

## Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу  
**Ладзоришин Наталії Богданівни** “*Еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні рівняння*” подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Важливий клас кілець, які широко використовуються, як у класичній алгебрі, так і в сучасних алгебраїчних дослідженнях, становлять евклідові кільця. Наявність алгоритму Евкліда робить їх зручними в задачах пов’язаних з різними матричними обчисленнями. Узагальненням евклідових областей є  $k$ -степеневі евклідові області. У той же час існують 2-степеневі евклідові області, які не є евклідовими. Квадратичні кільця є прикладами  $w$ -степеневих евклідових областей. Умова  $k$ -степеневості тісно пов’язана з введеними П. М. Коном  $GE$  кільцями (кільця  $R \in GE_n$  кільцем, якщо  $GL_n(R)$  породжується елементарними матрицями). Зокрема,  $k$ -степенева евклідова область є  $GE_k$  кільцем для всіх  $k$ .

Особливу важливу роль у дослідженнях цих кілець відіграє той факт, що більшість кілець, які досліджувались в роботі є кільцями, над якими довільна матриця є еквівалентна до канонічної діагональної матриці, тобто є кільцем елементарних дільників, означення якого було введено І. Капланським.

Відомі інші типи еквівалентностей матриць, які виникають у різних задачах. У зв’язку з побудовою методів факторизації матриць над поліноміальними кільцями (поліноміальних матриць) та матриць над іншими кільцями, введені поняття напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць та узагальненої еквівалентності пар матриць (П. С. Казімірський, В. М. Петричович). Встановлені ними спеціальні форми матриць відносно таких перетворень відіграють важливу роль в теорії факторизації матриць та матричних рівнянь.

У дисертаційній роботі Ладзоришин Н. Б. досліджується введена так звана  $(z,k)$ -еквівалентність матриць над квадратичними кільцями. Встановлена спеціальна форма матриць відносно таких перетворень, названа стандартною формою, і ця форма застосована для побудови методів розв’язування різних типів матричних лінійних рівнянь. Такі матричні рівняння – матричні рівняння Сильвестра, матричні діофантові рівняння, виникають у прикладних задачах теорії стійкості, динамічних систем, теорії керування тощо.

Підсумовуючи вищевикладене, можна сказати, що напрямок досліджень, обраний у цій дисертації, є важливим і актуальним.

Дисертаційна робота виконана у відділі алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України у рамках науково-дослідних робіт інституту, передбачених планами НАН України з природничих наук.

Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, огляду літератури та попередніх відомостей (перший розділ) і чотирьох розділів, в яких викладені основні результати роботи, висновків, списку використаних джерел та додатку.

Відзначимо основні результати цієї дисертаційної роботи.

У другому розділі дисертації досліджується еквівалентність матриць над квадратичними кільцями. Над матрицями здійснюються ліві перетворення із підгрупи оборотних матриць над кільцем цілих чисел та праві перетворення із підгрупи оборотних матриць над квадратичним кільцем. Такі перетворення у дисертаційній роботі названі  $(z,k)$ -еквівалентними перетвореннями матриць. Доведено, що цими перетвореннями матриці над квадратичними евклідовими кільцями зводяться до трикутних форм, у яких на головних діагоналях розміщені інваріантні множники матриць і ненульові елементи у рядках зліва від інваріантних множників мають евклідову норму меншу, ніж евклідові норми діагональних елементів. Аналогічна трикутна форма відносно  $(z,k)$ -еквівалентних перетворень встановлена для матриць над квадратичними кільцями головних ідеалів. У цьому випадку елементи трикутної форми нище головної діагоналі вибрані із повних систем лишків за модулями відповідних інваріантних множників матриці. Ця трикутна матриця названа стандартною формою матриці відносно  $(z,k)$ -еквівалентності. Зауважимо, що ця стандартна форма є уточненим аналогом відомої класичної трикутної форми Ерміта. Застосування елементарних операцій над рядками матриці дозволяє у цій формі вибрати на головній діагоналі інваріантні множники. Встановлено також, що для матриць над квадратичними евклідовими уявними кільцями стандартних форм матриці відносно  $(z,k)$ -еквівалентності є скінченне число. Цей факт можна використати для встановлення критерію  $(z,k)$ -еквівалентності матриць. Для цього необхідно і достатньо, щоб скінченні множини стандартних форм матриць мали спільну стандартну форму.

Введене у другому розділі поняття  $(z,k)$ -еквівалентності матриць у третьому розділі узагальнено і поширено для пар матриць над квадратичними кільцями. У цьому розділі наведено приклад, який показує, що є пари матриць над квадратичними кільцями, які зазначеними еквівалентними перетвореннями не зводяться до введених стандартних форм. Тому виділено класи пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями та над квадратичними кільцями головних ідеалів, які звідні до стандартних форм. Такими, зокрема, є пари матриць, визначники яких є взаємно простими і, визначники яких виражаються степенями простих чисел. Показано, що стандартні форми пар матриць мають аналогічні властивості, як встановлені у другому розділі властивості стандартних форм матриць.

У четвертому розділі розглядаються матричні лінійні однобічні та двобічні рівняння над квадратичними кільцями. Для таких матричних рівнянь відомі умови їх розв'язності в термінах еквівалентності матриць, складених із коефіцієнтів матричних рівнянь (критерій Рота) та з використанням поняття найбільшого спільного дільника матриць. Зауважимо, що серед квадратичних кілець є евклідові, головних ідеалів. Є

також кільця, які не є такими. Так, у квадратичному кільці  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  відсутнє поняття найбільшого спільного дільника елементів. Такі кільця не є кільцями головних ідеалів і навіть кільцями Безу. Тому вище зазначені критерії не застосовні до розв'язності цих рівнянь над усіма квадратичними кільцями. У четвертому розділі дисертації наведені необхідні і достатні умови існування розв'язків матричних лінійних однобічних та двобічних рівнянь над будь-яким квадратичним кільцем. Запропонований метод знаходження розв'язків матричних рівнянь ґрунтується на їх зведенні до розв'язування матричних рівнянь над кільцем цілих чисел, методи розв'язування яких відомі. У множині розв'язків рівнянь виділені розв'язки над кільцем цілих чисел. Вказані умови існування таких розв'язків та критерій їх єдиності.

У п'ятому розділі розроблений конструктивний метод розв'язування матричних рівнянь із застосуванням стандартних форм матриць, встановлених у другому та третьому розділах дисертаційної роботи. Матричні рівняння зводяться до еквівалентних з матрицями-коефіцієнтами у стандартних формах. Це дає можливість виділити розв'язки матричних рівнянь над квадратичними евклідовими кільцями, елементи яких мають мінімальні евклідові норми. Вказано також на існування розв'язків, евклідові норми яких є меншими, ніж евклідові норми канонічних діагональних форм матриць-коефіцієнтів рівнянь. Цей результат є аналогом так званих "мінімальних розв'язків" матричного поліноміального рівняння Сильвестра.

У наведеному короткому огляді ми назвали лише основні результати цієї дисертаційної роботи. Усі ці наукові положення дисертації є новими та отримані автором вперше.

Дисертаційна робота цілком відповідає спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. Усі її наукові положення обґрунтовані строгими математичними доведеннями. Крім того, їх достовірність впливає ще і з широкої апробації на всеможливих конференціях і семінарах у різних наукових установах.

Усі результати дисертації достатньо повно відображені в опублікованих наукових працях (з них шість статей, дві з яких – самостійні), зокрема, 5 статей у фахових виданнях України, 1 – у закордонному виданні.

Наукові положення дисертації доповідались та обговорювались на низці конференцій, в тому числі міжнародних, та на семінарах і здобули схвальну оцінку спеціалістів (на багатьох доповідях опонент був присутнім).

Автореферат дисертації правильно і повно відображає загальну характеристику, основні положення і висновки дисертації.

Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням. Результати, отримані в ній, мають значні перспективи щодо застосувань в найрізноманітніших розділах математики, зокрема у лінійній алгебрі, теорії комутативних кілець, теорії чисел.

Дисертація та автореферат оформлені згідно вимог МОН України. Істотних зауважень щодо змісту дисертації немає. Щодо її оформлення можна зробити наступні зауваження.

- У деяких розділах елементи визначені однозначно з точністю до асоційовності. На це необхідно було наголосити у тексті роботи. Наприклад, на стор. 29 дисертації зазначено “Форма Ерміта визначається однозначно...”. Варто написати так: “Форма Ерміта визначається однозначно з точністю до асоційовності її діагональних елементів”. На цій же сторінці означена нормальна форма Сміта матриці і її інваріантні множники. Бажано додати, що інваріантні множники визначені однозначно з точністю до асоційовності, а отже і нормальна форма Сміта однозначна з точністю до асоційовності її інваріантних множників. Ці та інші факти про однозначність “по замовчуванні” використовуються у подальшому викладі у дисертації.
- Окремі результати дисертації ілюструються на прикладах, що є позитивним фактом. Лише треба зауважити, що деякі з них, наприклад на стор. 94, викладені занадто докладно. Проміжні обчислення можна було б залишити для читачів.
- У дисертаційній роботі та її авторефераті присутні і деякі неточності: пропуски, стилістичні описки і ін.

Вказані зауваження мають технічний характер і не впливають на позитивну оцінку роботи в цілому.

На основі наведеного огляду дисертації Ладзоришин Н. Б. “Еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні рівняння” можна зробити висновок, що це завершена науково-дослідна робота, яка містить розв’язки актуальних і важливих задач, що стосуються структури матриць та розв’язування матричних рівнянь. Зокрема, у дисертаційній роботі досліджена спеціальна еквівалентність матриць над квадратичними кільцями, встановлені прості форми матриць і їх пар відносно цієї еквівалентності, розроблений метод розв’язування певних типів матричних рівнянь над квадратичними кільцями. На основі встановлених стандартних форм матриць запропонований конструктивний спосіб побудови розв’язків матричних рівнянь Сильвестра і діофантових матричних рівнянь та опису їх структури.

Результати і методи досліджень, запропоновані у цій дисертації, безперечно знайдуть використання у розробках щодо вивчення структури матриць над кільцями та побудови методів розв’язування матричних рівнянь, що здійснюються в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Інституті математики НАН України, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Ужгородському національному університеті та в інших наукових установах та навчальних закладах України.

Тому вважаю, що дисертаційна робота “Еквівалентність матриць над квадратичними кільцями та матричні рівняння” відповідає всім вимогам пунктів 9 та 11-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013 року (зі змінами), які висуваються до кандидатських дисертацій, а її автор, Ладзоришин Наталія Богданівна, без сумніву заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент,  
завідувач кафедри алгебри і логіки  
Львівського національного  
університету імені Івана Франка,  
доктор фізико-математичних наук, професор

Б.В. Забавський



030215/046  
09 12 19