МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”

**Микицей Оксана Ярославівна**

 УДК 512.568.2

**ГРАТКОЗНАЧНІ ПРЕДИКАТИ НА НЕПЕРЕРВНИХ
НАПІВГРАТКАХ**

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
 кандидата фізико-математичних наук

Івано–Франківськ – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у ДВНЗ ``Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника'' Міністерства освіти і науки України

**Науковий керівник:**

доктор фізико-математичних наук, доцент

**Никифорчин Олег Ростиславаович,**

ДВНЗ ``Прикарпатський національний університет

імені Василя Стефаника'',

завідувач кафедри алгебри та геометрії.

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
**Любашенко Володимир Васильович,**

Інститут математики НАН України,

провідний науковий співробітник лабораторії
топології відділу алгебри і топології;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
 **Гутік Олег Володимирович,**

Львівський національний університет
 імені Івана Франка,

 доцент кафедри геометрії і топології

Захист відбудеться 13 травня 2021р. o на засіданні спеціалізованої вченої ради К 20.051.09 у ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" за адресою: 76000, м Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57, ауд. 318.

З дисертацією можна ознайомитися у бiблiотецi ДВНЗ ``Прикарпатський нацiональний унiверситет iменi Василя Стефаника'' за адресою: 76000, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57.

Автореферат розісланий 9 травня 2021р.

|  |  |
| --- | --- |
| Вчений секретарспеціалізованої вченої ради | Р. І. Дмитришин |

**ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ**

**Актуальність теми.** Дисертаційна робота присвячена об'єктам, які у різних галузях математикивідомі під різними назвами, інтерпретовані у різний спосіб ідосліджувані з різних точок зору.

Один з шляхів ``дістатись'' до них починається від регулярнихадитивних мір. Якщо відмовитись від вимоги адитивності, залишившиінші властивості, ми отримаємо дійснозначні функції, означені на сім'ях підмножин фіксованих множин, переважно топологічнихпросторів [[1]](#footnote-1). Шоке [[2]](#footnote-2) запровадив їх під назвою ємностей, оскільки початково їхдослідження стимулювалось потребами теорії потенціалу, Деннеберг [[3]](#footnote-3) та Сугено [[4]](#footnote-4) пропонували відповідно терміни ``неадитивні міри'' та ``нечіткіміри''. Неадитивні міривиступають ``замінниками'' адитивних, у першу чергу ймовірніснихмір, у ситуаціях, коли точний опис умов та закономірностейексперименту неможливий, тобто має місце невизначеність, неповнотаінформації, і ``справжні'' ймовірності подійнедоступні[[5]](#footnote-5). Інша причина полягає утому, що, навіть в умовах повної інформації і можливості виразитиможливі результати чисельно, реальні гравці чи учасники економічнихвідносин приймають рішення не на основі математичного сподіваннярезультату, оскільки по-різному сприймають ризик і непевність.Виявляється, що при досить необтяжливих припущеннях переваги можнамоделювати, замінивши інтеграл за адитивною мірою (ймовірністю)інтегралом за неадитивною функцією множин [[6]](#footnote-6).Отже, неадитивна міра вживається як суб'єктивна ймовірність, томучасто називається вірогідністю(plausibility) [[7]](#footnote-7).Не завжди неповна інформація виражається підмножиною фіксованоїмножини. Розглянемо приклад з [[8]](#footnote-8). Дляскінченної множини станів субімовірнісний розподіл гарантує, що для кожного стану йогоймовірність не менша за . Тоді ймовірність того, щореалізується стан з , не менша за , звідки .

Субімовірнісний розподіл надає точнішу інформацію, ніж (позначаємо ), якщо для всіх . Найменша інформація **0**, гарантовано правильна, відповідає функції і стверджує, що ймовірність кожного стану не менша за 0. Тоді множина всіх субімовірнісних розподілів на з поточковим порівнянням є нижньою напівграткою з найменшим, але без найбільшого елемента. Нехай відома реальна ймовірність кожного стану, тоді функція

тим менша, чим більше помиляється припущення у оцінці справжньої ймовірності подій. Оскільки , можемо вважати функцією вірогідності, яка, очевидно, є антитонною.

Так поступово ми приходимо до окреслення об'єктів нашого дослідження – антитонних функцій на нижніх напівгратках зі значеннями у чи іншій гратці, переважно цілком дистрибутивній, які природно назвати *ємностями на напівгратках*.

Інший підхід і відповідно інший рівноцінний термін для ємностей нанапівгратках беруть початок з денотаційної семантики мовпрограмування, а, точніше, з піонерської праці Едсґера Дійкстри [[9]](#footnote-9). Він зауважив, що зміст кожної програмивизначається тим, як істинність припущень (предикатів) про вхіднідані впливає на істинність припущень (предикатів) про результат їїроботи. Всі можливі (ймовірно, неповні) ``порції інформації'' продані чи стан системи у деякий момент утворюють область обчислення(domain of computation) [[10]](#footnote-10). На цій множині єприродний частковий порядок, про який мова вже була вище. Вінвідбиває ієрархію інформації чи знання: що більше інформації несеелемент (що більш обмежуючим/специфічним він є), то більшим ми йоговважаємо. У 10 також обґрунтовано, чомуприродно вимагати, щоб область обчислення була неперервноюнапіграткою у сенсі теорії областей, яку створив Дана Скотт,див.[[11]](#footnote-11) . Відповідно, функцію, яка кожній ``порціїінформації'' зіставляє її ``ступінь правдивості'', ми, слідуючи [[12]](#footnote-12), називаємо монотонним предикатом наобласті обчислення. Це і є інший термін для ємності на напівгратці,якому надано перевагу і який ввійшов у назву дисертаційноїроботи.

У згаданій роботі Дійкстри предикати є бінарними, тобто зізначеннями у , часто розглядають також нечіткі предикати,що діють у У дисертаційній роботі поставлено за мету вивчити монотонніпредикати на неперервних напівгратках зі значеннями у цілкомдистрибутивних гратках і показати, що гратки не просто єприродними, а неминуче виникають у цьому контексті. Граткозначнатеорія нечітких множин є розвиненою і з практичного, і зформально-концептуального [[13]](#footnote-13),граткозначна логіка теж стала класичною [[14]](#footnote-14), однак граткозначні предикати [[15]](#footnote-15)є вивченими недостатньо.

Оскільки по суті йдеться про ті ж об'єкти, але досліджувані урамках досить віддалених теорій, тема є актуальною і тому, щовстановлює зв'язки між ними, а також з ідемпотентною лінійноюалгеброю [[16]](#footnote-16) [[17]](#footnote-17) [[18]](#footnote-18).

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами**.Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі алгебри та геометріїПрикарпатського національного університету імені Василя Стефаника врамках плану наукових досліджень за проектом Державного фондуфундаментальних дослiджень №25.1/099 ``Узагальнення ймовiрнiснихмiр, їх категорнi i фрактальнi властивостi, наближення iзастосування''. Результатидисертації також частково використані при виконанні завданьдержбюджетної теми ``Проблеми нелінійного аналізу щодо продовженьвідображень, які належать до різних функціональних класів натопологічних і топологічних векторних просторах'' (номердержреєстрацiї 0118U000097).

**Мета і завдання дослідження.**

*Метою* дисертацiйної роботи є дослідження алгебраїчних, топологічних такатегорних властивостей частково впорядкованих множин монотоннихпредикатів на неперервних напівгратках, відображень і відношень міжцими множинами, та можливостей їх застосування у проблемахприйняття рішень в умовах неповної інформації.

Досягнення поставленої мети пов'язане із розв'язанням наступних *завдань*:

* вивчення ідемпотентних напівмодулів монотонних предикатів зі значеннями у цілком дистрибутивних кванталях;
* формалізація ідеї сумісності порцій неповної інформації у вигляді поняття сумісності між неперервними напівгратками та дослідження будови сумісностей з додатковими властивостями і утворених ними класів;
* узагальнення на неперервні напівгратки поняття чіткого та -нечіткого неоднозначного зображення між компактами, дослідження категорій, складених такими неоднозначними зображеннями;
* з'ясування зв'язку між неоднозначними зображеннями та ідемпотентними узагальненнями векторних топологічних просторів і їх лінійних та афінних відображень;
* дослідження застосовності граткозначних, зокрема, дійснозначних монотонних предикатів на напівгратках у моделюванні ігор з неповною інформацією.

*Об'єктом дослідження* є неперервні за Скоттом відображення з неперервних напівграток з нулями у цілком дистрибутивні гратки.

*Предметом дослідження* є властивості напівграток, граток та ідемпотентних напівмодулів, складених монотонними предикатами, а також відображень та відношень між цими алгебраїчними об'єктами.

**Методи дослідження**. У процесі виконання дисертаційної роботи використані методи теорії неперервних областей, ідемпотентної математики та теорії категорій.

**Наукова новизна одержаних результатів**. Основнi науковi результати, що виносяться на захист, є новими. У дисертації вперше:

 доведено, що ідемпотентні напівмодулі всіх *L*-значних монотонних предикатів чи нормованих *L-*значних монотонних предикатів на областях різних класів є вільними об'єктами для відповідних забуваючих функторів;

 введено поняття сумісності між неперервними напівгратками і доведено достатні умови того, що всі сумісності з певними властивостями між фіксованою парою напівграток утворюють цілком дистрибутивну гратку, неперервну гратку, двоїсто неперервну гратку чи неперервну напівгратку з нулем;

 описано будову всіх відокремлюючих сильних сумісностей;

 побудовано два симетричні тензорні добутки монотонних предикатів зі значенням у цілком дистрибутивній кванталі *L*, які узагальнюють тензорні добутки адитивних мір, і запропоновано їх інтерпретацію;

описано дію взяття спряженого до граткозначного предиката, і доведено, що вона є звуженням контраваріантного зв'язку Галуа, визначеного сумісностями між сумісностями;

 запроваджено чіткі та *L*-значні неоднозначні зображення, виділено їх підкласи, які утворюють категорії, самодвоїсті щодо контраваріантного функтора взяття псевдооберненого неоднозначного зображення;

 доведено, що ці категорії є повними підкатегоріями категорій неперервних ідемпотентних *L*-напівмодулів, а псевдообернені зображення відповідають ермітово спряженим до ідемпотентно лінійних операторів;

введено грубі ігри двох гравців у розширеній формі, задані через монотонні предикати та неоднозначні зображення, досліджено предикати виплат та їх антитонні трансформери, і доведено апроксимативну теорему про мінімакс.

**Практичне значення одержаних результатiв.** Результати дисертацiї мають теоретичний характер. Їх можнавикористати у денотаційній семантиці мов програмування та теорії прийняттярішень в умовах невизначеності.

**Особистий внесок здобувача**. Основнi результати, що виносяться на захист, отриманi автором самостiйно. Зi статтей, опублiкованих у спiвавторствi, до дисертацiї включенi лише тi результати, що належать автору. У статті [8] співавтору належить аналіз поняття неадитивної міри, означеної на експоненті компакта, та його зв'язку з поняттям монотонного предиката; у спільних працях [4, 10, 11, 12, 13] спiвавтору належить постановка задач, обговорення результатiв та загальне керiвництво роботою.

**Апробація результатів дисертації.** Основнi результати дисертацiї апробовано на таких наукових конференцiях та семінарах:

 - VІІ-ій літній школі ``Алгебра, топологія і аналіз'' (смт. Верховина, Івано-Франківська обл., липень 5 – 16, 2010);

 - VІIІ-ій літній школі ``Алгебра, топологія, аналіз та застосування '' (м. Херсон – смт. Лазурне, липень 5 – 15, 2011);

 - міжнародній науковій конференції ``International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach'' (Lviv, September 17 – 21, 2012);

 - міжнародній науковій конференції ``9-th International Algebraic Conference in Ukraine'' (Lviv, July 8 – 13, 2013);

 - ІХ-ій літній школі ``Алгебра, топологія і аналіз '' (с.Поляниця, Івано-Фран-ківська обл., липень 7 – 18, 2014);

 - міжнародній науковій конференції ``International Conference of Young Mathematicians'' (Kyiv, June 3 – 6, 2015);

 - мiжнародній науковій конференцiї ``Infinite Dimensional Analysis and Topo-logy. International Conference dedicated to the 70th anniversary of Professor Oleh Lopushansky'' (Ivano-Frankivsk, October 16 – 20, 2019).

 - звітних науково-практичних конференціях ДВНЗ ``Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника'';

 - наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2010 – 2016, 2019 – 2020).

**Публiкацiї**. Основнi результати дисертацiйної роботи опублiковано в 13 наукових працях: 6 статтях, з яких 3 [8, 12, 13] включені до наукометричних баз Scopus та Web of Science Core Collection (серед них 2 статті [12, 13] – у періодичних закордонних виданнях, віднесених вiдповідно до першого квартиля (Q1) та другого квартиля (Q2) згідно класифiкацiї SCImago Journal Rank), ([10, 11]) – у фахових виданнях iз перелiку, затвердженого МОН України, та 7 тезах конференцiй рiзного рiвня, з яких 4 [3, 5, 6, 9]) – тези міжнародних конференцій.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертацiя складається з анотацiї, вступу, п'яти роздiлiв,висновкiв, списку використаних джерел, який налiчує 74найменування, та двох додатків. Обсяг основного тексту дисертацiї **–** 113 сторiнок, обсяг списку використаних джерел – 7 сторiнок,обсяг додатків – 3 сторінки.

**ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, встановлено зв'язок роботи з науковими темами. Сформульовано мету та завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів. Подано список публікацій та інформацію про апробації результатів дисертаційної роботи.

У **першому розділі** наведено необхідні відомості з теорії неперервних областей.

Зафіксуємо частковий порядок на множині . *Топологія Скотта* складається з усіх , для яких для всіх напрямлених вгору відносно множин з найменшою верхньою межею

Відображення між напрямлено повними частково упорядкованими множинами та є *неперервним за Скоттом*, якщо і тільки якщо воно зберігає супремуми напрямлених вгору множин [[19]](#footnote-19).

*Нижньою топологією* на частково упорядкованій множині є найменша топологія, у якій усі множини вигляду замкнені. Найменша топологія, яка містить та називається *топологією Лоусона* на та позначається

Для частково упорядкованої множини кажемо, що елемент *апроксимує знизу* елемент , і пишемо , якщо і тільки якщо для всіх напрямлених вгору підмножин , для яких існує з того, що випливає існування елемента , такого, що .

Частково упорядкована множина називається *неперервною*, якщо кожен її елемент є найменшою верхньою гранню напрямленої вгору множини усіх таких , що . Напрямлено повна неперервна частково впорядкована множина називається *областю*. *Неперервною напівграткою* (*неперервною граткою*) є область, що має всі попарні інфімуми (попарні інфімуми і супремуми).

У **другому розділі** обґрунтовано поширення поняття монотонного предиката на функції зі значеннями у цілком дистрибутивних гратках. У підрозділі 2.1 наведено означення -нечітких монотонних предикатів і розглянуто їх практичний зміст.

Множину всіх неперервних за Скоттом відображень з неперервної напівгратки в компактну гаусдорфову гратку Лоусона запропоновано позначити . Елементи [[20]](#footnote-20) названо *L-нечіткими монотонними предикатами* на . Тут і надалі чи позначає частково впорядковану множину , але з протилежним порядком; функції зі значеннями у частково впорядкованих множинах порівнюємо поточково.

Запропоновано для -нечітких монотонних предикатів на неперервній напівгратці *S* вживати рівносильний термін *L-значна ємність на напівгратці S*, і використовувати надалі позначення для множини всіх -ємностей і для її підмножини, що складається з нормованих предикатів.

Також отримано

**Твердження 2.1.1.** *Частково впорядковані множини та є цілком**дистрибутивними гратками, тому є компактними гаусдорфовими гратками**Лоусона з відповідними топологіями Лоусона.*

У підрозділі 2.2 означено ряд категорій, і доведено, що простори монотонних предикатів на неперервних напівгратках є вільними ідемпотентними напівмодулями над ними. Нижче – цілком дистрибутивна кванталь. Розглядаємо категорії та , котрі складаються з усіх повних неперервних -напівмодулів та їх неперервних за Скоттом відповідно лінійних та афінних відображень, та їх повні підкатегорії та з об'єктами – цілком дистрибутивними -напівмодулями.

**Теорема 2.1.** *Для кожного неперервного за Скоттом відображення з області у повний неперервний -напівмодуль існує єдине продовження до морфізму у .*

**Теорема 2.2.** *Для кожного неперервного за Скоттом відображення з області з нижнім елементом у повний неперервний -напівмодуль існує єдине продовження до морфізму в . Це продовження є лінійним, тобто морфізмом у категорії , якщо і тільки якщо зберігає нульовий елемент.*

Категорія, з якої обирається , як і категорія, до якоїналежатиме чи , можуть бути обрані порізному, оскільки і є цілкомдистрибутивними гратками, а, ``забуваючи'' множення на них,отримуємо не просто області, а також неперервні і навіть повнінеперервні напівгратки. Тому наступні твердження отримано якнаслідки двох останніх теорем (, і позначають відповідно категорії областей, неперервних напівграток іцілком дистрибутивних граток з неперервними за Скоттомвідображеннями як морфізмами, ``'' додатково вимагаєнаявності найменших елементів, а ``0'' – їх збереження):

**Твердження 2.2.2**. *Для об'єкта категорії (або , або ) повний неперервний -напівмодуль є вільним об'єктом над в (або в ).*

**Твердження 2.2.3.** *Для об'єкта категорії (або , або ) повний наперервний -напівмодуль є вільним об'єктом над в (або в ).*

**Твердження 2.2.4.** *Для об'єкта категорії (або , або ) повний неперервний -напівмодуль є вільним об'єктом над в (або в ).*

У **третьому розділі** запроваджено поняття сумісності між неперервними напівратками і досліджено зв'язок із спряженістю. У підрозділі 3.1 дано означення сумісності

**Означення 3.1.1**. *Нехай маємо неперервні напівгратки з нульовими елементами відповідно. Відображення назвемо сумісністю між і , якщо*

*(1) зберігає нулі по обох змінних, тобто для всіх , ;*

*(2) неперервне за Скоттом.*

Множину усіх сумісностей між і позначимо .

Якщо ж додатково виконується

(3) відокремлює елементи і , тобто,

(3a) для будь-яких з того, що для всіх , випливає ;

(3b) для будь-яких з того, що для всіх , випливає , то називаємо *P відокремлюючою сумісністю*.

У множині розглянуто різні підкласи і досліджено їх зв'язки з широким колом об'єктів (монотонними предикатами, зв'язками Галуа, цілком дистрибутивними гратками). Зокрема, для цілком дистрибутивної гратки підклас сумісностей, які зберігають попарні супремуми по другому аргументу, можна ототожнити з множиною -значних нормованих монотонних предикатів. Клас сумісностей, для яких вимагаємо збереження попарних супремумів по обох аргументах, як частково впорядкована множина антиізоморфний гратці контраваріантних зв'язків Галуа між неперервними гратками та . Означено підклас сумісностей умовою: для кожних , виконується . Доведено, що можна ототожнити з підмножиною всіх -значних нормованих монотонних предикатів на , що відображають попарні інфімуми у попарні супремуми.

Для фіксованих сумісностей , введено відображення

**Теорема 3.1.** *Відображення є сумісністю між гратками* *і , яка зберігає**супремуми по обох аргументах.*

З доведення теореми випливає, що сумісність задається контраваріантним зв'язком Галуа з антитонних відображень таких, що. У підрозділі 3.2 виділено підклас сильних (що зберігають попарніінфімуми по обох аргументах) сумісностей і розглянутоїх будову.

Для частково впорядкованої множини множина , щоскладається з усіх непорожніх відкритих за Скоттом фільтрів в називаєтся *двоїстою за Лоусоном* до Запропонованомодифікацію класичної двоїстості Лоусона: , де – додаваннянайбільшого елемента. Цим отримано самодвоїстість категорії неперервних напівграток з нулями.

Оскільки згідно наслідку 3.2.2 для неперервної напівгратки знижнім елементом топології Лоусона на та єкомпактними і гаусдорфовими тоді і тільки тоді, коли повна істабільно неперервна, то повна підкатегорія повнихстабільно неперервних напівграток з нулями категорії неперервнихнапівграток з є самодвоїстою відносно обмеження функтора.

Будову сильних відокремлюючих сумісностей описує:

**Теорема 3.2**. Нехай є *неперервними нижніми напівгратками з нижніми елементами відповідно. Якщо відношення є сильною відокремлюючою сумісністю, то відображення , яке переводить в , є ізоморфізмом . І навпаки, кожен ізоморфізм породжується єдиною сильною відокремлюючою сумісністю за вказаною формулою.*

У підрозділі 3.3 вивчено властивості класів сумісностей.

**Теорема 3.3**. *Нехай – повна неперервна напівгратка, – неперервна напівгратка з нулем. Тоді частково впорядкована множина , а її підмножина з усіх функцій, що зберігають нуль, є неперервними напівгратками з нулями.*

**Твердження 3.3.2.** *Для кожної сумісності відповідність , де є неперервним за Скоттом відображенням що зберігає нуль. І навпаки, для кожного неперервного за Скоттом відображення , що зберігає нуль, відображення , означене формулою , є сумісністю з*

Завдяки цьому факту множини та можна ототожнити. Як наслідок:

**Твердження 3.3.3.** *Нехай і – неперервні напівгратки з нулями, – повна. Тоді частково впорядкована множина є**неперервною напівграткою з нулем.*

Крім того:

**Наслідок 3.3.6.** *Нехай і – неперервні напівгратки з нулями, – повна, – стабільно неперервна. Тоді частково впорядкована**множина є повною неперервною напівграткою.*

Для класу сильних сумісностей отримано

**Твердження 3.3.7.** *Нехай і – повні стабільно неперервні напівгратки, тоді**частково впорядкована множина є повною неперервною**напівграткою.*

Кожен контраваріантний зв'язок Галуа між і визначає множину з властивостями:

(1) для кожного множина має вигляд для деякого (є головним ідеалом);

(2) для кожного множина має вигляд для деякого ( теж є головним ідеалом).

Кожна підмножина з властивостями (1), (2) називається тензором, а сукупність всіх тензорів – тензорним добутком і , який позначається

Оскільки можна ототожнити з граткою всіх контраваріантних зв'язків Галуа між і , то Для неперервних граток і тензорний добуток теж є неперервною граткою. Отже:

**Наслідок 3.3.8**. *Для неперервних граток і множина всіх сумісностей, що зберігають попарні супремуми по обох аргументах, є двоїсто неперервною граткою.*

Крім того, доведено:

**Твердження 3.3.9.** *Для неперервної напівгратки з нулем і неперервної гратки* *множина правих тензорів у є**неперервною граткою.*

**Наслідок 3.3.10.** *Для неперервної напівгратки з нулем і неперервної гратки* *множина всіх сумісностей, що зберігають попарні**супремуми по другому аргументу, є двоїсто неперервною граткою.*

У підрозділі 3.4 для неодноелементних повних стабільно неперервних напівграток , з нулями формулою означено повну неперервну напівгратку з нулем, яка містить і . Тоді для довільних монотонних предикатів та введено тензорний добуток формулою

для кожної сумісності . Отримано

**Наслідок 3.4.2**. Для довільних монотонних предикатів та і кожної сумісності множина

компактна у топології Лоусона, а для напрямленої вгору сім'ї сумісностей , , та точної верхньої грані виконано

.

З цього твердження випливає, що для нормованих монотонних предикатів на повних стабільно неперервних напівгратках і можна означити тензорний добуток, який є нормованим монотонним предикатом на повній напівгратці .

**Теорема 3.4.** *Для кожних монотонних предикатів та функція належить до*

Також введено двоїсту в певному сенсі симетричну операцію :

і доведено наступну теорему:

**Теорема 3.5.** *Для кожних монотонних предикатів та $ функція належить до*

Також у підрозділі надано теоретико-ігрову інтерпретацію для запропонованих конструкцій.

У підрозділі 3.5 розглянуто спряженість ємностей як частковий випадок спряженості сумісностей та як природне перетворення між двома класичними двоїстостями.

Для фіксованих неперервних напівграток з нулями , сильної відокремлюючої сумісності і неперервної за Скоттом функції *спряжену до неї* функцію означено наступним чином:

 в

**Твердження 3.5.1.** *Функція є неперервною за Скоттом, переводить нульовий елемент в нульовий елемент, а для її надграфіка виконується рівність*

*Істинне також наступне:*

**Теорема 3.6.** *Для компактної гаусдорфової гратки Лоусона L і неперервної напівгратки з нижнім елементом частково впорядковані множини і порядково антиізоморфні.*

*Частково впорядковані множини і теж порядково антиізоморфні.*

Кожна нормована -значна ємність *c* на неперервнійнапівгратці з нулем ототожнюється з сумісністю між та , означеною як

Спряжена ємність є найбільшою нормованою-значною ємністю, сумісною з , і вона відповідає – найбільшій сумісності, що зберігає попарні супремуми по другому аргументу і сумісна з .

**Твердження 3.5.2.** *Якщо нормована L-значна ємність*  *на неперервній напівгратці з нулем визначає сумісність між і , – сильна відокремлююча сумісність між і , – стандартна сумісність між і , тоді спряжена ємність визначає сумісність між і спряжену до щодо .*

Отже, спряженість ємностей (монотонних предикатів) є звуженням спряженості сумісностей.

Для сильних відокремлюючих сумісностей і таких, що, , і контраваріантних зв'язків Галуа , отримано наступні результати.

**Лема 3.5.3.** *Четвірка утворює контраваріантний зв'язок Галуа.*

**Наслідок 3.5.4*.*** *Відображення є верхнім спряженим до*

**Теорема 3.7.** *Набір всіх ізоморфізмі* *для всіх об'єктів категорії є ізоморфізмом функторів*

Тобто, конструкції граток нормованих *L*-ємностей і нормованих -ємностей на неперервних напівгратках з нулем є функторіальними і пов'язані з допомогою двох класичних двоїстостей та функторіального ізоморфізму. Компоненти останнього зіставляють кожній ємності спряжену до неї.

**Четвертий розділ**  присвячено вивченню спеціальних класів відношень – чітких та граткозначних (нечітких) неоднозначних зображень між неперервними напівгратками.

**Означення 4.1.1**. *Нехай неперервні напівгратки з нулями та відповідно.* Неоднозначним зображенням *в є бінарне відношення , для якого виконуються умови:*

*(1) якщо , в , а в , то ;*

*(2) для всіх множина непорожня і замкнена за Скоттом в*

Для неоднозначного зображення і фіксованих сильних відокремлюючих сумісностей і означено відношення формулою

**Теорема 4.1.** *Для кожного неоднозначного зображення**виконується включення**. Рівність еквівалентна до умов*

 *(3) якщо і в , то існує в , для якого ;*

*(4) якщо то .*

Неоднозначні зображення, для яких , названо *псевдооборотними*. Виділено підклас неоднозначних зображень, для яких існують псевдообернені зображення, і означено композиції, з якими вони як стрілки та неперервні напівгратки з нулем як об'єкти утворюють категорію.

**Теорема 4.2**. *Усі неперервні напівгратки з нульовими елементами і усі псевдооборотні неоднозначні зображення утворюють категорію , яка містить як підкатегорію.*

**Твердження 4.1.5.** *Відповідність є інволютивним контраваріантним функтором (самодвоїстістю) у , який є продовженням функтора в .*

У підрозділі 4.2 поняття неоднозначних зображень продовжено до граткозначних відношень.

**Означення 4.1.2*.*** *Нехай маємо неперервні напівгратки з нулями і відповідно і цілком дистрибутивну гратку з нижнім елементом та верхнім елементом .* L-нечітким неоднозначним зображенням *(чи просто -*неоднозначним зображенням*) у є тернарне відношення таке, що*

*(1) якщо , в , в і в , то ;*

*(2) для будь-якого множина замкнена за Скоттом в і містить усі елементи виду та*

*(3) для всіх , , з того, що , випливає*

Подібно, як для чіткого випадку, для неоднозначного зображення означено відношення

Доведено, що відношення є -неоднозначним зображенням.

**Теорема 4.3***. Для кожного неоднозначного зображення виконується включення включення**. Рівність істинна, якщо і тільки якщо виконано умови*

 *(4) якщо , в і в , то знайдеться в для якого ;*

 *(5) якщо то .*

**Твердження 4.2.4.** *-неоднозначне зображення є**псевдооборотним тоді і тільки тоді, коли воно як відображення* *неперервне за Скоттом і зберігає нуль.*

Введено композицію ``'' псевдооборотних -неоднозначних зображень і отримано:

**Теорема 4.4.** *Усі неперервні напівгратки з нульовими елементами і усі псевдооборотні -неоднозначні зображення утворюють категорію , яка містить як підкатегорію.*

Доведено, що є ``контраваріантною еквівалентністю'' між категоріями та , де ``'' – ``переставлене'' множення ``''.

**Твердження 4.2.8.** *Самодвоїстість продовжується до контраваріантних функторів*

*Обидві попарні композиції цих функторів ізоморфні до тотожніх функторів.*

 У підрозділі 4.3 побудовано вкладення категорії -нечітких неоднозначних зображень у категорію неперервних *L*-напівмодулів.

**Теорема 4.5.** *Відповідність, яка кожній неперервній напівгратці зіставляє , а кожному неперервному за Скоттом відображенню єдине неперервне за Скоттом лінійне продовження , є функтором, який вкладає категорію в категорію неперервних -напівмодулів як повну підкатегорію.*

У підрозділі 4.4 для сильної відокремлюючої сумісності між неперервниминапівгратками *S* і *S'* з нулями означено множення (де – та жкванталь , але з ``переставленим'' множенням) формулою

 Доведено, що такий добуток є нескінченно дистрибутивним і неперервним за Скоттом по кожній змінній.

**Теорема 4.6.** *Нехай є сильною відокремлюючою сумісністю між неперервними напівгратками , з нижніми елементами. Тоді і із множенням утворюють двоїсту пару.*

 Доведено, що дія псевдообернення -нечітких неоднозначних зображень відповідає дії знаходження ермітово спряжених -лінійних операторів.

**Теорема 4.7.** *Нехай , – неперервні напівгратки з нижніми елементами. Для кожного неперервного за Скоттом лінійного відображення , існує неперервне за Скоттом спряжене*

**Твердження 4.4.3.** *Якщо відображення є неперервним за**Скоттом лінійним продовженням псевдооборотного -неоднозначного**представлення , то спряжене відображення**є неперервним за**Скоттом лінійним продовженням псевдооберненого -неоднозначного**представлення .*

**У п'ятому розділі** монотонні предикати застосовано до аналізу грубих ігор двох гравців. Елементи неперервних напівграток описують неповну інформацію про позицію гравця у грі, що зазвичай моделюють через подання гри у розширеній формі – як дерево, у якому вершини не завжди розрізненні для гравців. Показано, що застосування напівграток дозволяє часом обмежитись нормальною формою, коли гравці можуть вибирати елементи напівграток, які можна розглядати як грубі стратегії. Неоднозначні зображення відображають усі набори виплат, які можуть бути гарантовані, якщо гравці між собою домовляться, що дозволяє означити грубі оптимуми Парето.

Основна увага у розділі приділена грубим іграм двох гравців у розширеній формі, коли перший і другий гравці ходять по черзі, а результат гри є елементом цілком дистрибутивної гратки , і монотонний предикат повністю описує позицію у грі з точки зору другого гравця після ходу першого гравця. І навпаки, зображує позицію першого гравця після ходу другого.

Також за допомогою -неоднозначних зображень описано, як позиція одного гравця залежить від попереднього вибору іншого гравця у грі розширеної форми, у котрій два гравці мають неповну інформацію про актуальний стан речей і не мають повного контролю над діями.

Побудовано монотонні предикати виплат і

і

 що описують нижні обмеження на результати при правильній грі. Знайдено рекурентні співвідношення, які дозволяють обчислити ці предикати, рухаючись від останнього можливого ходу гри.

**Теорема 5.1.** Для скінченної послідовності неперервних напівграток з нулями і грубої гри двох гравців урозширеній формі, у якій початковий стан задається монотоннимпредикатом , а ходи гравців –неоднозначнимизображеннями і, предикати виплатзадовольняють рекурсивні співвідношення

і

Отримано ``апроксимативну теорему про мінімакс'':

**Теорема 5.2.** *Для грубої скінченної дійснозначної гри розширеної форми з нульовою сумою, найменшою верхньою гранню мінімального виграшу першого гравця є найбільша нижня грань максимального програшу другого гравця.*

**ВИСНОВКИ**

У дисертаційній роботі отримано наступні результати:

* Доведено, що напівмодулі монотонних предикатів є вільними об'єктами у категоріях неперервних ідемпотентних предикатів та неперервних лінійних чи афінних відображень;
* Доведено, що кожна пара сумісностей між напівгратками визначає сумісність між цілком дистрибутивними гратками, порядково двоїстими до граток сумісностей;
* Доведено, що кожна сильна відокремлююча сумісність ізоморфна до канонічної сумісності між неперервною напівграткою з нулем та двоїстою до неї напівграткою щодо модифікованої двоїстості Лоусона;
* Доведено, що частково впорядкована множина всіх неперервних за Скоттом відображень з повної неперервної напівгратки у неперервну напівгратку з нулем є неперервною напівграткою з нулем, звідки отримано достатні умови того, що сумісності між двома напівгратками, що зберігають попарні інфімуми по одному чи по двох аргументах, утворюють неперервні напівгратки з нулями чи повні неперервні напівгратки;
* Доведено, що сумісності, що зберігають попарні супремуми по одному чи по двох аргументах, утворюють двоїсто неперервні гратки;
* Доведено, що для граткозначних монотонних предикатів існує пара операцій симетричного тензорного множення, відмінних від породжених монадами;
* Доведено, що перехід від неперервної напівгратки з нулем до двоїстої, а від цілком дистрибутивної гратки до порядково оберненої призводить до антиізоморфізму між гратками монотонних предикатів;
* Доведено, що спряженість граткозначних ємностей породжується сумісністю між сумісностями і є компонентою природного перетворення між двома класичними двоїстостями у теорії областей;
* Охарактеризовано чіткі та граткозначні неоднозначні зображення, для яких операція псевдообернення є інволютивною, і доведено, що вони як морфізми разом з неперервними напівгратками з нулями як об'єктами утворюють категорії;
* Доведено, що ці категорії є повними підкатегоріями категорій неперервних ідемпотентних напівмодулів та їх неперервних ідемпотентно лінійних відображень;
* Доведено, що для неперервного ідемпотентно лінійного відображення між напівмодулями монотонних предикатів існує ермітове спряжене, обчислення якого зводиться до знаходження псевдооберненого до неоднозначного зображення між напівгратками;
* Доведено, що для грубої гри двох гравців у розширеній формі, заданій монотонним предикатом та нечіткими зображеннями між напівгратками, предикати виплат пов'язані рекурентними співвідношеннями, і виконано апроксимативну теорему про мінімакс.

Результати роботи є внеском у теорію неперервних областей і відкривають можливості застосування граткозначних монотонних предикатів у моделюванні прийняття рішень в умовах невизначеності, зокрема, в умовах ігор з неповною інформацією. Перспективи подальших досліджень пов'язані з послабленням деяких вимог до напівграток та їх відображень, а також з глибшим аналізом монотонних предикатів з погляду і засобами теорії категорій.

**СПИСОК ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Микицей О. On Lawson idempotent semimodules // VII літня школа "Алгебра, топологія і аналіз", 5-16 липня, 2010, Верховина: тези доп. – Верховина, 2010. – С. 25-27.
2. Nykyforchyn O., Mykytsey O. Conjugate measures on semilattices // Вісник ЛНУ, сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 221 –231.
3. Микицей О. Continuity of strongest postcondition transformers // VIII літня школа "Алгебра, топологія, аналіз та застосування", 5-15 липня, 2011, Херсон-Лазурне: тези доп. – Херсон, 2011. – С. 21.
4. Nykyforchyn O., Mykytsey O. L-idempotent linear operators between predicate semimodules, dual pairs and conjugate operators // Математичний вісник НТШ. –– 2011. – Вип. 8. – С. 299 –314.
5. Микицей О. Metrization of images of metric compacta under bicommutative functors // Міжнародна конференція, присвячена 120-річчю з днянародження Стефана Банаха, 17-21 вересня, 2012, Львів: тези доп. – Львів, 2012. – С. 98.
6. Микицей О.Я., Никифорчин О.Р. Неперервність симетричних добутків гіперпросторів включення та ємностей // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2012. – Вип. 17, № 1. – С. 85 – 88.
7. Микицей О. Continuity of symmetric products of capacities // 9 Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, 8-13 липня, 2013, Львів: тези доп. – Львів, 2013. – С. 134
8. Никифорчин О., Микицей О. Категорія Лоусонових верхніх компактних напівграток з одиницею і їх строгих неоднозначних зображень // IX літня школа “Алгебра, топологія і аналіз”, 7-18 липня, 2014, Поляниця: тези доп. – Поляниця, 2014. – С. 52.
9. Микицей О. Категорія Лоусонових напівграток і їх псевдооборотних неоднозначних зображень // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня, 2015, Київ: тези доп. – Київ, 2015. – С. 40.
10. Mykytsey O. Category of L-fuzzy ambiguous representations // Міжнародна конференція «Нескінченновимірний аналіз і топологія», 16-20 жовтня, 2019, Івано-Франківськ: тези доп. – Івано-Франківськ, 2019. – С.40.
11. Nykyforchyn O.R., Mykytsey O.Ya. Rough games modeled via L-fuzzy ambiguous representations of semilattices // Fuzzy Sets and Systems. – 2020. – Vol. 398. – P. 128–138.
12. Nykyforchyn O., Mykytsey O. Ambiguous representations of semilattices, imperfect information, and predicate transformers // Order. – 2020. – Vol. 37. – P. 319 –339.
13. Mykytsey O.Ya., Koporkh K.M. Compatibilities between *continuous semilattices* // Carpathian Math. Publ. – 2021. – Vol. 13, № 1. – P. 5–14.

**АНОТАЦІЯ**

*Микицей О. Я*. Граткозначні предикати на неперервних напівгратках. – Кваліфікаційна наукова робота на правах рукопису.

 Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – ДВНЗ ``Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника'', Івано-Франківськ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню граткозначних монотонних предикатів на неперервних напівгратках як природних узагальнень дійснозначних та граткозначних неадитивних мір.

У роботі обґрунтовано поширення поняття монотонного предиката на функції зі значеннями у цілком дистрибутивних гратках.

Запроваджено поняття сумісності між неперервними напівгратками. Виділено і досліджено деякі важливі підкласи сумісностей. Побудовано дві симетричні операції тензорного множення предикатів, що є аналогами тензорного множення адитивних мір. Доведено, що відображення взяття спряжених до граткозначних ємностей в сукупності утворюють ізоморфізм функторів, що пов'язує дві класичні двоїстості у теорії областей. Запроваджено поняття чіткого та *L*-нечіткого неоднозначних зображень між неперервними напівгратками, виділено їх підкласи, які утворюють категорії. Наведено інтерпретацію *L*-нечітких неоднозначних зображень та відповідних *L*-лінійних операторів як трансформерів монотонних предикатів і запропоновано їх застосування до аналізу грубих ігор двох гравців у розширеній формі.

*Ключові слова: неперервна напівгратка, монотонний предикат, неоднозначне зображення, спряжена ємність, ідемпотентний напівмодуль.}*

**АНОТАЦИЯ**

*Микицей О. Я*. Решёткозначные предикаты на непрерывных полурешётках. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – ГВУЗ “Прикарпатский национальный університет имени Василия Стефаника”, Ивано-Франковск, 2021.

Диссертационная работа посвящена исследованию решёткозначных монотонных предикатов на непрерывных полурешётках как натуральних обобщений вещественнозначных и решёткозначных неаддитивных мер.

В работе обосновано распространение понятия монотонного предиката на функции со значениями во вполне дистрибутивных решётках.

Введено понятие совместимости между непрерывными полурешётками. Рассмотрено некоторые важные подклассы совместимостей. Построены две симметричные операции тензорного умножения предикатов, которые являются аналогами тензорного умножения аддитивных мер. Доказано, что отображение взятия сопряженных к решёткозначным мерам в совокупности образу ют изоморфизм функторов, связывающий две классические двойственности в теории областей. Введено понятие четкого и *L*-нечеткого неоднозначных изображений между непрерывными полурешётками. Выделены подклассы четких и *L*-нечетких неоднозначных изображений, являющихся объектами категорий. Приведена интерпретация *L*-нечетких неоднозначних изображений и соответствующих *L*-линейных операторов как трансформеров монотонных предикатов, которые применено к анализу грубых игр двух игроков в расширенной форме.

*Ключевые слова: непрерывная полурешётка, монотонный предикат, неоднозначное изображение, сопряженная ёмкость, идемпотентный полумодуль.*

**ABSTRACT**

*Mykytsey O. Ya.* Lattice-valued predicates on continuous semilattices. – Qualifying scientific work, manuscript. Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 Algebra and Number Theory. – Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2021.

The thesis is devoted to lattice-valued monotonic predicates on continuous semilattices, which are natural generalizations of non-additive real-valued and lattice-valued measures.

Generalization of the notion of monotonic predicate to functions with values in completely distributive lattices is justified. It is proved that the sets of *L*-valued monotonic predicates are free objects over the respective continuous semiattices.

The notion of compatibility between continuous semilattices and is introduced. Several subclasses of the set of such compatibilities are introduced, and it is shown that many specific kinds of mathematical objects can be regarded as compatibilities. A modification of classical Lawson duality is proposed.

For complete stably continuous semilattices and with zeros a complete continuous semilattice with zero is introduced so that it contains both and . For normalized monotonic predicates the symmetrical tensor product is defined. This product is an -valued normalized monotonic predicate on the complete semilattice .

It is shown that the constructions of lattices of normalized -capacities and of normalized -capacities on continuous semigroups with zeros are functorial and linked via two classic dualities and a functor isomorphism.

Crisp and -fuzzy ambiguous representations between continuous semilattices are defined. Subclasses of pseudoinvertible ambiguous and pseudoinvertible -ambiguous representations are defined and investigated. An embedding of the category -fuzzy ambiguous representations into the category of continuous -semimodules is constructed.

 An embedding of the category of continuous semilattices and pseudoinvertible -ambiguous representations into category of continuous -semimodules as a full subcategory is constructed.

An interpretation of -ambiguous representations and respective -linear operators as predicate transformers is proposed.

Monotone predicates are applied to the analysis of two player rough games. Monotonic payoff predicates і are obtained to describe lower estimates of the game result for rational players. Recurrent formulae are found, which makes it possible to calculate these predicates backwards from the last possible move of the game.

It is proved that for a rough extensive-form real-valued zero-sum finite games, the least upper bound of the minimal gain of the first player is equal to the greatest lower bound of the maximal loss of the second player.

*Keywords: continuous semilattice, monotonic predicate, ambiguous representation, conjugate measure, idempotent semimodule.*

1. O'Brien G.L., Verwaat W. *How subsadditive are subadditive**capacities?*// Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1994. – Vol.35, № 2. – P. 311 – 324 [↑](#footnote-ref-1)
2. Choquet G. *Theory of Capacity* // Ann. l'Institute Fourier. – 1953–1954. – Vol. 5. – P. 131–295. [↑](#footnote-ref-2)
3. Denneberg D. *Non-Additive Measure and Integral* // SpringerNetherlands, Dordrecht, In Theory and Decision Library B, Vol. 27. **–**  1994. Г – 188p. [↑](#footnote-ref-3)
4. Sugeno M. *Theory of fuzzy integrals and**its applications: PhD thesis* // Tokyo Institute of Technology, 1974. [↑](#footnote-ref-4)
5. Yager R.R., Alajlan N. *Measure based representation of**uncertain information* // Fuzzy Optim Decis Making. – Vol.11. **–**  2012. – P. 363 – 385. [↑](#footnote-ref-5)
6. Schmeidler D. *Subjective probability and expected utility**without additivity* // Econometrica. – 1989. – Vol. 57. – P. 571 – 587. [↑](#footnote-ref-6)
7. Friedman N., Halpern J. *Plausibility**Measures: A User's Guide* // Proceedings of the 11th AnnualConference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-95). – San Francisco, 1995. – P. 175 – 184. [↑](#footnote-ref-7)
8. Nykyforchyn O.R., Repovs D. *$L$-fuzzy strongest**postcondition transformers as $L$-idempotent linear or affine**operators between semimodules of monotonic predicates* // FuzzySets and Systems. – 2012. – Vol. 208. – P. 67 – 78. [↑](#footnote-ref-8)
9. Dijkstra E.W. *Guarded commands, non-determinacy and formal derivation of programs* // Comm. of the ACM. – 1975. – Vol. 18, № 8. – P. 453 – 457. [↑](#footnote-ref-9)
10. Edalat A. *Domains for computation in mathematics, physics and exact real arithmetic* // Bull. Symb.Logic. – 1997. – Vol. 3, № 4. – P.401 – 452. [↑](#footnote-ref-10)
11. Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M.,Scott D.S. *Continuous Lattices and Domains* // CambridgeUniversity Press. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. *–* 2003. – Vol. 93. – p. 628. [↑](#footnote-ref-11)
12. Heckmann R., Huth M. *A duality theory for quantitative semantics* // Proceedings of the 11th International Workshop onComputer Science Logic, Springer Verlag. – 1998. – P. 255 – 274. [↑](#footnote-ref-12)
13. Goguen J.A. *L-fuzzy sets* // J. Math. Anal. Appl. – 1967. *–*  Vol. 18 – P. 145–157. [↑](#footnote-ref-13)
14. Miyamoto S. *Lattice-valued possibility measures on the basis of multimodal logic* // Proceedings of the 36th SICE AnnualConference. International Session Papers, Tokushima, Japan. –1997. – P. 1067 – 1070. [↑](#footnote-ref-14)
15. Denniston J.T., Melton A., Rodabaugh S.E. *Lattice-valued predicate transformers and interchange systems* // Abstracts of the31th Linz Seminar, Universitatsdirecktion Johannes KeplerUniversitat. – Linz, Austria, February 2010. – P. 31 – 40. [↑](#footnote-ref-15)
16. Kolokoltsov V.N. *Idempotent structures in optimisation* //Journal Math. Sci. – 2001. – Vol. 104, № 1. – P. 847 – 880. [↑](#footnote-ref-16)
17. Kolokoltsov V.N., Maslov V.P. *Idempotent Analysis and Its Applications* // Kluwer Acad.\ Publ., Dordrecht. – 1998. [↑](#footnote-ref-17)
18. Lawson J.D. *Idempotent analysis and continuous semilattices*// Theor. Comp. Sci. – 2004. –Vol. 316. – P. 75 –87. [↑](#footnote-ref-18)
19. Gierz~G., Hofmann~K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S. *Continuous Lattices and Domains* // Cambridge University Press. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. – 2003. – Vol. 93. – p. 628. [↑](#footnote-ref-19)
20. Heckmann R., Huth M. *A duality theory for quantitative semantics* // Proceedings of the 11th International Workshop onComputer Science Logic, Springer Verlag. –1998. – P.255 –274. [↑](#footnote-ref-20)