classification of ternary quasigroup functional equations in three functional variables. // International conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov, April 19-21, 2018, Beltsi: Communications / Rep. of Moldova "Alecu Russo" Beltsi State Univ. 2018. P. 91-92.

10. Tarasevych A., Sokhatsky F. Classification of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of length three // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, July 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. P. 112-113.

11. Tarasevych A. General solutions of generalized ternary quadratic quasigroup functional equations of length three // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, July 02-06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. P. 111-112.

12. Tarasevych A. On generalized ternary quasigroup functional equations of the type $(5;3;0;0)$// International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 14-17, 2020, Taras

Shevchenko National University of Kyiv. P. 78.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації здобувачка доповідала на таких конференціях та семінарах:

1. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання — 2017» (м. Львів, Україна, 23–25 травня 2017 р.).

2. Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100–річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського.(м. Київ, Україна, 7–10 червня 2017 р.).

3. Міжнародна конференція з математики, інформатики та інформаційних технологій, присвячена відомому вченому Валентину Білоусову (м. Бєльці, Республіка Молдова, 19-21 квітня 2018 р.).

4. XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215–річчю В. Буняковського (м. Вінниця, Україна, 02–06 липня 2019 р.).

5. Міжнародна математична конференція, присвячена 60–річчю кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, Україна, 14–17 липня 2020 р.).

6. Міжкафедральний науковий семінар факультету програмування та комп'ютерних і телекомунікаційних систем Хмельницького національного університету Міністерства освіти і науки України (м. Хмельницький, 2021 р., керівник — доктор фізико-математичних наук, проф. Бедратюка Л. П.).

7. Міжкафедральний науковий семінар кафедр алгебри та геометрії, математичного і функціонального аналізу, диференціальних рівнянь і прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» (м. Івано-Франківськ, 2021 р., керівник — доктор фізико-математичних наук, проф. Загороднюк А. В.).