ДВНЗ “ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

*Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису*

Фрей Марія Миколаївна

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

Стохастичне диференціювання та віківське числення в аналізі білого шуму Леві

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________ М.М. Фрей

Науковий керівник
Качановський Микола Олександрович
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Івано-Франківськ — 2019

АНОТАЦІЯ

Фрей М.М. Стохастичне диференціювання та віківське числення в аналізі білого шуму Леві. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – "математичний аналіз". – ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" , Івано-Франківськ, 2019.

Дисертаційне дослідження відноситься до нескінченновимірного аналізу — доволі широкого розділу сучасної математики, у якому вивчаються, зокрема, різноманітні простори функцій та узагальнених функцій нескінченної кількості змінних (тобто функцій та узагальнених функцій з аргументами з нескінченновимірних просторів).

Гауссівський аналіз білого шуму, тобто аналіз на просторах основних, квадратично інтегровних за гауссівською мірою і узагальнених функцій нескінченої кількості змінних, має численні застосування у сучасних математиці та фізиці. Однак у багатьох задачах стохастичного аналізу, математичної фізики, функціонального аналізу, квантової фізики, тощо природним чином виникають не лише гауссівські випадкові процеси та міри, тому існує необхідність у побудові аналогів гауссівського аналізу білого шуму для негауссівських процесів і відповідних ймовірнісних мір.

Одними з тих, що найбільш широко застосовуються у сучасних дослідженнях, є процеси Леві (неперервні за ймовірністю випадкові процеси зі стаціонарними незалежними приростами). Головною проблемою при побудові аналізу білого шуму Леві є відсутність у процесів Леві (крім вінерівського та пуассонівського) властивості хаотичного розкладу, тобто можливості представити довільну квадратично інтегровну випадкову величину у вигляді ряду з повторних стохастичних інтегралів за

процесом Леві від невипадкових функцій. Слід відзначити, що відповідна властивість відіграє ключову роль при побудові гауссівського аналізу білого шуму. Втім, ця проблема не є нездоланною: у роботах К. Іто (1956), Д. Нуаларта та В. Скоутенса (2000), Є. В. Литвинова (2003), Ф. Бента, Г. Ді Нуно, А. Локки, Б. Оксендала та Ф. Проске (2003), та інших розбудовано різні аналоги (узагальнення) згаданої властивості для процесів Леві. В залежності від задач, які розглядаються, можна обирати найбільш слушні узагальнення властивості хаотичного розкладу та будуються відповідні версії аналізу.

Дисертаційна робота присвячена розбудові аналізу білого шуму Леві, який, як вже відзначалось, є одним з найбільш запитаних узагальнень класичного гауссівського аналізу білого шуму. У роботі уводяться і досліджуються оператори стохастичного диференціювання на параметризованих просторах типу Кондратьєва регулярних основних і узагальнених функцій, побудованих з використанням узагальнення властивості хаотичного розкладу, запропонованого Є. В. Литвиновим, та розробляється віківське числення на згаданих просторах регулярних узагальнених функцій. Відзначимо, що згадане узагальнення властивості хаотичного розкладу ґрунтується на розкладі квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій (випадкових величин) у ряди зі спеціальним чином побудованих ортогональних функцій, подібно до розкладу квадратично інтегровних випадкових величин за поліномами Ерміта у гауссівському аналізі (розклад за поліномами Ерміта, у свою чергу, еквівалентний розкладу за повторними стохастичними інтегралами Іто). Варто відзначити, що використане узагальнення властивості хаотичного розкладу є на сьогодні одним з найбільш цікавих та перспективних з точки зору застосувань.

Оператори стохастичного диференціювання, які тісно пов'язані з розширеним стохастичним інтегралом Скорохода та зі стохастичною похідною Хіди, відіграють важливу роль у гауссівському аналізі білого шуму. Вони вивчались, зокрема, у роботах А. Устунела (1995), Ф. Бента (1999), К. Асе, Б. Оксендала, Н. Пріво та Ж. Убо (2000). Певні узагальнення операторів стохастичного диференціювання на аналіз білого шуму Леві побудовано у роботі Г. Ді Нуно, Б. Оксендала та Ф. Проске (2004). Зокрема, ці оператори можна використовувати для вивчення властивостей розширеного стохастичного інтеграла і властивостей розв'язків певних стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь.

Іншим важливим об'єктом у гауссівському аналізі білого шуму є віківське числення на просторах узагальнених функцій, тобто теорія, що вивчає природні аналоги поточкового добутку (віківський добуток) і голоморфних функцій (віківські версії голоморфних функцій) на згаданих просторах, а також стохастичні інтегральні та диференціальні рівняння з віківським добутком і віківськими версіями голоморфних функцій (стохастичні рівняння з нелінійностями віківського типу). Згадані рівняння мають застосування, зокрема, у стохастичному аналізі та у математичній фізиці. Варто відзначити, що для вивчення деяких властивостей розв'язків таких рівнянь застосовуються оператори стохастичного диференціювання (зокрема, використовується той факт, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку є диференціюванням відносно віківського множення, тобто задовольняє правило Лейбніца). Віківське числення розроблялась у роботах Т. Ліндстрьома, Б. Оксендала та Ж. Убо (1992), Ю. Г. Кондратьєвва, П. Леукерта та Л. Штрайта (1996), І. Кубо, Х. Куо та А. Сенгупти (1999), Н. Обати (1999) та багатьох інших.

Перший розділ дисертації має допоміжний характер. Тут оглянуто літературу та відомі результати за тематикою роботи; наведене визначення міри білого шуму Леві та описано суміжні поняття; описане узагальнення властивості хаотичного розкладу, запропоноване Є. В. Литвиновим;

уведено параметризовані простори типу Кондратьєва регулярних основних і узагальнених функцій (які є відповідно позитивними і негативними просторами параметризованого регулярного оснащення простору квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій) у термінах згаданого узагальнення властивості хаотичного розкладу, та наведено розклади елементів з цих просторів за природними ортогональними базисами; описано конструкції розширеного стохастичного інтеграла Скорохода та стохастичної похідної Хіди на згаданих просторах регулярних основних і узагальнених функцій.

У другому розділі уведено і детально вивчено оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, побудованих з використанням аналогу властивості хаотичного розкладу, запропонованого Є. В. Литвиновим. Окремо розглянуто випадки, у яких згадані оператори є обмеженими та необмеженими. Результати розділу є узагальненням на версію аналізу білого шуму Леві, що розбудовується в дисертації, відповідних результатів гауссівського аналізу білого шуму. Так само, як і у гауссівському аналізі, побудовані оператори стохастичного диференціювання можна використовувати для вивчення деяких властивостей розширеного стохастичного інтеграла, а також для вивчення властивостей розв'язків стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь з нелінійностями віківського типу.

Крім того, у розділі доведено, що на перетинах просторів регулярних та нерегулярних основних функцій уведені в дисертації оператори стохастичного диференціювання співпадають із відповідними операторами на просторах нерегулярних основних функцій. Це дає, зокрема, можливість використовувати певні результати, пов'язані з операторами стохастичного диференціювання на просторах нерегулярних основних функцій, в аналізі білого шуму Леві на просторах регулярних основних і узагальнених функцій.

У третьому розділі, за аналогією із гауссівським аналізом білого шуму, побудовано елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві. Зокрема, наведені визначення і вивчені властивості віківського добутку та віківських версій голоморфних функцій; встановлено, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку є диференціюванням (задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення; показано, що якщо використовувати віківське множення замість поточкового, то можна винести незалежний від часу множник з-під знаку стохастичного інтеграла; сформульовано та доведено теорему про представлення розширеного стохастичного інтеграла через формальний інтеграл Петтіса від віківського добутку вихідної підінтегральної функції та білого шуму Леві. Ці результати є підґрунтям для подальшої розбудови аналізу білого шуму Леві (в тому числі віківського числення у межах цього аналізу), і можуть застосовуватись, зокрема, для розв'язання стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь з нелінійностями віківського типу на просторах регулярних узагальнених функцій (приклади таких рівнянь наведено у останньому підрозділі розділу). Варто зауважити, що, як і у гауссівському аналізі, згадані рівняння можна застосовувати для моделювання різних фізичних процесів.

Основні результати дисертації такі: у дисертації вперше

- уведено обмежені і необмежені оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, які побудовані з використанням узагальнення властивості хаотичного розкладу, запропонованого Є. В. Литвиновим, детально вивчено властивості цих операторів;
- вивчено взаємозв'язок між операторами стохастичного диференцію-

вання на просторах регулярних та нерегулярних основних функцій аналізу білого шуму Леві;

– уведено віківський добуток та віківські версій голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, вивчено властивості цих операцій;

– доведено, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку є диференціюванням (задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення;

– вивчено зв'язок між віківським численням та стохастичним інтегруванням на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві.

Ключові слова: процес Леві, властивість хаотичного розкладу, стохастична похідна Хіди, розширений стохастичний інтеграл, оператор стохастичного диференціювання, віківське числення.

ABSTRACT

Frei M.M. Stochastic differentiation and Wick calculus in the Lévy white noise analysis. – Qualifying scientific work on rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 – mathematical analysis. – Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2019.

The work is prepared at the Department of Mathematical and Functional Analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science of Vasyl Stefanyk Precarpathian National University.

The investigation, results of which are expounded in the thesis, refers to an infinite dimensional analysis—a quite wide area of modern mathematics, in which one studies, in particular, different spaces of functions and generali-

zed functions of infinite many variables (i.e., of functions and generalized functions with arguments from infinite dimensional spaces).

The Gaussian white noise analysis (i.e., an analysis on spaces of test, square integrable with respect to the Gaussian measure, and generalized functions, which depend on infinitely many variables) has numerous applications in modern mathematics and physics. But in many problems of stochastic analysis, mathematical physics, functional analysis, quantum physics, etc. not only Gaussian random processes and measures arise in a natural way, therefore there is a necessity to build analogs of the Gaussian white noise analysis for non-Gaussian processes and corresponding probability measures.

One of the most widely used in modern investigations are Lévy processes (continuous in probability random processes with stationary independent increments). The main problem in the construction of a Lévy white noise analysis is lack of a chaotic representation property in Lévy processes (excluding Wiener and Poissonian processes), i.e., a square integrable random variable cannot be presented, generally speaking, as a series of repeated stochastic integrals from nonrandom functions by the Lévy process. It is worth noting that the corresponding property plays a key role in building of the Gaussian white noise analysis. However, this problem is not irresistible: in works of K. Itô (1956), D. Nualart and W. Schoutens (2000), E. W. Lytvynov (2003), F. Benth, G. Di Nunno, A. Lokka, B. Oksendal and F. Proske (2003), and other different analogs (generalizations) of the mentioned property for Lévy processes are built. Depending on the problems under consideration one can select the most applicable generalizations of the chaotic representation property and build corresponding versions of an analysis.

The thesis is devoted to building of a Lévy white noise analysis, which, as already was noted, is one of the most sought generalizations of the classical Gaussian white noise analysis. In the work operators of stochastic differentiation on parametrized Kondratiev-type spaces of regular test and generalized functions, built using Lytvynov's generalization of the chaotic representation property, are being introduced and studied, and a Wick calculus on the mentioned spaces of regular generalized functions is developed. Note that the mentioned generalization of the chaotic representation property is based on decomposition of square integrable with respect to the Lévy white noise measure functions (random variables) in series from in a special manner constructed orthogonal functions, similar to decomposition of square integrable random variables by the Hermite polynomials in the Gaussian analysis (a decomposition by the Hermite polynomials, by-turn, is equivalent to a decomposition by repeated Itô's stochastic integrals). It is worth noting that the used generalization of the chaotic representation property is in a moment one of the most interesting and challenging from the point of view of applications.

Operators of stochastic differentiation, which are closely related with the extended stochastic integral and with the Hida stochastic derivative, play an important role in the Gaussian white noise analysis. They were studied, in particular, in the works of A. Ustunel (1995), F. Benth (1999), K. Aase, B. Oksendal, N. Privault and J. Uboe (2000). Certain generalizations of operators of stochastic differentiation to the Lévy white noise analysis are built in the work of G. Di Nunno, B. Oksendal and F. Proske (2004). In particular, these operators can be used in order to study properties of the extended stochastic integral and properties of solutions of certain stochastic integral and differential equations.

Another important object in the Gaussian white noise analysis is a Wick calculus on spaces of generalized functions, i.e., a theory, which studies natural analogues of the pointwise product (Wick product) and of holomorphic functions (Wick versions of holomorphic functions) on the mentioned spaces, as well as stochastic integral and differential equations with the Wick product and the Wick versions of holomorphic functions (stochastic equations with Wick-type nonlinearities). The mentioned equations have applications, in particular, in the stochastic analysis and in the mathematical physics. It is worth noting that in order to study some properties of solutions of such equations, one can use the operators of stochastic differentiation (in particular, one can use the fact that the operator of stochastic differentiation of first order is the differentiation with respect to the Wick multiplication, i.e., this operator satisfies the Leibniz rule). The Wick calculus is built in works of T. Lindstrom, B. Oksendal and J. Uboe (1992), Yu. G. Kondratiev, P. Leukert and L. Streit (1996), I. Kubo, H. Kuo and A. Sengupta (1999), N. Obata (1999) and many other.

The first chapter of the thesis has auxiliary character. Here we did a review of the literature and of known results on the subject of the work; define the Lévy white noise measure and describe related topics; describe Lytvynov's generalization of the chaotic representation property; introduce the parametrized Kondratiev-type spaces of regular test and generalized functions (that are positive and negative spaces of a parametrized regular rigging of the space of square integrable with respect to the Lévy white noise measure functions respectively) in terms of the mentioned generalization of the chaotic representation property, and present decompositions of elements belonging to these spaces by natural orthogonal bases; describe constructions of the extended Skorohod stochastic integral and of the Hida stochastic derivative on the mentioned spaces of regular test and generalized functions.

In the second chapter we introduce and study in detail operators of stochastic differentiation on the spaces of regular test and generalized functions of the Lévy white noise analysis, built using Lytvynov's generalization of the chaotic representation property. Separately we consider the cases, in which the mentioned operators are bounded and unbounded. The results of the chapter are generalizations to the version of the Lévy white noise analysis, that is being built in the thesis, of corresponding results of the Gaussian white noise analysis. As well as in the Gaussian analysis, the constructed operators of stochastic differentiation can be used in order to study some properties of the extended stochastic integral, and for study properties of solutions of stochastic integral and differential equations with Wick-type nonlinearities.

Also in the chapter we prove that on intersections of the spaces of regular and nonregular test functions the operators of stochastic differentiation introduced in the thesis coincide with corresponding operators on the spaces of nonregular test functions. In particular, it gives the opportunity to use certain results, connected with the operators of stochastic differentiation on the spaces of nonregular test functions, in the Lévy white noise analysis on the spaces of regular test and generalized functions.

In the third chapter, by analogy with the Gaussian white noise analysis, we construct elements of a Wick calculus on the spaces of regular generalized functions of the Lévy white noise analysis. In particular, we give definitions and study properties of a Wick product and of Wick versions of holomorphic functions; establish that the operator of stochastic differentiation of first order is a differentiation (satisfies the Leibniz rule) with respect to the Wick multiplication; show that if one uses the Wick multiplication instead of the pointwise multiplication, then it is possible to take the time-independent multiplier out of the sign of the stochastic integral; formulate and prove a theorem about presentation of the extended stochastic integral via a formal Pettis integral from the Wick product of the initial integrand and the Lévy white noise. These results are a basis for further development of the Lévy white noise analysis (including the Wick calculus in the framework of this analysis), and can be used, in particular, for solving of stochastic integral and differential equations with Wick-type nonlinearities on the spaces of regular generalized functions (examples of such equations are given in the last section of the chapter). It is worth noting that, as in the Gaussian analysis, the mentioned equations can be used for modelling of different physical processes.

The main results of the thesis are the following: in the thesis first

– bounded and unbounded operators of stochastic differentiation on the spaces of regular test and generalized functions of the Lévy white noise analysis, built using Lytvynov's generalization of the chaotic representation property, are introduced, properties of these operators are studied in detail;

– a relationship between the operators of stochastic differentiation on the spaces of regular and nonregular test functions of the Lévy white noise analysis is studied;

– the Wick product and the Wick versions of holomorphic functions on the spaces of regular generalized functions of the Lévy white noise analysis are introduced, properties of these operations are studied;

– it is proved that the operator of stochastic differentiation of first order is a differentiation (satisfies the Leibniz rule) with respect to the Wick multiplication;

– a relationship between the Wick calculus and the stochastic integration on the spaces of regular generalized functions of the Lévy white noise analysis is studied.

Key words: Lévy process, chaotic representation property, Hida stochastic derivative, extended stochastic integral, operator of stochastic differentiation, Wick calculus.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *Stochastic integrals with respect to a Levy process and stochastic derivatives on spaces of regular test and generalized function* // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" . – 2013. – № 4. – p. 27–30.
2. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *Operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized function in the Levy white noise analysis* // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" . – 2014. – № 4. – p. 36–40.
3. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized function in the Levy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2014. – Vol. 6, № 2. – p. 212 – 229.
4. Frei M.M., Kachanovsky N.A. *Some remarks on operators of stochastic differentiation in the Lévy white noise analysis* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2017. – Vol. 23, № 4, – p. 320–345.
5. Frei M.M. *Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Lévy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – Vol. 10, № 2. – p. 82–104.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дирів М. М. *Елементи віківського числення в аналізі білого шуму Леві* // Сімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 19–20 травня 2016 р.): Матеріали конференції II. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ "КПІ" . 2016. – С. 85–92.

2. Frei M. M., Kachanovsky N. A. *Some remarks on operators of stochastic differentiation in the Levy white noise analysis* // International Conference dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, Ukraine, 18–23 September 2017): Book of Abstracts. – Lviv: Ivan Franko National University. 2017. – C. 91–92.

3. Дирів М. М., Качановський М. О. *Про стохастичне диференціювання в аналізі білого шуму Леві* // Вісімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Луцьк – Київ, 7 – 10 жовтня 2017 року): Матеріли конференції. Том 1. – Київ: НТУУ "КПІ" . 2017. – С. 188–190.

4. Фрей М. М. *Про віківське числення в аналізі білого шуму Леві* // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 року): Матеріали конференції. – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. 2018. – С. 207–208.

5. Качановський М. О., Фрей М. М. *Про оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2019.— С. 42–43.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$L = (L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$	— процес Леві
$\|\cdot\|_H$ або $\vert\cdot\vert_H$	— норма в просторі H
$(\cdot,\cdot)_H$	— скалярний добуток в просторі H
$\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ або $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_H$	— дуальне спарювання, породжене скалярним добутком в просторі H
$\otimes$	— тензорний добуток
$\widehat{\otimes}$	— симетричний тензорний добуток
$\mathcal{D}$	— простір Шварца всіх дійснозначних нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}_+$, що мають компактні носії
$\mathcal{D}'$	— простір Шварца, спряжений до $\mathcal{D}$
(L^2)	— простір комплекснозначних квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій на $\mathcal{D}'$
1_A	— індикатор множини A
$:\langle\circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:$	— віківський моном
$H_{\mathbb{C}}$	— комплексифікація простору H
$\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$	— гільбертів простір, що є поповненням $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ відносно норми, що породжена скалярним добутком у (L^2) віківських мономів
$(L^2)_q^\beta$, $(L^2)^\beta$	— простори регулярних основних функцій
$(L^2)_{-q}^{-\beta}$, $(L^2)^{-\beta}$	— простори регулярних узагальнених функцій
$pr\lim\limits_{q\to+\infty}(L^2)_q^\beta$	— проективна границя сім'ї просторів $(L^2)_q^\beta$
$ind\lim\limits_{q\to+\infty}(L^2)_{-q}^{-\beta}$	— індуктивна границя сім'ї просторів $(L^2)_{-q}^{-\beta}$
$\int\limits_\Delta \circ(u)\hat{d}L_u$	— розширений стохастичний інтеграл

$1_\Delta(\cdot)\partial.$	—	стохастична похідна Хіди
D^n, $\mathbf{D}^n$, $\widetilde{D}^n$,$\widetilde{\mathbf{D}}^n$, $\widehat{D}^n$, $\widehat{\mathbf{D}}^n$	—	оператори стохастичного диференціювання
$\mathcal{H}$	—	простір дійснозначних квадратично інтегровних за мірою Лебега функцій на $\mathbb{R}_+$
$\diamond$, $\overline{\diamond}$	—	аналоги симетричного тензорного добутку на просторах $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ та $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно
$\Diamond$ та $\overline{\Diamond}$	—	віківські добутки на просторах $(L^2)^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно
$D_g^\diamond$	—	узагальнена похідна за напрямком g
$h^\Diamond$	—	віківська версія голоморфної функції h

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Дана робота відноситься до галузі нескінченновимірного аналізу і присвячена дослідженню операторів стохастичного диференціювання та віківського числення в аналізі білого шуму Леві.

Оператори стохастичного диференціювання, що вивчались, зокрема, у роботах К. Асе, Б. Оксендала, Н. Пріво та Ж. Убо [15], Ф. Бента [16], Г. Ді Нуно, Б. Оксендала та Ф. Проске [22], А. Устунела [68] та інших, відіграють важливу роль у гауссівському аналізі білого шуму. Ці оператори тісно пов'язані із розширеним стохастичним інтегралом Скорохода, зі стохастичною похідною Хіди, та з похідною Гросса. Зокрема, їх можна використовувати для вивчення властивостей розширеного стохастичного інтеграла.

Іншим важливим напрямом дослідження у гауссівському аналізі білого шуму є дослідження так званого віківського числення на просторах узагальнених функцій, тобто теорії, що вивчає природні аналоги поточкового добутку (віківський добуток) і голоморфних функцій (віківські версії голоморфних функцій) на згаданих просторах; а також стохастичні диференціальні та інтегральні рівняння з віківським добутком і віківськими версіями голоморфних функцій (стохастичні рівняння з нелінійностями віківського типу), які мають застосування, зокрема, у стохастичному аналізі та у математичній фізиці. Ця теорія розроблялась у роботах Ю. Г. Кондратьєвва, П. Леукерта та Л. Штрайта [50], І. Кубо, Х. Куо та А. Сенгупти [52], Т. Ліндстрьома, Б. Оксендала та Ж. Убо [53], Н. Обати [59, 60], та багатьох інших.

Варто відзначити, що для вивчення деяких властивостей розв'язків рівнянь з нелінійностями віківського типу застосовуються оператори стохастичного диференціювання. Зокрема, використовується той факт, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку є диференціюванням (тобто задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення.

Однак у різних розділах математики та фізики природним чином виникають не лише гауссівські випадкові процеси, тому існує необхідність у розбудові аналогів гауссівського аналізу білого шуму для негауссівських процесів та відповідних ймовірнісних мір. Одними із тих, що найбільш широко застосовуються, є процеси Леві (неперервні за ймовірністю випадкові процеси зі стаціонарними незалежними приростами). Головною проблемою при побудові аналізу білого шуму Леві є відсутність у процесів Леві (крім гауссівського та пуассонівського частинних випадків) так званої властивості хаотичного розкладу (ВХР), тобто можливості представити довільну квадратично інтегровну випадкову величину у вигляді ряду з повторних стохастичних інтегралів за процесом Леві від невипадкових функцій (як добре відомо, відповідна властивість грає ключову роль при побудові багатьох об'єктів гауссівського аналізу білого шуму). Тим не менш, існують різні аналоги згаданої властивості, запропоновані, зокрема, у роботах К. Іто [36], Є. В. Литвинова [54], Д. Нуаларта та В. Скоутенса [58], Ф. Бента, Г. Ді Нуно, А. Локки, Б. Оксендала та Ф. Проске [17] та інших. Зауважимо, що зв'язки між цими аналогами вивчаються у щойно згаданих статтях Є. В. Литвинова, Б. Оксендала зі співавторами, а також у роботах А. М. Вершика та Н. В. Цилевич [69], М. О. Качановського [44], Ж. Соле, Ф. Утзет та Ж. Вівес [66] та інших.

Один із аналогів ВХР у аналізі Леві, запропонований Є. В. Литвиновим [54], ґрунтується на розкладі квадратично інтегровних випадкових величин у ряди зі спеціальним чином побудованих ортогональних функцій, подібно до розкладу за поліномами Ерміта (еквівалентному розкладу за повторними стохастичними інтегралами Іто) у гауссівському аналізі. Пов'язаний з цим аналогом ВХР підхід до побудови аналізу білого шуму Леві є на сьогодні одним з найбільш цікавих та перспективних з точки зору застосувань; отже, розбудова теорії стохастичного диференціювання та віківського числення у його термінах є важливою та актуальною задачею, розв'язанню якої й присвячене дисертаційне дослідження.

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційного дослідження полягає у введенні операторів стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві та вивченні властивостей цих операторів; у введені віківського добутку і віківських версій голоморфних функцій на згаданих просторах регулярних узагальнених функцій та вивченні властивостей цих операцій; а також у вивченні зв'язку між віківським численням та стохастичним диференціюванням і стохастичним інтегруванням. Це дає можливість розширити на згаданий аналіз і поглибити відповідні результати гауссівського аналізу білого шуму, та створює підґрунтя для подальшої розбудови віківського числення та його застосувань у аналізі білого шуму Леві.

У відповідності до поставленої мети, сформульовано наступні *завдання* дослідження:

- увести оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві та встановити природні властивості цих операторів.

- увести віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій, встановити їх природні властивості.

- дослідити взаємозв'язок між віківським численням та операторами стохастичного диференціювання.

– дослідити взаємозв'язок між віківським численням та стохастичним інтегруванням.

Об'єктом дослідження є оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, та віківський добуток і віківські версії голоморфних функцій на згаданих просторах регулярних узагальнених функцій.

Предмет дослідження — властивості операторів стохастичного диференціювання, віківського добутку і віківських версій голоморфних функцій; а також взаємозв'язок між віківським численням та операторами стохастичного диференціювання і стохастичним інтегруванням.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії випадкових процесів, нескінченновимірного аналізу та теорії узагальнених функцій.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано наступні результати:

– уведено обмежені і необмежені оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, які побудовані з використанням узагальнення властивості хаотичного розкладу, запропонованого Є. В. Литвиновим, детально вивчено властивості цих операторів;

– вивчено взаємозв'язок між операторами стохастичного диференціювання на просторах регулярних та нерегулярних основних функцій аналізу білого шуму Леві;

– уведено віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, вивчено властивості цих операцій;

– доведено, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку є диференціюванням (задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення;

– вивчено зв'язок між віківським численням та стохастичним інтегруванням на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані для подальшої розбудови аналізу білого шуму Леві, зокрема, теорії стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу, які використовуються при моделюванні багатьох фізичних процесів.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, які виносяться на захист, належать автору дисертації. Науковому керівнику, М. О. Качановському, належать постановки задач, план досліджень та ідеї доведення деяких тверджень, опублікованих у сумісних роботах.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

– сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука(Київ, 19 – 20 травня 2016 р.);

– вісімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Луцьк - Київ, 7 – 10 жовтня 2017 р.);

– всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 р.);

– всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.);

– всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.,);

– всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 р.);

– міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю від дня народження Стефана Банаха (Львів, 18 – 23 вересня 2017 р.);

– VI всеукраїнській математичній конференції ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ – Микуличин, 26 – 28 вересня 2018 року);

– міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 року);

– шостій міжнародній науково-практичній конференції "Математика в сучасному технічному університеті" (Київ, 28 – 29 грудня 2017 року).

Також результати дисертації неодноразово доповідалися на семінарах факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника".

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 15 працях, з них 5 – у фахових виданнях [23–27], з яких 3 – у виданнях, включених до міжнародної наукометричної бази Scopus та/або Web of Science Core Collection [25–27] та 10 – у матеріалах наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації – 141 сторінка. Список використаних джерел займає 10 сторінок та містить 69 найменувань. Додатки займають 5 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

РОЗДІЛ 1
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Огляд літератури та результатів за тематикою дисертації

Гауссівський аналіз білого шуму, тобто аналіз на просторі квадратично інтегровних за гауссівською мірою функцій нескінченої кількості змінних та пов'язаних з ним просторах основних і узагальнених функцій, започатковано на початку XX сторіччя у роботах Л. Башельє та А. Ейнштейна; згодом більш строгий виклад з'явився у роботах Н. Вінера, П. Леві та інших. У сучасному розумінні ця теорія розроблялась, починаючи з 70-тих років минулого сторіччя, у роботах Ю.Г. Кондратьєва [7–10] (див. також [11, 12, 18, 51]) та, незалежно від нього, Т. Хіди [32, 33] (див. також [34, 68]), а також їх співробітників і учнів, згодом до цієї тематики підключилась велика кількість фахівців. На сьогодні згадана теорія має численні застосування у багатьох розділах математики та фізики.

Зауважимо, що ключову роль при побудові низки об'єктів гауссівського аналізу білого шуму (наприклад, розширеного стохастичного інтеграла [37, 65], стохастичної похідної Хіди [32], операторів стохастичного диференціювання [15, 16, 68]) відіграє так звана *властивість хаотичного розкладу* (ВХР), яка полягає, грубо кажучи, у тому, що кожну квадратично інтегровну випадкову величину можна представити у вигляді ряду з повторних стохастичних інтегралів Іто від невипадкових функцій (див. детальніше, наприклад, [57]).

У задачах, що виникають, зокрема, у стохастичному аналізі, математичній фізиці, теорії квантових полів, природним чином з'являються не лише гауссівські випадкові процеси. Тому існує необхідність у розбудові аналогів гауссівського аналізу білого шуму для негауссівських процесів та відповідних ймовірнісних мір. Одними із тих, що найбільш широко застосовуються, є так звані процеси Леві (неперервні за ймовірністю випадкові процеси зі стаціонарними незалежними приростами, див. детальніше [20, 61, 62]). Суттєвою проблемою при побудові аналізу білого шуму Леві є відсутність у процесів Леві (крім гауссівського та пуассонівського частинних випадків) ВХР [67]. Тим не менш, існують різні аналоги згаданої властивості, запропоновані, зокрема, у роботах [21, 22, 36, 54, 58, 63]. Зауважимо, що зв'язки між цими аналогами вивчаються у роботах [17, 21, 22, 44, 54, 66, 69] та ін.

Нехай L — процес Леві без гауссівської частини і зсуву. В роботі [44] побудовані розширений стохастичний інтеграл Скорохода по L і відповідна стохастична похідна Хіди у термінах узагальнення ВХР, запропонованого Є. В. Литвиновим [54], на просторі квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві випадкових величин (L^2) ; встановлено деякі властивості цих операторів; і показано, що розширені стохастичні інтеграли, побудовані з використанням різних узагальнень ВХР, співпадають. У роботах [24, 42] стохастичні інтеграл і похідна перенесені на простори основних і узагальнених функцій з оснащень (L^2) , це дає можливість розширити коло можливих застосувань цих операторів. Зокрема, тепер можна визначити стохастичний інтеграл і похідну Хіди як лінійні *неперервні* оператори.

Разом із згаданими операторами, природно ввести і вивчати оператори стохастичного диференціювання в аналізі білого шуму Леві, за аналогією з гауссівським аналізом [15, 16, 68], Гама-аналізом [38, 39] і аналізом Майкснера [40, 41]. Ці оператори тісно пов'язані з розширеним стохастичним інтегралом Скорохода по процесу Леві та з відповідною стохастичною похідною Хіди, і, за аналогією з гауссівським випадком, можуть бути використані, зокрема, для вивчення властивостей розширеного стохастичного інтеграла і властивостей розв'язків стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу.

Детальному вивченню операторів стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві присвячено другий розділ дисертації, відповідні результати опубліковано у роботах [23–25, 27].

Ще одним важливим об'єктом у гауссівському аналізі білого шуму є так зване віківське числення на просторах узагальнених функцій, тобто теорія, що вивчає природні аналоги поточкового добутку (віківський добуток) і голоморфних функцій (віківські версії голоморфних функцій) на згаданих просторах; а також стохастичні диференціальні та інтегральні рівняння з віківським добутком і віківськими версіями голоморфних функцій (стохастичні рівняння з нелінійностями віківського типу), які використовуються для моделювання фізичних процесів та мають численні застосування у різних розділах математики та фізики. Цим питанням присвячено, зокрема, роботи [50, 52, 53, 59, 60]. Численні узагальнення віківського числення на негауссівські випадки виконувались великою кількістю фахівців. Як приклад, можна згадати з цього приводу роботи [21, 22, 26, 45, 46, 55, 56].

У третьому розділі дисертації, за аналогією з [45], ми запровадили і вивчили віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві; а також розглянули приклади стохастичних інтегральних рівнянь з нелінійностями віківського типу.

1.2. Процеси Леві

Нехай $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$. Розглянемо дійснозначний локально квадратично інтегровний процес Леві $L = (L_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ без гауссівської частини і зсуву. Це неперервний за ймовірністю випадковий процес на $\mathbb{R}_+$ зі стаціонарними незалежними приростами, $L_0 = 0$ $[20, 61, 62]$. Відомо (див., наприклад, [22]), що характеристична функція для L має вигляд

$$\mathbb{E}[e^{i\theta L_t}] = \exp\left[t\int_{\mathbb{R}}(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x)\nu(dx)\right]. \tag{1.1}$$

Тут ν – міра Леві процесу L, тобто міра на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, де $\mathcal{B}$ – борелівська $\sigma-$ алгебра, $\mathbb{E}$ – математичне сподівання. Будемо вважати, що ν – *міра Радона, її носій містить нескінченну кількість точок,* $\nu(\{0\}) = 0$, існує $\varepsilon > 0$, *таке, що*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\varepsilon|x|}\nu(dx) < \infty,$$

і

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx) = 1. \tag{1.2}$$

Дамо визначення міри білого шуму процесу Леві L. Позначимо $\mathcal{D}$ – множину всіх дійснозначних нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}_+$, що мають компактні носії. Відомо, що на $\mathcal{D}$ можна ввести топологію проективної границі, яка породжена просторами Соболєва [19, с. 475]. Нехай $\mathcal{D}'$ – множина лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}$. Позначимо $\langle\omega, \varphi\rangle := \omega(\varphi)$, де $\omega \in \mathcal{D}'$ і $\varphi \in \mathcal{D}$. Відомо (див. наприклад, [19, с. 462]), що $\langle\cdot, \cdot\rangle$ можна розуміти як спарювання, породжене скалярним добутком в просторі $L^2(\mathbb{R}_+)$ квадратично інтегровних за мірою Лебега дійснозначних функцій на $\mathbb{R}_+$. Ми збережемо це позначення і для дуальних спарювань у тензорних степенях комплексифікації ланцюжка $\mathcal{D}' \supset L^2(\mathbb{R}_+) \supset \mathcal{D}$.

Означення 1.1. *Мірою білого шуму Леві називається ймовірнісна міра* μ *на* $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'))$ *(тут* $\mathcal{C}$ *– циліндрична* $\sigma-$ *алгебра), перетворення Фур'є якої має вигляд*

$$\int\limits_{\mathcal{D}'} e^{i\langle\omega,\,\phi\rangle}\mu(d\omega) = \exp\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} (e^{i\phi(u)x} - 1 - i\phi(u)x)du\nu(dx)\right],\ \phi \in \mathcal{D}. \quad (1.3)$$

Існування даної міри випливає з теореми Бохнера-Мінлоса [35].

Будемо вважати, що $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ поповнена відносно міри білого шуму Леві, тобто містить всі підмножини всіх вимірних множин O таких, що $\mu(O) = 0$.

Позначимо $(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$ – простір комплекснозначних квадратично інтегровних за μ функцій на $\mathcal{D}'$; і нехай $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$. За допомогою нижнього індексу $\mathbb{C}$ ми будемо позначати комплексифікації просторів. Наприклад, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – комплексифікація $\mathcal{H}$, елементами якої є функції вигляду $f + ig,\ f, g \in \mathcal{H}$. Будемо позначати через $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ дійсний (тобто білінійний) скалярний добуток в $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, тоді для $z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $\|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sqrt{(z,\,\bar{z})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}}$. Якщо підставити в (1.3) $\varphi = t\psi, t \in \mathbb{R}, \psi \in \mathcal{D}$, використати розклад Тейлора по t та врахувати (1.2), отримаємо

$$\int\limits_{\mathcal{D}'} \langle\omega,\,\psi\rangle^2\mu(d\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} (\psi(u))^2 du \quad (1.4)$$

(це випливає також з результатів робіт [54] і [22]). Позначимо через 1_A індикатор множини A . Використовуючи (1.4), можна довести (див., наприклад, [24]), що узагальнене спарювання

$$\langle \circ,\, 1_{[0,\,t)} \rangle := (L)^2 - \lim_{k\to\infty} \langle \circ,\, \varphi_k \rangle,$$

де $1_{[0,\,t)} \in \mathcal{H}$ і $\mathcal{D} \ni \varphi_k \to 1_{[0,\,t)}$ в $\mathcal{H}$ при $k \to \infty$, є коректно визначеним і його можна ототожнити з L_t , тобто розуміти $(\langle \circ,\, 1_{[0,\,t)} \rangle)_{t\in\mathbb{R}_+}$ як процес Леві на $(\mathcal{D}',\, \mathcal{C}(\mathcal{D}'),\, \mu)$. Зауважимо, що формально

$$L_t' = \langle \omega,\, 1_{[0,\,t)} \rangle' = \langle \omega,\, \delta_t \rangle = \omega(t),$$

тут δ_t – дельта-функція Дірака, сконцентрована в точці t . Отже, білий шум Леві L' є узагальненим випадковим процесом (у сенсі [30]) з траєкторіями з $\mathcal{D}'$, та μ є мірою L' у класичному сенсі [31].

1.3. Литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу

Позначимо $\widehat{\otimes}$ – симетричний тензорний добуток, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нехай $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{D}')$ – множина поліномів на $\mathcal{D}'$, що містить нуль та елементи вигляду

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N_f} \langle \omega^{\otimes n},\, f^{(n)} \rangle,\ \omega \in \mathcal{D}',\, N_f \in \mathbb{Z}_+,\, f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n},\, f^{(N_f)} \neq 0,$$

тут N_f – степінь полінома f ;

$$\langle \omega^{\otimes 0},\, f^{(0)} \rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 0} := \mathbb{C}.$$

Міра білого шуму Леві μ має голоморфне у нулі перетворення Лапласа (це випливає з властивостей міри Леві і з (1.3), також див. [54]), тому $\mathcal{P}$ є щільною множиною в (L^2) [64].

Нехай $\mathcal{P}_n$ – множина поліномів степеня не більше n , а $\overline{\mathcal{P}}_n$ – замикання $\mathcal{P}_n$ в (L^2) . Позначимо

$$\mathbf{P}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$$

(ортогональна різниця в (L^2)), $\mathbf{P}_0 := \overline{\mathcal{P}}_0$. Бачимо, що

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n.$$

Для $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, n \in \mathbb{Z}_+$, позначимо через $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$ ортогональну проекцію монома $\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$ на $\mathbf{P}_n$. Визначимо дійсні (тобто білінійні) скалярні добутки $(\cdot, \cdot)_{ext}$ в $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ [54], поклавши для $n \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{ext} := \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{D}'} :\langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :: \langle \omega^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle : \mu(d\omega).$$

Нехай $|\cdot|_{ext}$ – відповідні норми, тобто

$$|f^{(n)}|_{ext} = \sqrt{(f^{(n)}, \overline{f^{(n)}})_{ext}}.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, поповнення $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ відносно норми $|\cdot|_{ext}$.

Для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ визначимо віківський моном

$$:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle : \stackrel{def}{=} (L^2) - \lim_{k \to \infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f_k^{(n)} \rangle :,$$

де $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \to F^{(n)}$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$.

Доведемо коректність даного визначення. Спочатку покажемо, що послідовність

$$:\langle \circ^{\otimes n},\, f_k^n \rangle :,\; k \in \mathbb{N}$$

є збіжною у (L^2) . Оскільки простір (L^2) є гільбертів (а тому, зокрема, повний), достатньо встановити її фундаментальність. Скористаємось зв'язком між нормами у (L^2) та $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, тобто

$$\| :\langle \circ^{\otimes n},\, f_k^{(n)} \rangle : \|_{(L^2)}^2 = n! |f_k^{(n)}|_{ext}^2.$$

Розглянемо різниці мономів та порахуємо їх норми у (L^2) , матимемо

$$\| :\langle \circ^{\otimes n},\, f_k^{(n)} \rangle : - :\langle \circ^{\otimes n},\, f_l^{(n)} \rangle : \|_{(L^2)}^2 =$$

$$= \| :\langle \circ^{\otimes n},\, f_k^{(n)} - f_l^{(n)} \rangle : \|_{(L^2)}^2 =$$

$$= n! |f_k^{(n)} - f_l^{(n)}|_{ext}^2 \to 0 \,\text{при}\, k,\, l \to \infty.$$

Отже, існує границя

$$:\langle \circ^{\otimes n},\, F^{(n)} \rangle := \lim_{k \to \infty} :\langle \circ^{\otimes n},\, f_k^{(n)} \rangle :$$

у просторі (L^2) .

Далі, методом "змішаних послідовностей" встановимо незалежність $:\langle \circ^{\otimes n},\, F^{(n)} \rangle :$ від вибору послідовності, що апроксимує $F^{(n)}$.

Нехай $\widetilde{f_k^{(n)}} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n},\, k \in \mathbb{N}$ – інша послідовність гладких ядер така, що $\widetilde{f_k^{(n)}} \to F^{(n)}$ та, відповідно,

$$:\langle \circ^{\otimes n}, \widetilde{f_k^{(n)}}\rangle :\to :\langle \widetilde{\circ^{\otimes n}, F^{(n)}}\rangle :\in (L^2)$$

при $k \to \infty$.

Розглянемо змішану послідовність $f_1^{(n)}, \widetilde{f_1^{(n)}}, f_2^{(n)}, \widetilde{f_2^{(n)}}, \dots$. Зрозуміло, що вона також прямує до $F^{(n)}$.

Отже,

$$:\langle \circ^{\otimes n}, f_1^{(n)}\rangle :, :\langle \circ^{\otimes n}, \widetilde{f_1^{(n)}}\rangle :, :\langle \circ^{\otimes n}, f_2^{(n)}\rangle :, :\langle \circ^{\otimes n}, \widetilde{f_2^{(n)}}\rangle : \dots$$

прямує до деякої $:\langle \widehat{\circ^{\otimes n}, F^{(n)}}\rangle :\in (L^2)$. Але тоді

$$:\langle \widehat{\circ^{\otimes n}, F^{(n)}}\rangle : =:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle :$$

та

$$:\langle \widehat{\circ^{\otimes n}, F^{(n)}}\rangle : = :\langle \widetilde{\circ^{\otimes n}, F^{(n)}}\rangle :,$$

оскільки границя підпослідовності співпадає з границею послідовності.

Для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ множина $\{:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle :|\ f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}\}$ щільна в $\mathbf{P}_n$, тому справедлива наступна теорема про литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу (ВХР).

Теорема 1.1 (Є. В. Литвинов [54])**.** *Випадкова величина $F \in (L^2)$ тоді і тільки тоді, коли існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, така, що*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle : \tag{1.5}$$

(ряд збігається в (L^2) *) та*

$$\|F\|^2_{(L^2)} = \int\limits_{D'} |F(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \mathbb{E}|F|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty.$$

Отже, для $F, G \in (L^2)$ (дійсний) скалярний добуток запишеться у вигляді

$$(F, G)_{(L^2)} = \int\limits_{D'} F(\omega)G(\omega)\mu(d\omega) = \mathbb{E}[FG] = \sum_{n=0}^{\infty} n!(F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ – ядра з розкладу (1.5) для F і G відповідно. Зокрема, для $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ і $G^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$(:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle :, :\langle \circ^{\otimes m}, G^{(m)}\rangle :)_{(L^2)} = \int\limits_{D'} :\langle \omega^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle :: \langle \omega^{\otimes m}, G^{(m)}\rangle : \mu(d\omega)$$

$$= \mathbb{E}[:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle :: \langle \circ^{\otimes m}, G^{(m)}\rangle :] = \delta_{n,m} n!(F^{(n)}, G^{(n)})_{ext}.$$

Також в просторі (L^2)

$$:\langle \circ^{\otimes 0}, F^{(0)}\rangle := \langle \circ^{\otimes 0}, F^{(0)}\rangle = F^{(0)}$$

і

$$:\langle \circ, F^{(1)}\rangle := \langle \circ, F^{(1)}\rangle \text{ [54].}$$

Для подальшої роботи з просторами $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, випишемо явні формули для скалярних добутків $(\cdot,\,\cdot)_{ext}$ [25, 54]. При $n=0$ матимемо $(F^{(0)},G^{(0)})_{\mathcal{H}_{ext}^{(0)}}=F^{(0)}\cdot G^{(0)}$. Позначимо $\|\cdot\|_\nu$ – норма в просторі $L^2(\mathbb{R},\,\nu)$ квадратично інтегровних за мірою ν дійснозначних функцій на $\mathbb{R}$. Нехай

$$p_n(x):=x^n+a_{n,\,n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{n,\,1}x,\ a_{n,\,j}\in\mathbb{R},\ j\in\{1,\ldots,n-1\},n\in\mathbb{N}, \tag{1.6}$$

ортогональні поліноми в $L^2(\mathbb{R},\,\nu)$, тобто для натуральних чисел $n,\,m$, $n\neq m$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}}p_n(x)p_m(x)\nu(dx)=0.$$

Для $F^{(n)},\,G^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)},\,n\in\mathbb{N}$, за аналогією з [54], отримаємо

$$\begin{gathered}(F^{(n)},\,G^{(n)})_{ext}=(F^{(n)},\,G^{(n)})_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}}=\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:j=1,\ldots,k,\,l_1>l_2>\cdots>l_k,\\ l_1s_1+\cdots+l_ks_k=n}}\frac{n!}{s_1!\ldots s_k!}\\ \times\left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1}\cdots\left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k}\\ \times\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}}F^{(n)}(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1},\ldots,u_{s_1}}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\ldots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\\ \times G^{(n)}(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1},\ldots,u_{s_1}}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\ldots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\\ \times du_1\ldots du_{s_1+\cdots+s_k}.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Зокрема, при $n=1$

$$(F^{(1)}, G^{(1)})_{ext} = \|p_1\|_\nu^2 \langle F^{(1)}, G^{(1)} \rangle = \langle F^{(1)}, G^{(1)} \rangle,$$

оскільки з (1.6) випливає, що $p_1(x) = x$ і, отже, в силу (1.2) $\|p_1\|_\nu = 1$; якщо $n = 2$, то

$$(F^{(2)}, G^{(2)})_{ext} = \|p_1\|_\nu^4 \langle F^{(2)}, G^{(2)} \rangle + \frac{\|p_2\|_\nu^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}_+} f^{(2)}(u, u) g^{(2)}(u, u) du,$$

і т. д.

З (1.7) випливає, що

$$\mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \equiv L^2(\mathbb{R}_+)_{\mathbb{C}}.$$

Простір $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ для $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ можна розуміти як власний підпростір $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, який складається із елементів, що "зникають на діагоналях" (тобто, грубо кажучи, $F^{(n)}(u_1, \ldots, u_n) = 0$ якщо існують такі $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, що $k \neq j$, але $u_k = u_j$). В цьому сенсі $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ є розширенням $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ (саме тому використовується індекс ext в позначеннях $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $(\cdot, \cdot)_{ext}$ і $|\cdot|_{ext}$).

1.4. Регулярне оснащення (L^2)

Позначимо

$$\mathcal{P}_W := \{f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :, \, f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, \, N_f \in \mathbb{Z}_+\} \subset (L^2).$$

За умовчанням приймаємо $\beta \in [0, 1], q \in \mathbb{Z}$ у випадку коли $\beta \in (0, 1]$, і $q \in \mathbb{Z}_+$ якщо $\beta = 0$. Визначимо скалярні добутки $(\cdot, \cdot)_{q, \beta}$ на $\mathcal{P}_W$.

Покладемо для

$$f = \sum_{n=0}^{N_f} : \langle \circ^{\otimes n},\, f^{(n)} \rangle :,\;\; g = \sum_{n=0}^{N_g} : \langle \circ^{\otimes n},\, g^{(n)} \rangle :\in \mathcal{P}_W$$

$$(f,\, g)_{q,\,\beta} = \sum_{n=0}^{\min(N_f,\, N_g)} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (f^{(n)},\, g^{(n)})_{ext}.$$

Тут $(f,\, \overline{f})_{q,\,\beta} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f = 0$ в (L^2) . Справді,

$$(f,\, \overline{f})_{q,\,\beta} = \sum_{n=0}^{N_f} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} = 0$$

тоді і тільки тоді, коли $|f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} = 0$ для кожного $n \in \{0, \ldots, N_f\}$, тобто

$$\|f\|^2_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{N_f} n! |f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} = 0,$$

отже, $f = 0$ в (L^2) . В результаті ми визначили саме скалярні добутки, а не квазіскалярні.

Позначимо $\|\cdot\|_{q,\,\beta}$ – норми, що породжені скалярними добутками, тобто

$$\|f\|_{q,\,\beta} = \sqrt{(f,\, \overline{f})_{q,\,\beta}}.$$

Означення 1.2. *Назвемо параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних основних функцій* $(L^2)^\beta_q$ *поповнення* $\mathcal{P}_W$ *за нормами* $\|\cdot\|_{q,\,\beta}$ *; нехай також*

$$(L^2)^\beta := pr \lim_{q\to+\infty} (L^2)^\beta_q$$

(проективна границя просторів) [18, 19].

Зрозуміло, що $F \in (L^2)^\beta_q$ якщо і тільки якщо F можна представити у вигляді (1.5) з $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ і

$$\|F\|^2_{q,\,\beta} := \|F\|^2_{(L^2)^\beta_q} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty; \tag{1.8}$$

а для $F,\, G \in (L^2)^\beta_q$

$$(F,\, G)_{(L^2)^\beta_q} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (F^{(n)},\, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ – ядра з розкладу (1.5) для F і G відповідно. Також $F \in (L^2)^\beta$ якщо і тільки якщо F можна представити у вигляді (1.5) і норма (1.8) є скінченною для всіх $q \in \mathbb{Z}_+$.

Твердження 1.1 (М. О. Качановський [42])**.** *Для всіх $\beta \in (0, 1]$ і $q \in \mathbb{Z}$ (так само, як і для $\beta = 0$ і $q \in \mathbb{Z}_+$) простір $(L^2)^\beta_q$ щільно і неперервно вкладений в (L^2) .*

Тепер можемо розглянути ланцюжок

$$(L^2)^{-\beta} \supset (L^2)^{-\beta}_{-q} \supset (L^2) \supset (L^2)^\beta_q \supset (L^2)^\beta, \tag{1.9}$$

де

$$(L^2)^{-\beta}_{-q},\ (L^2)^{-\beta} = ind \lim_{q\to+\infty} (L^2)^{-\beta}_{-q}$$

(індуктивна границя просторів) [18,19] – дуальні простори до $(L^2)^\beta_q$, $(L^2)^\beta$ відповідно, відносно (L^2) .

Означення 1.3. *Простори* $(L^2)^{-\beta}_{-q}$, $(L^2)^{-\beta}$ *називаються параметризованими просторами типу Кондратьєва регулярних узагальнених функцій.*

З означення просторів $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ і загальної теорії дуальності випливає наступне твердження.

Твердження 1.2 (М. О. Качановський [42]). *1) Будь-яка регулярна узагальнена функція* $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *може бути представлена як формальний ряд* (1.5) *(з коефіцієнтами* $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *), який збігається в* $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ *, тобто,*

$$\|F\|^2_{-q,-\beta} := \|F\|^2_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-qn} |F^{(n)}|^2_{ext} < \infty, \qquad (1.10)$$

і, навпаки, будь-який формальний ряд (1.5) *з скінченною нормою* (1.10) *є регулярною узагальненою функцією з* $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ *;*

2) для $F, G \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *скалярний добуток має вигляд*

$$(F, G)_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-qn} (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *– ядра з розкладів* (1.5) *для* F *і* G *відповідно;*

3) дуальне спарювання між $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ *і* $f \in (L^2)^{\beta}_{q}$ *, породжене скалярним добутком у* (L^2) *, має вигляд*

$$\langle\langle F, f \rangle\rangle_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! (F^{(n)}, f^{(n)})_{ext}, \qquad (1.11)$$

де $F^{(n)}, f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *– ядра з розкладів* (1.5) *для* F *і* f *відповідно;*

4) $F \in (L^2)^{-\beta}$ *якщо і тільки якщо* F *можна представити у вигляді* (1.5) *і норма* (1.10) *є скінченною для деякого* $q \in \mathbb{Z}_+$ *.*

Далі, у цьому та наступному розділах, позначено простори $(L^2)_q^\beta$, $(L^2) = (L^2)_0^0$, $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ з ланцюжка (1.9) через $(L^2)_q^\beta$, $\beta \in [-1, 1]$, $q \in \mathbb{Z}$ (приймаємо це за умовчанням). В цих просторах норми матимуть вигляд (1.8). Зауважимо, що термін "регулярні узагальнені функції" застосовуємо до елементів просторів $(L^2)_{-q}^{-\beta}$ та $(L^2)^{-\beta}$, бо ядра з розкладів (1.5) для цих елементів і ядра з розкладів (1.5) для регулярних основних функцій належать до одних і тих самих просторів.

1.5. Стохастичні інтеграли

Розклад (1.5) для елементів $(L^2)_q^\beta$ визначає ізометричний ізоморфізм (узагальнений ізоморфізм Вінера-Іто-Сігала)

$$\mathbf{I} : (L^2)_q^\beta \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} \mathcal{H}_{ext}^{(n)},$$

де

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$$

– зважений розширений простір Фока. Тобто, для $F \in (L^2)_q^\beta$ з розкладом (1.5):

$$\mathbf{I}F = (F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(n)}, \dots) \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} \mathcal{H}_{ext}^{(n)}.$$

Позначимо $\mathbf{1} : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – тотожний оператор. Тоді оператор

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{1} : (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}})$$

є ізометричним ізоморфізмом між просторами $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ і

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}).$$

Для будь-яких $m \in \mathbb{Z}_+$ і $F.^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, вектор

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, F.^{(m)}, 0, \ldots)$$

належить

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} (\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}).$$

Покладемо

$$: \langle \circ^{\otimes m}, F.^{(m)} \rangle : \stackrel{def}{=} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{1})^{-1} (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, F.^{(m)}, 0, \ldots) \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}. \qquad (1.12)$$

Так побудовані елементи $: \langle \circ^{\otimes m}, F.^{(m)} \rangle :$, $m \in \mathbb{Z}_+$, утворюють ортогональний базис в просторі $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Отже, $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ можна представити у вигляді

$$F(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} : \langle \circ^{\otimes n}, F.^{(n)} \rangle :, \; F.^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \qquad (1.13)$$

(ряд збігається в $(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$), з

$$\|F\|^2_{(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}|F^{(n)}_\cdot|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} < \infty. \tag{1.14}$$

Далі, розглянемо ланцюжок (порівнюючи з (1.9))

$$(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C} \supset (L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C} \supset (L^2)^{\beta}_{q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C},$$

тут $\beta\in[0,1]$, $q\in\mathbb{Z}$ якщо $\beta>0$ або $q\in\mathbb{Z}_+$ якщо $\beta=0$. Зрозуміло, що дуальне спарювання між $F\in(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$ і $f\in(L^2)^{\beta}_{q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, породжене скалярним добутком в $(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, має форму

$$\langle\!\langle F,f\rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \sum_{n=0}^{\infty} n!(F^{(n)}_\cdot, f^{(n)}_\cdot)_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}}, \tag{1.15}$$

де $F^{(n)}_\cdot, f^{(n)}_\cdot\in\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$ – ядра з розкладу (1.13) для F і f відповідно (порівнюючи з (1.11)).

Розглянемо конструкцію розширеного стохастичного інтеграла, що базується на розкладі (1.13) (детальніше див. [42, 44]).

Для $F^{(n)}_\cdot\in\mathcal{H}^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N},$ виберемо представника (функцію) $\dot{f}^{(n)}_\cdot\in F^{(n)}_\cdot$, такого, що

$$\dot{f}^{(n)}_u(u_1,\ldots,u_n)=0,\ \text{якщо існує}\ k\in\{1,\ldots,n\},\ u=u_k. \tag{1.16}$$

Нехай $\Delta\subseteq\mathbb{R}_+$ – борелівська множина (елемент σ -алгебри, яка породжена відкритими множинами) і $\widehat{f}^{(n)}_\Delta$ – симетризація $\dot{f}^{(n)}_\cdot 1_\Delta(\cdot)$ за $n+1$ змінною. Визначимо $\widehat{F}^{(n)}_\Delta\in\mathcal{H}^{(n+1)}_{ext}$ як клас еквівалентності в $\mathcal{H}^{(n+1)}_{ext}$, породжений $\widehat{f}^{(n)}_\Delta$ (тобто $\widehat{f}^{(n)}_\Delta\in\widehat{F}^{(n)}_\Delta$).

Лема 1.1 (М. О. Качановський [42, 44])**.** *Для кожного*

$$F_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}},\ n \in \mathbb{N},$$

елемент $\widehat{F}_{\Delta}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ *коректно визначений (зокрема,* $\widehat{F}_{\Delta}^{(n)}$ *не залежить від вибору представника* $\dot{f}_\cdot^{(n)} \in F_\cdot^{(n)}$ *, який задовольняє* (1.16)*) і*

$$|\widehat{F}_{\Delta}^{(n)}|_{ext} \le |F_\cdot^{(n)} 1_{\Delta}(\cdot)|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le |F_\cdot^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{1.17}$$

Означення 1.4. *Визначимо розширений стохастичний інтеграл*

$$\int_{\Delta} \circ(u)\hat{d}L_u : (L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)_{q-1}^{\beta} \tag{1.18}$$

формулою

$$\int_{\Delta} F(u)\hat{d}L_u := \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}_{\Delta}^{(n)} \rangle :, \tag{1.19}$$

де

$$\widehat{F}_{\Delta}^{(0)} := F_\cdot^{(0)} 1_{\Delta}(\cdot) \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{ext}^{(1)},$$

і $\widehat{F}_{\Delta}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}, n \in \mathbb{N}$ *, побудовані за ядрами* $F_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *з розкладу* (1.13) *для* F *.*

Даний інтеграл є лінійним неперервним оператором (детальніше див. [24, 42]). Більш того, якщо F є інтегровною за Іто функцією (тобто $F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ і узгоджена з потоком σ -алгебр, породжених процесом Леві L), то F буде інтегровною і у розширеному сенсі і

$$\int\limits_{\Delta} F(u)\hat{d}L_u = \int\limits_{\Delta} F(u)dL_u \in (L^2),$$

де

$$\int\limits_{\Delta} F(u)dL_u$$

– стохастичний інтеграл Іто (детальніше див. [44]) (це пояснює, чому інтеграл

$$\int\limits_{\Delta} F(u)\hat{d}L_u$$

називається *розширеним*).

Також можна визначати розширений стохастичний інтеграл за формулою (1.19) як лінійний оператор

$$\int\limits_{\Delta} \circ\hat{d}L_u : (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)_q^\beta \tag{1.20}$$

Якщо $\beta = -1$, то цей оператор неперервний [42], для $\beta \in (-1, 1]$ це не так. Але якщо ми приймемо множину

$$\left\{ F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} : \left\| \int\limits_{\Delta} F(u)\hat{d}L_u \right\|_{q,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)!)^{1+\beta} 2^{q(n+1)} |\widehat{F}_{\Delta}^{(n)}|_{ext}^2 < \infty \right\}$$

як область визначення інтеграла (1.20), то останній буде замкненим оператором [24, 42]. Також розширений стохастичний інтеграл можна визначити за формулою (1.19) як лінійний неперервний оператор, що діє з

$$(L^2)^\beta \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} := pr \lim_{q\to+\infty} (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$$

в $(L^2)^\beta$, або з

$$(L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C} := ind \lim_{q\to+\infty} (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$$

в $(L^2)^{-\beta}$, тут $\beta \in [0, 1]$.

Зауваження 1.1. *З вищесказаного випливає, що*

$$\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u = \int_{\mathbb{R}_+} F(u)1_\Delta(u)\widehat{d}L_u. \tag{1.21}$$

Це представлення можна використати для важливого узагальнення. Нехай функція

$$F : \mathbb{R}_+ \to (L^2)^{-\beta},\ \beta \in [0, 1],$$

така, що $F(\cdot) \notin (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ *, але для деяких* $\Theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ *(наприклад, таких, що міра Лебега для* Θ *є скінченною)* $F(\cdot)1_\Theta(\cdot) \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ *(такі функції часто виникають в задачах; наприклад, в теорії стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу). Тепер для будь-яких вимірних* $\Delta \subseteq \Theta$ *можна визначити*

$$\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u$$

за формулою (1.21). *Зрозуміло, що все вищесказане залишається справедливим (з точністю до очевидних модифікацій) для всіх згаданих стохастичних інтегралів.*

1.6. Стохастичні похідні

Нагадаємо поняття стохастичної похідної Хіди в аналізі білого шуму Леві у термінах литвинівського узагальнення ВХР [24, 42, 44]. Нехай $\Delta \subseteq \mathbb{R}_+$ – борелівська множина.

Означення 1.5. *Визначимо стохастичну похідну Хіди*

$$1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot : (L^2)^{-\beta}_{1-q} \to (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$$

як лінійний неперервний оператор, спряжений до розширеного стохастичного інтеграла (1.18), *тобто для всіх* $F \in (L^2)^{\beta}_{q} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ *і* $G \in (L^2)^{-\beta}_{1-q}$

$$\langle\langle F(\cdot),\, 1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot G\rangle\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \langle\langle \int_\Delta F(u)\hat{d}L_u,\, G\rangle\rangle_{(L^2)}.$$

Коли замість (1.18) використовують інтеграл (1.20), то відповідна стохастична похідна Хіди буде лінійним необмеженим (окрім випадку, коли $\beta = -1$), але замкненим оператором з областю визначення

$$dom\,(1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot) = \{G \in (L^2)^{-\beta}_{-q} :$$

$$\|1_\Delta(\cdot)\partial_\cdot G\|^2_{(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}(n+1)^2 2^{-qn}|G^{(n+1)}(\cdot)1_\Delta(\cdot)|^2_{H^{(n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} < \infty\}.$$

Також стохастичну похідну Хіди можна визначати як лінійний неперервний оператор, що діє з $(L^2)^{\beta}$ в $(L^2)^{\beta}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$ $(\beta \in [-1,\, 1])$ і є спряженим до відповідного розширеного стохастичного інтеграла. Більше того, справедливе таке твердження.

Теорема 1.2 (М. О. Качановський, М. М. Фрей [24]). *Наступні оператори є спряженими один до одного:*

$$\int_{\Delta} \circ(u)\hat{d}L_u : (L^2)^{\beta}_{q+1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{\beta}_{q} \text{ } \textit{та} \text{ } 1_{\Delta}(\cdot)\partial_{\cdot} : (L^2)^{-\beta}_{-q} \to (L^2)^{-\beta}_{-q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}};$$

$$\int_{\Delta} \circ(u)\hat{d}L_u : (L^2)^{\beta}_{q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{\beta}_{q} \text{ } \textit{та} \text{ } 1_{\Delta}(\cdot)\partial_{\cdot} : (L^2)^{-\beta}_{-q} \to (L^2)^{-\beta}_{-q} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Для того, щоб виписати явну формулу для стохастичної похідної Хіди у термінах розкладів за віківськими мономами, потрібна певна підготовка. Для $G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, n \in \mathbb{N}$, виберемо довільного представника $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$. Відокремивши один аргумент $\dot{g}^{(n)}$, матимемо $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$, і далі визначимо $G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ як клас еквівалентності у $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, породжений $\dot{g}^{(n)}(\cdot)$ (тобто $\dot{g}^{(n)}(\cdot) \in G^{(n)}(\cdot)$).

Лема 1.2 (М. О. Качановський, [44]). *Для кожного* $G^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, n \in \mathbb{N}$, *елемент* $G^{(n)}(\cdot) \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *є коректно визначеним (зокрема,* $G^{(n)}(\cdot)$ *не залежить від вибору представника* $\dot{g}^{(n)} \in G^{(n)}$ *) і*

$$|G^{(n)}(\cdot)|_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq |G^{(n)}|_{ext}. \tag{1.22}$$

Зауважимо, що простір $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, не можна вважати підпростором $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (не зважаючи на (1.22)), бо різні елементи з $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ можуть співпадати як елементи з $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Твердження 1.3 (М. О. Качановський, М. М. Фрей [24, 42, 44]). *Для основної або квадратично інтегровної або узагальненої функції* G *ви-*

гляду (1.5)

$$1_\Delta(\cdot)\partial.G=\sum_{n=1}^{\infty}n:\langle\circ^{\otimes(n-1)},\,G^{(n)}(\cdot)1_\Delta(\cdot)\rangle:\equiv$$
$$\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(n+1):\langle\circ^{\otimes n},\,G^{(n+1)}(\cdot)1_\Delta(\cdot)\rangle:. \tag{1.23}$$

РОЗДІЛ 2
ОПЕРАТОРИ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

2.1. Стохастичне диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій

2.1.1. Випадок обмежених операторів

Для того, щоб визначити оператори стохастичного диференціювання на просторах $(L^2)_q^\beta$, потрібна певна підготовка. Нагадаємо, що ми прийняли за умовчанням $\beta \in [-1, 1]$, $q \in \mathbb{Z}$ і нехай $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо функцію $H : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$. Позначимо

$$\widetilde{H}(u_1, \dots, u_n; u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) :=$$

$$:= \begin{cases} H(u_1, \dots, u_{n+m}), \text{ якщо } \underset{\forall j \in \{n+1,\dots,n+m\}}{\overset{\forall i \in \{1,\dots,n\}}{}} {}_{u_i \neq u_j}, \\ \\ 0, \text{ в інших випадках} \end{cases}, \tag{2.1}$$

Виберемо довільних представників $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)} \in G^{(m)}$ з класів еквівалентності $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$, та покладемо

$$\widetilde{f^{(n)} g^{(m)}} := \dot{f}^{(n)} \cdot \dot{g}^{(m)}. \tag{2.2}$$

Нехай $\widehat{f^{(n)} g^{(m)}}$ – симетризація $\widetilde{f^{(n)} g^{(m)}}$ за всіма змінними, $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ – клас еквівалентності в $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$, породжений $\widehat{f^{(n)} g^{(m)}}$ (тобто, $\widehat{f^{(n)} g^{(m)}} \in F^{(n)} \diamond G^{(m)}$).

Наступне твердження в певному сенсі є узагальненням леми 1.1.

Лема 2.1 ([23], [25]). *Елемент* $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ *є коректно визначеним (зокрема,* $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ *не залежить від вибору представників* $F^{(n)}$ *та* $G^{(m)}$ *) і справедлива оцінка*

$$|F^{(n)} \diamond G^{(m)}|_{ext} \leq |F^{(n)}|_{ext}|G^{(m)}|_{ext}. \tag{2.3}$$

Зауваження 2.1. *Нестрого кажучи,* $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ *є симетризацією функції*

$$\begin{cases} F^{(n)}(u_1, \ldots, u_n)G^{(m)}(u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}), \ \textit{якщо} \ {}_{\forall j \in \{n+1,\ldots,n+m\}}^{\forall i \in \{1,\ldots,n\}} \ {}_{u_i \neq u_j}, \\ 0, \ \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

за всіма аргументами.

Доведення. Для $n = 0$ чи $m = 0$ лема є, очевидно, справедливою. Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)} \in G^{(m)}$. Зрозуміло, що

$$\begin{gathered} \widehat{f^{(n)} g^{(m)}}(u_1, \ldots, u_n; u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}) = \\ = \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\pi \in S_{n+m}} \widetilde{f^{(n)} g^{(m)}}(u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(n+m)}), \end{gathered} \tag{2.4}$$

де S_{n+m} – множина всіх перестановок чисел $1, \ldots, n+m$. Без втрати загальності можна вважати, що $\dot{f}^{(n)}$ та $\dot{g}^{(m)}$ є симетричними функціями, і $m \geq n$. Для кожного набору аргументів $u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(n)}$ ми розглянемо всі доданки з суми (2.4) з таким набором (зрозуміло, що є $m!$ таких доданків). Беручи до уваги симетричність $\dot{g}^{(m)}$, можна зробити висновок, що всі ці доданки рівні між собою, тому їх можна замінити на добуток одного з них на $m!$. Після цього, скориставшись за аналогією симетричністю $\dot{f}^{(n)}$, перепишемо рівність (2.4) у вигляді

$$\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(u_1,\dots,u_n;u_{n+1},\dots,u_{n+m}) = \frac{n!m!}{(n+m)!}\times$$

$$\times \sum_{\substack{1\le p_1,\dots,p_n\le n, n+1\le q_1,\dots,q_m\le n+m \\ 0\le r\le n, p_1<\dots<p_r, p_{r+1}<\dots<p_n, q_1<\dots<q_{n-r}, q_{n-r+1}<\dots<q_m}} \widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(u_{p_1},\dots,u_{p_r},u_{q_1},\dots,u_{q_{n-r}};$$

$$u_{p_{r+1}},\dots,u_{p_n},u_{q_{n-r+1}},\dots,u_{q_m}) \tag{2.5}$$

(тут для $r=n$ аргумент у правій частині (2.5) $(u_1,\dots,u_n;u_{n+1},\dots,u_{n+m})$; для $r=0$ цей аргумент $(u_{q_1},\dots,u_{q_n};u_1,\dots,u_n,u_{q_{n+1}},\dots,u_{q_m})$). Іншими словами, аргументами $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ у сумі (2.5) є u_j , $j\in\{1,\dots,n+m\}$, де індекси перших n і останніх m аргументів (до та після ';') (незалежно) впорядковані по зростанню. (Зауважимо, що ми вибрали впорядковування за зростанням індексів, коли використовували симетричність $\dot{f}^{(n)}$ і $\dot{g}^{(m)}$, тому, що це зручно для подальших обчислень.)

Оцінимо $|\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}|_{ext}$. Підставляючи (2.5) у вираз для $|\cdot|_{ext}$ (див. (1.7)), отримаємо

$$|\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}|^2_{ext} = \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}: j=1,\dots,k, l_1>l_2>\dots>l_k, \\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n+m}} \frac{(n+m)!}{s_1!\dots s_k!}\left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1}\dots\left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} |\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2\times$$

$$\times du_1\dots du_{s_1+\dots+s_k}\le$$

$$\le \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}: j=1,\dots,k, l_1>\dots>l_k, \\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n+m}} \frac{(n+m)!}{s_1!\dots s_k!}\left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1}\dots\left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k}\left(\frac{n!m!}{(n+m)!}\right)^2$$

$$\times\frac{(n+m)!}{n!m!}\Big[\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}|\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2\times$$

$$\times du_1\dots du_{s_1+\dots+s_k}+\dots\Big]=$$

$$=\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:j=1,\dots,k,l_1>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n+m}}\frac{n!m!}{s_1!\dots s_k!}\left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1}\dots\left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k}\times$$

$$\times\Big[\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}}|\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2\times$$

$$\times du_1\dots du_{s_1+\dots+s_k}+\dots\Big] \tag{2.6}$$

(тут використана нерівність

$$|\sum_{l=1}^{p}a_l|^2\leq p\sum_{l=1}^{p}|a_l|^2$$

і той факт, що сума у правій частині (2.5) містить $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ доданків). Набори рівних аргументів (наприклад, $\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1})$ називатимемо *кортежами.* З впорядкованості за зростанням індексів у (2.5) і у виразі для $|\cdot|_{ext}$ (див. (2.6)) випливає, що у доданках у внутрішніх сумах $[\dots]$ з (2.6) кортежі можуть "розриватися" тільки таким чином, що різні частини "розірваного" кортежу будуть по різні сторони від ';'; кортежі по один бік від ';' не міняються місцями; та елементи кортежів не міняються місцями. Крім того, з конструкції $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ випливає, що доданки у внутрішніх сумах $[\dots]$ в (2.6), в яких є кортеж, розділений знаком ';', дорівнюють нулеві. Інші доданки (якщо існують для набору k, l_j, s_j) розпадаються на групи рівних між собою інтегралів. Ці рівні між собою інтеграли виникають за рахунок взаємних перестановок кортежей рівної довжини, що розташовані перед ';' та після ';'. Зрозуміло, що якщо перед ';' стоїть s' кортежей довжини l та після ';' стоїть s'' кортежів довжини l , то за рахунок взаємних перестановок цих кортежів можна отримати $\frac{(s'+s'')!}{s'!s''!}$ рівних доданків.

Ненульові доданки у сумі (2.6) "пов'язані" з виразами

$$l_1 s_1 + \cdots + l_k s_k = n + m, \tag{2.7}$$

які можна представити у вигляді

$$l'_1 s'_1 + \cdots + l'_{k'} s'_{k'} = n,\ \ l''_1 s''_1 + \cdots + l''_{k''} s''_{k''} = m,$$

$$k', k'', l'_1, \ldots, l'_{k'}, s'_1, \ldots, s'_{k'}, l''_1, \ldots, l''_{k''}, s''_1, \ldots, s''_{k''} \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

$$l'_1 > \cdots > l'_{k'},\ \ l''_1 > \cdots > l''_{k''}$$

(перша сума у (2.8) "відповідає" за перші n аргументів $\widetilde{f^{(n)} g^{(m)}}$, друга – за останні m). Зараз для кожного s_j з (2.7) або існує $s'_i = s_j$ ($l'_i = l_j$), або існує $s''_i = s_j$ ($l''_i = l_j$), або існують s'_i та s''_w такі, що

$$s'_i + s''_w = s_j \ (l'_i = l''_w = l_j).$$

Нерівності для $l'_\cdot, l''_\cdot$ у (2.8) випливають з нерівностей $l_1 > \cdots > l_k$ та впорядкованості індексів аргументів у (2.5) (більш "довгі" кортежі мають менші індекси аргументів).

Замінимо кожну групу рівних між собою доданків у (2.6) одним представником, помноженим на кількість доданків у групі. Тепер, беручи до уваги, що $w^{s'+s''} = w^{s'} w^{s''}$, можна переписати праву частину (2.6) у вигляді

$$\sum_{\substack{l_1's_1'+\dots+l_{k'}'s_{k'}'=n,\ l_1''s_1''+\dots+l_{k''}''s_{k''}''=m,\\ k',k'',l_1',\dots,l_{k'}',s_1',\dots,s_{k'}',l_1'',\dots,l_{k''}'',s_1'',\dots,s_{k''}''\in\mathbb{N},\\ l_1'>\dots>l_{k'}',\ l_1''>\dots>l_{k''}''}} \frac{n!m!}{s_1'!\dots s_{k'}'!s_1''!\dots s_{k''}''!}\times$$

$$\times\left(\frac{\|p_{l_1'}\|_\nu}{l_1'!}\right)^{2s_1'}\dots\left(\frac{\|p_{l_{k'}'}\|_\nu}{l_{k'}'!}\right)^{2s_{k'}'}\left(\frac{\|p_{l_1''}\|_\nu}{l_1''!}\right)^{2s_1''}\dots\left(\frac{\|p_{l_{k''}''}\|_\nu}{l_{k''}''!}\right)^{2s_{k''}''}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s_1'+\dots+s_{k'}'+s_1''+\dots+s_{k''}''}}|\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1'},\dots,\underbrace{u_{s_1'+\dots+s_{k'}'},\dots,u_{s_1'+\dots+s_{k'}'}}_{l_{k'}'}; \tag{2.9}$$

$$\underbrace{u_{n+1},\dots,u_{n+1}}_{l_1''},\dots,\underbrace{u_{n+s_1''+\dots+s_{k''}''},\dots,u_{n+s_1''+\dots+s_{k''}''}}_{l_{k''}''})|^2\times$$

$$\times du_1\dots du_{s_1'+\dots+s_{k'}'}du_{n+1}\dots du_{n+s_1''+\dots+s_{k''}''}.$$

Оскільки міра Лебега є неатомарною, то в цій сумі $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ можна замінити на $\dot f^{(n)}\dot g^{(m)}$, отже сума (2.9) дорівнює $|\dot f^{(n)}|_{ext}^2|\dot g^{(m)}|_{ext}^2$, звідки

$$|\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}|_{ext}\le|\dot f^{(n)}|_{ext}|\dot g^{(m)}|_{ext}. \tag{2.10}$$

З цієї нерівності випливає, що $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$ породжує елемент $F^{(n)}\diamond G^{(m)}$ з $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ і виконується оцінка (2.3)

Нехай $\dot f_1^{(n)}\in F^{(n)}$, $\dot g_1^{(m)}\in G^{(m)}$ – інші представники $F^{(n)}$ і $G^{(m)}$, $F_1^{(n)}\diamond G_1^{(m)}$ – відповідний елемент $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$. Використовуючи очевидну лінійність операції $\hat\diamond$ і оцінку (2.10), отримаємо

$$|F^{(n)} \diamond G^{(m)} - F_1^{(n)} \diamond G_1^{(m)}|_{ext} = |\widehat{f^{(n)} g^{(m)}} - \widehat{f_1^{(n)} g_1^{(m)}}|_{ext} \le$$

$$\le |\widehat{f^{(n)} g^{(m)}} - \widehat{f^{(n)} g_1^{(m)}}|_{ext} + |\widehat{f^{(n)} g_1^{(m)}} - \widehat{f_1^{(n)} g_1^{(m)}}|_{ext} =$$

$$= |f^{(n)} (\widehat{g^{(m)} - g_1^{(m)}})|_{ext} + |(\widehat{f^{(n)} - f_1^{(n)}}) g_1^{(m)}|_{ext} \le$$

$$\le |\dot{f}^{(n)}|_{ext} |\dot{g}^{(m)} - \dot{g}_1^{(m)}|_{ext} + |\dot{f}^{(n)} - \dot{f}_1^{(n)}|_{ext} |\dot{g}_1^{(m)}|_{ext} = 0,$$

отже, $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ не залежить від вибору представників $F^{(n)}$ та $G^{(m)}$.

□

Добуток $\diamond$ є аналогом симетричного тензорного добутку на просторах $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. Зокрема, за побудовою він є комутативним, асоціативним та дистрибутивним.

Нехай

$$F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)},\ f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)},\ m > n.$$

Визначимо частинний добуток $(f^{(n)}, F^{(m)})_{ext} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}$, поклавши для кожного $g^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}$

$$(g^{(m-n)}, (f^{(n)}, F^{(m)})_{ext})_{ext} = (f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}, F^{(m)})_{ext}. \tag{2.11}$$

Оскільки, за нерівністю Коші-Буняковського (див. (2.3))

$$|(f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}, F^{(m)})_{ext}| \le |f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}|_{ext} |F^{(m)}|_{ext} \le |f^{(n)}|_{ext} |g^{(m-n)}|_{ext} |F^{(m)}|_{ext},$$

це визначення коректне і

$$|(f^{(n)}, F^{(m)})_{ext}|_{ext} \le |f^{(n)}|_{ext}|F^{(m)}|_{ext}. \tag{2.12}$$

Означення 2.1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$. *Визначимо оператор стохастичного диференціювання*

$$(D^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)^\beta_q \to (L^2)^\beta_{q-1}, \tag{2.13}$$

поклавши

$$\begin{aligned}(D^nF)(f^{(n)}) &:= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} :\langle \circ^{\otimes(m-n)}, (F^{(m)}, f^{(n)})_{ext}\rangle :\equiv \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} :\langle \circ^{\otimes m}, (F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}\rangle :,\end{aligned} \tag{2.14}$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext}$ *– ядра з розкладу* (1.5) *для* F .

Оператор (2.14) є, очевидно, лінійним. Оскільки (див. (1.8), (2.12))

$$\begin{aligned}\|(D^nF)(f^{(n)})\|^2_{q-1,\beta} &= \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{(q-1)m}\left(\frac{(m+n)!}{m!}\right)^2 |(F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}|^2_{ext} = \\ &= 2^{-qn}\sum_{m=0}^{\infty}((m+n)!)^{1+\beta}2^{q(m+n)}\left[2^{-m}\left(\frac{(m+n)!}{m!}\right)^{1-\beta}\right]|(F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}|^2_{ext} \le \\ &\le 2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{ext}c\sum_{m=0}^{\infty}((m+n)!)^{1+\beta}2^{q(m+n)}|F^{(m+n)}|^2_{ext} \le 2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{ext}c\|F\|^2_{q,\beta},\end{aligned} \tag{2.15}$$

де

$$c = \max_{m\in\mathbb{Z}_+}\left[2^{-m}\left(\frac{(m+n)!}{m!}\right)^{1-\beta}\right],$$

це означення є коректним і оператор (2.13) є обмеженим, а тому неперервним. Більше того, для кожного $F \in (L^2)^\beta_q$ $(D^n F)(\circ)$ є лінійним неперервним оператором, що діє з $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ в $(L^2)^\beta_{q-1}$.

Зауваження 2.2. *Для кожного* $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, n \in \mathbb{N}$, $(D^n \circ)(f^{(n)})$ *можна визначити за формулою* (2.14) *як лінійний неперервний оператор на* $(L^2)^\beta, \beta \in [-1, 1]$. *У випадку, коли* $\beta = 1$, *формула* (2.14) *визначає лінійний неперервний оператор* $(D^n \circ)(f^{(n)})$ *на* $(L^2)^1_q, q \in \mathbb{Z}$. *Справді,*

$$\|(D^n F)(f^{(n)})\|^2_{q,1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^2 2^{(q-1)m} \left(\frac{(m+n)!}{m!}\right)^2 |(F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}|^2_{ext} =$$

$$= 2^{-qn} \sum_{m=0}^{\infty} ((m+n)!)^2 2^{q(m+n)} |(F^{(m+n)}, f^{(n)})_{ext}|^2_{ext} \le$$

$$\le 2^{-qn} |f^{(n)}|^2_{ext} c \sum_{m=0}^{\infty} ((m+n)!)^2 2^{q(m+n)} |F^{(m+n)}|^2_{ext} \le 2^{-qn} |f^{(n)}|^2_{ext} c \|F\|^2_{q,1}. \tag{2.16}$$

Розглянемо основні властивості операторів D^n . Позначимо

$$\partial. := 1_{[0,+\infty)}(\cdot)\partial.,$$

а також $D := D^1$.

Теорема 2.1. *1) Для* $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}, f_j^{(k_j)} \in \mathcal{H}^{(k_j)}_{ext}, j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\begin{aligned} &(D^{k_m}(\ldots(D^{k_2}((D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\ldots))(f_m^{(k_m)}) = \\ &= (D^{k_1+\cdots+k_m}\circ)(f_1^{(k_1)} \diamond \cdots \diamond f_m^{(k_m)}). \end{aligned} \tag{2.17}$$

2) Для кожного $F \in (L^2)^\beta_q$ *ядра з розкладу* (1.5) $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}, n \in \mathbb{N}$, *можуть бути представлені у вигляді*

$$F^{(n)} = \frac{1}{n!}\mathbb{E}(D^n F),$$

тобто, для всіх

$$f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} (F^{(n)},\, f^{(n)})_{ext} = \frac{1}{n!}\mathbb{E}((D^n F)(f^{(n)})),$$

тут $\mathbb{E}\circ = \langle\!\langle \circ,\, 1\rangle\!\rangle_{(L^2)}$ *– узагальнене математичне сподівання.*

3) Спряжений до D^n *оператор має вигляд*

$$(D^n G)(f^{(n)})^* = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{m+n},\, G^{(m)} \diamond f^{(n)} \rangle :\in (L^2)_{-q}^{-\beta}, \tag{2.18}$$

де $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ *– ядра з розкладу* (1.5) *для* G *.*

4) Для всіх $G \in (L^2)_{q-1}^{-\beta}$ *і* $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(DG)(f^{(1)})^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+} G \cdot f^{(1)}(u) \hat{d} L_u \in (L^2)_{-q}^{-\beta}. \tag{2.19}$$

5) Для всіх $F \in (L^2)_q^{\beta}$ *і* $f^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(DF)(f^{(1)}) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u) du \in (L^2)_{q-1}^{\beta}, \tag{2.20}$$

тут інтеграл у правій частині є інтегралом Петтіса (слабким інтегралом), тобто єдиним елементом простору $(L^2)_{q-1}^{\beta}$ *таким, що для кожного* $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$

$$\langle\!\langle \int\limits_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u) du,\, G \rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle \partial_\cdot F,\, G \otimes f^{(1)}(\cdot) \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}}.$$

Доведення. 1) Доведення полягає в застосуванні методу математичної індукції. У випадку $m = 1$ маємо

$$(D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)}) = (D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)}),$$

тобто для $m = 1$ рівність (2.17) є істинна.

Нехай рівність (2.17) є істинною і для $m \le l,\ l \in \mathbb{N}$. Зокрема,

$$(D^{k_l}\dots(\dots(D^{k_2}((D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\dots))(f_l^{(k_l)}) = \\ = (D^{k_1+\dots+k_l}\circ)(f_1^{(k_1)}\diamond\dots\diamond f_l^{(k_l)}). \tag{2.21}$$

Доведемо, що

$$(D^{k_{l+1}}\dots(\dots(D^{k_2}((D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\dots))(f_{l+1}^{(k_{l+1})}) = \\ = (D^{k_1+\dots+k_l+k_{l+1}}\circ)(f_1^{(k_1)}\diamond\dots\diamond f_l^{(k_l)}\diamond f_{l+1}^{(k_{l+1})}). \tag{2.22}$$

Підставляючи (2.21) в ліву частину (2.22) та користуючись формулою

$$(D^l(D^k\circ)(f^{(k)}))(f^{(l)}) = (D^{k+l}\circ)(f^{(k}\diamond f^{(l)}), \quad k, l \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

доведення якої наведемо нижче, отримаємо

$$(D^{k_{l+1}}\dots(\dots(D^{k_2}((D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\dots))(f_{l+1}^{(k_{l+1})}) = \\ = (D^{k_{l+1}}((D^{k_l}\dots(\dots(D^{k_2}((D^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\dots)\dots(f_l^{k_l})))(f_{l+1}^{(k_{l+1})}) = \\ = (D^{k_{l+1}}((D^{k_1+\dots+k_l}\circ)(f_1^{(k_1)}\diamond\dots\diamond f_l^{(k_l)})))(f_{l+1}^{(k_{l+1})}) = \\ = (D^{k_1+\dots+k_l+k_{l+1}}\circ)(f_1^{(k_1)}\diamond\dots\diamond f_{l+1}^{(k_{l+1})}). \tag{2.24}$$

Доведемо формулу (2.23). Застосувавши оператор стохастичного диференціювання до

$$(D^k F)(f^{(k)}) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m!}{(m-k)!} : \langle \circ^{\otimes(m-k)}, (F^{(m)}, f^{(k)})_{ext}\rangle :$$

(див. (2.14)) та скориставшись комутативністю добутку $\diamond$, отримаємо

$$\begin{gathered}
(D^l(D^k F)(f^{(k)}))(f^{(l)}) = \\
= \sum_{m=k+l}^{\infty} \frac{m!}{(m-k)!} \frac{(m-k)!}{(m-k-l)!} \times \\
\times : \langle \circ^{\otimes(m-k-l)}, ((F^{(m)}, f^{(k)})_{ext}, f^{(l)})_{ext}\rangle := \\
= \sum_{m=k+l}^{\infty} \frac{m!}{(m-k-l)!} \langle \circ^{\otimes(m-k-l)}, (F^{(m)}, f^{(l)} \diamond f^{(k)})_{ext}\rangle := \\
= (D^{k+l}F)(f^{(l)} \diamond f^{(k)}) = (D^{k+l}F)(f^{(k)} \diamond f^{(l)}),
\end{gathered}$$

оскільки в силу (2.11) та асоціативності добутку $\diamond$ для довільного $h^{(m-k-l)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-k-l)}$ маємо

$$\begin{gathered}
(h^{(m-k-l)}, ((F^{(m)}, f^{(k)})_{ext}, f^{(l)})_{ext})_{ext} = (h^{(m-k-l)} \diamond f^{(l)}, (F^{(m)}, f^{(k)})_{ext})_{ext} \\
(h^{(m-k-l)} \diamond f^{(l)} \diamond f^{(k)}, F^{(m)})_{ext} = (h^{(m-k-l)}, (F^{(m)}, f^{(l)} \diamond f^{(k)})_{ext})_{ext}.
\end{gathered}$$

2)Використовуючи (2.14) і (1.11), для довільного $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ отримаємо

$$\mathbb{E}((D^n F)(f^{(n)})) = \langle\!\langle (D^n F)(f^{(n)}), 1 \rangle\!\rangle_{(L^2)} = n!(F^{(n)}, f^{(n)})_{ext}.$$

3) Нехай $F \in (L^2)_q^{\beta}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta}$. Використовуючи (2.14), (1.5), (1.11) і (2.11), отримаємо

$$\langle\!\langle (D^n F)(f^{(n)}),\, G\rangle\!\rangle_{(L^2)} =$$

$$= \langle\!\langle \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} :\langle \circ^{\otimes m},\, (F^{(m+n)},\, f^{(n)})_{ext}\rangle :,\, \sum_{k=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes k},\, G^{(k)}\rangle :\rangle\!\rangle_{(L^2)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+n)!((F^{(m+n)},\, f^{(n)})_{ext},\, G^{(m)})_{ext} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+n)!(F^{(m+n)},\, G^{(m)} \diamond f^{(n)})_{ext} =$$

$$= \langle\!\langle \sum_{k=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes k},\, F^{(k)}\rangle :,\, \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m+n},\, G^{(m)} \diamond f^{(n)}\rangle :\rangle\!\rangle_{(L^2)}, =$$

$$= \langle\!\langle F,\, (D^n G)(f^{(n)})^{*}\rangle\!\rangle_{(L^2)}, \tag{2.25}$$

звідки випливає потрібний результат.

4) Результат випливає з (2.18) при $n = 1$: потрібно порівняти конструкцію ядер розширеного стохастичного інтеграла (див. підрозділ 1.5) з конструкцією добутку $\diamond$.

5) Використовуючи (2.19) і означення $\partial.$ (див. підрозділ 1.6), для всіх $G \in (L^2)^{-\beta}_{1-q}$ ми отримаємо

$$\langle\!\langle (DF)(f^{(1)}),\, G\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle F,\, \int_{\mathbb{R}_+} G \cdot f^{(1)}(u)\hat{d}L_u\rangle\!\rangle_{(L^2)} =$$

$$= \langle\!\langle \partial.F,\, G \otimes f^{(1)}(\cdot)\rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = \langle\!\langle \int_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u)du,\, G\rangle\!\rangle_{(L^2)},$$

звідки і випливає потрібний результат. □

Зауваження 2.3. *Враховуючи рівність* (2.20), *формально можна запи-*

сати $\partial_\cdot \circ = (D\circ)(\delta_\cdot)$ *, де* $\delta_\cdot$ *– дельта-функція Дірака, сконцентрована в* $\cdot$ *. Для того, щоб надати неформальний сенс цій рівності, можна розглянути стохастичне диференціювання на так званих просторах нерегулярних узагальнених функцій, які уведені у [42].*

Зауваження 2.4. *Інтеграл Петтіса*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \partial_u F \cdot f^{(1)}(u) du$$

з правої частини (2.20) *дорівнює* $\langle \partial_\cdot F, f^{(1)}(\cdot)\rangle$ *– частковому спарюванню, тобто, єдиному елементу з* $(L^2)^{\beta}_{q-1}$ *такому, що для кожного* $G \in (L^2)^{-\beta}_{1-q}$

$$\langle\langle G, \langle \partial_\cdot F, f^{(1)}(\cdot)\rangle\rangle\rangle_{(L^2)} = \langle\langle G \otimes f^{(1)}(\cdot), \partial_\cdot F\rangle\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$$

(порівнюючи з (2.11) *і конструкцією "добутку"* $(f^{(n)}, F^{(m)})_{ext}$ *).*

Результати теореми 2.1 зберігаються (з точністю до очевидних модифікацій), якщо розглядати оператори стохастичного диференціювання на просторах $(L^2)^{\beta}$, $\beta \in [-1, 1]$.

У деяких застосуваннях гауссівського аналізу (зокрема, численні Маллявіна) важливу роль відіграє комутатор між розширеним стохастичним інтегралом і оператором стохастичного диференціювання (див., наприклад, [16]). Далі, порахуємо відповідний комутатор у випадку, що розглядається в дисертації.

Знову починаємо з підготовки. Нехай $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо функцію $H_\cdot : \mathbb{R}_+^{n+m+1} \to \mathbb{C}$. Позначимо

$$\widetilde{H_u}(u_1,\dots,u_n;u_{n+1},\dots,u_{n+m}) :=$$

$$:= \begin{cases} H_u(u_1,\dots,u_{n+m}), \text{ якщо } \underset{\forall j\in\{n+1,\dots,n+m\}}{\overset{\forall i\in\{1,\dots,n\}}{}} \; u_i\neq u_j, \\ \\ 0, \text{ в інших випадках} \end{cases}, \tag{2.26}$$

(порівнюючи з (2.1)). Нехай $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Виберемо представників $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}_{\cdot}^{(m)} \in G_{\cdot}^{(m)}$, і покладемо $f^{(n)}g_{\cdot}^{(m)} := \dot{f}^{(n)} \cdot \dot{g}_{\cdot}^{(m)}$. Нехай $\widehat{f^{(n)}g_{\cdot}^{(m)}}$ – симетризація $f^{(n)}g_{\cdot}^{(m)}$ за $n+m$ змінними, за винятком змінної ' $\cdot$ ' (інакше кажучи, $\widehat{f^{(n)}g_u^{(m)}}(u_1,\dots,u_{n+m})$ є симетизацією $f^{(n)}g_u^{(m)}(u_1,\dots,u_{n+m})$ за змінними $u_1,\dots,u_{n+m}$), $F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – клас еквівалентності в $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, породжений $\widehat{f^{(n)}g_{\cdot}^{(m)}}$ (тобто, $\widehat{f^{(n)}g_{\cdot}^{(m)}} \in F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)}$).

Лема 2.2. (порівнюючи з лемою 2.1) *Елемент* $F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *є коректно визначеним (зокрема,* $F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)}$ *не залежить від вибору представників* $F^{(n)}$ *та* $G_{\cdot}^{(m)}$ *) і*

$$|F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le |F^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} |G_{\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.27}$$

Доведення. Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 2.1, тому обмежимося коротким описом основних кроків.

1) Для $n = 0$ чи $m = 0$ лема є, очевидно, справедливою, тому ми розглянемо випадок $n, m \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $m \ge n$ (доведення для випадку $m < n$ цілком аналогічне). Нехай $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}_{\cdot}^{(m)} \in G_{\cdot}^{(m)}$. Без втрати загальності, можна вважати, що $\dot{f}^{(n)}(u_1,\dots,u_n)$ і $\dot{g}_u^{(m)}(u_{n+1},\dots,u_{n+m})$ є симетричними функціями відносно аргументів $u_1,\dots,u_n$ і $u_{n+1},\dots,u_{n+m}$ відповідно. Скориставшись цією симетричні-

стю, подібно до відповідної частини доведення леми 2.1, можна показати, що

$$\widehat{f^{(n)}g_u^{(m)}}(u_1,\dots,u_{n+m}) = \frac{n!m!}{(n+m)!}\times$$

$$\times \sum_{\substack{1\le p_1,\dots,p_n\le n,n+1\le q_1,\dots,q_m\le n+m\\ 0\le r\le n,p_1<\dots<p_r,p_{r+1}<\dots<p_n,q_1<\dots<q_{n-r},q_{n-r+1}<\dots<q_m}} \widetilde{f^{(n)}g_u^{(m)}}(u_{p_1},\dots,u_{p_r},u_{q_1},\dots,u_{q_{n-r}};$$

$$u_{p_{r+1}},\dots,u_{p_n},u_{q_{n-r+1}},\dots,u_{q_m}) \tag{2.28}$$

(для $r=n$ аргумент в правій частині (2.28) ' $u_1,\dots,u_n;u_{n+1},\dots,u_{n+m}$ '; для $r=0$ цей аргумент ' $u_{q_1},\dots,u_{q_n};u_1,\dots,u_n,u_{q_{n+1}},\dots,u_{q_m}$ '). Іншими словами, аргументами $\widetilde{f^{(n)}g_\cdot^{(m)}}$ у сумі (2.28) є u_j , $j\in\{1,\dots,n+m\}$, де індекси перших n і останніх m аргументів (до та після ';') (незалежно) впорядковані по зростанню.

2) Як випливає з (1.7), норми в просторах $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ мають вигляд

$$|H_\cdot^{(n+m)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>l_2>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n+m}} \frac{(n+m)!}{s_1!\cdots s_k!}\Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\Big)^{2s_1}\cdots$$

$$\Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\Big)^{2s_k}\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}}|H_u^{(n+m)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l_1},\dots,\underbrace{u_{s_1},\dots,u_{s_1}}_{l_1},\dots,$$

$$\underbrace{u_{s_1+\dots+s_k},\dots,u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2du_1\cdots du_{s_1+\dots+s_k}du,$$

$$H_\cdot^{(n+m)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Підставляючи (2.28) в цю формулу і оцінюючи за аналогією з доведенням леми 2.1, отримаємо

$$|\widehat{f^{(n)}g_{\cdot}^{(m)}}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq |\dot{f}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}}|\dot{g}_{\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.29}$$

Отже, функція $\widehat{f^{(n)}g_{\cdot}^{(m)}}$ породжує елемент

$$F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

3) Використовуючи (2.29) і властивості операції $\widehat{\circ}$, аналогічно до доведення леми 2.1 можна показати, що $F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)}$ не залежить від вибору представників $F^{(n)}$ та $G_{\cdot}^{(m)}$. Оцінка (2.27) випливає з (2.29). $\square$

Зауваження 2.5. *Нехай*

$$F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)},\ G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)},\ n,m \in \mathbb{Z}_{+},\ H^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Ми виберемо представників (функції) $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)} \in G^{(m)}$ *і* $\dot{h}^{(1)} \in H^{(1)}$. *Зрозуміло, що* $\dot{g}^{(m)} \cdot \dot{h}^{(1)}$ *– представник* $G^{(m)} \otimes H^{(1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *З* (2.1) *і* (2.26) *випливає, що*

$$\dot{f}^{(n)} \cdot (\widetilde{\dot{g}^{(m)} \cdot \dot{h}}^{(1)}(\cdot)) = (\widetilde{\dot{f}^{(n)} \cdot \dot{g}^{(m)}}) \cdot \dot{h}^{(1)}(\cdot))$$

і, таким чином,

$$\dot{f}^{(n)} \cdot (\widehat{\dot{g}^{(m)} \cdot \dot{h}}^{(1)}(\cdot)) = (\widehat{\dot{f}^{(n)} \cdot \dot{g}^{(m)}}) \cdot \dot{h}^{(1)}(\cdot)),$$

звідки

$$F^{(n)}\overline{\diamond}(G^{(m)} \otimes H^{(1)}(\cdot)) = (F^{(n)} \diamond G^{(m)}) \otimes H^{(1)}(\cdot). \tag{2.30}$$

Нехай $F_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $m \geq n$. Визначимо частинний добуток $(f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{EXT} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, поклавши для $g_{\cdot}^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(g_{\cdot}^{(m-n)}, (f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{EXT})_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = (f^{(n)}\overline{\diamond}g_{\cdot}^{(m-n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.31}$$

Оскільки, за нерівністю Коші-Буняковського і (2.27),

$$|(f^{(n)}\overline{\diamond}g_{\cdot}^{(m-n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}| \leq |f^{(n)}\overline{\diamond}g_{\cdot}^{(m-n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} |F_{\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq$$

$$\leq |f^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} |g_{\cdot}^{(m-n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} |F_{\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

це визначення коректне і

$$|(f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{EXT}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq |f^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} |F_{\cdot}^{(m)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.32}$$

Зауваження 2.6. *Для* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq n$, *нехай* $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$, $H^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$; $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$; $g^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}$, $h^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *Використовуючи* (2.31), (2.30) *і* (2.11) *ми отримаємо*

$$(g^{(m-n)} \otimes h^{(1)}(\cdot), (f^{(n)}, F^{(m)} \otimes H^{(1)}(\cdot))_{EXT})_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= (f^{(n)}\overline{\diamond}(g^{(m-n)} \otimes h^{(1)}(\cdot)), F^{(m)} \otimes H^{(1)}(\cdot))_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= ((f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}) \otimes h^{(1)}(\cdot), F^{(m)} \otimes H^{(1)}(\cdot))_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= (f^{(n)} \diamond g^{(m-n)}, F^{(m)})_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}} (h^{(1)}, H^{(1)})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= (g^{(m-n)}, (f^{(n)}, F^{(m)})_{ext})_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}} (h^{(1)}, H^{(1)})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= (g^{(m-n)} \otimes h^{(1)}(\cdot), (f^{(n)}, F^{(m)})_{ext} \otimes H^{(1)}(\cdot))_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Оскільки, множина

$$\{g^{(m-n)} \otimes h^{(1)} : g^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}, h^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\}$$

тотальна в $\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *, ми можемо зробити висновок, що*

$$(f^{(n)}, F^{(m)} \otimes H^{(1)}(\cdot))_{EXT} = (f^{(n)}, F^{(m)})_{ext} \otimes H^{(1)}(\cdot) \tag{2.33}$$

в $\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *. Як наслідок з цієї формули можна отримати наступний, інтуїтивно зрозумілий, результат. Нехай* $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *,* $F_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *,* $n, m \in \mathbb{Z}_+$ *,* $m \geq n$ *. Позначимо*

$$G_{\cdot}^{(m-n)} := (f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{EXT} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Нехай $\dot{F}_{\cdot}^{(m)} \in F_{\cdot}^{(m)}$ *. Тоді* $\dot{G}_{\cdot}^{(m-n)} := (f^{(n)}, \dot{F}_{\cdot}^{(m)})_{EXT}$ *є представником класу еквівалентності* $G_{\cdot}^{(m-n)}$ *, і для* $u \in \mathbb{R}_+$ *такого, що* $\dot{F}_u^{(m)}$ *є коректно визначеним,* $\dot{G}_u^{(m-n)} = (f^{(n)}, \dot{F}_u^{(m)})_{ext}$ *(грубо кажучи, підставляючи в* $(f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{EXT}$ *число* u *замість* $'\cdot'$*, ми отримаємо* $(f^{(n)}, F_u^{(m)})_{ext}$ *).*

Означення 2.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *,* $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *. Ми визначимо лінійний неперервний оператор*

$$(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^\beta_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{2.34}$$

поклавши для $F \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)}) &:= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} :\langle \circ^{\otimes m-n}, (f^{(n)}, F_\cdot^{(m)})_{EXT}\rangle :\equiv \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} :\langle \circ^{\otimes m}, (f^{(n)}, F_\cdot^{(m+n)})_{EXT}\rangle :\end{aligned} \tag{2.35}$$

(порівнюючи з (2.14)*), де* $F_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *– ядра з розкладу* (1.13) *для* F *.*

Оскільки (див. (1.14), (2.35) і (2.32))

$$\begin{aligned}&\|(\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)})\|^2_{(L^2)^\beta_{q-1}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1+\beta} 2^{(q-1)m} \Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2 |(f^{(n)}, F_\cdot^{(m+n)})_{EXT}|^2_{\mathcal{H}^{(m)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \\ &= 2^{-qn} \sum_{m=0}^{\infty} ((m+n)!)^{1+\beta} 2^{q(m+n)} \Big[2^{-m}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^{1-\beta}\Big]\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$|(f^{(n)}, F_\cdot^{(m+n)})_{EXT}|^2_{\mathcal{H}^{(m)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le 2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} c \sum_{m=0}^{\infty} ((m+n)!)^{1+\beta} 2^{q(m+n)}$$

$$|F_\cdot^{(m+n)}|^2_{\mathcal{H}^{(m+n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \le 2^{-qn}|f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}^{(n)}_{ext}} c \|F\|^2_{(L^2)^\beta_q\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

де

$$c := \max_{m\in\mathbb{Z}_+} \Big[2^{-m}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^{1-\beta}\Big],$$

це означення є коректним. Крім того, для кожного $F \in (L^2)^\beta_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$(\mathbf{D}^n F(\cdot))(\circ)$ є лінійним неперервним оператором, що діє з $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ в $(L^2)_{q-1}^{\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Більше того, для кожного $f^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$ можна визначити за формулою (2.35) як лінійний неперервний оператор на $(L^2)^{\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $\beta\in[-1,1]$. У випадку, коли $\beta=1$ формула (2.35) визначає лінійний *неперервний* оператор $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$ на $(L^2)_q^1\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $q\in\mathbb{Z}$, це можна довести за аналогією з викладкою (2.16).

Зауваження 2.7. *Так само, як "добутки"* $(\cdot,\cdot)_{ext}$ *і* $(\cdot,\cdot)_{EXT}$ *, оператори* D^n *і* $\mathbf{D}^n$ *,* $n\in\mathbb{N}$ *, є тісно пов'язаними. Справді, нехай* $F\in(L^2)_q^{\beta}$ *,* $H^{(1)}\in\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *,* $f^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *. Використовуючи (2.35), (2.33) і (2.14) можна показати, що*

$$(\mathbf{D}^n F\otimes H^{(1)}(\cdot))(f^{(n)})=(D^nF)(f^{(n)})\otimes H^{(1)}(\cdot)\in(L^2)_{q-1}^{\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

Далі, нехай $F\in(L^2)_q^{\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *,* $g(\cdot):=(\mathbf{D}^nF(\cdot))(f^{(n)})$ *і* $\dot{F}\in F$ *. Тоді* $\dot{g}(\cdot):=(\mathbf{D}^n\dot{F}(\cdot))(f^{(n)})$ *є представником класу еквівалентності* $g(\cdot)\in(L^2)_{q-1}^{\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *і, як випливає із зауваження 2.6, для* $u\in\mathbb{R}_+$ *такого, що* $\dot{F}(u)$ *є коректно визначеним,* $\dot{g}(u)=(D^n\dot{F}(u))(f^{(n)})$ *(грубо кажучи, розглядаючи* F *як функцію на* $\mathbb{R}_+$ *з значеннями в* $(L^2)_q^{\beta}$ *і підставивши в* $(\mathbf{D}^nF(\cdot))(f^{(n)})$ *число* u *замість '* $\cdot$ *', ми отримаємо* $(D^nF(u))(f^{(n)})$ *).*

Тепер, опишемо властивості оператора $\mathbf{D}^n$, $n\in\mathbb{N}$, використовуючи як шаблон теорему 2.1 про властивості D^n .

Аналог властивості '1)' наведено в наступному твердженні.

Твердження 2.1. *Для* $k_1,\dots,k_m\in\mathbb{N}$ *,* $f_j^{(k_j)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(k_j)}$ *,* $j\in\{1,\dots,m\}$ *,*

$$(\mathbf{D}^{k_m}(\cdots(\mathbf{D}^{k_2}((\mathbf{D}^{k_1}\circ)(f_1^{(k_1)})))(f_2^{(k_2)})\cdots))(f_m^{(k_m)})=$$

$$=(\mathbf{D}^{k_1+\cdots+k_m}\circ)(f_1^{(k_1)}\diamond\cdots\diamond f_m^{(k_m)}).$$

Доведення. З побудови "добутків" $\diamond$ і $\overline{\diamond}$ випливає, що для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ і $H_{\cdot}^{(k)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n, m, k \in \mathbb{Z}_+$,

$$F^{(n)} \overline{\diamond} (G^{(m)} \overline{\diamond} H_{\cdot}^{(k)}) = (F^{(n)} \diamond G^{(m)}) \overline{\diamond} H_{\cdot}^{(k)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m+k)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}.$$

За допомогою цієї формули можна довести результат методом математичної індукції, за аналогією з доведенням твердження 1) теореми 2.1. $\square$

Для того, щоб виписати аналог властивості '2)', нам потрібна невелика підготовка. Для $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ позначимо через $\mathbf{E}F := \langle\langle F, 1 \rangle\rangle_{(L^2)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – часткове спарювання, тобто, єдиний елемент з $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ такий, що для кожного $h^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$(\langle\langle F, 1 \rangle\rangle_{(L^2)}, h^{(1)})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \langle\langle F, 1 \otimes h^{(1)} \rangle\rangle_{(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.37}$$

Оскільки, за узагальненою нерівністю Коші-Буняковського і (1.14)

$$|\langle\langle F, 1 \otimes h^{(1)} \rangle\rangle_{(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}| \leq \|F\|_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \|1 \otimes h^{(1)}\|_{(L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \|F\|_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} |h^{(1)}|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

це визначення є коректним і

$$|\mathbf{E}F|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = |\langle\langle F, 1 \rangle\rangle_{(L^2)}|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq \|F\|_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Зараз, для кожного $F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ і $h^{(1)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ згідно з (2.37), (2.35) і (1.15)

$$(\langle\langle (\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)}), 1 \rangle\rangle_{(L^2)}, h^{(1)})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \langle\langle (\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)}), 1 \otimes h^{(1)} \rangle\rangle_{(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= n!((f^{(n)}, F_{\cdot}^{(n)})_{EXT}, h^{(1)})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

тут $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – ядра з розкладу (1.13) для F. Отже, ми довели наступне твердження.

Твердження 2.2. *Для кожного* $F \in (L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *ядра* $F_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$, *з розкладу* (1.13) *можуть бути представлені у вигляді*

$$F_{\cdot}^{(n)} = \frac{1}{n!}\mathbf{E}\big(\mathbf{D}^n F(\cdot)\big),$$

тобто, для кожного $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$

$$\mathbf{E}\big((\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)})\big) = \langle\!\langle (\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)}), 1 \rangle\!\rangle_{(L^2)} = n!(f^{(n)}, F_{\cdot}^{(n)})_{EXT}.$$

Аналог властивості '3)' подано в наступному твердженні.

Твердження 2.3. *Оператор, спряжений до* $\mathbf{D}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *має вигляд*

$$(\mathbf{D}^n G(\cdot))(f^{(n)})^* = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{m+n}, f^{(n)} \overline{\diamond} G_{\cdot}^{(m)} \rangle :\in (L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{2.38}$$

тут $G \in (L^2)_{1-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$; $G_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – *ядра з розкладу* (1.13) *для* G.

Доведення даного твердження аналогічне до доведення твердження 3) теореми 2.1.

Нарешті, для формулювання властивостей '4)' і '5)', аналогічно як для D^n, необхідно ввести стохастичний інтеграл і похідну Хіди на просторах $(L^2)_{1-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ і $(L^2)_q^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно, але такі дослідження виходять за рамки дисертації.

Тепер перейдемо до твердження про комутатор між розширеним стохастичним інтегралом і оператором стохастичного диференціювання. Позначимо $\mathbf{D} := \mathbf{D}^1$.

Теорема 2.2. *Для довільного* $F \in (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $f^{(1)} \in \mathcal{H}^{(1)}_{ext} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *і* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$(D\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) = \int_{\Delta}(\mathbf{D}F(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u + \int_{\Delta} F(u)f^{(1)}(u)du \in (L^2)^{\beta}_{q-1}, \tag{2.39}$$

де

$$\int_{\Delta}(\mathbf{D}F(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u := \int_{\Delta} g(u)\widehat{d}L_u$$

з $g(\cdot) := (\mathbf{D}F(\cdot))(f^{(1)}) \in (L^2)^{\beta}_{q-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *;*

$$\int_{\Delta} F(u)f^{(1)}(u)du \in (L^2)^{\beta}_q \subset (L^2)^{\beta}_{q-1}$$

є інтегралом Петтіса (порівнюючи з (2.20)*).*

Зауважимо, що

$$\int_{\Delta} F(u)f^{(1)}(u)du = \langle F(\cdot), f^{(1)}(\cdot)1_{\Delta}(\cdot)\rangle$$

є частковим спарюванням.

Зауваження 2.8. *Якщо розуміти* F *як функцію, що діє з* $\mathbb{R}_+$ *в* $(L^2)^{\beta}_q$ *, формулу* (2.39) *можна переписати у "класичному" вигляді*

$$(D\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) = \int_{\Delta}(DF(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u + \int_{\Delta} F(u)f^{(1)}(u)du.$$

Доведення. Використовуючи (1.19) і (2.35), ми отримаємо

$$(D\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1) :\langle \circ^{\otimes m}, (\widehat{F}^{(m)}_{\Delta}, f^{(1)})_{ext}\rangle :, \tag{2.40}$$

де $\widehat{F}_{\Delta}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m+1)}$ — ядра з розкладу (1.19) (який є розкладом (1.5) для розширеного стохастичного інтеграла

$$\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u),$$

ці ядра побудовані за аналогією з $F_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ з розкладу (1.13) для F . З іншого боку, в силу (2.35), (1.19) і (1.13)

$$\int_{\Delta} (\mathbf{D}F(u))(f^{(1)})\widehat{d}L_u = \sum_{m=1}^{\infty} m :\langle \circ^{\otimes m}, (\widehat{F_{\cdot}^{(m)}, f^{(1)}})_{EXT\,\Delta} \rangle :,$$

$$\int_{\Delta} F(u) f^{(1)}(u)du = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \int_{\Delta} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du \rangle :,$$

тут інтеграл $\int_{\Delta} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ є інтегралом Петтіса (цей інтеграл рівний частковому спарюванню $(F_{\cdot}^{(m)}, f^{(1)}(\cdot)1_{\Delta}(\cdot))_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ – єдиний елемент з $\mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ такий, що для всіх $g^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$

$$\big((F_{\cdot}^{(m)}, f^{(1)}(\cdot)1_{\Delta}(\cdot))_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, g^{(m)}\big)_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}} = \big(F_{\cdot}^{(m)}, g^{(m)} \otimes (f^{(1)}(\cdot)1_{\Delta}(\cdot))\big)_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}).$$

Таким чином, щоб довести рівність (2.39) достатньо показати, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$

$$(m+1)(\widehat{F}_{\Delta}^{(m)}, f^{(1)})_{ext} = m(\widehat{F_{\cdot}^{(m)}, f^{(1)}})_{EXT\,\Delta} + \int_{\Delta} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du$$

в $\mathcal{H}_{ext}^{(m)}$. В свою чергу, щоб довести цю рівність, досить показати, що для кожного $g^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$

$$\begin{gathered}(m+1)((\widehat{F}_{\Delta}^{(m)}, f^{(1)})_{ext}, g^{(m)})_{ext} = \\ = m((\widehat{F_{\cdot}^{(m)}, f^{(1)}})_{EXT\,\Delta}, g^{(m)})_{ext} + \Big(\int_{\Delta} F_u^{(m)} f^{(1)}(u)du, g^{(m)}\Big)_{ext}.\end{gathered} \tag{2.41}$$

Використовуючи (2.31), доведену в [44] рівність

$$(\widehat{F}_{\Delta}^{(m)}, h^{(m+1)})_{ext} = \int_{\Delta} (F_u^{(m)}, h^{(m+1)}(u))_{ext} du,$$

$h^{(m+1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m+1)}$, $h^{(m+1)}(\cdot) \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (див. лему 1.2), симетричність $g^{(m)}$, та неатомарність міри Лебега, отримаємо

$$\begin{gathered}
(m+1)((\widehat{F}_{\Delta}^{(m)}, f^{(1)})_{\mathcal{H}_{ext}^m}, g^{(m)})_{\mathcal{H}_{ext}^m} = (m+1)(\widehat{F}_{\Delta}^{(m)}, g^{(m)} \diamond f^{(1)})_{\mathcal{H}_{ext}^{m+1}} = \\
= (m+1) \int_{\Delta} \big(F_u^{(m)}, (g^{(m)} \diamond f^{(1)})(u)\big)_{\mathcal{H}_{ext}^{m+1}} du = \\
= \int_{\Delta} \big(F_u^{(m)}, g^{(m)}(\cdot_1, \widetilde{\cdots, \cdot_m}) f^{(1)}(u) + g^{(m)}(\cdot_2, \widetilde{\cdots, u}) f^{(1)}(\cdot_1) + \cdots \\
\cdots + g^{(m)}(u, \widetilde{\cdots, \cdot_{m-1}}) f^{(1)}(\cdot_m)\big)_{\mathcal{H}_{ext}^{m+1}} du = \big(\int_{\Delta} F_u^{(m)} f^{(1)}(u) du, g^{(m)}\big)_{\mathcal{H}_{ext}^m} + \\
+ \int_{\Delta} \big(F_u^{(m)}, g^{(m)}(\cdot_2, \widetilde{\cdots, u}) f^{(1)}(\cdot_1) + \cdots + g^{(m)}(u, \widetilde{\cdots, \cdot_{m-1}}) f^{(1)}(\cdot_m)\big)_{\mathcal{H}_{ext}^{m+1}} du.
\end{gathered} \tag{2.42}$$

З іншого боку, за аналогією з (2.42) ми отримаємо

$$\begin{gathered}
m((F_{\cdot}^{\widehat{(m)}, f^{(1)}})_{EXT\,\Delta}, g^{(m)})_{\mathcal{H}_{ext}^m} = m \int_{\Delta} ((F_u^{(m)}, f^{(1)})_{\mathcal{H}_{ext}^m}, g^{(m)}(u))_{\mathcal{H}_{ext}^m} du = \\
= m \int_{\Delta} (F_u^{(m)}, (g^{(m)}(u)) \diamond f^{(1)})_{\mathcal{H}_{ext}^{m+1}} du = \int_{\Delta} \big(F_u^{(m)}, g^{(m)}(\cdot_2, \widetilde{\cdots, u}) f^{(1)}(\cdot_1) + \\
+ g^{(m)}(\cdot_3, \widetilde{\cdots, u}, \cdot_1) f^{(1)}(\cdot_2) + \cdots + g^{(m)}(u, \widetilde{\cdots, \cdot_{m-1}}) f^{(1)}(\cdot_m)\big)_{\mathcal{H}_{ext}^{m+1}} du.
\end{gathered} \tag{2.43}$$

Підставляючи (2.43) в (2.42), отримаємо (2.41).

Тепер залишилося довести, що

$$(D\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) \in (L^2)^{\beta}_{q-1},$$

якщо $F \in (L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (з означень розширеного стохастичного інтеграла і операторів стохастичного диференціювання випливає, що

$$(D\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)}) \in (L^2)^{\beta}_{q-2},$$

але це твердження можна підсилити). Справді, в силу (2.40), (1.8), (2.32) та (1.17)

$$\left\|(D\int_{\Delta} F(u)\widehat{d}L_u)(f^{(1)})\right\|^2_{q-1,\beta} = \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{(q-1)m}(m+1)^2|(\widehat{F}^{(m)}_{\Delta}, f^{(1)})_{ext}|^2_{ext} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}[2^{-m}(m+1)^2]|\widehat{F}^{(m)}_{\Delta}|^2_{ext}|f^{(1)}|^2_{ext} \leq$$

$$\leq |f^{(1)}|^2_{ext} c\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}|F^{(m)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(m)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = |f^{(1)}|^2_{ext} c\|F\|^2_{(L^2)^{\beta}_q\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} < \infty,$$

де $c = \max_{m\in\mathbb{Z}_+}[2^{-m}(m+1)^2]$. □

Наведені вище результати зберігаються (з точністю до очевидних модифікацій), якщо розглядати оператори $(D^n\circ)(f^{(n)})$, $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}$, на просторах $(L^2)^{\beta}$, $(L^2)^{\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно, де $\beta \in [-1, 1]$.

2.1.2. Випадок необмежених операторів

Розглянемо оператори стохастичного диференціювання $(D^n\circ)(f^{(n)})$, $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$ як такі, що діють в $(L^2)^{\beta}_q$, $(L^2)^{\beta}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ відповідно. Якщо $\beta = 1$, то ці оператори можна визначити за формулами (2.14), (2.35) відповідно, як лінійні *неперервні* оператори (як було пояснено вище), але для $\beta \in [-1, 1)$ це не так. Розглянемо випадок $\beta \in [-1, 1)$ детальніше.

Означення 2.3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. *Визначимо оператор*

$$(D^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)_q^\beta \to (L^2)_q^\beta \tag{2.44}$$

з областю визначення

$$\begin{gathered}\mathrm{dom}\big((D^n\circ)(f^{(n)})\big) = \big\{F \in (L^2)_q^\beta : \|(D^nF)(f^{(n)})\|_{q,\beta}^2 = \\ = \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2|(f^{(n)}, F^{(m+n)})_{ext}|_{ext}^2 < \infty\big\}\end{gathered} \tag{2.45}$$

(тут $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ *– ядра з розкладу* (1.5) *для* F *) формулою* (2.14).

Зрозуміло, що оператор

$$(D^n\circ)(f^{(n)})^* : (L^2)_{-q}^{-\beta} \to (L^2)_{-q}^{-\beta} \tag{2.46}$$

спряжений до оператора (2.44), визначений коректно і може бути обчислений за формулою (2.18); нижче, в доведенні теореми 2.3, ми покажемо, що областю визначення цього оператора є

$$\begin{gathered}\mathrm{dom}\big((D^n\circ)(f^{(n)})^*\big) = \big\{G \in (L^2)_{-q}^{-\beta} : \|(D^nG)(f^{(n)})^*\|_{(L^2)_{-q}^{-\beta}}^2 = \\ = \sum_{m=0}^{\infty}((m+n)!)^{1-\beta}2^{-q(m+n)}|f^{(n)} \diamond G^{(m)}|_{ext}^2 < \infty\big\}.\end{gathered} \tag{2.47}$$

Теорема 2.3. *Оператор* (2.44) *з областю визначення* (2.45) *і оператор* (2.46) *з областю визначення* (2.47) *є взаємно спряженими. Зокрема, ці оператори є замкненими.*

Доведення. Покажемо, що існує другий спряжений до $(D^n\circ)(f^{(n)})$ оператор

$$(D^n\circ)(f^{(n)})^{**} = (D^n\circ)(f^{(n)}).$$

Оскільки, очевидно, область визначення оператора (2.44) є щільною множиною в $(L^2)^\beta_q$, то спряжений оператор (2.46) визначений коректно. За означенням, $G \in dom((D^n\circ)(f^{(n)})^*)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(L^2)^\beta_q \supset dom((D^n\circ)(f^{(n)})) \ni F \mapsto \langle\!\langle (D^n F)(f^{(n)}), G\rangle\!\rangle_{(L^2)}$$

є лінійним неперервним функціоналом. За властивостями гільбертових оснащень, останнє можливе тоді і тільки тоді, коли існує $K \in (L^2)^{-\beta}_{-q}$ таке, що

$$\langle\!\langle (D^n F)(f^{(n)}), G\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle F, K\rangle\!\rangle_{(L^2)}.$$

З викладки (2.25) випливає, що K має вигляд (2.18), тому область визначення спряженого оператора має вигляд (2.47). Ця множина щільна в $(L^2)^{-\beta}_{-q}$, отже,

$$(D^n\circ)(f^{(n)})^{**} : (L^2)^\beta_q \to (L^2)^\beta_q$$

визначений коректно. Залишається показати, що

$$dom((D^n\circ)(f^{(n)})^{**}) = dom((D^n\circ)(f^{(n)})). \tag{2.48}$$

За аналогією з вище розглянутим, $F \in dom((D^n\circ)(f^{(n)})^{**})$ тоді і тільки тоді, коли

$$(L^2)^{-\beta}_{-q} \supset dom((D^n\circ)(f^{(n)})^*) \ni G \mapsto \langle\!\langle F, (D^nG)(f^{(n)})^*\rangle\!\rangle_{(L^2)}$$

є лінійним неперервним функціоналом. Останнє можливо якщо і тільки якщо існує $H \in (L^2)^{\beta}_q$ таке, що

$$\langle\!\langle F, (D^nG)(f^{(n)})^*\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle H, G\rangle\!\rangle_{(L^2)}.$$

Зрозуміло, що H має вигляд (2.14), тому рівність (2.48) випливає з (2.45).

Відомо, що спряжений оператор є замкненим, тому оскільки оператори (2.44) та (2.46) є взаємно спряженими, то вони є і замкненими. □

Зауваження 2.9. *Область визначення оператора* (2.44) *залежить від "коефіцієнта"* $f^{(n)}$ *, це може обмежити область його можливих застосувань. Проблему можна вирішити наступним чином. Нехай*

$$A_n := \Big\{F \in (L^2)^{\beta}_q : \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{1+\beta}2^{qm}\Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2|F^{(m+n)}|^2_{ext} < \infty\Big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

тут $F^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext}$ *– ядра з розкладу* (1.5) *для* F *. Для кожного* $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ *визначимо оператор*

$$(\widetilde{D}^n\circ)(f^{(n)}) : (L^2)^{\beta}_q \to (L^2)^{\beta}_q \tag{2.49}$$

з областю визначення A_n *за формулою* (2.14)*. З теореми 2.3 випливає, що цей оператор є таким, що допускає замикання (яке дорівнює* $(D^n\circ)(f^{(n)})$ *). Крім того, для всіх* $F \in A_n$ *оператор* $(\widetilde{D}^nF)(\circ) : \mathcal{H}^{(n)}_{ext} \to (L^2)^{\beta}_q$ *є лінійним обмеженим (а, отже, і неперервним) оператором: в* *силу* (2.14), (1.8) *і* (2.12)

$$\|(\widetilde{D}^n F)(f^{(n)})\|_{q,\beta}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1+\beta} 2^{qm} \left(\frac{(m+n)!}{m!}\right)^2 |(F^{(m+n)},\, f^{(n)})_{ext}|_{ext}^2 \le$$

$$\le |f^{(n)}|_{ext}^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1+\beta} 2^{qm} \left(\frac{(m+n)!}{m!}\right)^2 |F^{(m+n)}|_{ext}^2.$$

Тепер перейдемо до операторів $\mathbf{D}^n$.

Означення 2.4. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. *Визначимо оператор*

$$(\mathbf{D}^n \circ)(f^{(n)}) : (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \tag{2.50}$$

з областю визначення

$$\begin{gathered}\operatorname{dom}\bigl((\mathbf{D}^n \circ)(f^{(n)})\bigr) = \bigl\{F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} : \|(\mathbf{D}^n F(\cdot))(f^{(n)})\|_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}^2 = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1+\beta} 2^{qm} \Bigl(\frac{(m+n)!}{m!}\Bigr)^2 |(f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m+n)})_{EXT}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}^2 < \infty\bigr\}\end{gathered} \tag{2.51}$$

(тут $F_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *– ядра з розкладу* (1.13) *для* F *) формулою* (2.35).

Зрозуміло, що оператор

$$(\mathbf{D}^n \circ)(f^{(n)})^* : (L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)_{-q}^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{2.52}$$

спряжений до оператора (2.50), визначений коректно і може бути обчислений за формулою (2.38); нижче ми покажемо, що областю визначення цього оператора є

$$\mathrm{dom}\big((\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^*\big)=\big\{G\in(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}:\|(\mathbf{D}^nG(\cdot))(f^{(n)})^*\|^2_{(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}((m+n)!)^{1-\beta}2^{-q(m+n)}|f^{(n)}\overline{\diamond}G^{(m)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(m+n)}_{ext}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}<\infty\big\} \tag{2.53}$$

(насправді цей результат, так само як і (2.47), випливає із загальної теорії дуальності).

Теорема 2.4. *Оператор* (2.50) *з областю визначення* (2.51) *і оператор* (2.52) *з областю визначення* (2.53) *є взаємно спряженими. Зокрема, ці оператори є замкненими.*

Доведення. Покажемо, що існує другий спряжений до $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$ оператор $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^{**}=(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$. Оскільки, очевидно, область визначення оператора (2.50) є щільною множиною в $(L^2)^{\beta}_q\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, то спряжений оператор

$$(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^*:(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\to(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

визначений коректно. За означенням, $G\in\mathrm{dom}\big((\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^*\big)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(L^2)^{\beta}_q\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\supset\mathrm{dom}\big((\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})\big)\ni F\mapsto\langle\!\langle(\mathbf{D}^nF)(f^{(n)}),G\rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}\in\mathbb{C}$$

є лінійним неперервним функціоналом. За властивостями гільбертових оснащень, останнє можливе тоді і тільки тоді, коли існує $K\in(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ таке, що

$$\langle\!\langle (\mathbf{D}^n F)(f^{(n)}), G \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \langle\!\langle F, K \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}}.$$

З викладки (2.25) випливає, що K має вигляд (2.38), тому область визначення оператора (2.52) має вигляд (2.53). Ця множина щільна в $(L^2)_{-q}^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$, отже,

$$(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^{**} : (L^2)_q^\beta\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C} \to (L^2)_q^\beta\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$$

визначений коректно. Залишається показати, що

$$\operatorname{dom}\big((\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^{**}\big) = \operatorname{dom}\big((\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})\big). \tag{2.54}$$

За аналогією з вище розглянутим, $F\in\operatorname{dom}\big((\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^{**}\big)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(L^2)_{-q}^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C} \supset \operatorname{dom}\big((\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})^{*}\big) \ni G \mapsto \langle\!\langle F, (\mathbf{D}^n G)(f^{(n)})^* \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$$

є лінійним неперервним функціоналом. Останнє можливо якщо і тільки якщо існує $H\in(L^2)_q^\beta\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}$ таке, що

$$\langle\!\langle F, (\mathbf{D}^n G)(f^{(n)})^* \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \langle\!\langle H, G \rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_\mathbb{C}}.$$

Зрозуміло, що H має вигляд (2.35), тому рівність (2.54) випливає з (2.51).

Спряжений оператор є замкненим, тому оскільки оператори (2.50) та (2.52) є взаємно спряженими, то вони є і замкненими. $\square$

Зауваження 2.10. *Як і у випадку операторів стохастичного диференціювання на просторах* $(L^2)_q^\beta$ *, для кожного* $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *,* $n \in \mathbb{N}$ *, можна визначити оператор*

$$(\widetilde{\mathbf{D}}^n \circ)(f^{(n)}) : (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}, \tag{2.55}$$

з областю визначення, що не залежить від $f^{(n)}$ *,*

$$B_n := \Big\{F \in (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} : \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1+\beta} 2^{qm} \Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2 |F_\cdot^{(m+n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(m+n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} < \infty\Big\},$$

де $F_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *– ядра з розкладу* (1.13) *для* F *, за формулою* (2.35). *Для кожного* $F \in B_n$ *оператор*

$$(\widetilde{\mathbf{D}}^n F)(\circ) : \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \to (L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

є лінійним обмеженим (а, отже, і неперервним) оператором: в силу (2.35), (1.14) *і* (2.32)

$$\|(\widetilde{\mathbf{D}}^n F(\cdot))(f^{(n)})\|^2_{(L^2)_q^\beta \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1+\beta} 2^{qm} \Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2 |(f^{(n)}, F_\cdot^{(m+n)})_{EXT}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq$$

$$\leq |f^{(n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}} \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1+\beta} 2^{qm} \Big(\frac{(m+n)!}{m!}\Big)^2 |F_\cdot^{(m+n)}|^2_{\mathcal{H}_{ext}^{(m+n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Більш того, з теореми 2.4 випливає, що оператор (2.55) *є таким, що допускає замикання (його замиканням є оператор* (2.50) *з областю визначення* (2.51)*).*

2.2. Взаємозв'язок між операторами стохастичного диференціювання на різних просторах

В статті [47] було введено та вивчено аналоги операторів $(D^n\circ)(f^{(n)})$ і $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$, $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ (позначимо ці аналоги через $(\widehat{D}^n\circ)(f^{(n)})$ і $(\widehat{\mathbf{D}}^n\circ)(f^{(n)})$ відповідно) на просторах нерегулярних основних функцій аналізу білого шуму Леві. Зокрема, було показано що звуження $(D^n\circ)(f^{(n)})$ з $(L^2) = (L^2)_0^0$ на, вище згадані, простори збігаються з $(\widehat{D}^n\circ)(f^{(n)})$. З урахуванням цього результату та побудови всіх згаданих операторів, природньо очікувати, що звуження $(\mathbf{D}^n\circ)(f^{(n)})$ з $(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = (L^2)_0^0\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ на відповідні простори нерегулярних основних функцій збігаються з $(\widehat{\mathbf{D}}^n\circ)(f^{(n)})$. Зараз ми пояснимо це детальніше.

Позначимо через T набір індексів $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, де $\tau_1 \in \mathbb{N}$, τ_2 — нескінченно диференційована функція на $\mathbb{R}_+$, така, що для всіх $u \in \mathbb{R}_+$ $\tau_2(u) \geq 1$. Нехай $\mathcal{H}_\tau$ — простір Соболєва на $\mathbb{R}_+$ порядку τ_1, і з вагою τ_2, тобто, $\mathcal{H}_\tau$ — поповнення множини $\mathcal{D}$ всіх дійснозначних нескінченно диференційованих функцій на $\mathbb{R}_+$ з компактними носіями відносно норми, породженої скалярним добутком

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{H}_\tau} = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\varphi(u)\psi(u) + \sum_{k=1}^{\tau_1} \varphi^{[k]}(u)\psi^{[k]}(u)\Big)\tau_2(u)du,$$

тут $\varphi^{[k]}$ і $\psi^{[k]}$ — похідні порядку k функцій φ і ψ відповідно. Як сказано вище, відомо (див. наприклад, [19]), що $\mathcal{D}$ можна представити як лінійний топологічний простір з топологією проективної границі:

$$\mathcal{D} = \mathrm{pr}\lim_{\tau\in T} \mathcal{H}_\tau$$

(більш того, для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}^{\widehat{\otimes}n} = \mathrm{pr}\lim_{\tau\in T} \mathcal{H}_\tau^{\widehat{\otimes}n},$$

див. подробиці, наприклад, у [18]), та, для кожного $\tau \in T$, $\mathcal{H}_\tau$ щільно і неперервно вкладені в $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$. Тому можна розглядати ланцюжок

$$\mathcal{D}' \supset \mathcal{H}_{-\tau} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_\tau \supset \mathcal{D},$$

де $\mathcal{H}_{-\tau}$, $\tau \in T$, є дуальними просторами до $\mathcal{H}_\tau$ відносно $\mathcal{H}$. Зауважимо, що за теоремою Шварца (наприклад, [19]),

$$\mathcal{D}' = \bigcup_{\tau\in T} \mathcal{H}_{-\tau}.$$

За аналогією з [43], можна показати, що міра білого шуму Леві μ зосереджена на $\mathcal{H}_{-\widetilde{\tau}}$ з деякими $\widetilde{\tau} \in T$, тобто, $\mu(\mathcal{H}_{-\widetilde{\tau}}) = 1$. Виключимо з T індекси τ такі, що μ не зосереджена на $\mathcal{H}_{-\tau}$, далі будемо вважати, що *для всіх* $\tau \in T$, $\mu(\mathcal{H}_{-\tau}) = 1$.

Позначимо норми в тензорних степенях комплексифікацій $\mathcal{H}_\tau$ через $|\cdot|_\tau$, тобто, для $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}|_\tau = \sqrt{(f^{(n)}, \overline{f^{(n)}})_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n}}}$$

(як сказано вище, у комплексифікаціях гільбертових просторів скалярні добутки ми вважаємо *дійсними*, тобто, *білінійними*).

З результатів [42] випливає, що можна ще раз модифікувати T (прибрати з нього ще деякі "зайві" індекси) та отримати такий результат:

Лема 2.3. *Для кожного* $\tau \in T$ *та кожного* $n \in \mathbb{Z}_+$ *простір* $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n}$ *щільно та неперервно вкладений у простір* $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ *, при цьому існує*

$c(\tau) > 0$ *таке, що для всіх* $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$

$$|f^{(n)}|_{ext}^2 \le n! c(\tau)^n |f^{(n)}|_\tau^2.$$

У цьому підрозділі приймемо за замовчуванням $q \in \mathbb{Z}_+$, $\tau \in T$. Множина $\mathcal{H}_\tau^{\widehat{\otimes} 0} := \mathbb{R}$ (отже, $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 0} = \mathbb{C}$). Визначимо дійсні скалярні добутки $(\cdot, \cdot)_{\tau,q}$ на

$$\mathcal{P}_W = \Big\{ f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :, f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, N_f \in \mathbb{Z}_+ \Big\} \subset (L^2),$$

поклавши для

$$f = \sum_{n=0}^{N_f} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :, \;\; g = \sum_{n=0}^{N_g} :\langle \circ^{\otimes n}, g^{(n)} \rangle : \in \mathcal{P}_W$$

$$(f, g)_{\tau,q} := \sum_{n=0}^{\min(N_f, N_g)} (n!)^2 2^{qn} (f^{(n)}, g^{(n)})_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}}.$$

Нехай $\| \cdot \|_{\tau,q}$ — відповідні норми, тобто,

$$\|f\|_{\tau,q} = \sqrt{(f, \overline{f})_{\tau,q}}.$$

Коректність цього визначення доведено в [47].

Позначимо через $(\mathcal{H}_\tau)_q$ поповнення $\mathcal{P}_W$ відносно норм $\| \cdot \|_{\tau,q}$; і покладемо

$$(\mathcal{H}_\tau) := \operatorname*{pr\,lim}_{q \in \mathbb{Z}_+} (\mathcal{H}_\tau)_q, \; (\mathcal{D}) := \operatorname*{pr\,lim}_{q \in \mathbb{Z}_+, \tau \in T} (\mathcal{H}_\tau)_q.$$

Означення 2.5. *Простори* $(\mathcal{H}_\tau)_q$, $(\mathcal{H}_\tau)$ *і* $(\mathcal{D})$ *називаються просторами Кондратьєва нерегулярних основних функцій.*

Бачимо, що $f \in (\mathcal{H}_\tau)_q$ якщо і тільки якщо її можна єдиним чином представити у вигляді

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle :, \;\; f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \tag{2.56}$$

(ряд збігається в $(\mathcal{H}_\tau)_q$), з

$$\|f\|^2_{(\mathcal{H}_\tau)_q} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{qn} |f^{(n)}|^2_\tau < \infty; \tag{2.57}$$

і для $f, g \in (\mathcal{H}_\tau)_q$

$$(f,g)_{(\mathcal{H}_\tau)_q} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{qn} (f^{(n)}, g^{(n)})_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}},$$

тут $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ — ядра з розкладу (2.56) для f і g відповідно (оскільки, для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \subseteq \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, то для $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ коректно визначений віківський моном $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$, див. підрозділ 1.3). Далі, $f \in (\mathcal{H}_\tau)$ ($f \in (\mathcal{D})$) якщо і тільки якщо f єдиним чином представлена у вигляді (2.56) і норма (2.57) є скінченною для кожного $q \in \mathbb{Z}_+$ (для всіх $q \in \mathbb{Z}_+$ і всіх $\tau \in T$).

Зауваження 2.11. *В [42] доведено, що для кожного* $\tau \in T$ *існує* $q_0 = q_0(\tau) \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для всіх* $q \in \{q_0, q_0+1, \cdots\}$ *простір* $(\mathcal{H}_\tau)_q$ *щільно і неперервно вкладений в* (L^2) *. З огляду на це твердження, можна розглянути дуальні відносно* (L^2) *простори до просторів Кондратьєва нерегулярних основних функцій. Такі дуальні простори називаються просторами Кондратьєва нерегулярних узагальнених функцій і мають* *багато застосувань в аналізі Леві (зокрема, в теорії стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу) (детальніше див. [42, 47, 48]).*

Розглянемо ланцюжки

$$\mathcal{D}'^{(m)}_{\mathbb{C}} \supset \mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}} \supset \mathcal{H}^{(m)}_{ext} \supset \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{\tau,\mathbb{C}} \supset \mathcal{D}^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}},$$

$$\mathcal{D}'^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}} \supset \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{-\tau,\mathbb{C}} \supset \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}} \supset \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{\tau,\mathbb{C}} \supset \mathcal{D}^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}},$$

$m \in \mathbb{Z}_+$, де $\mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $\mathcal{D}'^{(m)}_{\mathbb{C}} = \bigcup_{\tau\in T} \mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ і $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $\mathcal{D}'^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}} = \bigcup_{\tau\in T} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{-\tau,\mathbb{C}}$ — дуальні простори до $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{\tau,\mathbb{C}}$,

$$\mathcal{D}^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}} = \operatorname{pr}\lim_{\tau\in T} \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{\tau,\mathbb{C}}$$

відносно $\mathcal{H}^{(m)}_{ext}$ і $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}}$ відповідно (для $m = 0$ всі простори з цих ланцюжків дорівнюють $\mathbb{C}$). Оскільки простори основних функцій в обох ланцюжках співпадають, існує сім'я природних ізоморфізмів

$$U_m : \mathcal{D}'^{(m)}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{D}'^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}}$$

така, що для всіх $F^{(m)}_{ext} \in \mathcal{D}'^{(m)}_{\mathbb{C}}$ і $f^{(m)} \in \mathcal{D}^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}}$

$$\langle F^{(m)}_{ext}, f^{(m)}\rangle_{\mathcal{H}^{(m)}_{ext}} = \langle U_m F^{(m)}_{ext}, f^{(m)}\rangle_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.58}$$

Звуження U_m на простори $\mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}, m \in \mathbb{Z}_+$ є ізометричними ізоморфізмами між просторами $\mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}}$ і $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}m}_{-\tau,\mathbb{C}}$ (для цих звужень ми зберігаємо позначення U_m). Зауважимо, що $\mathcal{H}^{(1)}_{ext} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ і, таким чином, $U_1 = \mathbf{1}$

є тотожним оператором на $\mathcal{D}'^{(1)}_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}$. У випадку $m = 0$, U_0 – це, очевидно, тотожний оператор на $\mathbb{C}$.

Нехай $F^{(n)}_{ext} \in \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $G^{(m)}_{ext,\cdot} \in \mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Визначимо

$$F^{(n)}_{ext} \widehat{\diamond} G^{(m)}_{ext,\cdot} :=$$

$$:= (U^{-1}_{n+m} \otimes \mathbf{1})\{(Pr \otimes \mathbf{1})[(U_n F^{(n)}_{ext}) \otimes ((U_m \otimes \mathbf{1}) G^{(m)}_{ext,\cdot})]\} \in \mathcal{H}^{(n+m)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}, \tag{2.59}$$

де $Pr \otimes \mathbf{1}$ — ортогональний проектор, що діє з $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} m}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}$ в $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+m}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}$ (звичайно, цей оператор залежить від τ , n і m , але ми спростимо позначення). Зрозуміло, що

$$|F^{(n)}_{ext} \widehat{\diamond} G^{(m)}_{ext,\cdot}|_{\mathcal{H}^{(n+m)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}} =$$

$$= |(Pr \otimes \mathbf{1})[(U_n F^{(n)}_{ext}) \otimes ((U_m \otimes \mathbf{1}) G^{(m)}_{ext,\cdot})]|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+m}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}} \leq$$

$$\leq |U_n F^{(n)}_{ext}|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}_{-\tau,\mathbb{C}}} |(U_m \otimes \mathbf{1}) G^{(m)}_{ext,\cdot}|_{\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} m}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}} = |F^{(n)}_{ext}|_{\mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}} |G^{(m)}_{ext,\cdot}|_{\mathcal{H}^{(m)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}}. \tag{2.60}$$

Нехай $F^{(n)}_{ext} \in \mathcal{H}^{(n)}_{-\tau,\mathbb{C}}$, $f^{(m)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} m}_{\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$, $m \geq n$. Визначимо узагальнене часткове спарювання $\langle F^{(n)}_{ext}, f^{(m)}_{\cdot} \rangle_{EXT} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} m-n}_{\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$, поклавши для довільного $G^{(m-n)}_{ext,\cdot} \in \mathcal{H}^{(m-n)}_{-\tau,\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}$

$$\langle G^{(m-n)}_{ext,\cdot}, \langle F^{(n)}_{ext}, f^{(m)}_{\cdot} \rangle_{EXT} \rangle_{\mathcal{H}^{(m-n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \langle F^{(n)}_{ext} \widehat{\diamond} G^{(m-n)}_{ext,\cdot}, f^{(m)}_{\cdot} \rangle_{\mathcal{H}^{(m)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}. \tag{2.61}$$

За узагальненою нерівністю Коші-Буняковського і (2.60)

$$|\langle F_{ext}^{(n)}\widehat{\diamond}G_{ext,\cdot}^{(m-n)}, f_\cdot^{(m)}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}| \le |F_{ext}^{(n)}\widehat{\diamond}G_{ext,\cdot}^{(m-n)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}}|f_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m}\otimes\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}} \le$$

$$\le |F_{ext}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)}}|G_{ext,\cdot}^{(m-n)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m-n)}\otimes\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}}|f_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m}\otimes\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}},$$

що означає, що це визначення є коректним і

$$|\langle F_{ext}^{(n)}, f_\cdot^{(m)}\rangle_{EXT}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m-n}\otimes\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}} \le |F_{ext}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)}}|f_\cdot^{(m)}|_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m}\otimes\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}}.$$

Для визначення аналогів операторів $\mathbf{D}^n$, $n \in \mathbb{N}$, на просторах нерегулярних основних функцій $(\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$, нам потрібні ортогональні базиси в цих просторах. Оскільки, звуження узагальненого ізоморфізму Вінера-Іто-Сігала $\mathbf{I}$ (див. підрозділ 1.5) з $(L^2) = (L^2)_0^0$ на $(\mathcal{H}_\tau)_q$ є ізометричним ізоморфізмом між $(\mathcal{H}_\tau)_q$ і зваженим симетричним простором Фока $\bigoplus\limits_{m=0}^{\infty}(m!)^2 2^{qm}\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m}$ (порівнюючи з [49]); і, звичайно, звуження тотожного оператора з $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ на простір $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$ є тотожним оператором на $\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$, для довільних $m \in \mathbb{Z}_+$ і

$$f_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m} \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$

ми маємо

$$:\langle \circ^{\otimes m}, f_\cdot^{(m)}\rangle : \in (\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$$

(див. (1.12)). Зрозуміло, що такі елементи утворюють ортогональний базис у кожному $(\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$, тобто, будь-яку $f \in (\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$ можна однозначно представити у вигляді

$$f(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, f_\cdot^{(m)}\rangle :, \;\; f_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m} \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}} \tag{2.62}$$

(ряд збіжний в $(\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$), і

$$\|f\|^2_{(\mathcal{H}_\tau)_q\otimes\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}} = \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^2 2^{qm}|f_\cdot^{(m)}|^2_{\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m}\otimes\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}} < \infty.$$

Означення 2.6. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $F_{ext}^{(n)} \in \mathcal{H}_{-\tau}^{(n)}$. *Визначимо лінійний неперервний оператор*

$$(\widehat{\mathbf{D}}^n \circ)(F_{ext}^{(n)}) : (\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}} \to (\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}, \tag{2.63}$$

поклавши для $f \in (\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathbf{D}}^n f(\cdot))(F_{ext}^{(n)}) &:= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} {:}\langle \circ^{\otimes m-n}, \langle F_{ext}^{(n)}, f_\cdot^{(m)}\rangle_{EXT}\rangle{:} \equiv \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} {:}\langle \circ^{\otimes m}, \langle F_{ext}^{(n)}, f_\cdot^{(m+n)}\rangle_{EXT}\rangle{:}\end{aligned} \tag{2.64}$$

(порівнюючи з (2.14), (2.35)*), де* $f_\cdot^{(m)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}m} \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$ *— ядра з розкладу* (2.62) *для* f .

Коректність цього визначення доводиться за аналогією з доведенням коректності $\mathbf{D}$.

Зауважимо, що звуження $(\widehat{\mathbf{D}}^n \circ)(F_{ext}^{(n)})$ на простір

$$(\mathcal{H}_\tau) \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}} := \mathrm{pr}\lim_{q\in\mathbb{Z}_+}(\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}},$$

або на простір

$$(\mathcal{D})\otimes\mathcal{D}_{\mathbb{C}}:=\operatorname*{pr\,lim}_{q\in\mathbb{Z}_+,\tau\in T}(\mathcal{H}_\tau)_q\otimes\mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$$

є лінійним неперервним оператором на відповідному просторі.

Порівнюючи побудову операторів (2.34) і (2.63), можна зробити висновок, що для вивчення взаємозв'язку між цими операторами, необхідно вивчити взаємозв'язок між "добутками" $\diamond$ і $\overline{\diamond}$.

Лема 2.4. *Нехай* $n,m\in\mathbb{Z}_+$. *Для* $F^{(n)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\subset\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)}$ *i* $G_\cdot^{(m)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\subset\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}$

$$F^{(n)}\overline{\diamond}G_\cdot^{(m)}=F^{(n)}\diamond G_\cdot^{(m)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\subset\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}\tag{2.65}$$

Доведення. Для $n=0$ або $m=0$ (2.65) очевидно, виконується, тому розглянемо випадок $n,m\in\mathbb{N}$. Спочатку встановимо, що для кожного $\lambda\in\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$

$$\langle F^{(n)}\overline{\diamond}G_\cdot^{(m)},\lambda^{\otimes n+m+1}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}=(F^{(n)}\diamond G_\cdot^{(m)},\lambda^{\otimes n+m+1})_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.\tag{2.66}$$

Справді, згідно з (2.59) і (2.58)

$$\begin{gathered}\langle F^{(n)}\overline{\diamond}G_\cdot^{(m)},\lambda^{\otimes n+m+1}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}=\\=\langle(U_{n+m}^{-1}\otimes\mathbf{1})\{(Pr\otimes\mathbf{1})[(U_nF^{(n)})\otimes((U_m\otimes\mathbf{1})G_\cdot^{(m)})]\},\lambda^{\otimes n+m+1}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}=\\=\langle(U_nF^{(n)})\otimes((U_m\otimes\mathbf{1})G_\cdot^{(m)}),\lambda^{\otimes n+m+1}\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n+m+1}}=\\=\langle U_nF^{(n)},\lambda^{\otimes n}\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}}\langle(U_m\otimes\mathbf{1})G_\cdot^{(m)},\lambda^{\otimes m+1}\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes m+1}}=\\=\langle F^{(n)},\lambda^{\otimes n}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}}\langle G_\cdot^{(m)},\lambda^{\otimes m+1}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.\end{gathered}\tag{2.67}$$

З іншого боку, використовуючи позначення, прийняті при визначенні $F^{(n)} \diamond G_{\cdot}^{(m)}$, згідно з (1.7), отримаємо

$$(F^{(n)} \diamond G_{\cdot}^{(m)}, \lambda^{\otimes n+m+1})_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = (\widehat{f^{(n)} g_{\cdot}^{(m)}}, \lambda^{\otimes n+m+1})_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1 > l_2 > \dots > l_k, \\ l_1 s_1 + \dots + l_k s_k = n+m}} \frac{(n+m)!}{s_1! \cdots s_k!} \Big(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!} \Big)^{2s_1} \cdots \Big(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!} \Big)^{2s_k} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}_+^{s_1 + \dots + s_k + 1}} \widehat{f^{(n)} g_u^{(m)}} (\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{u_{s_1+\dots+s_k}, \dots, u_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}) \times$$

$$\times \lambda^{l_1}(u_1) \cdots \lambda^{l_k}(u_{s_1+\dots+s_k}) du_1 \cdots du_{s_1+\dots+s_k} du.$$

За аналогією з [47, параграф 2.2], можна показати, що права частина цієї рівності дорівнює

$$(F^{(n)}, \lambda^{\otimes n})_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} (G_{\cdot}^{(m)}, \lambda^{\otimes m+1})_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \langle F^{(n)}, \lambda^{\otimes n} \rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}} \langle G_{\cdot}^{(m)}, \lambda^{\otimes m+1} \rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Порівнюючи цей результат з (2.67), отримаємо (2.66).

Далі,

$$F^{(n)} \diamond G_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{D}'^{(n+m)}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{D}'_{\mathbb{C}} = \bigcup_{\tau \in T} \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}$$

породжує лінійний неперервний функціонал на

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+m} \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \operatorname{pr} \lim_{\tau \in T} \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+m} \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$$

за формулою

$$l(\circ) := (F^{(n)} \diamond G_{\cdot}^{(m)}, \circ)_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

З іншого боку,

$$F^{(n)} \overline{\diamond} G_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}} \subset \mathcal{D}'^{(n+m)}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}$$

породжує лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+m} \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ за формулою

$$\widehat{l}(\circ) := \langle F^{(n)} \overline{\diamond} G_{\cdot}^{(m)}, \circ \rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Згідно з (2.66), $\widehat{l} = l$ на тотальній у просторі $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+m} \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ множині $\{\lambda^{\otimes n+m+1} : \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}\}$, тому ці *лінійні неперервні* функціонали збігаються на усьому $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+m} \otimes \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, звідки випливає (2.65). □

Як наслідок з цієї леми ми отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.5. *Для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \subset \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)}$ *звуження оператора* $(\mathbf{D}^n \circ)(f^{(n)})$ *з простору* $(L^2) \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = (L^2)_0^0 \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *на простір* $(\mathcal{H}_\tau)_q \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}$ *збігається з оператором* $(\widehat{\mathbf{D}}^n \circ)(f^{(n)})$.

Доведення. Згідно з (2.35) і (2.64), достатньо показати, що для довільних $m \geq n$ і

$$F_{\cdot}^{(m)} \in \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} m} \otimes \mathcal{H}_{\tau,\mathbb{C}} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(m)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \; (f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{EXT} = \langle f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)} \rangle_{EXT}$$

в $\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Справді, згідно з (2.31), (2.65) і (2.61), для довільних

$$G_{\cdot}^{(m-n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(m-n)} \otimes \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}},$$

ми отримаємо

$$\left(G_{\cdot}^{(m-n)}, (f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)})_{EXT}\right)_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \left(f^{(n)} \diamond G_{\cdot}^{(m-n)}, F_{\cdot}^{(m)}\right)_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= \langle f^{(n)}\widehat{\diamond} G_{\cdot}^{(m-n)}, F_{\cdot}^{(m)}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(m)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \langle G_{\cdot}^{(m-n)}, \langle f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)}\rangle_{EXT}\rangle_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} =$$

$$= \left(G_{\cdot}^{(m-n)}, \langle f^{(n)}, F_{\cdot}^{(m)}\rangle_{EXT}\right)_{\mathcal{H}_{ext}^{(m-n)}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

звідки випливає потрібне. □

Зауваження 2.12. *Як зазначено вище, існує аналог теореми 2.5 для операторів* D^n *(детальніше див. [47]): для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *і* $f^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \subset \mathcal{H}_{-\tau,\mathbb{C}}^{(n)}$ *звуження оператора* $(D^n\circ)(f^{(n)})$ *з простору* $(L^2) = (L^2)_0^0$ *на простір* $(\mathcal{H}_\tau)_q$ *збігається з оператором стохастичного диференціювання на* $(\mathcal{H}_\tau)_q$ *.*

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації уведено і детально вивчено оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, побудованих з використанням аналогу властивості хаотичного розкладу, запропонованого Є. В. Литвиновим. Окремо розглянуто випадки, у яких згадані оператори є обмеженими та необмеженими. Результати розділу є узагальненням на версію аналізу білого шуму Леві, що розбудовується в дисертації, відповідних результатів гауссівського аналізу білого шуму. Так само, як і у гауссівському аналізі, побудовані оператори стохастичного диференціювання можна використовувати для вивчення деяких властивостей розширеного стохастичного інтеграла; а також для вивчення властивостей розв'язків стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь з нелінійностями віківського типу.

Крім того, у розділі доведено, що на перетинах просторів регулярних та нерегулярних основних функцій уведені в дисертації оператори стохастичного диференціювання співпадають із відповідними операторами на просторах нерегулярних основних функцій. Це дає, зокрема, можливість використовувати певні результати, пов'язані із операторами стохастичного диференціювання на просторах нерегулярних основних функцій, в аналізі білого шуму Леві на просторах регулярних основних і узагальнених функцій.

Основні результати розділу опубліковані у таких працях [23], [25], [27].

РОЗДІЛ 3
ЕЛЕМЕНТИ ВІКІВСЬКОГО ЧИСЛЕННЯ

В цьому розділі ми введемо і вивчимо віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на "граничних" просторах регулярних узагальнених функцій $(L^2)^{-\beta}$.

3.1. Віківський добуток та віківські версії голоморфних функцій на $(L^2)^{-\beta}$

Спочатку дамо необхідні означення. Зараз $\beta \in [0, 1]$.

Означення 3.1. *Для* $F \in (L^2)^{-\beta}$ *визначимо* S *-перетворення*

$$(SF)(\lambda), \, \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}},$$

як формальний, взагалі кажучи, ряд

$$(SF)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (F^{(m)}, \, \lambda^{\otimes m})_{ext}, \tag{3.1}$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_+$ *– ядра з розкладу* (1.5) *для* F *. Зокрема,* $(SF)(0) = F^{(0)}, \, S1 \equiv 1.$

Зауважимо, що кожен доданок ряду (3.1) визначений коректно, але ряд може розбігатися.

Означення 3.2. *Для* $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ *та голоморфної у* $F^{(0)}$ *функції* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *, визначимо віківський добуток* $F \Diamond G$ *та віківську версію* $h^{\Diamond}(F)$ *, формально поклавши*

$$F \Diamond G := S^{-1}(SF \cdot SG), \, h^{\Diamond}(F) := S^{-1} h(SF). \tag{3.2}$$

Так визначений віківський добуток $\Diamond$, є комутативним, асоціативним і дистрибутивним (над $\mathbb{C}$).

Функцію h, з означення 3.2, можна представити у вигляді

$$h(u) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(u - (SF)(0))^m, \tag{3.3}$$

тоді

$$h^{\Diamond}(F) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(F - (SF)(0))^{\Diamond m}, \tag{3.4}$$

де

$$F^{\Diamond m} := F \underbrace{\Diamond \ldots \Diamond}_{m \text{ разів}} F,$$

$F^{\Diamond 0} := 1$.

З формули (2.23) з [47] випливає, що для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ і $\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$

$$(F^{(n)}, \lambda^{\otimes n})_{ext}(G^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{ext} = (F^{(n)} \diamond G^{(m)}, \lambda^{\otimes n+m})_{ext}. \tag{3.5}$$

Нагадаємо, що добуток $\diamond$ є аналогом симетричного тензорного добутку на просторах $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. Використовуючи (3.5), за аналогією з майкснерівським аналізом, можна підрахувати координатні формули для віківського добутку і віківських версій голоморфних функцій, тобто представлення $F \Diamond G$ та $h^{\Diamond}(F)$ через ядра $F^{(k)}, G^{(k)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k)}$ з розкладів (1.5) для F і G та коефіцієнтів $h_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_+$ з розкладу (3.3) для h .

Твердження 3.1. *Для* $F_1, \ldots, F_n \in (L^2)^{-\beta}$

$$F_1\Diamond\ldots\Diamond F_n=\sum_{m=0}^{\infty}:\langle\circ^{\otimes m},\sum_{k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+,\,k_1+\ldots+k_n=m}F_1^{(k_1)}\diamond\ldots\diamond F_n^{(k_n)}\rangle:,\qquad(3.6)$$

зокрема, для $F,G\in(L^2)^{-\beta}$

$$F\Diamond G=\sum_{m=0}^{\infty}:\langle\circ^{\otimes m},\sum_{k=0}^{m}F^{(k)}\diamond G^{(m-k)}\rangle:;\qquad(3.7)$$

і для $F\in(L^2)^{-\beta}$ *та голоморфної у* $F^{(0)}$ *функції* $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$$h^{\Diamond}(F)=h_0+\sum_{m=1}^{\infty}:\langle\circ^{\otimes m},\sum_{n=1}^{m}h_n\sum_{k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N},\,k_1+\ldots+k_n=m}F^{(k_1)}\diamond\ldots\diamond F^{(k_n)}\rangle:,\qquad(3.8)$$

де $F_j^{(k_j)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(k_j)}$, $j\in\{1,\ldots,n\},k_j\in\mathbb{N}$ *– ядра з розкладу* (1.5) *для* F_j *;* $F^{(k)},G^{(k)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(k)}$ *– ядра з цього ж розкладу для* F *і* G *відповідно;* $h_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}_+$ *– коефіцієнти з розкладу* (3.3) *для* h .

Для того, щоб надати поняттям "віківський добуток" та "віківська версія голоморфної функції" неформального сенсу, слід вивчити питання збіжності рядів (3.6) та (3.8). Із використанням оцінки (2.3) так само, як і у майкснерівському аналізі [45], доводяться наступні твердження (нагадаємо, що $\beta\in[0,1]$).

Теорема 3.1. *Нехай* $F_1,\ldots,F_n\in(L^2)^{-\beta}$ *. Тоді віківський добуток* $F_1\Diamond\ldots\ldots\Diamond F_n\in(L^2)^{-\beta}$ *. Більше того, віківське множення є неперервним у топології* $(L^2)^{-\beta}$ *, точніше, для будь-яких* $F_1,\ldots,F_n\in(L^2)^{-\beta},n\in\mathbb{N}$ *, існують* $q,q'\in\mathbb{Z}_+$ $(q>q'+(1-\beta)\log_2 n+1)$ *такі, що*

$$\|F_1\Diamond\ldots\Diamond F_n\|_{-q,-\beta}\le c(n-1)\|F_1\|_{-q',-\beta},\ldots,\|F_n\|_{-q',-\beta},\qquad(3.9)$$

де

$$c(n) = \sqrt{\max_{m \in \mathbb{Z}_+} [2^{-m}(m+1)^n]}.$$

З теореми 3.1 випливає, що якщо $F \in (L^2)^{-\beta}$ та $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ є поліномом, то $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-\beta}$. Але для загальних h ситуація є складнішою: виявляється, що випадки $\beta = 1$ та $\beta \in [0, 1)$ є суттєво різними.

Теорема 3.2. *Нехай* $F \in (L^2)^{-1}$ *та функція* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *голоморфна у* $(SF)(0)$ *. Тоді* $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-1}$ *.*

Нехай тепер $\beta \in [0, 1)$. Оскільки $(L^2)^{-\beta} \subset (L^2)^{-1}$, то для $F \in (L^2)^{-\beta}$ та голоморфної у $(SF)(0)$ функції $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ віківська версія $h^{\Diamond}(F)$ є коректно визначеним елементом $(L^2)^{-1}$. В той же час $h^{\Diamond}(F)$ може не належати $(L^2)^{-\beta}$, якщо h не є поліномом. Точніше, справедливий такий результат.

Теорема 3.3. *Нехай* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *голоморфна в* $u_0 \in \mathbb{C}$ *функція, що не є поліномом, у якої всі коефіцієнти* h_n *з розкладу*

$$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (u - u_0)^n \tag{3.10}$$

є дійсним та невід'ємними. Тоді для кожного $\beta \in [0, 1)$ *існує* $F \in (L^2)^{-\beta}$ *з* $(SF)(0) = u_0$ *така, що* $h^{\Diamond}(F) \notin (L^2)^{-\beta}$ *.*

З теореми 3.3 випливає, зокрема, що, взагалі кажучи, не існує оцінок на коефіцієнти з розкладу

$$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (u - F^{(0)})^n \tag{3.11}$$

для неполіноміальної h , які б гарантували, що для будь-яких $F \in (L^2)^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1)$, з $(SF)(0) = F^{(0)}$, $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-\beta}$. Однак, справедливе таке твердження.

Теорема 3.4. *Нехай*

$$F = \sum_{m=0}^{N} :\langle \circ^{\otimes m}, F^{(m)} \rangle :,$$

$F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ *та коефіцієнти* h_n *, з розкладу* (3.11)*, для голоморфної у* $F^{(0)}$ *функції* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *задовольняють оцінки*

$$|h_n| \le \frac{K^n}{n^{nN\frac{1-\beta}{2}}} \tag{3.12}$$

$n \in \mathbb{N}$ *, з деяким* $K > 0$ *. Тоді,* $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-\beta}$ *.*

Нехай тепер $0 \le \beta_1 < \beta_2 \le 1$. З'ясуємо достатню умову, за якої $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-\beta_2}$ для $F \in (L^2)^{-\beta_1}$ (при $\beta_2 = 1$ це справедливо завжди).

Теорема 3.5. *Нехай* $0 \le \beta_1 < \beta_2 \le 1$ *,* $F \in (L^2)^{-\beta_1}$ *,* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *– голоморфна у* $(SF)(0)$ *функція. Якщо існує* $K > 0$ *таке, що для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

$$|h_n| \le \frac{K^n}{\max\limits_{m \in \mathbb{N}:\ m \ge n} \left(\frac{n^{m\frac{1-\beta_2}{2}}}{\left([\frac{m}{n}]!\right)^{n\frac{\beta_2-\beta_1}{2}}} \right)}, \tag{3.13}$$

де h_n *– коефіцієнти з розкладу* (3.11) *для* h *,* $[\cdot]$ *позначає цілу частину числа, то* $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-\beta_2}$ *.*

3.2. Віківське числення та оператори стохастичного диференціювання

У цьому підрозділі покажемо, що оператор стохастичного диференціювання D є диференціюванням відносно віківського множення (тобто задовольняє правило Лейбніца).

Спочатку визначимо характеризаційну множину простору $(L^2)^{-\beta}$ у термінах S -перетворення, поклавши

$$B_\beta := S(L^2)^{-\beta} \equiv \{K | \exists F \in (L^2)^{-\beta} : K = SF\}.$$

B_β складається з формальних рядів вигляду (3.1), які можуть розбігатися як числові ряди, але ядра яких задовольняють умову: існує $q \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1-\beta} 2^{-qm} |F^{(m)}|_{ext}^2 < \infty.$$

Твердження 3.2. *B_β є алгеброю відносно поточкового множення.*

Доведення. З теореми 3.1 при $n = 2$ випливає, що для довільних $F, G \in (L^2)^{-\beta}$

$$F \Diamond G = S^{-1}(SF \cdot SG) \in (L^2)^{-\beta},$$

отже, $SF \cdot SG = S(F \Diamond G) \in B_\beta$, тобто поточковий добуток двох довільних елементів B_β є елементом B_β . Виконання інших умов з означення алгебри випливає з властивостей поточкового добутку. $\square$

Нехай $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Визначимо узагальнену "похідну по напрямку" $D_g^{\diamond} : B_\beta \to B_\beta$. Покладемо для

$$(SF)(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} (F^{(m)}, \cdot^{\otimes m})_{ext} \in B_\beta \ (F \in (L^2)^{-\beta},\ F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$$

– ядра з розкладу (1.5) для F)

$$\begin{aligned}(D_g^{\diamond} SF)(\cdot) &:= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(F^{(m+1)},\ g \diamond (\cdot^{\otimes m}))_{ext} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)((F^{(m+1)},\ g)_{ext},\ \cdot^{\otimes m})_{ext} \in B_\beta\end{aligned} \tag{3.14}$$

(див. (2.11)). Оскільки

$$S^{-1}(D_g^{\diamond} SF) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) : \langle \circ^{\otimes m},\ (F^{(m+1)},\ g)_{ext} \rangle := (DF)(g) \in (L^2)^{-\beta},$$

то визначення $D_g^{\diamond}$ є коректним і справедливе таке твердження.

Твердження 3.3. *Оператор стохастичного диференціювання* $(D\circ)(g)$, $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *є прообразом "похідної по напрямку"* $D_g^{\diamond}$ *формального ряду* $S\circ$ *при* S *-перетворенні, тобто для всіх* $F \in (L^2)^{-\beta}$

$$(DF)(g) = S^{-1}(D_g^{\diamond} SF) \in (L^2)^{-\beta}. \tag{3.15}$$

Основним результатом поточного підрозділу є така теорема.

Теорема 3.6. *Оператор стохастичного диференціювання* D *є диференціюванням відносно віківського множення, тобто для будь-яких* $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ *та* $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$D(F \Diamond G)(g) = (DF)(g) \Diamond G + F \Diamond (DG)(g) \in (L^2)^{-\beta}. \tag{3.16}$$

Доведення. Оскільки

$$(DF)(g) = S^{-1}(D_g^{\Diamond} SF)$$

і

$$F \Diamond G := S^{-1}(SF \cdot SG),$$

то отримаємо

$$\begin{aligned} D(F\Diamond G)(g) &= S^{-1}(D_g^{\diamond}(S(F\Diamond G))) = S^{-1}(D_g^{\diamond}(SF \cdot SG)), \\ (DF)(g)\Diamond G &= S^{-1}(S(DF)(g) \cdot SG) = S^{-1}(D_g^{\diamond}(SF) \cdot SG), \\ F\Diamond(DG)(g) &= S^{-1}(SF \cdot S(DG)(g)) = S^{-1}(SF \cdot D_g^{\diamond}(SG)), \end{aligned}$$

отже, достатньо довести, що

$$D_g^{\diamond}(SF \cdot SG) = D_g^{\diamond}(SF) \cdot SG + SF \cdot D_g^{\diamond}(SG). \tag{3.17}$$

Нехай $F^{(m)}, G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ – ядра з розкладів (1.5) для F і G відповідно. Використовуючи означення S-перетворення і $D_g^{\diamond}$ та рівність (3.5), отримаємо

$$(SF)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(F^{(n)}, \lambda^{\otimes n})_{ext}; \; (SG)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}(G^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{ext},$$

$$(SF)(\lambda) \cdot (SG)(\lambda) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} (F^{(n)} \diamond G^{(m)}, \lambda^{\otimes n+m})_{ext},$$

$$D_g^{\diamond}((SF)(\lambda) \cdot (SG)(\lambda)) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} (n+m)(F^{(n)} \diamond G^{(m)}, g \diamond \lambda^{\otimes n+m-1})_{ext},$$

$$D_g^{\diamond}(SF)(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} n(F^{(n)},\, g\diamond\lambda^{\otimes n-1})_{ext},$$

$$D_g^{\diamond}(SG)(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} m(G^{(m)},\, g\diamond\lambda^{\otimes m-1})_{ext},$$

$$D_g^{\diamond}(SF)(\lambda)\cdot(SG)(\lambda)=\sum_{n,\,m=0}^{\infty} n(F^{(n)},\, g\diamond\lambda^{\otimes n-1})_{ext}(G^{(m)},\, \lambda^{\otimes m})_{ext}$$

$$(SF)(\lambda)\cdot D_g^{\diamond}(SG)(\lambda)=\sum_{n,\,m=0}^{\infty} m(F^{(n)},\, \lambda^{\otimes n})_{ext}(G^{(m)},\, g\diamond\lambda^{\otimes m-1})_{ext}.$$

Таким чином, щоб отримати (3.17), достатньо довести, що для всіх $n,\, m\in\mathbb{Z}_+$

$$(n+m)(F^{(n)}\diamond G^{(m)},\, g\diamond\lambda^{\otimes n+m-1})_{ext}=n(F^{(n)},\, g\diamond\lambda^{\otimes n-1})_{ext}(G^{(m)},\, \lambda^{\otimes m})_{ext}+$$
$$+m(F^{(n)},\, \lambda^{\otimes n})_{ext}(G^{(m)},\, g\diamond\lambda^{\otimes m-1})_{ext}. \tag{3.18}$$

Зрозуміло, що для $n=0$ (чи $m=0$) (3.18) справедливе, отже, ми розглянемо лише випадок $n,\, m\in\mathbb{N}$.

Порахуємо

$$(n+m)(F^{(n)}\diamond G^{(m)},\, g\diamond\lambda^{\otimes n+m-1})_{ext}.$$

Нехай $\dot{f}^{(n)}\in F^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)}\in G^{(m)}$ – представники класів еквівалентності $F^{(n)}, G^{(m)}$, $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$ – симетризація $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ з формули (2.2) за всіма змінними. Нагадаємо, що

$$F^{(n)}\diamond G^{(m)}\in\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$$

– клас еквівалентності в $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$, породжений $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$.

Без втрати загальності, можна вважати, що $\dot{f}^{(n)}$ та $\dot{g}^{(m)}$ є симетричними функціями, і $m \geq n$. Враховуючи цю симетричність, отримаємо

$$\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(u_1,\ldots,u_n;u_{n+1},\ldots,u_{n+m}) = \frac{n!m!}{(n+m)!}\times$$

$$\times \sum_{\substack{1\leq p_1,\ldots,p_n\leq n,n+1\leq q_1,\ldots,q_m\leq n+m\\ 0\leq r\leq n,p_1<\cdots<p_r,p_{r+1}<\cdots<p_n,q_1<\cdots<q_{n-r},q_{n-r+1}<\cdots<q_m}} \widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(u_{p_1},\ldots,u_{p_r},u_{q_1},\ldots,u_{q_{n-r}};$$

$$u_{p_{r+1}},\ldots,u_{p_n},u_{q_{n-r+1}},\ldots,u_{q_m}) \tag{3.19}$$

(тут для $r = n$ аргумент у правій частині (3.19)

$$(u_1,\ldots,u_n;u_{n+1},\ldots,u_{n+m});$$

для $r = 0$ цей аргумент

$$(u_{q_1},\ldots,u_{q_n};u_1,\ldots,u_n,u_{q_{n+1}},\ldots,u_{q_m}))$$

(детальніше див. доведення леми 2.1). Підставляючи (3.19) в ліву частину (3.18), отримаємо (див.(1.7))

$$(n+m)(F^{(n)}\diamond G^{(m)},\, g\diamond\lambda^{\otimes n+m-1})_{ext} = (n+m)(\widehat{f^{(n)}g^{(m)}},\, \widehat{\lambda^{\otimes n+m-1}}g)_{ext} =$$

$$= (n+m)\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:j=1,\ldots,k,l_1>l_2>\cdots>l_k,\\ l_1s_1+\cdots+l_ks_k=n+m}} \frac{(n+m)!}{s_1!\ldots s_k!}\left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1}\cdots\left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \widehat{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\ldots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})$$

$$(\widehat{\lambda^{\otimes n+m-1}} g)(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\ldots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\times$$

$$\times du_1\ldots du_{s_1+\cdots+s_k} =$$

$$= (n+m)\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}: j=1,\ldots,k, l_1>l_2>\cdots>l_k,\\ l_1s_1+\cdots+l_ks_k=n+m}} \frac{n!m!}{s_1!\ldots s_k!}\left(\frac{\|p_{l_1}\|_\nu}{l_1!}\right)^{2s_1}\ldots\left(\frac{\|p_{l_k}\|_\nu}{l_k!}\right)^{2s_k}\times$$

$$\times[\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\cdots+s_k}} \widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\ldots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\times$$

$$\times(\widehat{\lambda^{\otimes n+m-1}} g)(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l_1},\ldots,\underbrace{u_{s_1+\cdots+s_k},\ldots,u_{s_1+\cdots+s_k}}_{l_k})\times$$

$$\times du_1\ldots du_{s_1+\cdots+s_k} + \ldots]. \tag{3.20}$$

Як і у доведенні леми 2.1, набори рівних аргументів (наприклад,

$$\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l_1})$$

називатимемо *кортежами.* З впорядкованості за зростанням індексів у (3.19) і у (1.7) випливає, що у доданках у внутрішніх сумах $[\ldots]$ з (3.20) кортежі можуть "розриватися" тільки таким чином, що різні частини "розірваного" кортежу будуть по різні боки від ';'; кортежі по один бік від ';' не міняються місцями; та елементи кортежів не міняються місцями. Крім того, з конструкції $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ випливає, що доданки у внутрішніх сумах $[\ldots]$ в (3.20), в яких є кортеж, розділений знаком ';', дорівнюють нулеві. Інші доданки (якщо існують для набору k, l_j, s_j) розпадаються на групи рівних між собою інтегралів. Ці групи виникають за рахунок взаємних перестановок кортежів однакової довжини, що розташовані по різні боки від ';', рівність інтегралів при таких перестановках випливає з симетричності функції $\widehat{\lambda^{\otimes n+m-1}}g$: ця симетричність дає можливість взаємно переставляти кортежі однакової довжини у аргументі $\widehat{\lambda^{\otimes n+m-1}}g$.

Зрозуміло, що якщо перед ';' стоїть s' кортежей довжини l та після ';' стоїть s'' кортежей довжини l , то за рахунок взаємних перестановок цих кортежей можна отримати

$$\frac{(s'+s'')!}{s'!s''!}$$

рівних доданків.

Неважко бачити, що ненульові доданки у сумі (3.20) "пов'язані" з виразами

$$l_1 s_1 + \cdots + l_k s_k = n + m, \tag{3.21}$$

які можна представити у вигляді

$$\begin{gathered} l'_1 s'_1 + \cdots + l'_{k'} s'_{k'} = n,\ \ l''_1 s''_1 + \cdots + l''_{k''} s''_{k''} = m, \\ k', k'', l'_1, \ldots, l'_{k'}, s'_1, \ldots, s'_{k'}, l''_1, \ldots, l''_{k''}, s''_1, \ldots, s''_{k''} \in \mathbb{N}, \\ l'_1 > \cdots > l'_{k'},\ \ l''_1 > \cdots > l''_{k''} \end{gathered} \tag{3.22}$$

(перша сума у (3.22) "відповідає" за перші n аргументів $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$, друга – за останні m). Зараз для кожного s_j з (3.21) або існує $s'_i = s_j$ ($l'_i = l_j$), або існує $s''_i = s_j$ ($l''_i = l_j$), або існують s'_i та s''_w такі, що $s'_i + s''_w = s_j$ ($l'_i = l''_w = l_j$). Нерівності для $l'_\cdot, l''_\cdot$ у (3.22) випливають з нерівностей $l_1 > \cdots > l_k$ та впорядкованості індексів аргументів у (3.19), і у (1.7) (більш "довгі" кортежі мають менші індекси аргументів).

Замінимо кожну групу рівних між собою доданків у (3.20) одним представником, помноженим на кількість доданків у групі. Також, оскільки міра Лебега є неатомарною, то в цій сумі $\widetilde{f^{(n)}g^{(m)}}$ можна замінити на $\dot{f}^{(n)}\dot{g}^{(m)}$ (у доданках, що залишились, елементи кожного кортежу знаходяться по один і той самий бік від ';'). Тепер, беручи до уваги, що $w^{s'+s''}=w^{s'}w^{s''}$, можна переписати праву частину (3.20) у вигляді

$$
\begin{gathered}
\sum_{\substack{l'_1s'_1+\dots+l'_{k'}s'_{k'}=n,\ \ l''_1s''_1+\dots+l''_{k''}s''_{k''}=m,\\ k',k'',l'_1,\dots,l'_{k'},s'_1,\dots,s'_{k'},l''_1,\dots,l''_{k''},s''_1,\dots,s''_{k''}\in\mathbb{N},\\ l'_1>\dots>l'_{k'},\ \ l''_1>\dots>l''_{k''}}} \frac{n!m!(n+m)}{s'_1!\dots s'_{k'}!s''_1!\dots s''_{k''}!}\times \\
\times\left(\frac{\|p_{l'_1}\|_\nu}{l'_1!}\right)^{2s'_1}\dots\left(\frac{\|p_{l'_{k'}}\|_\nu}{l'_{k'}!}\right)^{2s'_{k'}}\left(\frac{\|p_{l''_1}\|_\nu}{l''_1!}\right)^{2s''_1}\dots\left(\frac{\|p_{l''_{k''}}\|_\nu}{l''_{k''}!}\right)^{2s''_{k''}}\times \\
\times\int_{\mathbb{R}_+^{s'_1+\dots+s'_{k'}+s''_1+\dots+s''_{k''}}}\dot{f}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l'_1},\dots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\dots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}})\times \\
\times\dot{g}^{(m)}(\underbrace{u_{n+1},\dots,u_{n+1}}_{l''_1},\dots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\dots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})\times \\
\times(\widehat{\lambda^{\otimes n+m-1}}g)(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l'_1},\dots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\dots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}}, \\
\underbrace{u_{n+1},\dots,u_{n+1}}_{l''_1},\dots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\dots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})\times \\
\times du_1\dots du_{s'_1+\dots+s'_{k'}}du_{n+1}\dots du_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}.
\end{gathered}
\tag{3.23}
$$

Симетризація функції $\widetilde{\lambda^{\otimes n+m-1}}g$ має вигляд:

$$
\begin{gathered}
\widehat{\lambda^{\otimes n+m-1}}g(u_1,\,u_2,\,\dots,\,u_n,\,u_{n+1},\,\dots,\,u_{n+m-1},\,u_{n+m})= \\
=\frac{1}{(n+m)!}\sum_{\pi\in S_{n+m}}\widetilde{\lambda^{\otimes n+m-1}}g(u_{\pi(1)},\,\dots,\,u_{\pi(n+m)}),
\end{gathered}
\tag{3.24}
$$

де S_{n+m} – множина всіх перестановок чисел $1,\,\dots,\,n+m$. Врахуємо, що $\widetilde{\lambda^{\otimes n+m-1}}g$ є симетричною за першими $n+m-1$ аргументами.

Розглянемо всі доданки, у яких останній аргумент u_1 (зрозуміло, що є $(n+m-1)!$ таких доданків, бо утворюються вони за рахунок довільних перестановок $n+m-1$ аргументів $u_2, \ldots, u_{n+m}$). Беручи до уваги симетричність $\lambda^{\otimes n+m-1}$, можна зробити висновок, що всі ці доданки рівні між собою. Отже, можна замінити їх на $(n+m-1)!$ помножити на одного будь-якого представника. Аналогічно групуємо доданки, у яких останній аргумент $u_2, \ldots, u_{n+m}$. Підставляючи все це у вихідну суму, отримаємо

$$
\lambda^{\widehat{\otimes n+m-1}} g(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+m-1}, u_{n+m}) =
$$

$$
= \frac{(n+m-1)!}{(n+m)!} \times \big[(\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}} g)(u_1, \ldots, u_{n+m}) +
$$

$$
+(\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}} g)(u_{n+m}, u_1, \ldots, u_{n+m-1}) + \ldots + (\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}} g)(u_2, \ldots, u_{n+m}, u_1)\big] =
$$

$$
= \frac{1}{(n+m)} \times \big[(\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}} g)(u_1, \ldots, u_{n+m}) +
$$

$$
+(\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}} g)(u_{n+m}, u_1, \ldots, u_{n+m-1}) + \ldots + (\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}} g)(u_2, \ldots, u_{n+m}, u_1)\big]. \tag{3.25}
$$

Далі, підставляючи (3.25) в (3.23), отримаємо

$$
\sum_{\substack{l'_1 s'_1 + \cdots + l'_{k'} s'_{k'} = n, \ \ l''_1 s''_1 + \cdots + l''_{k''} s''_{k''} = m, \\ k', k'', l'_1, \ldots, l'_{k'}, s'_1, \ldots, s'_{k'}, l''_1, \ldots, l''_{k''}, s''_1, \ldots, s''_{k''} \in \mathbb{N}, \\ l'_1 > \cdots > l'_{k'}, \ \ l''_1 > \cdots > l''_{k''}}} \frac{n! m!}{s'_1! \ldots s'_{k'}! s''_1! \ldots s''_{k''}!} \times
$$

$$
\times \left(\frac{\|p_{l'_1}\|_\nu}{l'_1!} \right)^{2s'_1} \cdots \left(\frac{\|p_{l'_{k'}}\|_\nu}{l'_{k'}!} \right)^{2s'_{k'}} \left(\frac{\|p_{l''_1}\|_\nu}{l''_1!} \right)^{2s''_1} \cdots \left(\frac{\|p_{l''_{k''}}\|_\nu}{l''_{k''}!} \right)^{2s''_{k''}} \times
$$

$$
\times \int_{\mathbb{R}_+^{s'_1 + \cdots + s'_{k'} + s''_1 + \cdots + s''_{k''}}} \dot{f}^{(n)}(\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{l'_1}, \ldots, \underbrace{u_{s'_1 + \cdots + s'_{k'}}, \ldots, u_{s'_1 + \cdots + s'_{k'}}}_{l'_{k'}}) \times
$$

$$\dot{g}^{(m)}(\underbrace{u_{n+1},\dots,u_{n+1}}_{l''_1},\dots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\dots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})\times$$

$$\times[(\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}}g)(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l'_1},\dots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\dots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}}, \tag{3.26}$$

$$\underbrace{u_{n+1},\dots,u_{n+1}}_{l''_1},\dots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\dots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})+\dots]\times$$

$$\times du_1\dots du_{s'_1+\dots+s'_{k'}}du_{n+1}\dots du_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},$$

де кожний наступний доданок у сумі $[\dots]$ з $n+m$ доданків отримується з попереднього "зсувом аргументів" $(\cdot_1,\,\cdot_2,\,\dots,\,\cdot_{n+m-1},\,\cdot_{n+m})\to(\cdot_{n+m},\,\cdot_1,\,\dots,\,\cdot_{n+m-2},\,\cdot_{n+m-1})$.

Приймаючи до уваги структуру $\lambda^{\widetilde{\otimes n+m-1}}g$ (зокрема, її симетричність відносно перших $n+m-1$ аргументів) та неатомарність міри Лебега, продовжимо (3.26) наступним чином

$$(n+m)(F^{(n)}\diamond G^{(m)},\,g\diamond\lambda^{\otimes n+m-1})_{ext}=(n+m)(\widehat{f^{(n)}g^{(m)}},\,\lambda^{\widehat{\otimes n+m-1}}g)_{ext}=$$

$$=\sum_{\substack{l'_1s'_1+\dots+l'_{k'}s'_{k'}=n,\ \ l''_1s''_1+\dots+l''_{k''}s''_{k''}=m,\\ k',k'',l'_1,\dots,l'_{k'},s'_1,\dots,s'_{k'},l''_1,\dots,l''_{k''},s''_1,\dots,s''_{k''}\in\mathbb{N},\\ l'_1>\dots>l'_{k'},\ \ l''_1>\dots>l''_{k''}}}\frac{n!m!}{s'_1!\dots s'_{k'}!s''_1!\dots s''_{k''}!}\times$$

$$\times\left(\frac{\|p_{l'_1}\|_\nu}{l'_1!}\right)^{2s'_1}\dots\left(\frac{\|p_{l'_{k'}}\|_\nu}{l'_{k'}!}\right)^{2s'_{k'}}\left(\frac{\|p_{l''_1}\|_\nu}{l''_1!}\right)^{2s''_1}\dots\left(\frac{\|p_{l''_{k''}}\|_\nu}{l''_{k''}!}\right)^{2s''_{k''}}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s'_1+\dots+s'_{k'}+s''_1+\dots+s''_{k''}}}\dot{f}^{(n)}(\underbrace{u_1,\dots,u_1}_{l'_1},\dots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\dots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}})\times$$

$$\times\dot{g}^{(m)}(\underbrace{u_{n+1},\dots,u_{n+1}}_{l''_1},\dots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\dots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})\times$$

$$\times[\lambda^{l'_1}(u_1)\cdot\ldots\cdot\lambda^{l'_{k'}}(u_{s'_1+\dots+s'_{k'}})\times$$

$$\times((\widetilde{\lambda^{\otimes m-1}}g)(\underbrace{u_{n+1},\ldots,u_{n+1}}_{l''_1},\ldots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\ldots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})+\ldots)]\times$$

$$\times du_1\ldots du_{s'_1+\dots+s'_{k'}}du_{n+1}\ldots du_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}+$$

$$+\sum_{\substack{l'_1s'_1+\dots+l'_{k'}s'_{k'}=n,\ \ l''_1s''_1+\dots+l''_{k''}s''_{k''}=m,\\ k',k'',l'_1,\dots,l'_{k'},s'_1,\dots,s'_{k'},l''_1,\dots,l''_{k''},s''_1,\dots,s''_{k''}\in\mathbb{N},\\ l'_1>\dots>l'_{k'},\ \ l''_1>\dots>l''_{k''}}}\frac{n!m!}{s'_1!\ldots s'_{k'}!s''_1!\ldots s''_{k''}!}\times$$

$$\times\left(\frac{\|p_{l'_1}\|_\nu}{l'_1!}\right)^{2s'_1}\cdots\left(\frac{\|p_{l'_{k'}}\|_\nu}{l'_{k'}!}\right)^{2s'_{k'}}\left(\frac{\|p_{l''_1}\|_\nu}{l''_1!}\right)^{2s''_1}\cdots\left(\frac{\|p_{l''_{k''}}\|_\nu}{l''_{k''}!}\right)^{2s''_{k''}}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}_+^{s'_1+\dots+s'_{k'}+s''_1+\dots+s''_{k''}}}\dot f^{(n)}(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l'_1},\ldots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\ldots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}})\times$$

$$\times\dot g^{(m)}(\underbrace{u_{n+1},\ldots,u_{n+1}}_{l''_1},\ldots,\underbrace{u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}},\ldots,u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}}_{l''_{k''}})\times$$

$$\times[((\widetilde{\lambda^{\otimes n-1}}g)(\underbrace{u_1,\ldots,u_1}_{l'_1},\ldots,\underbrace{u_{s'_1+\dots+s'_{k'}},\ldots,u_{s'_1+\dots+s'_{k'}}}_{l'_{k'}})+\ldots)\times \tag{3.27}$$

$$\times\lambda^{l''_1}(u_{n+1})\cdot\ldots\cdot\lambda^{l''_{k''}}(u_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}})]\times$$

$$\times du_1\ldots du_{s'_1+\dots+s'_{k'}}du_{n+1}\ldots du_{n+s''_1+\dots+s''_{k''}}=m(\dot f^{(n)},\lambda^{\otimes n})_{ext}(\dot g^{(m)},\widehat{\lambda^{\otimes m-1}g})_{ext}+$$

$$+n(\dot f^{(n)},\widehat{\lambda^{\otimes n-1}g})_{ext}(\dot g^{(m)},\lambda^{\otimes m})_{ext}=m(F^{(n)},\,\lambda^{\otimes n})_{ext}(G^{(m)},\,g\diamond\lambda^{\otimes m-1})_{ext}+$$

$$+n(F^{(n)},\,g\diamond\lambda^{\otimes n-1})_{ext}(G^{(m)},\,\lambda^{\otimes m})_{ext},$$

тут використані представлення (3.25) для $\widehat{\lambda^{\otimes m-1}g}$ та $\widehat{\lambda^{\otimes n-1}g}$. Отже, (3.18), а тому і (3.16), доведене. □

Наслідок 3.1. *Нехай* $F\in(L^2)^{-\beta}$, $g\in\mathcal{H}_{ext}^{(1)}=\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *та* $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *голо-*

морфна у $(SF)(0)$ *функція. Тоді*

$$(Dh^{\Diamond}(F))(g) = h'^{\Diamond}(F)\Diamond(DF)(g) \in (L^2)^{-1}, \tag{3.28}$$

де $h'^{\Diamond}$ *– віківська версія звичайної похідної функції* h *.*

Доведення. Спочатку доведемо методом математичної індукції, що для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$

$$D(F - F^{(0)})^{\Diamond m} = m(F - F^{(0)})^{\Diamond m-1}\Diamond DF. \tag{3.29}$$

Справді, у випадку $m = 0$ відповідна рівність, зрозуміло, є істиною (нагадаємо, що $(F - F^{(0)})^{\Diamond 0} = 1$ за визначенням, та для $G \in \mathbb{C} \subset (L^2)^{-1}$ $DG = 0$). Нехай рівність (3.29) є істинною для $m \leq k,\ k \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема,

$$D(F - F^{(0)})^{\Diamond k} = k(F - F^{(0)})^{\Diamond k-1}\Diamond DF. \tag{3.30}$$

Доведемо, що

$$D(F - F^{(0)})^{\Diamond k+1} = (k+1)(F - F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond DF. \tag{3.31}$$

Користуючись (3.15), отримаємо

$$\begin{gathered} D(F - F^{(0)})^{\Diamond k+1} = D((F - F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond(F - F^{(0)})) = \\ = D(F - F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond(F - F^{(0)}) + (F - F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond D(F - F^{(0)}). \end{gathered} \tag{3.32}$$

Підставляючи вираз для $D(F - F^{(0)})^{\Diamond k}$ з формули (3.30), продовжимо викладку (3.32) таким чином

$$D(F-F^{(0)})^{\Diamond k+1}=k(F-F^{(0)})^{\Diamond k-1}\Diamond DF\Diamond(F-F^{(0)})+$$

$$+(F-F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond D(F-F^{(0)})=k(F-F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond DF+(F-F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond DF=$$

$$=(k+1)(F-F^{(0)})^{\Diamond k}\Diamond DF.$$

Рівність (3.31) доведено. Отже, і для довільного $m\in\mathbb{Z}_+$ (3.29) є істинним.

Розглянемо розклад (3.4) для $h^{\Diamond}(F)$. Нехай

$$h_N^{\Diamond}(F):=\sum_{m=0}^{N}h_m(F-(SF)(0))^{\Diamond m}$$

є N -тою частковою сумою цього ряду. З лінійності D , його властивості (3.29), та теорем 3.2 і 3.1 випливає

$$\begin{gathered}\big(Dh_N^{\Diamond}(F)\big)(g)=\sum_{m=1}^{N}h_m\Big(D\big(F-(SF)(0)\big)^{\Diamond m}\Big)(g)=\\=\sum_{m=1}^{N}h_m m\big(F-(SF)(0)\big)^{\Diamond m-1}\Diamond(DF)(g)\underset{N\to\infty}{\to}h'^{\Diamond}(F)\Diamond(DF)(g)\end{gathered}\tag{3.33}$$

в $(L^2)^{-1}$, де $h'^{\Diamond}$ – віківська версія звичайної похідної функції h . З іншого боку, оскільки $(D\circ)(g)$ є *неперервним* оператором на $(L^2)^{-1}$,

$$\big(Dh_N^{\Diamond}(F)\big)(g)\underset{N\to\infty}{\to}\big(Dh^{\Diamond}(F)\big)(g)$$

в $(L^2)^{-1}$. Отже, рівність (3.28) є істинною. □

3.3. Взаємозв'язок між віківським численням та стохастичним інтегруванням

3.3.1. Віківське множення під знаком стохастичного інтеграла

Добре відомо, що деякі властивості розширеного стохастичного інтеграла значно відрізняються від властивостей інтеграла Лебега. Зокрема, для $G \in (L^2)^{-\beta}$ і $g \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} Gg(u)\widehat{d}L_u \neq G \int\limits_{\mathbb{R}_+} g(u)\widehat{d}L_u,$$

взагалі кажучи (вираз у правій частині цієї нерівності може навіть не мати сенсу), незважаючи на те, що G не залежить від u (відповідна нерівність справедлива, навіть, у класичному гауссівському аналізі). Тим не менше, якщо ми будемо використовувати віківське множення замість поточкового, можна винести множник з-під знаку стохастичного інтеграла (знов таки, цей факт добре відомий у гауссівському аналізі). Зараз ми пояснимо це детально.

Означення 3.3. *Нехай* $F \in (L^2)^{-\beta}$, $G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *Визначимо віківський добуток* $F\overline{\Diamond}G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *поклавши*

$$F\overline{\Diamond}G(\cdot) := \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \sum_{k=0}^{m} F^{(k)} \overline{\diamond} G^{(m-k)}_{\cdot} \rangle :, \tag{3.34}$$

де $F^{(k)} \in \mathcal{H}^{(k)}_{ext}$ *і* $G^{(m-k)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(m-k)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *ядра з розкладів* (1.5) *і* (1.13) *для* F *і* G *відповідно (порівнюючи з* (3.7)*).*

Нагадаємо, що добуток $\overline{\diamond}$ є аналогом симетричного тензорного добутку на просторах $\mathcal{H}^{(n)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (детальніше див. лему 2.2 та підготовку перед даною лемою).

Використовуючи оцінку (2.27), за аналогією з [45], можна довести, що це визначення є коректним, а віківське множення $\overline{\Diamond}$ неперервне в тому сенсі, що для будь-яких $q, q' \in \mathbb{Z}_+$, таких, що $F \in (L^2)^{-\beta}_{-q'}$, $G \in (L^2)^{-\beta}_{-q'} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ і $q > q' + 2 - \beta$

$$\|F\overline{\Diamond}G\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \leq \|F\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q'}}\|G\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q'}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Зауваження 3.1. *Нехай* $F, G \in (L^2)^{-\beta}$, $g \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *Використовуючи* (3.34), (3.7) *і* (2.30), *можна показати, що*

$$F\overline{\Diamond}\big(G \otimes g(\cdot)\big) = \big(F\Diamond G\big) \otimes g(\cdot) \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}. \tag{3.35}$$

Теорема 3.7. *Нехай* $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $F \in (L^2)^{-\beta}$ *і* $G \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. *Тоді*

$$\int\limits_{\Delta} F\overline{\Diamond}G(u)\widehat{d}L_u \equiv \int\limits_{\Delta} \big(F\overline{\Diamond}G\big)(u)\widehat{d}L_u = F\Diamond \int\limits_{\Delta} G(u)\widehat{d}L_u \in (L^2)^{-\beta}. \tag{3.36}$$

Зауваження 3.2. *Можна розглядати* G *як функцію, що діє з* $\mathbb{R}_+$ *в* $(L^2)^{-\beta}$ *і, беручи до уваги конструкцію віківських добутків* $\Diamond$ *та* $\overline{\Diamond}$, *переписати рівність* (3.36) *в "класичній" формі*

$$\int\limits_{\Delta} F\Diamond G(u)\widehat{d}L_u = F\Diamond \int\limits_{\Delta} G(u)\widehat{d}L_u.$$

Доведення. Без втрати загальності можна покласти $\Delta = \mathbb{R}_+$ (інакше потрібно взяти $G(\cdot)1_{\Delta}(\cdot) \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ замість $G(\cdot)$).

Спочатку розглянемо випадок $F = :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle:$, $G(\cdot) = :\langle \circ^{\otimes m}, G^{(m)}_{\cdot}\rangle:$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $G^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Враховуючи (3.34), тепер маємо

$$\big(F\overline{\Diamond}G\big)(\cdot) = :\langle \circ^{\otimes n+m}, F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)}\rangle :,$$

тому,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \big(F\overline{\Diamond}G\big)(u)\widehat{d}L_u = :\langle \circ^{\otimes n+m+1}, \widehat{F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)}}\rangle :$$

(див. (1.19)). З іншого боку,

$$\int_{\mathbb{R}_+} G(u)\widehat{d}L_u = \ = :\langle \circ^{\otimes m+1}, \widehat{G}^{(m)}\rangle :,$$

тому, згідно з (3.7)

$$F\Diamond \int_{\mathbb{R}_+} G(u)\widehat{d}L_u = :\langle \circ^{\otimes n+m+1}, F^{(n)}\diamond \widehat{G}^{(m)}\rangle :.$$

Отже, ми повинні показати, що

$$\widehat{F^{(n)}\overline{\diamond}G_{\cdot}^{(m)}} = F^{(n)}\diamond \widehat{G}^{(m)} \tag{3.37}$$

в $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m+1)}$. Нехай $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$ і $\dot{g}_{\cdot}^{(m)} \in G_{\cdot}^{(m)}$ – представники класів еквівалентності $F^{(n)}$ і $G_{\cdot}^{(m)}$ відповідно. Позначимо через S_{n+m+1} множину всіх перестановок чисел $1,\dots,n+m+1$. Зрозуміло, що ліва частина (3.37), породжена функцією

$$\frac{1}{(n+m+1)!}\sum_{\pi\in S_{n+m+1}} \dot{f}^{(n)}(u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(n)})\dot{g}_{u_{\pi(n+m+1)}}^{(m)}(u_{\pi(n+1)},\dots,u_{\pi(n+m)})\times$$
$$\times 1_{\left\{u_{\pi(l)}\neq u_{\pi(k)}, l\in\{1,\dots,n\}, k\in\{n+1,\dots,n+m\}\right\}} 1_{\left\{u_{\pi(n+m+1)}\neq u_{\pi(k)}, k\in\{1,\dots,n+m\}\right\}},$$

в той час як права частина породжена

$$\frac{1}{(n+m+1)!}\sum_{\pi\in S_{n+m+1}} \dot{f}^{(n)}(u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(n)})\dot{g}_{u_{\pi(n+m+1)}}^{(m)}(u_{\pi(n+1)},\dots,u_{\pi(n+m)})\times$$
$$\times 1_{\left\{u_{\pi(n+m+1)}\neq u_{\pi(k)}, k\in\{n+1,\dots,n+m\}\right\}} 1_{\left\{u_{\pi(l)}\neq u_{\pi(k)}, l\in\{1,\dots,n\}, k\in\{n+1,\dots,n+m+1\}\right\}}.$$

Оскільки, для кожного $\pi \in S_{n+m+1}$

$$1_{\left\{u_{\pi(l)}\neq u_{\pi(k)},l\in\{1,\dots,n\},k\in\{n+1,\dots,n+m\}\right\}}1_{\left\{u_{\pi(n+m+1)}\neq u_{\pi(k)},k\in\{1,\dots,n+m\}\right\}} =$$
$$= 1_{\left\{u_{\pi(n+m+1)}\neq u_{\pi(k)},k\in\{n+1,\dots,n+m\}\right\}}1_{\left\{u_{\pi(l)}\neq u_{\pi(k)},l\in\{1,\dots,n\},k\in\{n+1,\dots,n+m+1\}\right\}},$$

рівність (3.37) правильна, отже, у нашому спеціальному випадку, твердження теореми доведено. У загальному випадку рівність (3.36) випливає із щойно отриманого результату, неперервності віківських добутків $\lozenge$ і $\overline{\lozenge}$, і неперервності оператора стохастичного інтегрування

$$\int_\Delta \circ(u)\widehat{d}L_u : (L^2)^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{-\beta}.$$

$\square$

Зауваження 3.3. *Розглянемо аналог властивості* (3.36) *для, так званого, інтеграла Петтіса (слабкого інтеграла). Позначимо* ρ *– міра Лебега на* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ *. Нехай* $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ *така, що* $\rho(\Delta)<\infty$ *. Для довільного* $G\in(L^2)^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *інтеграл Петтіса* $\int_\Delta G(u)du$ *визначається як єдиний елемент* $(L^2)^{-\beta}$ *такий, що для всіх* $f\in(L^2)^\beta$

$$\langle\!\langle \int_\Delta G(u)du, f\rangle\!\rangle_{(L^2)} = \langle\!\langle G(\cdot), f\otimes 1_\Delta(\cdot)\rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}.$$

Оскільки, з узагальненої нерівності Коші-Буняковського, для кожного $q\in\mathbb{Z}_+$

$$|\langle\!\langle G(\cdot), f\otimes 1_\Delta(\cdot)\rangle\!\rangle_{(L^2)\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}| \le \|G\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}\|f\|_{(L^2)^\beta_q}\sqrt{\rho(\Delta)},$$

це визначення коректне і інтеграл Петтіса

$$\int_\Delta \circ(u)du : (L^2)^{-\beta}\otimes\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to (L^2)^{-\beta} \tag{3.38}$$

є лінійним неперервним оператором. Використовуючи цей факт, неперервність віківських добутків $\lozenge$ *та* $\overline{\lozenge}$ *, і* (3.35)*, можна показати,* *що для будь-якого* $F \in (L^2)^{-\beta}$

$$\int\limits_\Delta F\overline{\Diamond}G(u)du \equiv \int\limits_\Delta \big(F\overline{\Diamond}G\big)(u)du = F\Diamond \int\limits_\Delta G(u)du. \tag{3.39}$$

3.3.2. Представлення розширеного стохастичного інтеграла через інтеграл Петтіса

Відомо, що в гауссівському аналізі білого шуму розширений стохастичний інтеграл на просторах Хіди і Кондратьєва нерегулярних узагальнених функцій може бути представлений як інтеграл Петтіса:

$$\int\limits_\Delta F(u)\widehat{d}W_u = \int\limits_\Delta F(u)\Diamond \dot{W}_u du. \tag{3.40}$$

Тут W – процес Вінера, $\dot{W}$ – його похідна в сенсі узагальнених функцій (гауссівський білий шум), $\Diamond$ позначає віківське множення, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Представлення (3.40) дуже зручне, зокрема, для вивчення стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу. Зауважимо, що *формально* рівність (3.40) справедлива на просторах Кондратьєва *регулярних* узагальнених функцій (білий шум не належить цим просторам).

В аналізі білого шуму Леві ситуація дуже схожа: аналог представлення (3.40) має місце як *формальна* рівність на просторах регулярних узагальнених функцій (це буде докладно пояснено нижче).

В підрозділі 1.2 показано, що процес Леві можна представити як $L_u = \langle \circ, 1_{[0,u)}\rangle \in (L^2)$, $u \in \mathbb{R}_+$. Тому похідна від L_u (білий шум Леві) має вигляд $\dot{L}_u = \langle \circ, \delta_u\rangle$, де δ_u – дельта-функція Дірака, сконцентрована в u . Звичайно, це представлення *формальне* (оскільки $\delta_u \notin \mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$, $\langle \circ, \delta_u\rangle$ не може бути елементом з (L^2) , або, навіть, з $(L^2)^{-1}$), тим не менше, воно придатне для нашої мети. Нехай $F \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Використовуючи розклад (1.13) для F і рівність

(3.7), з $G = \langle \circ, \delta_u \rangle = :\langle \circ, \delta_u \rangle:$, ми, *формально*, отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} F(u) \Diamond \dot{L}_u du = \int\limits_{\mathbb{R}_+} F(u) \Diamond :\langle \circ, \delta_u \rangle: du = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+} :\langle \circ^{\otimes n}, F_u^{(n)} \rangle: \Diamond :\langle \circ, \delta_u \rangle: du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+} :\langle \circ^{\otimes n+1}, F_u^{(n)} \diamond \delta_u \rangle: du = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \int\limits_{\mathbb{R}_+} F_u^{(n)} \diamond \delta_u du \rangle:. \tag{3.41}$$

Оскільки (знов *формально*)

$$F_u^{(n)}(u_1, \ldots, u_n) \diamond \delta_u(s) = \frac{1}{n+1} \Big\{ F_u^{(n)}(u_1, \ldots, u_n) \delta_u(s) 1_{\{s \neq u_1, \ldots, s \neq u_n\}} +$$

$$+ F_u^{(n)}(u_2, \ldots, u_n, s) \delta_u(u_1) 1_{\{u_1 \neq u_2, \ldots, u_1 \neq u_n, u_1 \neq s\}} + \cdots +$$

$$+ F_u^{(n)}(s, u_1, \ldots, u_{n-1}) \delta_u(u_n) 1_{\{u_n \neq s, u_n \neq u_1 \ldots, u_n \neq u_{n-1}\}} \Big\}$$

(порівнюючи з (3.25)), і тому

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} F_u^{(n)}(u_1, \ldots, u_n) \diamond \delta_u(s) du =$$

$$= \frac{1}{n+1} \Bigg\{ \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} F_u^{(n)}(u_1, \ldots, u_n) \delta_u(s) du \Big) 1_{\{s \neq u_1, \ldots, s \neq u_n\}} +$$

$$+ \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} F_u^{(n)}(u_2, \ldots, u_n, s) \delta_u(u_1) du \Big) 1_{\{u_1 \neq u_2, \ldots, u_1 \neq u_n, u_1 \neq s\}} + \cdots +$$

$$+ \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} F_u^{(n)}(s, u_1, \ldots, u_{n-1}) \delta_u(u_n) du \Big) 1_{\{u_n \neq s, u_n \neq u_1 \ldots, u_n \neq u_{n-1}\}} \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \Big\{ F_s^{(n)}(u_1, \ldots, u_n) 1_{\{s \neq u_1, \ldots, s \neq u_n\}} +$$

$$+ F_{u_1}^{(n)}(u_2, \ldots, u_n, s) 1_{\{u_1 \neq u_2, \ldots, u_1 \neq u_n, u_1 \neq s\}} + \cdots +$$

$$+ F_{u_n}^{(n)}(s, u_1, \ldots, u_{n-1}) 1_{\{u_n \neq s, u_n \neq u_1 \ldots, u_n \neq u_{n-1}\}} \Big\} = \widehat{F}^{(n)}(u_1, \ldots, u_n, s),$$

ми можемо продовжити (3.41) таким чином:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} F(u) \Diamond \dot{L}_u du = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n+1}, \widehat{F}^{(n)} \rangle: = \int\limits_{\mathbb{R}_+} F(u) \widehat{d} L_u \tag{3.42}$$

(див. (1.19)). Формальна рівність (3.42) справедлива якщо розглядати інтеграли на будь-яких $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ замість інтегралів на $\mathbb{R}_+$: справді, достатньо використовувати в попередніх підрахунках $F(\cdot)1_\Delta(\cdot) \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ замість F . Отже, ми отримали наступне твердження.

Теорема 3.8. *Для довільних $F \in (L^2)^{-\beta} \otimes \mathcal{H}_\mathbb{C}$ і $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ розширений стохастичний інтеграл $\int\limits_\Delta F(u)\widehat{d}L_u$ можна, формально, представити як*

$$\int_\Delta F(u)\widehat{d}L_u = \int_\Delta F(u)\Diamond \dot{L}_u du \equiv \int_\Delta F(u)\Diamond\langle\circ, \delta_u\rangle du, \tag{3.43}$$

де інтеграл у правій частині є формальним інтегралом Петтіса.

Зауваження 3.4. *Рівність* (3.43) *(відповідно,* (3.36), (3.39)*) залишається справедливою для функції F (відповідно, G) та вимірної множини Δ , описаних у зауваженні 1.1.*

3.4. Приклади

Як приклади застосувань наших результатів, розглянемо деякі стохастичні рівняння з нелінійностями віківського типу.

Приклад 3.1 (лінійне рівняння)**.** *Розглянемо інтегральне стохастичне рівняння*

$$X_t = X_0 + \int_0^t F\overline{\Diamond} X_u du + \int_0^t G\overline{\Diamond} X_u \widehat{d}L_u, \tag{3.44}$$

де $X_0, F, G \in (L^2)^{-\beta}$, $\int_0^t F\overline{\Diamond} X_u du \in (L^2)^{-1}$ – інтеграл Петтіса. Застосувавши до цього рівняння S -перетворення (з урахуванням (3.39), (3.36) *і* (3.43)) *та розв'язавши отримане нестохастичне рівняння, матимемо*

$$SX_t = SX_0 \cdot \exp\Big\{SFt + SG\int_0^t \lambda(u)du\Big\}.$$

Тепер достатньо застосувати обернене S *-перетворення, щоб отримати розв'язок* (3.44)

$$X_t = X_0 \Diamond \exp^{\Diamond}\big\{Ft + G\Diamond L_t\big\} \in (L^2)^{-1}.$$

Для того, щоб мати $X_t \in (L^2)^{-\beta}$, $\beta \in [0,1)$, *необхідно накласти додаткові умови. Наприклад, нехай* F *і* G *"поліноми" в тому сенсі, що їх розклад* (1.5) *містить тільки скінченну кількість ненульових доданків. Покладемо* $N := \max[pow\, F, pow\, G+1]$, *де* $pow\, H$ *– степінь "полінома"* H, *як і у підрозділі 1.3. Якщо існує* $K > 0$, *таке, що для довільного* $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{m^{mN\frac{1-\beta}{2}}}{m!} \le K^m, \tag{3.45}$$

то за теоремою 3.4. $X_t \in (L^2)^{-\beta}$. *Зауважимо, що оцінки* (3.45) *виконуються тоді, і тільки тоді, коли* $N \le \frac{2}{1-\beta}$, *це доведено в [45].*

Приклад 3.2 (рівняння Верхульста)**.** *Розглянемо інтегральне стохастичне рівняння*

$$X_t = X_0 + r\int_0^t X_u\Diamond(N - X_u)du + v\int_0^t X_u\Diamond(N - X_u)\widehat{d}L_u, \tag{3.46}$$

де $X_0 \in (L^2)^{-1}$, $N, r, v \in \mathbb{R}$, $N > 0$, $r > 0$, $(SX_0)(0) > 0$. *Тут, для кожного* $u \in \mathbb{R}_+$, *ми розуміємо* X_u *як узагальнену функцію, з* *розв'язку* (3.46) *(див. нижче) випливає, що* $X_u \in (L^2)^{-1}$ *і інтеграл Петтіса в* (3.46) *є коректно визначеним. За аналогією з попереднім прикладом, застосувавши до* (3.46) S *-перетворення (з урахуванням* (3.43)*), розв'язавши отримане нестохастичне інтегральне рівняння, і, застосувавши обернене* S *-перетворення, отримаємо розв'язок*

$$X_t = N\Big[1 + (NX_0^{\Diamond(-1)} - 1)\Diamond \exp^{\Diamond}\big\{ - N(rt + vL_t)\big\}\Big]^{\Diamond(-1)} \in (L^2)^{-1},$$

де $Y^{\Diamond(-1)} := S^{-1}\big(\frac{1}{SY}\big)$.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі, за аналогією із гауссівським аналізом білого шуму, побудовано елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві. Зокрема, наведені визначення і вивчені властивості віківського добутку (природного аналогу поточкового добутку) та віківських версій голоморфних функцій (природних аналогів голоморфних функцій); встановлено, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку є диференціюванням (задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення; показано, що якщо використовувати віківське множення замість поточкового, то можна винести незалежний від часу множник з-під знаку стохастичного інтеграла; сформульовано та доведено теорему про представлення розширеного стохастичного інтеграла через формальний інтеграл Петтіса. Ці результати є підґрунтям для подальшої розбудови віківського числення, і можуть застосовуватись, зокрема, для розв'язання стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь з нелінійностями віківського типу в аналізі білого шуму Леві (приклади таких рівнянь наведено у останньому параграфі розділу). Варто зауважити, що, як і у гауссівському аналізі, згадані рівняння можна застосовувати для моделювання різних фізичних процесів.

Основні результати розділу опубліковані у [26].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню операторів стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, та розробці віківського числення на згаданих просторах регулярних узагальнених функцій.

В дисертації зроблено огляд літератури та відомих результатів за тематикою дисертації; наведене визначення міри білого шуму Леві та описано суміжні поняття; описане узагальнення властивості хаотичного розкладу, запропоноване Є. В. Литвиновим; визначено параметризовані простори типу Кондратьєва регулярних основних і узагальнених функцій та наведено розклади елементів з цих просторів за природними ортогональними базисами; описано конструкції розширеного стохастичного інтеграла Скорохода та стохастичної похідної Хіди.

Основні результати дисертаційного дослідження такі. Уведено і детально вивчено оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві, побудованих з використанням аналогу властивості хаотичного розкладу, запропонованого Є. В. Литвиновим. Окремо розглянуто випадки, у яких згадані оператори є обмеженими та необмеженими. Так само, як і у гауссівському аналізі, побудовані оператори можна використовувати для вивчення деяких властивостей розширеного стохастичного інтеграла; а також для вивчення властивостей розв'язків стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь з нелінійностями віківського типу. Крім того, доведено, що на перетинах просторів регулярних та нерегулярних основних функцій уведені в дисертації оператори стохастичного диференціювання співпадають із відповідними операторами на просторах нерегулярних основних функцій. Це дає, зокрема, можливість використовувати певні результати, пов'язані із операторами стохастичного диференціювання на просторах нерегулярних основних функцій, в аналізі білого шуму Леві на просторах регулярних основних і узагальнених функцій. Далі, за аналогією із гауссівським аналізом білого шуму, розбудовано елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві. Зокрема, наведені визначення і вивчені властивості віківського добутку (природного аналогу поточкового добутку) та віківських версій голоморфних функцій (природних аналогів голоморфних функцій); встановлено, що оператор стохастичного диференціювання першого порядку є диференціюванням (задовольняє правило Лейбніца) відносно віківського множення; показано, що якщо використовувати віківське множення замість поточкового, то можна винести незалежний від часу множник з-під знаку стохастичного інтеграла; сформульовано та доведено теорему про представлення розширеного стохастичного інтеграла через формальний інтеграл Петтіса.

Отримані результати є підґрунтям для подальшої розбудови аналізу білого шуму Леві, і можуть застосовуватись, зокрема, для дослідження стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь з нелінійностями віківського типу, вивчення властивостей розширених стохастичних інтегралів на просторах регулярних узагальнених функцій, тощо. Варто зауважити, що, як і у гауссівському аналізі, згадані рівняння з нелінійностями віківського типу можна застосовувати для моделювання різних фізичних процесів.

Дисертаційне дослідження є внеском у подальший розвиток аналізу білого шуму Леві.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дирів М. М. *Елементи віківського числення в аналізі білого шуму Леві* // Сімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 19–20 травня 2016 р.): Матеріали конференції II. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ "КПІ" . 2016. – С. 85–92.

2. Дирів М. М. *Елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві*// Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2016. – С. 74–75.

3. Дирів М. М., Качановський М. О. *Про стохастичне диференціювання в аналізі білого шуму Леві* // Вісімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Луцьк – Київ, 7 – 10 жовтня 2017 року): Матеріли конференції. Том 1. – Київ: НТУУ "КПІ" . 2017. – С. 188–190.

4. Дирів М. М., Качановський М. О. *Оператори стохастичного диференціювання в аналізі білого шуму Леві* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2017. – С. 83–84.

5. Качановський М. О., Фрей М. М. *Про зв'язок між стохастичним інтегруванням та віківським численням в аналізі білого шуму Леві* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного

аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2018. – С. 57–58.

6. Качановський М. О., Фрей М. М. *Про оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2019.— С. 42–43.

7. Кондратьев Ю.Г. *Обобщенные функции в задачах бесконечномерного анализа*// Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, К., Институт Математики НАНУ. – 1978. – 173 с.

8. Кондратьев Ю.Г. *Пространство целых функций бесконечного числа переменных, связанное с оснащением пространства Фока*// Спектральный анализ дифференциальных операторов, К., Институт математики АН УССР.– 1980. – с. 18–37.

9. Кондратьев Ю.Г. *Степени Вика гауссовских обобщенных случайных процессов* // Методы функционального анализа в задачах математической физики, К., Институт математики АН УССР. – 1978. – с. 129–158.

10. Кондратьев Ю.Г. *Ядерные пространства целых функций в задачах бесконечномерного анализа* // ДАН СССР.– 1980.– Т. 254, № 6. – с. 1325–1329.

11. Кондратьев Ю.Г., Самойленко Ю.С. *Интегральное представление обобщенных положительно определенных ядер бесконечного числа переменных* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – с. 800–803.

12. Кондратьев Ю.Г., Самойленко Ю.С. *Обобщенные производные вероятностных мер на* $\mathbb{R}^\infty$ // Методы функционального анализа в задачах математической физики, К., Институт математики АН УССР. – 1978. – с. 159–176.

13. Фрей М. М. *Про віківське числення в аналізі білого шуму Леві* // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 року): Матеріали конференції. – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. 2018. – С. 207–208.

14. Фрей М. М. *Про віківське числення та його зв'язок з стохастичним диференціюванням в аналізі білого шуму Леві* // Матеріали шостої Міжнародної науково-практична конференції "Математика в сучасному технічному університеті" (Київ, 28–29 грудня 2017 року). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2018. – С. 150–156.

15. Aase K., Oksendal B., Privault N., Uboe J. *White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance* // Finance Stochastics. – 2000. – № 4. – p. 465–496.

16. Benth F. E. *The Gross derivative of generalised random variables* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 1999. – Vol. 2, № 3. – p. 381–396.

17. Benth F. E., Di Nunno G., Lokka A., Oksendal B., Proske F. *Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by*

Levy processes // Math. Finance. – 2003. – Vol. 13, № 1. – P. 55 – 72.

18. Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G. *Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis* // Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1995. – Vol. 12, № 1. (Russian edition: K.: Naukova Dumka, 1988. – 680 p.)

19. Berezansky Yu. M., Sheftel Z. G., Us G. F. *Functional analysis* // Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996. – Vol. 2. (Russian edition: K.: Vyshcha shkola, 1990.)

20. Bertoin J. *Levy Processes* // Cambridge: Cambridge University Press. 1996.

21. Di Nunno G., Oksendal B., Proske F. *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance* // Universitext. Berlin: Springer-Verlag. 2009.

22. Di Nunno G., Oksendal B., Proske F. *White noise analysis for Levy processes* // J. Funct. Anal. – 2004. – Vol. 206, N1. – P. 109–148.

23. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *Operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized function in the Levy white noise analysis* // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" . – 2014. – № 4. – p. 36–40.

24. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *Stochastic integrals with respect to a Levy process and stochastic derivatives on spaces of regular test and generalized function* // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" . – 2013. – № 4. – p. 27–30.

25. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized function in the Levy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2014. – Vol. 6, № 2. – p. 212 – 229.

26. Frei M.M. *Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Lévy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – Vol. 10, № 2. – p. 82–104.

27. Frei M.M., Kachanovsky N.A. *Some remarks on operators of stochastic differentiation in the Lévy white noise analysis* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2017. – Vol. 23, № 4, – p. 320–345.

28. Frei M. M., Kachanovsky N. A. *Some remarks on operators of stochastic differentiation in the Levy white noise analysis* // International Conference dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, Ukraine, 18–23 September 2017): Book of Abstracts. – Lviv: Ivan Franko National University. 2017. – C. 91–92.

29. Frei M. M., Kachanovsky N. A. *Interconnection between the Wick calculus and the stochastic integration in the Levy white noise analysis* // VI Всеукраїнська математична конференція ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ – Микуличин, 26 – 28 вересня 2018 року): тези доповідей. – Івано-Франківськ: Голіней. 2018. – С. 69.

30. Gelfand I. M., Vilenkin N. Ya. *Generalized Function* // Applications of Harmonic Analysis. New York, Lodon: Academic Press.1964. – Vol. IV.

31. Gihman I. I., Skorohod A. V. *Theory of Random Processes* // Moscow: Nauka. 1973. – Vol. 2.

32. Hida T. *Analysis of Brownian Functionals* // Carleton: Math. Lecture Notes. 1975. – Vol. 13. – IV+61 pp.

33. Hida T. *Brownian Motion* // New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag. 1980. – XVI+325 pp.

34. Hida T., Kuo H. H., Potthoft J., Streit L. *White Noise* // An Infinite Dimensional Calculus. Kluwer,Dordrecht. 1993.

35. Holden H., Oksendal B., Uboe J., Zhang T.-S. *Stochastic Partial Differential Equations–a Modeling White Noise* // Functional Apporoach. Boston: Birkhauser. 1996.

36. Itô K. *Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments* // Trans. Am. Math. Soc. — 1956. – № 81. — p. 253–263.

37. Kabanov Yu. M., Skorohod A. V. *Extended stochastic integrals* // In: Proc. School-Symposium "Theory Stoch. Proc." Druskininkai, Lietuvos Respublika, November 25-30, 1974. Inst. Phys. Math. Vilnus. 1975. – p. 123–167.

38. Kachanovsky N. A. *A generalized Malliavin derivative connected with the Poisson- and Gamma-measures* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2003. – Vol. 9, № 3. – p. 213-240.

39. Kachanovsky N. A. *A generalized stochastic derevative on the Kondratiev-type space of regular generalized functions of Gamma white noise* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2006. – Vol. 12, № 4. – p. 363–383.

40. Kachanovsky N. A. *Generalized stochastic derivatives on a space of regular generalized functions of Meixner white noise* // Methods. Funct. Anal. Topol. – 2008. – Vol. 14, № 1. – p. 32–53.

41. Kachanovsky N. A. *Generalized stochastic derivatives on parametrized spaces of regular generalized functions of Meixner white noise* // Methods. Funct. Anal. Topol. – 2008. – Vol. 14, № 4. – p. 334–350.

42. Kachanovsky N. A. *Extended stochastic integrals with respect to a Levy process on spaces of generalized functions* // Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society. – 2013. – № 10. – p. 169–188.

43. Kachanovsky N. A. *On an extended stochastic integral with and the Wick calculus on the connected with the generalized Meixner measure Kondratiev-type spaces* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2007. – Vol. 13, № 4. – p. 338–379.

44. Kachanovsky N. A. *On extended stochastic integrals with respect to Levy processes* // Carpatian Mathematical Publications. – 2013. – Vol. 5, № 2. – p. 256–278.

45. Kachanovsky N. A. *An extended stochastic integral and a Wick calculus on parameterized Kondratiev-type spaces of Meixner white noise* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2008. – Vol. 11, № 4. – p. 541–564.

46. Kachanovsky N.A. *On Wick calculus on spaces of nonregular generalized functions of Lévy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – Vol. 10, № 1. – p. 114–132.

47. Kachanovsky N.A. *Operators of stochastic differentiation on spaces of nonregular test functions of Lévy white noise analysis* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2015. – Vol. 21, № 4. – p. 336–360.

48. Kachanovsky N.A. *Operators of stochastic differentiation on spaces of nonregular generalized functions of Lévy white noise analysis* //

Carpathian Mathematical Publications. – 2016. – Vol. 8, № 1. – p. 83–106.

49. Kachanovsky N. A., Tesko V. A. *Stochastic integrals of Hitsuda-Skorohod type on the extended Fock space* // Ukr. Math. J. – 2009. – Vol. 61, № 6. – p. 733–764.

50. Kondratiev Yu.G., Leukert P., Streit L. *Wick calculus in Gaussian analysis* // Acta Appl. Math. — 1996. — № 44. — p. 269–294.

51. Kondratiev Yu.G., Samoilenko Yu.S. *The spaces of trial and generalized functions of infinitely many variables* // Rep. Math. Phys. — 1978. — Vol. 14, № 3. — p. 323–348.

52. Kubo I., Kuo H.H., Sengupta A.N. *White noise analysis on a new space of Hida distributions* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 1999. — Vol. 2, № 3. — p. 315–335.

53. Lindstrom T., Oksendal B., Uboe J. *Wick multiplication and Itô-Skorohod stochastic differential equations* // In: Ideas and Methods in Mathematical Analysis, Stochastics and Applications (Cambridge University Press). — 1992. — p. 183–206.

54. Lytvynov E. W. *Orthogonal decompositions for Levy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2003. — Vol. 6, № 1. — p. 73–102.

55. Lytvynov E.W., Rebenko A.L., Shchepan'uk G.V. *Wick calculus on spaces of generalized functions of compound Poisson white noise* // Rep. Math. Phys. – 1997. – Vol. 39, № 2. – p. 219–248.

56. Lytvynov E.W., Rebenko A.L., Shchepan'uk G.V. *Wick theorems in non-Gaussian white noise calculus* // Rep. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37, № 1-3. – p. 217–232.

57. Meyer P. A. *Quantum Probability for Probabilists* // In: Lect. Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag. 1993. — Vol. 1538.

58. Nualart D., Schoutens W. *Chaotic and predictable representations for Levy processes*// Stochastic Process. Appl. — 2000. — Vol. 90, № 1. — p. 109–122.

59. Obata N. *Inverse S-transform, Wick product and overcompleteness of exponential vectors* // Quantum information, IV (Nagoya, 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ. — 2002. – p. 147–176.

60. Obata N. *Wick product of white noise operators and quantum stochastic differential equations* // J. Math. Soc. Japan. – 1999. – Vol. 51, № 3. – p. 613–641.

61. Protter P. *Stochastic Integration and Differential Equetions* // Berlin: Springer. 1990.

62. Sato K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* // In: Cambridge University Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press. 1999. — Vol. 68.

63. Schoutens W. *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials* // In: Lect. Notes in Statist. Springer-Verlag. 2000. — Vol. 146.

64. Skorohod A. V. *Integration in Hilbert Space* // New York-Heidelberg: Springer. 1974.

65. Skorohod A. V. *On a generalization of a stochastic integral* // Teorija Verojatnostej i ee Pril. — 1975. — Vol. 20, № 2. — p. 223–238.

66. Sole J. L., Utzet F., Vives J. *Chaos expansions and Malliavin calculus for Levy processes* // In: Stoch. Anal. and Appl., Abel Symposium 2. Berlin: Springer. 2007. — p. 595–612.

67. Surgailis D. *On* (L^2) *and non-* (L^2) *multiple stochastic integration* // In: Lect. Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag. — 1981. — Vol. 36. — p. 212–226.

68. Ustunel A. S. *An Introduction to Analysis on Wiener Space* // In: Lect. Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag. 1995. — Vol. 1610.

69. Vershik A.M., Tsilevich N.V. *Fock factorizations and decompositions of the* L^2 *spaces over general Lévy processes* // Russian Math. Surveys. — 2003. — Vol. 58, no. 3. — p. 427–472.

ДОДАТКИ

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *Stochastic integrals with respect to a Levy process and stochastic derivatives on spaces of regular test and generalized function* // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" . – 2013. – № 4. – p. 27–30.

2. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *Operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized function in the Levy white noise analysis* // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" . – 2014. – № 4. – p. 36–40.

3. Dyriv M. M., Kachanovsky N. A. *On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized function in the Levy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2014. – Vol. 6, № 2. – p. 212 – 229.

4. Frei M.M., Kachanovsky N.A. *Some remarks on operators of stochastic differentiation in the Lévy white noise analysis* // Methods Funct. Anal. Topol. – 2017. – Vol. 23, № 4, – p. 320–345.

5. Frei M.M. *Wick calculus on spaces of regular generalized functions of Lévy white noise analysis* // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – Vol. 10, № 2. – p. 82–104.

6. Дирів М. М. *Елементи віківського числення на просторах регулярних узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві*// Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 року): тези

доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2016. – С. 74–75.

7. Дирів М. М. *Елементи віківського числення в аналізі білого шуму Леві* // Сімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 19–20 травня 2016 р.): Матеріали конференції II. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ "КПІ" . 2016. – С. 85–92.

8. Дирів М. М., Качановський М. О. *Оператори стохастичного диференціювання в аналізі білого шуму Леві* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (смт. Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2017. – С. 83–84.

9. Frei M. M., Kachanovsky N. A. *Some remarks on operators of stochastic differentiation in the Levy white noise analysis* // International Conference dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach (Lviv, Ukraine, 18–23 September 2017): Book of Abstracts. – Lviv: Ivan Franko National University. 2017. – С. 91–92.

10. Дирів М. М., Качановський М. О. *Про стохастичне диференціювання в аналізі білого шуму Леві* // Вісімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Луцьк – Київ, 7 – 10 жовтня 2017 року): Матеріли конференції. Том 1. – Київ: НТУУ "КПІ" . 2017. – С. 188–190.

11. Фрей М. М. *Про віківське числення та його зв'язок з стохастичним диференціюванням в аналізі білого шуму Леві* // Матеріали шостої Міжнародної науково-практична конференції "Математика в

сучасному технічному університеті" (Київ, 28–29 грудня 2017 року). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2018. – С. 150–156.

12. Качановський М. О., Фрей М. М. *Про зв'язок між стохастичним інтегруванням та віківсъким численням в аналізі білого шуму Леві* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" . 2018. – С. 57–58.

13. Фрей М. М. *Про віківське числення в аналізі білого шуму Леві* // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 року): Матеріали конференції. – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. 2018. – С. 207–208.

14. Frei M. M., Kachanovsky N. A. *Interconnection between the Wick calculus and the stochastic integration in the Levy white noise analysis* // VI Всеукраїнська математична конференція ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ – Микуличин, 26 – 28 вересня 2018 року): тези доповідей. – Івано-Франківськ: Голіней. 2018. – С. 69.

15. Качановський М. О., Фрей М. М. *Про оператори стохастичного диференціювання на просторах регулярних основних і узагальнених функцій аналізу білого шуму Леві* // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 року): тези доповідей. – Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний універ-

ситет імені Василя Стефаника" . 2019.— С. 42–43.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації здобувачка доповідала на таких конференціях та семінарах:

1. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 р.);

2. Сімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 19 – 20 травня 2016 р.);

3. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.);

4. Вісімнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Луцьк - Київ, 7 – 10 жовтня 2017 р.);

5. Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 125-річчю від дня народження Стефана Банаха (Львів, 18 – 23 вересня 2017 р.);

6. Шоста Міжнародна науково-практична конференція "Математика в сучасному технічному університеті" (Київ, 28 – 29 грудня 2017 року);

7. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.);

8. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях" (Чернівці, 17 – 19 вересня 2018 року);

9. VI Всеукраїнська математична конференція ім. Б. В. Василишина "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ – Микуличин, 26 – 28 вересня 2018 року);

10. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2019 р.);

11. Семінари факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника". (Івано-Франківськ, 2015 – 2019 рр.).