

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора Романа Андрійовича Заторського на дисертаційну роботу *Наталії Богданівни Ладзоришин “Еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні рівняння”*, подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Основи теорії матриць закладались, починаючи із середини дев'ятнадцятого століття. Одним із важливих напрямків дослідження структури матриць є вивчення еквівалентності матриць над різними областями та встановлення канонічних форм. Відомі нормальні форми Сміта матриць над кільцем цілих чисел, кільцями головних ідеалів, адекватними кільцями, нормальні форми Жордана та Фробеніуса числових матриць відносно перетворення подібності, канонічні форми Вейєрштраса та Кронекера пар матриць над полем відносно еквівалентних перетворень. Ці класичні нормальні форми матриць використовуються у різних розділах математики та в прикладних напрямках. У теперішній час відомі інші типи еквівалентностей матриць, відмінних від класичної, вивчення яких необхідно в багатьох задачах. Так, Dlab V., Ringel C.M. (1991), у зв'язку із описанням зображень скінченновимірних алгебр, встановили канонічну форму пар комплексних матриць відносно лівих комплексних та правих дійсних еквівалентних перетворень. У Львівській алгебраїчній школі, заснованій професором П.С. Казімірським, введені нові поняття напівскалярної еквівалентності поліновіальних матриць, узагальненої еквівалентності пар матриць над кільцями. Встановлені прості форми відносно таких еквівалентностей використовуються при дослідженні структури матриць, зокрема їх факторизації, розробці методів розв'язування різних типів матричних рівнянь. Тема дисертації Ладзоришин Н.Б. відноситься до цих актуальних напрямків. У роботі досліджена спеціальна еквівалентність матриць над квадратичними кільцями, звідність матриць до простіших форм та їх застосування при розв'язуванні матричних рівнянь.

Дисертаційна робота виконана у відділі алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України згідно планів науково-дослідних робіт інституту, передбачених НАН України з природничих наук.

Дисертація містить анотації, перелік умовних позначень, вступ, п'ять розділів, висновки, список використаних джерел та додатки.

У вступі сформульовано задачі, які розв'язуються у дисертаційній роботі, наведено перелік одержаних найважливіших нових результатів, дано опис праць, у яких опубліковані результати та їх апробації.

Перший розділ допоміжний, у якому формулюються відомі поняття та результати, які використовуються при викладі дисертації, наведено огляд найважливіших праць, результати яких стосуються теми дисертаційної роботи.

Основні, одержані автором, нові результати роботи викладені у 2–5 розділах.

У другому та третьому розділах введені поняття (z,k) -еквівалентності матриць та їх пар над квадратичними кільцями. Розглянута задача побудови простих форм матриць щодо такої еквівалентності. Встановлено, що матриці над квадратичними кільцями за допомогою елементарних операцій із кільця цілих чисел над рядками та елементарних операцій із квадратичного кільця над стовпцями зводяться до нижніх трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях та елементами поза головною діагоналлю з певними евклідовими нормами, якщо квадратичне кільце евклідове (теорема 2.1) та з елементами поза головною діагоналлю вибрані з повних систем лишків за модулями відповідних інваріантних множників у випадку, якщо квадратичне кільце є кільцем головних ідеалів (теорема 2.4). Ця трикутна матриця названа стандартною формою щодо (z,k) -еквівалентності. Зазначимо, що ця стандартна форма визначається неоднозначно, тому не є канонічною. Важливим результатом у дисертації є те, що вказано квадратичні кільця, зокрема квадратичні евклідові уявні кільця, над якими кількість стандартних форм матриці щодо (z,k) -еквівалентності є скінченною (теорема 2.2). Порівнюючи скінченні множини стандартних форм матриць, ми вказуємо умови їх (z,k) -еквівалентності (наслідок 2.2). Встановлено також, що існує зв'язок між (z,k) -еквівалентністю та класичною еквівалентністю матриць (теорема 2.3).

Для пар матриць (A, B) над квадратичними кільцями розглядається їх звідність до простіших виглядів за допомогою спільних елементарних перетворень із кільця цілих чисел над рядками обох матриць A і B різних елементарних перетворень із квадратичного кільця над стовпцями цих матриць. Вказані класи пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів, які зводяться такими перетвореннями до стандартних форм (теореми 3.1, 3.2, 3.3). На відміну від матриць, кожна з яких (z,k) -еквівалентна до стандартної форми, зазначається, що не кожна пара матриць має таку властивість (приклад, стор. 75).

Четвертий та п'ятий розділи присвячені різностороннім та одностороннім матричним рівнянням $AX + YB = C$ і $AX + BY = C$ над квадратичними кільцями. Зауважимо, що ці матричні рівняння використовуються у багатьох прикладних напрямках. Такі матричні рівняння достатньо вивчені у випадку, коли їх коефіцієнти є матриці над полем. Відомий деякий опис розв'язків цих рівнянь над кільцем поліномів та кільцями головних ідеалів. Квадратичні кільця $\mathbb{Z}\sqrt{k}$ в залежності від k є дуже різноманітними, є серед них кільця, які не є кільцями головних ідеалів та у яких не визначений найбільший спільний дільник елементів, наприклад, кільце $\mathbb{Z}\sqrt{-5}$. Тому невідомі методи розв'язування цих матричних рівнянь над довільними квадратичними кільцями. У четвертому розділі дисертації наведені необхідні і достатні умови розв'язності зазначених матричних рівнянь в термінах еквівалентності матриць над кільцем цілих чисел, складених із коефіцієнтів матричних рівнянь. При цьому використаний

кронекерів добуток матриць (теореми 4.3, 4.6). Встановлено також умови існування цілочислових розв'язків матричних рівнянь, вказано критерій єдиності таких розв'язків (теореми 4.2, 4.5).

У п'ятому розділі (z,k) -еквівалентність пар матриць і їх стандартну форму, введених у третьому розділі, використано при побудові розв'язків матричних рівнянь та дослідженні їх структури. На основі цього, розв'язування матричних рівнянь зведено до рівносильних з коефіцієнтами у трикутних формах, які є значно простішими. Для цих рівнянь вказано існування розв'язків з певними властивостями, зокрема, елементи яких мають евклідові норми менші, ніж евклідові норми відповідних інваріантних множників коефіцієнтів матричних рівнянь (теореми 5.1, 5.3). Доведено також, що таких розв'язків матричних рівнянь над квадратичними евклідовими уявними кільцями мають скінченну кількість.

Відзначимо, як позитивне, що виклад результатів ілюструється достатньою кількістю прикладів.

Дисертаційна робота відповідає спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. Достовірність результатів роботи в цілому не викликає сумніву. Доведення результатів лем, теорем і наслідків повні та детальні. Раніше відомі факти, що використовуються у доведеннях, мають відповідні посилання.

Основні наукові результати досить повно відображені у 6 наукових статтях, з них 1 стаття у закордонному виданні, внесеного до наукометричної бази Scopus та 5 – у вітчизняних фахових виданнях (зокрема, одна з них опублікована у виданні, що внесено до наукометричної бази Scopus). Результати роботи апробовані на 6 міжнародних та 6 всеукраїнських наукових конференціях, а також доповідались на алгебраїчних семінарах Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львівського національного університету імені Івана Франка. За результатами дисертації опубліковано 12 тез доповідей на наукових конференціях.

Разом із тим можна висловити такі зауваження.

У роботі зустрічаються неточності, незначні граматичні й технічні огріхи:

- 1) у дисертації, зокрема у переліку умовних позначень, поле позначається буквою F , але на сторінці 33 написано "... $R = P$ – поле...";
- 2) на сторінці 61 у теоремі 2.4 замість "... $S \in GL(n, \mathbb{Z})$..." має бути "... $S \in GL(m, \mathbb{Z})$...". На цій же сторінці в останньому рядку треба писати "... $x = \|x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m\|$, $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{Z}$...";
- 3) на сторінці 92 у теоремі 4.2 замість "... $A, B, C \in M(n, \mathbb{Z})$..." має бути "... $A, B, C \in M(n, K)$...".

Вказані недоліки мають виключно редакційний характер, не змінюють загального позитивного висновку про подану до захисту роботу і не ставлять під сумнів її положення.

Дисертація є завершеною науковою працею, в якій отримані нові науково обґрунтовані результати. Зокрема, побудовані стандартні форми для

матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k) -еквівалентності. Встановлені критерії розв'язності матричних рівнянь над квадратичними кільцями та запропонований метод побудови їх розв'язків. На основі встановлених стандартних форм матриць, описана структура розв'язків матричних рівнянь. Ці результати є суттєвими для розвитку теорії кілець, лінійної алгебри та теорії чисел.

Робота належно оформлена, автореферат адекватно відображає зміст дисертації. Робота має теоретичну і практичну цінність і може бути основою для подальших досліджень структури матриць над різними кільцями та матричних рівнянь.

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Інституті математики НАН України, Львівському національному університеті імені Івана Франка, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника та в інших наукових установах та навчальних закладах.

Вважаю, що подана до захисту дисертаційна робота “Еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні рівняння”, за науковою новизною, структурою та оформленням повністю задовольняє вимоги пунктів 9 та 11–14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, а її автор, Ладзоришин Наталія Богданівна, заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент
завідувач кафедри диференціальних
рівнянь і прикладної математики
ДВНЗ “Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника”
доктор фіз.-мат. наук, професор

Р.А. Заторський



ПІДПИС *Заторського Р.А.*
Наталія Богданівна Ладзоришин
Департамент вищої навчальної та наукової діяльності національного університету імені Василя Стефаника Тернопільського національного університету імені Василя Стефаника
код 02125266

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника
РЕКОМЕНДАЦІЯ
030215/45-1
09 10 19