Хмельницький національний університет
Міністерство освіти і науки України

ДВНЗ “Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника”
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Шелепало Галина Василівна

УДК 512.548

ДИСЕРТАЦІЯ

КЛАСИФІКАЦІЯ КВАЗІГРУПОВИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ І ТОТОЖНОСТЕЙ МІНІМАЛЬНОЇ ДОВЖИНИ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
________________ Г. В. Шелепало

Науковий керівник
Сохацький Федір Миколайович
доктор фізико-математичних наук,
доцент

Хмельницький — 2019

АНОТАЦІЯ

Шелепало Г. В. Класифікація квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей мінімальної довжини. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 — алгебра та теорія чисел. — Хмельницький національний університет. — ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, Івано -Франківськ, 2019.

З розвитком інформаційних технологій відповідні аналітичні дослідження алгебри і дискретної математики в комп’ютерних науках значною мірою стали залежати від розвитку оборотних функцій. Основою яких є бінарні, тобто двомісні оборотні операції, в комбінаториці — це латинські квадрати, в алгебрі — це квазігрупи. На відміну від груп, кількість квазігруп, навіть малих порядків, неможливо описати ні з точністю до ізоморфізму, ні з точністю до ізотопії. Наприклад, кількість квазігруп вже 10-го порядку з точністю до ізоморфізму є більша, ніж 10^{30}. Проте, з огляду на застосування в різних галузях математики, зокрема, в криптографії, фізиці, теорії планування проведення експериментів тощо, потрібно вміти будувати квазігрупи з наперед заданими властивостями.

Найефективнішими методами вивчення оборотних операцій, тобто квазігруп та їх властивостей є алгебричні методи, а серед них найкращим інструментом для дослідження виявилися многовиди квазігруп, тобто класи алгебр, що визначаються тотожностями. В зв’язку з деякими питаннями кодування, Р. Шауффлер (1956) вивчав узагальнені тотожності на квазігрупах, що визначені на скінченній множині. Підняту ним проблему цілком розв’язав В. Д. Білоусов (1959): довільні чотири квазігрупи ізотопні одній і тій же групі, якщо четвірка, компонентами якої є дані квазігрупи, є розв’язком узагальненого функційного рівняння асоціативності. Починаючи з 50-х років XX століття в основному вивчали системи квазігруп з тотожностями, враховуючи парастрофи квазігрупових операцій

та деякі їх властивості: С. К. Стейн (1957), А. Сад (1959), Д. Кідвел (2015) та інші. Наприклад, квазігрупа ортогональна деяким своїм парастрофам, якщо трійка операцій, що складається з даної квазігрупи та її парастрофів, є розв'язком нетривіального рівняння від двох предметних змінних, що має дві появи однієї і три появи іншої предметної змінної: Т. Еванс (1950), В. Д. Білоусова (1983), Ф. Е. Бенет (1989) та інші. Такі узагальнені рівняння в дисертації названо рівняннями предметного типу $(3;2)$ та рівняннями функційної довжини три. В зв'язку із цим давно назріла потреба у класифікації узагальнених тотожностей та класифікації многовидів, які визначаються відповідними тотожностями.

Одним із методів дослідження тотожностей в теорії квазігруп є вивчення узагальнених функційних рівнянь, тобто узагальнених тотожностей. До середини 90-х років минулого століття опубліковано десятки праць, в яких в основному функційні рівняння розв'язувались над числовими функціями. Постала проблема класифікації функційних рівнянь таким чином, щоб в один клас віднести рівняння, які мають просту залежність між множинами їх розв'язків. До цієї проблеми знайдено два підходи класифікації функційних рівнянь: метод графів, запропонований С. Крстічем (1985) та удосконалений А. Крапєжем (2010) і метод парастрофної симетрії, запропонований та описаний Ф. М. Сохацьким (2004, 2016). Для цього будували класифікації узагальнених функційних рівнянь на квазігрупах, враховуючи різні відношення еквівалентності В. Д. Білоусов (1966, 1981), А. М. Чебан (1971) Ф. М. Сохацький (2004), Р. Коваль (2005), А. Крапєж (2009, 2010) та інші. В дисертації використано відношення рівносильності, парастрофної рівносильності та парастрофно-первинної рівносильності.

Найбільш вивченими є узагальнені квадратичні функційні рівняння, тобто ті, що мають точно по дві появи кожної із своїх незалежних предметних змінних. Серед них, здебільшого, досліджувалися врівноважені, тобто такі, що мають в лівій і в правій частинах по одній появі кожної своєї незалежної предметної змінної, наприклад, рівняння асоціативності, медіальності, псевдомедіальності. Проте багато рівнянь є неврівноваженими і неквадратичними, тому в дисертації уточнено поняття квадратичного рівняння, визначено поняття майже квадратичного та антиквадратичного рівнянь.

Розв'язування узагальнених неквадратичних функційних рівнянь створює значні труднощі. Наприклад, знайдено лише частину розв'язків узагальненого функційного рівняння дистрибутивності на квазігрупах (В. Д. Білоусов, 1965). Рівняння дистрибутивності має п'ять функційних змінних, тобто функційну довжину 5. Серед таких рівнянь значну частину складають дистрибутивно подібні рівняння без квадратів (термів виду $F(x;x)$), а саме такі, що мають три предметних змінних з появами 3, 2, 2 відповідно, тобто предметного типу (3;2;2). Встановлено, що всі такі рівняння без квадратів розбиваються на п'ять неперехресних класів, один із них — це клас узагальненої дистрибутивності. Серед п'яти класів узагальнених дистрибутивно подібних функційних рівнянь чотири рівняння розпадаються в систему рівнянь від меншої кількості як функційних, так і предметних змінних. Це спричинює потребу в класифікації мінімальних функційних рівнянь і тотожностей.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд та аналіз літератури з теми дослідження, систематизовано основні поняття і твердження, означення і теореми, описано відомі допоміжні поняття та результати з вивчення функційних рівнянь, їх розв'язанння на множині бінарних оборотних функцій та класифікації мінімальних нетривіальних тотожностей на квазігрупах. Для класифікації функційних рівнянь основним інструментом є відношення парастрофно-первинної еквівалентності, а для класифікації тотожностей та відповідних многовидів — парастрофна симетрія, згідно з якою здійснюється розбиття на класи.

У другому розділі досліджуються деякі класи квазігруп із врахуванням їх груп симетрій, а саме: дано повну класифікацію групових ізотопів за групами їх парастрофних симетрій; уточнено класифікацію лінійних ізотопів скінченних циклічних груп та ізотопів груп простого порядку; згідно зі строгою парастрофною симетрією здійснено розбиття групових ізотопів, виписано множини усіх попарно неізоморфних групових ізотопів простого порядку p $(p > 3)$ та обчислено їх кількість; знайдено напівсиметричне ізотопне замикання многовида булевих груп та многовида всіх груп, отримано необхідні і достатні умови його існування в термінах канонічного розкладу, а також встановлено рівносильні та парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають ці многовиди; знайдено співвідношення між многовидом напівсиметричних квазігруп та многовидами напівсиметричних ізотопних замикань булевих груп, абелевих груп та всіх груп.

У третьому розділі класифіковано чисті узагальнені нетривіальні бінарні квазігрупові функційні рівняння. Для цього визначено поняття предметної довжини рівняння, предметного типу рівняння та уточнено поняття функційної довжини рівняння. Основним результатом цього розділу є класифікація узагальнених рівнянь до функційної довжини чотири всіх можливих предметних типів з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Встановлено, що їх кількість є точно 1, 3, 4, 19 відповідно для рівнянь довжин один, два, три, чотири. З кожного блока розбиття класифікації виділено представника та розв'язано його на множині бінарних квазігрупових операцій. А саме: дано повну класифікацію узагальнених рівнянь функційних довжин 1, 2, 3, 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності; знайдені представники кожного блока розбиття, новими з яких виявилися узагальнені рівняння предметного типу (4;0) функційної довжини 2, предметного типу (5;0) функційної довжини 3 та предметних типів (6;0;0), (4;2;0) і (3;3;0) функційної довжини 4; розв'язані представники всіх блоків класифікації, які раніше не були розв'язані, а саме таких предметних типів (4;0), (3;2), (5;0), (6;0;0), (4;2;0) та (3;3;0); наведено наслідки для квадратичних, майже квадратичних та антиквадратичних рівнянь. До того ж, розв'язано чотири із п'яти відомих дистрибутивно-подібних функційних рівнянь без квадратів на квазігрупах.

У четвертому розділі досліджуються многовиди, які визначаються тотожностями довжини 2 і 3 на квазігрупах. Основним результатом розділу є дві повні класифікації квазігрупових тотожностей довжини 2 і 3 з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності, а також розподіл відповідних многовидів квазігруп на пучки згідно з парастрофною симетрією. Доведено, що тотожності довжини 2 визначають 14, а тотожності довжини три — 74 многовиди, які розприділені в 6 та 20 пучків відповідно, згідно з законом парастрофної симетрії. Використовуючи інструменти парастрофної симетрії, описано многовиди розв'язків узагальнених рівнянь довжини 2; описано всі узагальнені тотожності довжини 2 і 3 з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності; знайдено рівносильні та парастрофно-рівносильні тотожності довжини 2 і 3; класифіковано многовиди квазігруп, які визначаються отриманими мінімальними тотожностями довжини 2 і 3 та проаналізовано їх за групами парастрофних симетрій; для кожної пари парастрофних многовидів знайдено приклади квазігруп, які відрізняють один многовид від іншого в одному пучку; знайдено приклади квазігруп, які відрізняють один пучок многовидів від іншого.

Результати цього дисертаційного дослідження носять теоретичний характер. Вони є внеском у теорію неасоціативних структур, скінченних двомісних функцій, в теорію як прямих, так і обернених задач функційних рівнянь і можуть застосовуватися в алгебрі, геометрії, топології, математичному аналізі, криптографії, дискретній математиці та k-значній логіці тощо. Запропоновані у роботі методи можна використати для дослідження в загальній теорії квазігруп, алгебрі, комбінаториці та в інших суміжних галузях математики.

Ключові слова: група, квазігрупа, лупа, оборотна операція, парастроф, ізотоп, тотожність, функційне рівняння, парастрофна рівносильність, парастрофно-первинна рівносильність, парастрофна симетрія, напівсиметричне замикання.

ABSTRACT

Shelepalo H. V. Classification of quasigroup functional equations and identities of the minimal length. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — algebra and number theory. —- Khmelnytsky National University. — Vasyl Stefanik Prycarpathian National University, Ivano -Frankivsk, 2019.

With the development of information technologies, relevant analytical studies of algebra and discrete mathematics in computer science have become increasingly dependent on the development of invertible functions. The basis of these are binary, i.e., binary invertible operations, in combinatorics these are Latin squares, in algebra it is a quasigroup. In contrast to groups, the number of quasigroups of even small orders can be described neither with precision to isomorphism nor precisely to isotopy. For example, the number of quasigroups of the 10th order up to isomorphism is more than 10^{30}. However, considering the application in various fields of mathematics, in particular, in cryptography, physics, the theory of planning the experiments, etc., one must be able to build quasigroups with predefined properties.

Algebraic methods are the most effective methods for studying invertible operations, that is, quasigroups and their properties. Among them, the best tool for research is the varieties of quasigroups, that is, classes of algebras that are determined by identities. In connection with certain questions of coding, R. Schauffler (1956) studied generalized identities on the quasigroups defined on a finite set. V. D. Belousov (1959) has solved the problem completely: four arbitrary quasigroups are isotopes of the same group, if the quadruple of these quasigroups is the solution of the functional equation of generalized associativity. Since the 1950s, mainly the systems of quasigroups with identities

were studied taking into account the parastrophes of quasigroup operations and some of their properties: S. K. Stein (1957), A. Sade (1959), D. Kiddvel (2015) and others. For example, a quasigroup is orthogonal to some of its parastrophes, if the three operations consisting of this quasigroup and its parastrophes are the solution of a nontrivial equation in two individual variables, one of them has two appearances and the other has three appearances: T. Evans (1950), V. D. Belousov (1983), F. E. Benet (1989) and others. In the dissertation, such generalized equations are called equations of the individual type $(3; 2)$ and of the functional length 3. In connection with this, the need for the classification of generalized identities and the classification of varieties which are determined by the corresponding identities has long been urgent.

One of the methods of studying identities in the theory of quasigroups is the study of generalized functional equations, that is, generalized identities. By the mid-90s of the last century, dozens of papers were published in which mostly functional equations were solved over numerical functions. There was a problem of classification of functional equations in such a way that equations having a simple relationship among the sets of their solutions should be attributed to one class. Two approaches to the classification of functional equations have been found for this problem: the graph method proposed by C. Krstich (1985) and improved by A. Krapez (2010) and the method of the parastrophic symmetry proposed and described by F. M. Sokhatsky (2004, 2016). For this purpose, the classifications of generalized functional equations on quasigroups were built taking into account the various equivalence relations by V. D. Belousov (1966, 1981), A. M. Cheban (1971), F. M. Sokhatsky (2004), R. Koval (2005), A. Krapez (2009, 2010) and others. In the dissertation, the relations of equivalence, parastrophic equivalence and parastrophically primary equivalence are used.

The most studied are generalized quadratic functional equations, that is, those ones that have precisely two appearances of each of their independent individual variables. Among them, for the most part, balanced equations were researched, that is, the equations which have in their left and right sides one appearance of each of their independent individual variables, for example, the equations of associativity, mediality, pseudo-mediality. However, many equations are unbalanced and non-quadratic that is way the concept of a quadratic equation has been clarified, the concept of an almost quadratic and an anti-quadratic equation is defined in the dissertation.

The solution of generalized non-quadratic functional equations creates considerable difficulties. For example, only a part of the solutions of the functional equation of generalized distributivity in quasigroups was found by V. D. Belousov, 1965. The equation of distributivity has five functional variables, that is, the functional length is 5. Among these equations, a large part is distributive-like equations without squares (terms of the form $F(x;x)$), namely those with three subject variables with the appearances of 3, 2, 2 respectively, i.e., the individual type $(3;2;2)$. It is established that all such equations without squares are divided into five disjoint non-intersecting classes, one of them is a class of generalized distributivity. Among the five classes of generalized distributive-like functional equations, the four equations fall into a system of equations from a smaller number of both functional and individual variables. This necessitates the classification of minimal functional equations and identities.

The first section of the dissertation presents the review and analysis of literature on the subject of the research. The basic concepts and assertions, definitions and theorems are systematized. The well-known auxiliary concepts and results from the study of functional equations, their solving on the set of binary invertible functions and the classification of minimal nontrivial identities on quasigroups are described. For the classification of functional equations, the main tool is the relation of the parastrophically primary equivalence. For the classification of identities and corresponding varieties, parastrophic symmetry, according to which the division into classes is carried out, serves the main tool.

In the second section, some classes of quasigroups are studied taking into account their symmetry groups, namely: a complete classification of group isotopes is given in groups of their parastrophic symmetries; the classification of linear isotopes of finite cyclic groups and isotopes of simple order groups is specified; in accordance with the strict parastrophic symmetry, the partition of group isotopes is performed; sets of all pairwise non-isomorphic group isotopes of a simple order p ($p > 3$) are described and their number is calculated; a semi-symmetric isotope closure of a variety of the Boolean groups and a variety of all groups is found; the necessary and sufficient conditions for its existence are obtained in terms of the canonical decomposition; and whilst equivalence and parastrophic equivalence identities which determine these varieties are established; the relationships among a variety of semi-symmetric quasigroups and a variety of semi-symmetric isotope closures of Boolean groups, Abelian groups and all groups are found.

In the third section, pure generalized non-trivial binary quasigroup functional equations are classified. For this purpose, the concept of the individual length of the equation, the individual type of the equation, and the concept of the functional length of the equation are specified. The main result of this section is the classification of generalized equations to the functional length of four of all possible individual types up to parastrophically primary equivalence. It is established that their number is exactly 1, 3, 4, 19, respectively, for the equations of the lengths 1, 2, 3, 4. From each partition block of classification, a representative is selected and solved on a set of binary quasigroup operations. Namely: the complete classification of the generalized equations of functional lengths 1, 2, 3, 4 up to the parastrophically primary equivalence is given; representatives of each block of the partition are found, the new ones which are generalized equations of the individual type (4;0) of the functional length 2, of the individual type (5;0) of the functional length 3 and of the individual types (6;0;0), (4;2;0) and (3;3;0) of the functional length 4; representatives of all classification units that had not been solved before, in particular, the individual types such as (4;0), (3;2), (5;0), (6;0;0), (4;2;0) and (3;3;0); corollaries for quadratic, almost quadratic and anti-quadratic equations are given. In addition, four of the five known distributive-like functional equations without squares are solved.

In the fourth section, many varieties determined by identities of the lengths 2 and 3 on quasigroups are investigated. The main result of the section is the two complete classifications of quasigroup identities of the lengths 2 and 3 up to equivalence and parastrophic equivalence, as well as to the distribution of the corresponding varieties of quasigroups into beams in parastrophic symmetry. It is proved that the identities of the length 2 define 14, and the identities of the length 3 define 74 varieties which respectively are classified into 6 and 20 trusses according to the parastrophic symmetry. Using the tools of the parastrophic symmetry, the varieties of solutions of generalized equations of the length 2 are found. All generalized identities of the length 2 and 3 up to equivalence and the parastrophic equivalence are described. The identities of the length 2 and 3 up to equivalence and parastrophic equivalence are found. The varieties of quasigroups which are determined by the obtained minimal identities are classified, they are analyzed according to the groups of parastrophic symmetries. For each pair of parastrophic varieties, the examples of quasigroups which distinguish one variety from the other in a single truss are found. Examples of quasigroups which distinguish one truss of varieties from the other are found.

The results of this dissertation research are theoretical. The results are the contribution to the theory of non-associative structures, to finite binary functions and to the theory of both direct and inverse problems of functional equations. They can be used in the theory of functional equations, in the general theory of geometry, topology, mathematical analysis, cryptography, discrete mathematics and k-valued logic. The methods proposed in the work can be used for research in the general theory of quasigroups, algebra, combinatorics and in other related branches of mathematics.

Key words: group, quasigroup, loop, invertible operation, parastrophe, isotope, identity, functional equation, parastrophic equivalence, parastrophically primary equivalence, parastrophic symmetry, semi-symmetric closure.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sokhatsky F. M., Krainichuk H. V. *Solution of distributive-like quasigroup functional equations* // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2012. — Vol. 53, № 3. — P. 447–459.

2. Крайнічук Г. В. *Класифікація та розв'язання квазігрупових функційних рівнянь типу* $(4;2)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2015. — № 1/2. — С. 53–63.

3. Крайнічук Г. В. *Класифікація квазігрупових функційних рівнянь типу* $(3;3;0)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1/2. — С. 33–41.

4. Krainichuk H., Tarkovska O. *Semi-symmetric isotopic closure of some group varieties and the corresponding identities* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2017. — № 3(85). — P. 3–22.

5. Крайнічук Г. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей довжини три* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2017. — № 1/2. — С. 37–66.

6. Krainichuk H. *Classification of group isotopes according to their symmetry groups* // Folia Math. — 2017. — Vol. 19, no. 1. — P. 84–98.

7. Крайнічук Г. В. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини чотири* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2018. — № 1/2. — С. 4–23.

8. Krainichuk H., Sokhatsky F. *Solution and full classification of generalized binary functional equations of the type* $(3;3;0)$ // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2018. — № 2(87) — P. 41–53.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Krainichuk H. V., Sokhatsky F. M. *About solving functional equations having three subject variables on the set of invertible two-placed functions* // Ukrainian mathematical congress — 2009 (Dedicated to the Centennial of Nikolai N. Bogoliubov) (Kyiv, August 27–29, 2009): Institute of Mathematics of NASU, Kyiv. — 2009.

2. Sokhatsky F. M., Krainichuk H. V. *About classification of generalized functional equations on quasigroups* // The International Mathematical Conference on Quasigroups and Loops "Loops'11" (Trest, Czech Republic, July 21-27, 2011): booklet of abstracts. — Třešť: Česká Zemědělská Univerzita v Praze, 2011. — P. 17–18.

3. Krainichuk H. V. *Classification and solution of functional equations of the type (4;2) on quasigroups* // The 20^{th} conference on applied and industrial mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu CAIM 2012 (Chişinău, Moldova, August 22–25, 2012): Communications, Chişinău, 2012. — P. 138–139.

4. Krainichuk H. V. *On a solution of a functional equation of type* $(4;2)$ *on quasigroups* // Междунар. науч. конф. "XI Белорусская математическая конференция" (Минск, 5–9 ноября, 2012 г.): тез. докл. — Часть 5. — Мн.: Институт математики НАН Белоруси, 2012. — С. 61–62.

5. Krainichuk H. V. *Classification of all parastrophic identities of the type* $(3;2)$ *on quasigroups* // The International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov (Kyiv, Ukraine, August 20–26, 2012): book of abstracts. — Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 69.

6. Крайнічук Г. В., Сохацький Ф. М. *Класифікація мінімальних тотожностей на квазігрупах* // П'ятнадцятий міжнар. наук.-практ.

семінар “Комбінаторні конфігурації та їх застосування” (Кіровоград, 12–13 квітня 2013 р.): тези. — Кіровоград: ПП “Ексклюзив-систем”, 2013. — С. 64–66.

7. Krainichuk H. *On minimal nontrivial quasigroup identities* // 9th International Algebraic Conference in Ukraine (L’viv, July 8–13, 2013): book of abstracts. — L’viv: Ivan Franko National University of L’viv, 2013. — P. 98.

8. Крайнічук Г. В. *Про різні класифікації тотожностей на квазігрупах* // XII-та Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз” АТА-2017 (с. Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл., Україна, 10–23 липня 2017 р.). — Електрон. текст. дані. — с. Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл., Україна: науково-навчальна база НПУ імені М. П. Драгоманова “Синевир”, 2017. — С. 7–8.

9. Krainichuk H. *On parastrophes of quasigroup identities and corresponding varieties and trusses* // The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated centenary of Vladimir Andrunachievici (1917–1997) CMSM 4’2017 (Chişinău, Republic of Moldova, June 25–July 2, 2017): Proceedings CMSM 4. — Chişinău: Institute of Mathematics and Computer Science (CEP USM), 2017. — P. 101–104.

10. Krainichuk H. *On classification of generalized binary quasigroup functional equations of length four* // International conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov (Bălţi, Rep. of Moldova, April 19–21, 2018): Communications MITI-2018. — Bălţi: S. n. “Alecu Russo” Bălti State Univ. (Tipografia din Bălţi), 2018. — P. 49–50.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$:=$ — рівність за означенням.

$:\Leftrightarrow$ — рівносильність за означенням

$\asymp$ — відношення парастрофно-первинної рівносильності

$f(x;y)$, $(x \cdot y)$ — бінарна операція (функція) f, $(\cdot)$

${}^{\sigma}f(x;y)$, $(x \overset{\sigma}{\cdot} y)$ — σ -парастроф операції f $(\cdot)$

${}^{\ell}f$, $(\overset{\ell}{\cdot})$ — ліве ділення операції f, $(\cdot)$

${}^{r}f$, $(\overset{r}{\cdot})$ — праве ділення операції f, $(\cdot)$

$\mathrm{Ps}(\cdot)$ — парастрофна симетрія операції $(\cdot)$

R_a^f — правий зсув операції f за елементом a

L_b^f — лівий зсув операції f за елементом b

M_c^f — середній зсув операції f за елементом c

$\mathcal{Q} := \{a, b, c, a_1, \dots\}$ — множина предметних сталих із Q

$\mathcal{F} := \{f, g, h, f_1, f_2, \dots\}$ — множина функційних сталих на Q

$\mathcal{X} := \{x, y, x_1, x_2, \dots\}$ — множина предметних змінних в Q

$\mathfrak{F} := \{F, F_1, F_1, \dots\}$ — множина функційних змінних на Q

$\mathbb{Z}_m$ — кільце лишків за модулем m

$\mathbb{Z}_m^*$ — група оборотних елементів кільця $\mathbb{Z}_m$

$\mathrm{Is}(+)$ — множина всіх ізотопів групи $(Q;+)$

M^{cs} — множина строго комутативних ізотопів групи

M^{ls} — множина строго лівосиметричних ізотопів групи

M^{rs} — множина строго правосиметричних ізотопів групи

M^{ts} — множина тотально-симетричних ізотопів групи

M^{ss} — множина строго напівсиметричних ізотопів групи

M^{as} — множина асиметричних ізотопів групи

$\mathfrak{B}_{\mathrm{ss}}$ — многовид напівсиметричного замикання ізотопів булевих груп

$\mathfrak{A}_{\mathrm{ss}}$ — многовид напівсиметричного замикання ізотопів абелевих груп

$\mathfrak{G}_{\mathrm{ss}}$ — многовид напівсиметричного замикання ізотопів всіх груп

$\mathfrak{S}$ — многовид всіх напівсиметричних квазігруп

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Початок розвитку функційних рівнянь сягає 1747 року з праць Ж. Л. Д'аламбера [26, 27]. В основному функційні рівняння розв'язувались над числовими функціями [2, 3, 87]. У другій половині 20-го століття зріс інтерес до криптографії [25, 28, 49, 131, 138], що спричинило вивчення функційних рівнянь над функціями, які визначені на довільних множинах, зокрема й на скінченних [1, 5]. Вперше таке рівняння було розв'язане В. Д. Білоусовим у 1958 році [4, 9] та опубліковане в статті разом з Я. Ацелем та М. Хосу [4] в 1960 році. А саме, він розв'язав рівняння узагальненої асоціативності над оборотними, тобто квазігруповими функціями. До середини 90-х років минулого століття опубліковано десятки праць, в яких розв'язуються функційні рівняння як на оборотних, так і на необоротних функціях [1, 43]. Постала проблема класифікації функційних рівнянь таким чином, щоб до одного класу віднести рівняння, які мають просту залежність між множинами їх розв'язків.

Майже одночасно з різницею в декілька років було запропоновано два підходи до проблеми класифікації функційних рівнянь.

Перший — це метод графів А. Крапєжа [84, 85] і С. Крстіча [86]. Згідно з їхнім підходом між функційними рівняннями і графами встановлювалася певна відповідність і в один клас попадали точно ті рівняння, яким відповідали ізоморфні графи. Проте цей метод застосовний лише для квадратичних рівнянь. Квадратичними називають рівняння, в яких кожна предметна змінна має точно дві появи.

Другий — це закон парастрофної симетрії Ф. М. Сохацького [118], згідно з яким вводиться низка перетворень рівнянь, що ґрунтуються на первинних тотожностях оборотних функцій. Два рівняння називаються парастрофно-первинно рівносильними (парастрофно-рівносильними [112]), якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість зазначених перетворень. Цей метод розвивався, удосконалювався різними дослідниками, зокрема й у дисертації застосовується до класифікації неквадратичних функційних рівнянь і тотожностей на множині квазігрупових операцій.

Найефективнішими методами вивчення оборотних операцій є алгебричні методи, а серед них найкращим інструментом для дослідження виявилися многовиди квазігруп, тобто класи алгебр, які визначаються тотожностями. У теорії квазігруп вивчалися многовиди, кожен з яких виникав з певних задач алгебри, геометрії, комбінаторики тощо. Давно назріла потреба в їх класифікації.

Вивченням окремих класів тотожностей та їх розв'язків займались різні автори. Вони розглядали узагальнені тотожності, які ще називали узагальнені функційні рівняння. Інакше кажучи, це тотожності, в яких невизначена залежність між символами операцій. До вивчення таких тотожностей можна віднести праці Р. Шауффлера [134], який вперше розглядав системи квазігруп з узагальненими тотожностями, а також А. Сада [102–104], С. К. Стейна [124], В. Д. Білоусова [12, 13, 16, 17, 20], Т. Еванса [36–38], Ф. Е. Бенета [8] та інших, які описували системи квазігруп з основними тотожностями, враховуючи парастрофи квазігрупових операцій та деякі їх властивості. В своїх працях Ф. М. Сохацький [111, 112, 118], А. Крапєж [82–85], Р. Коваль [50–52] та інші будували класифікації узагальнених квадратичних функційних рівнянь на квазігрупах, враховуючи різні відношення еквівалентності.

Із врахуванням введеного та описаного закону парастрофної симетрії в теорії квазігруп, запропоновано чіткий алгоритм описання тотожностей: 1) класифікація узагальнених функційних рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, 2) в кожному з отриманих блоків класифікація узагальнених тотожностей з точністю до парастрофної рівносильності, 3) знаходження пучків тотожностей і відповідних многовидів з точністю до рівносильності.

Серед дисертаційних результатів знайдено розв'язки інших чотирьох можливих класів дистрибутивно-подібних рівнянь без квадратів на множині квазігрупових операцій. З отриманих розв'язків, зокрема, випливає, що кожне з рівнянь цих класів рівносильне системі рівнянь від меншої кількості змінних. Звідси й постає доцільність класифікації рівнянь мінімальної довжини, яка важлива і для класифікації функційних рівнянь довільної довжини.

Мета і задачі дослідження. *Метою дослідження* є розвиток теорії функційних рівнянь і тотожностей за допомогою їх класифікації за трьома видами відношень (рівносильність, парастрофна рівносильність і парастрофно-первинна рівносильність) та їх розв'язування на множині бінарних квазігруп з описом тотожностей та відповідних їм многовидів у алгебрі.

Задачі дослідження:

— класифікувати групові ізотопи за групами парастрофної симетрії, дослідити напівсиметричне ізотопне замикання многовидів груп;

— класифікувати нетривіальні узагальнені бінарні квазігрупові функційні рівняння мінімальної довжини і знайти їх розв'язки;

— класифікувати тотожності мінімальної довжини і описати відповідні пучки многовидів, враховуючи закон парастрофної симетрії.

Об'єктом дослідження є оборотні операції (квазігрупи), функційні рівняння, їх розв'язки, тотожності та многовиди, які визначаються ними.

Предметом дослідження є бінарні квазігрупи, їх парастрофи, ізотопи груп, узагальнені функційні рівняння та узагальнені тотожності мінімальної довжини, їх квазігрупові розв'язки та класифікація на неперехресні класи з повним описом їх видів, типів та виглядів з точністю до рівносильності, парастрофної рівносильності, парастрофно-первинної рівносильності, відповідно до закону парастрофної симетрії.

Методи дослідження. У роботі використовуються сучасні методи теорії квазігруп і теорії функційних рівнянь, загальні методи алгебри, математичного аналізу, комбінаторики та логіки.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні наукові результати, отримані автором самостійно, є новими і полягають в такому:

— дано повну класифікацію групових ізотопів за групами парастрофної симетрії, описано напівсиметричне ізотопне замикання многовида всіх груп та многовида булевих груп, з'ясовано співвідношення між ними та многовидом напівсиметричних квазігруп;

— завершено повну класифікацію узагальнених квазігрупових функційних рівнянь до функційної довжини чотири з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та розв'язано представники з усіх отриманих блоків відповідного розбиття, а також знайдено розв'язки узагальнених дистрибутивно-подібних функційних рівнянь без квадратів на множині квазігрупових операцій;

— використовуючи результати класифікації узагальнених функційних рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, отримано дві повні класифікації тотожностей довжиною 2 і 3 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності, а також описано розподіл відповідних многовидів квазігруп на пучки згідно з парастрофною симетрією.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер і можуть застосовуватися: в алгебрі — при вивченні квазігрупових тотожностей; у топології — при вивченні тотожностей у топологічних квазігрупах і лупах; у геометрії — при вивченні сіток та номограм; у математичному аналізі — при вивченні функційних рівнянь на множині двомісних монотонних функцій; у дискретній математиці та k-значній логіці — при вивченні розкладів багатомісних операцій за допомогою суперпозицій; а також можуть бути корисними в комбінаториці — при вивченні латинських квадратів, у криптографії — при вивченні оборотних хеш-функцій та написанні секретних ключів, шифрів та кодів; в економіці — при побудові моделей з оборотними функційними залежностями тощо.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, висвітлені в дисертації, отримано здобувачем самостійно. У праці [121] Ф. М. Сохацькому належить теорема 1, лема 3 та наслідки 5–7; у праці [76] науковому керівникові належить теорема 1. У праці [77] О. О. Тарковській належить теорема 7, теорема 9, наслідки 17–20 та приклад 2.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися на: конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів 25–27 травня 2009 р.); Українському математичному конгресі (м. Київ 27–29 серпня 2009 р.); міжнародній математичній конференції з квазігрупп і луп "Loops'11" (м. Трешт, Чехія 25–27 липня 2011 р.); конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2012" (м. Львів 23–25 травня 2012 р.); міжнародній математичній конференції з нагоди 70-річчя професора Володимира Кириченка (м. Миколаїв, 13–19 червня 2012 р.); 9-й міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (м. Львів 8–13 липня 2013 р.); міжнародній конференції з алгебри, присвяченій 100-річчю С. М. Чернікова (м. Київ 20–26 серпня 2012 р.); XX конференції з прикладної та промислової математики (CAIM 2012), присвяченій академіку Митрофану М. Чобану (м. Кишинів, Республіка Молдова, 22-25 серпня 2012 р.); міжнародній науковій конференції "XI Білоруська математична конференція". Секція: Алгебра і теорія чисел (м. Мінськ, Республіка Білорусь, 5–9 листопада 2012 р.); міжнародній конференції, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (м. Львів 17–21 вересня 2012 р.); міжнародній конференції "Математика та інформаційні технології: дослідження та освіта", (MITRE 2013) (м. Кишинів, Республіка Молдова, 18–22 серпня 2013 р.); IX міжнародній науковій конференції для молодих вчених "Сучасні проблеми математики і її застосування в природних та інформаційних технологіях" (м. Харків, 25–26 квітня 2014 р.); третій конференції математичного товариства Республіки Молдова, присвяченій 50-

річчю з дня заснування Інституту математики та інформатики “IMCS-50” (м. Кишинів, Республіка Молдова, 19–23 серпня 2014 р.); науковій конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня, присвяченій 85-річчю ДонНУ, за підсумками науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр. (м. Вінниця 15–18 травня, 2017 р.); 11-й міжнародній алгебричній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3–7 липня 2017 р.); XII літній школі: “Алгебра, топологія, аналіз” (с. Колочава, Закарпатська область, 10–23 липня 2017 р.); четвертій конференції з неасоціативної математики (м. Денвер, США, 29 липня - 5 серпня 2017 р.); міжнародній конференції з математики, інформатики та інформаційних технологій присвяченій знаменитому вченому Валентину Білоусову (м. Бєльци, Республіка Молдова, 19–21 квітня 2018 р.); міжнародному конгресі математиків 2018 (м. Ріо де Жанейро, Бразилія, 1–9 серпня 2018); міжнародних семінарах Інституту математики та інформатики АН Республіки Молдови “Алгебра і математична логіка” (м. Кишинів, Республіка Молдова, 19–21 лютого 2009 р., 23–25 лютого 2011 р.); X міжнародному семінарі “Дискретна математика та її застосування” (м. Москва, Росія, 1–6 лютого 2010 р.); Львівському міському алгебраїчному семінарі під керівництвом д. фіз.-мат. н., проф. М. Я. Комарницького (м. Львів, 18 жовтня 2011 р.); п’ятнадцятому міжнародному науково-практичному семінарі “Комбінаторні конфігурації та їх застосування” (Кіровоград, 12–13 квітня 2013 р.); шістнадцятому міжнародному науково-практичному семінарі “Комбінаторні конфігурації та їх застосування” (Кіровоград, 11–12 квітня 2014 р.); алгебраїчному семінарі Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники — д. фіз.-мат. н., член-кор. НАН України Ю. А. Дрозд, д. фіз.-мат. н. А. П. Петравчук) (м. Київ, 27 вересня 2018 р.); алгебричному семінарі Інституту математики НАН України (керівник — д. фіз.-мат. н., член-кор. НАН України Ю. А. Дрозд) (м. Київ, 30 жовтня 2018 р.).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 28 працях, з них 5 – у фахових виданнях із фізико-математичних наук [54–56, 58, 71], 3 – у виданнях, включених до міжнародної наукометричної бази “Scopus” [76], [77], [121] та 20 – у матеріалах міжнародних наукових конференцій [53, 57, 59–70, 72–75], [119, 120].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації — 191 сторінка. Список використаних джерел займає 15 сторінок та містить 138 найменувань. Додатки займають 8 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ВИБІР МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Цей розділ має вступний характер та стосується ключових понять дослідження: бінарні квазігрупи, функційні рівняння та їх розв'язки, тотожності та многовиди, які визначаються ними. У ньому наведено огляд літератури та допоміжні поняття, леми та теореми, які використовуються для результатів дисертації, а також зроблено огляд матеріалів напрямку дослідження дисертаційної роботи.

Бінарною операцією (двомісною функцією), яка визначена на деякій множині, є відображенням квадрату цієї множини в себе. Функція, що визначена на скінченній чи нескінченній множині, називається квазігруповою (оборотною), якщо вона оборотна по кожній своїй змінній.

Квазігрупа — алгебраїчна структура в абстрактній алгебрі, яка подібна до групи тим, що в ній завжди можливе ділення (інших властивостей групи квазігрупа немає).

Бінарна квазігрупа — це впорядкована пара $(Q; f)$, де Q — множина, f — бінарна операція, що визначена на цій множині, така, що кожне з рівнянь

$$f(a, y) = b, \qquad f(x, a) = b$$

однозначно розв'язне для будь-якої пари елементів a, b із множини Q.

Вивченням алгебричної теорії бінарних квазігруп займалися Р. Х. Брук [24], В. Білоусов [10, 11], В. Білоусов та М. Сандік [19], А. Крапєж [80], Г. Плюкфельдер [95], Дж. Сміт [107], В. Щербаков [137] та багато інших.

1.1. Різні підходи до означення квазігрупи

В дисертації розглядаються операції, що визначені на одній і тій же множині, яку називатимемо базовою або носієм і позначатимемо через Q. Операції вивчаємо на множині двомісних функцій, тобто бінарних операцій. Функції (операції) позначатимемо префіксними та інфіксними символами відповідно, тобто $f(x;y)$ та $x \cdot y$ ($x \overset{\sigma}{\cdot} y$). Тотожне інфіксне позначення між двома символами змінних $x \cdot y$ будемо опускати, тобто запис матиме вигляд xy.

Операція f називається лівооборотною, якщо довільний її правий зсув є підстановкою базової множини. Інакше кажучи, якщо рівняння $f(x;a)= b$ має єдиний розв'язок для всіх a, b із Q, то розв'язок цього рівняння позначатимемо через ${}^{\ell}f(b;a)$. Очевидно, що ${}^{\ell}f$ є бінарною операцією, яку називають лівим діленням (спряженням) операції f і виконуються перша та друга тотожності з

$$\begin{gathered} f({}^{\ell}f(x;y);y) = x, \quad {}^{\ell}f(f(x;y);y) = x, \\ f(x;{}^{r}f(x;y)) = y, \quad {}^{r}f(x;f(x;y)) = y. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Аналогічно визначається правооборотна операція і праве ділення (спряження) ${}^{r}f$, для якого виконуються третя і четверта рівності із (1.1).

Функція f називається оборотною або квазігруповою, якщо вона є правооборотною і лівооборотною. При цьому тотожності (1.1) називаються визначальними або первинними, а групоїд $(Q;f)$ називається квазігрупою. В літературі відоме інше означення квазігрупи:

Означення 1.1 ([11]). *Квазігрупою називається групоїд $(Q;\cdot)$ такий, що система рівнянь $a \cdot x = b$, $y \cdot a = b$ має єдиний розв'язок для довільних $a, b \in Q$.*

Функція ${}^{\sigma}f$ називається σ-парастрофом функції f, якщо вона визначається таким співвідношенням:

$${}^{\sigma}f(x_{1\sigma};x_{2\sigma}) = x_{3\sigma} \iff f(x_1;x_2) = x_3$$

для будь-якого $\sigma \in S_3 := \{\iota, s, \ell, r, s\ell, sr\}$, де S_3 – симетрична група третього порядку та $s := (12)$, $\ell := (13)$, $r := (23)$.

Означення 1.2 ([11, 38]). *Квазігрупою називається універсальна алгебра* $(Q; \cdot, \overset{\ell}{\cdot}, \overset{r}{\cdot})$ *сигнатури* $(2,2,2)$, *що задовольняє тотожності з* (1.1) *для всіх* $x, y \in Q$, *які записані в інфіксному позначенні:*

$$(x \overset{\ell}{\cdot} y) \cdot y = x, \quad xy \overset{\ell}{\cdot} y = x, \quad x \cdot (x \overset{r}{\cdot} y) = y, \quad x \overset{r}{\cdot} xy = y. \tag{1.2}$$

В [7] квазігрупа визначена як алгебра з трьома бінарними операціями $(Q; \cdot, \overset{\ell}{\cdot}, \overset{r}{\cdot})$ такими, що виконуються шість таких тотожностей з (1.2) та

$$x \overset{\ell}{\cdot} (y \overset{r}{\cdot} x) = y, \qquad (x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{r}{\cdot} x = y.$$

В [94] доведено, що будь які трійки тотожностей, що вибираються із цих шести, є аксіомами многовида квазігруп. Якщо $(Q, \cdot)$ є квазігрупою як групоїд за означенням 1.1, то $(Q; \ \cdot, \ \overset{\ell}{\cdot}, \ \overset{r}{\cdot})$ є еквівалентною квазігрупою в розумінні універсальної алгебри за означенням 1.2.

Виходячи із практичних міркувань в алгебрі досить зручно користуватися поданням операцій за допомогою таблиць Келі, де описується структура скінченних алгебраїчних систем шляхом розміщення результатів операції в таблиці, що нагадує таблицю множення (названа в честь англ. математика Артура Келі). Якщо квазігрупа скінченна, то внутрішня частина таблиці Келі є латинським квадратом, тобто таблиця множення скінченної квазігрупи утворює латинський квадрат. І навпаки, довільний латинський квадрат може бути вибраний за таблицю множення, щоб утворити квазігрупу. Латинським квадратом називається таблиця розміру $n \times n$ заповнена n різними елементами так, що в кожному стовпці і кожному рядку всі елементи зустрічаються по одному разу.

Якщо операцію позначити через f, а довільний елемент носія позначити через a, то ліва, права та середня трансляції позначатимемо L_a^f, R_a^f та M_a^f відповідно, тобто мають місце такі позначення:

$$L_a^f(x) := f(a; x), \quad R_a^f(x) := f(x; a), \quad M_a^f(x) = y \Leftrightarrow f(x; y) = a. \tag{1.3}$$

Операції f, g називаються ортогональними ($f \perp g$), якщо система

$$\begin{cases} f(x;y) = a, \\ g(x;y) = b \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для всіх $a, b \in Q$.

Нагадаємо, що ліве мнження $\underset{\ell}{\oplus}$ і праве множення $\underset{r}{\oplus}$ бінарних операцій визначається такими рівностями:

$$(g \underset{\ell}{\oplus} h)(x;y) := g(h(x;y);y), \qquad (g \underset{r}{\oplus} h)(x;y) := g(x;h(x;y)).$$

Лема 1.1 ([14]). *Нехай g, h – оборотні операції, тоді виконуються таі рівності:*

$$g \underset{\ell}{\oplus} h \text{ є оборотною } \Leftrightarrow\ g \perp {}^{\ell}h, \qquad g \underset{r}{\oplus} h \text{ є оборотною } \Leftrightarrow\ g \perp {}^{r}h.$$

1.2. Огляд літератури та вибір напрямків дослідження

Класично теорія оборотних функцій (квазігруп) та їх супутніх об'єктів: луп, латинських квадратів, кубів і гіперкубів, застосовується в комбінаториці, дискретній математиці, алгебрі, геометрії, теорії планування і проведення експериментів тощо. Останнім часом сфера використання оборотних функцій та фукційних рівнянь їх різновидів розширилася до застосування у криптографії та написанні кодів у шифруванні. Особливо це стосується n-арних функцій. Найбільш вивченими серед них є двомісні функції (бінарні операції) із певними властивостями для застосування. Це, в свою чергу, вимагає вивчення відповідних функційних рівнянь та їх розв'язування.

Розв'язування функційних рівнянь є однією з найстаріших галузей математичного аналізу. Значні кроки у вивченні цього напрямку зробили Д'аламбер (1747), Ейлер (1755), Гаусс (1809), Коші (1831), Дарбу (1875). Тривалий час функційні рівняння в алгебрі розглядалися не як загальна теорія, а вивчались розв'язки окремо взятого функційного рівняння, яке поставало з тих чи інших досліджень. В основному функційні рівняння розв'язувались над числовими функціями. В другій половині 20-го століття зріс інтерес до шифрування та дешифрування інформації, а це, в свою чергу, спричинило вивчення функційних рівнянь над оборотними функціями, що визначені на довільних множинах, в тому числі й на скінченних.

Перші ознаки зародження функційних рівнянь як теорії були в працях, в яких вивчалися не одне окремо взяте рівняння, а цілі класи функційних рівнянь. Найбільш поширеним класом функційних рівнянь, який широко вивчається багатьма науковцями й до сьогодні та має спільний алгоритм розв'язку, є клас врівноважених функційних рівнянь, що введений А. Садом в 1959 році [98]. Згодом А. Крапєж [83] помітив, що даний клас можна розширити із збереженням спільного, але видозміненого методу їх розв'язання. Цей клас названий квадратичними рівняннями.

Загальний розв'язок над квазігрупами функційного рівняння асоціативності дав В. Д. Білоусов у своїй відомій теоремі "про чотири квазігрупи" [9]. До того розглядались частинні випадки узагальненої тотожності асоціативності А. Сушкевичем [125], Т. Івенсом [37], В. Девіде [29], А. Садом [98] та багатьма іншими авторами. До рівняння асоціативності зводиться узагальнене рівняння транзитивності. Як функційне рівняння, узагальнену тотожність транзитивності розглядав М. Хоссу [41].

Узагальнену тотожність медіальності та її частинні випадки розглядали різні автори: А. Сад (в основному під назвою ентропії), С. К. Стейн [124], К. Тойода [129], Р. Х. Брук [24], Д. Медоч [92] (під назвою квазіабелевість). Як функційне рівняння, загальна тотожність медіальності розглядалась багатьма авторами. В теорії функційних рівнянь тотожність медіальності називається загальною бісеметрією, розв'язки якої для квазігруп подано в статті Я. Ацеля [4]. Для бінарних функцій вищих арностей розв'язки загального функційного рівняння медіальності розглянуто в праці В. Д. Білоусова [15].

Різними авторами в різний час піднімалися питання про вивчення тотожностей з точністю до певних еквівалентностей:

— рівносильність (Дж. Ацель [3], С. Крстіч [86], Т. Попович [96] та інші),
— парастрофна рівносильність (В. Білоусов [20], Ф. Сохацький [112], А. Крапєж [83], Д. Živкович [85], С. Сіміч [84], Р. Коваль [50] та інші),
— ізострофність (В. Білоусов [12], А. Чебан [133], А. Крапєж [79, 81], В. Дудек [33], К. Щукін [106] та інші) тощо.

Квадратичні тотожності розглядав А. Крапєж і низка інших співавторів [83], [85], [84]. Класифікацією узагальнених квадратичних функційних рівнянь малої довжини з точністю до парастрофної рівносильності займалася Р. Коваль [50, 51]. Вона дослідила, що загальних функційних рівнянь від двох різних предметних і двох різних функційних змінних є понад 12. А. Крапєж [79] описує, що узагальнених функційних рівнянь від двох різних предметних і двох різних функційних символів є 24 форми, які він поділяє на $\{1,2\}-$, $\{1,3\}-$ і $\{2,3\}$-послідовності з точністю до ізострофії, при цьому він надає одному із функційних символів значення константи.

Виходячи із застосування у криптографії, своєрідну класифікацію тотожностей типу $(m;2)$ на квазігрупах зробили С. Марковскі, В. Дімітрова та С. Самадярська [88]. Серед описаних ними класів тотожностей з точністю до ізоморфізму є мінімальні парастрофні тотожності типу $(2;2)$. Деяку класифікацію з точністю до рівносильності тотожностей типу $(2;2)$ зробила Т. Попович [96]. Вона описала множини пар ортогональних парастрофів для бінарних Т-квазігруп. Узагальнені парастрофні тотожності довжини два на квазігрупах з властивістю оборотності описали А. Д. Кідвел з В. О. Щербаковим [46]. Класифікація парастрофної комутативності з точністю до рівносильності була зроблена С. Стейном [124]. Його результати описує В. Білоусов [12], де наводить таблицю тотожностей не лише парастрофної комутативності, а й парастрофної асоціативності, парастрофної медіальності, парастрофної дистрибутивності, парастрофної тотожності I закону Стейна.

В. Д. Білоусов [17] відмітив, що загальні тотожності та функційні рівняння доцільно розглядати з точністю до парастрофної рівносильності. Використовуючи цей підхід, він дав повну класифікацію мінімальних тотожностей на квазігрупах [20]. Проте, вперше понятійний апарат для функційних рівнянь було розроблено Ф. Сохацьким [112], де також відмічено низку властивостей функційних рівнянь. Зокрема, він відмітив залежність між множинами розв'язків функційних рівнянь, в яких функційні змінні одного функційного рівняння є парастрофами іншого, тому запропонував розглядати функційні рівняння з точністю до парастрофної рівносильності. Завдяки цьому ним доведено, що кожне парастрофно-нескоротне загальне квадратичне рівняння від трьох предметних змінних прастрофно рівносильне загальному функційному рівнянню асоціативності, а від чотирьох предметних змінних парастрофно-рівносильне або загальному функційного рівнянню медіальності, або загальному функційному рівнянню псевдомедіальності. Р. Коваль [50] класифікує загальні квадратичні функційні рівняння від чотирьох предметних змінних, яке має хоча б одне самодостатнє підслово, і вказує, що таке рівняння парастрофно-рівносильне точно одному із 12 рівнянь. Цим самим вона завершує класифікацію всіх загальних квадратичних функційних рівнянь від n змінних $(n = 2, 3, 4)$ з точністю до парастрофної рівносильності. Крім того, встановлено, що кожне парастрофно-нескоротне квадратичне функційне рівняння від п'яти предметних змінних парастрофно-рівносильне принаймні одному із 4 функційних рівнянь. А. Крапєж з колегами [84], [85] завершує класифікацію квадратичних функційних рівнянь від п'яти предметних змінних і цим самим підтверджує методом побудови ізоморфних графів, що всі такі рівняння парастрофно-рівносильні точно одному із 4 функційних рівнянь. В [84] він дає, за допомогою ізоморфних графів, повну класифікацію квадратичних функційних рівнянь від шести предметних змінних і встановлює, що всі такі загальні квадратичні функційні рівняння парастрофно-рівносильні точно одному із 14 функційних рівнянь. Крім того він виводить загальну формулу обчислення кількості квадратичних функційних рівнянь від n предметних змінних.

В. Білоусов [13] підняв питання класифікації мінімальних тотожностей на квазігрупах. При цьому він не розглядав тотожності, які з його точки зору не викликають інтересу. Справді, він розглядав лише тотожності, які гарантують ортогональність парастрофів квазігрупи, в якій виконується така тотожність. Інші тотожності, які відкидав В. Білоусов, не завжди мають властивість ортогональності, проте вони досить часто зустрічаються і використовуються в теорії квазігруп. Тому питання, яке поставив В. Білоусов, було уточнене Ф. Сохацьким [112]. Як наслідок, Р. Коваль [50] розглядала загальні функційні рівняння на квазігрупах. Зокрема, вона класифікувала всі функційні рівняння типу $(3; 2)$, тобто як з квадратами, так і без квадратів. Всього таких класів виявилося точно три. Перший клас не містить квадратів, тобто підтермів виду $F(x; x)$. Парастрофні тотожності цього класу класифікував В. Білоусов на квазігрупах. В своїй теоремі він отримав дві тотожності Стейна, три тотожності Шредера та ще дві нових тотожності, які сьогодні ми називаємо законами Білоусова. Всього їх виявилося точно сім. Паралельно із В. Білоусовим над цим питання працював Т. Іванс [36], який встановлює, що таких класів 14, його результат спростовує Ф. Бенет [8] і встановлює, що їх 8. Проте, всього їх виявилося сім, як доведено у В. Білоусова. Цей результат підтверджується в даній роботі.

1.3. Функційні рівняння та тотожності

В підрозділі дано означення тотожності та функційного рівняння. Між цими двома поняттями є досить сильний зв’язок, аналогічно тому як між бінарними відношеннями та графами. Наприклад, бінарні відношення можна подати як графи і в деякій мірі навпаки: деякі види графів можна розглядати як бінарні відношення. Так само між функційними рівняннями та тотожностями є досить великий перетин.

Під поняттям тотожність насправді розуміють в одному випадку вислів мови першого порядку, в іншшому випадку – це пердикат мови другого порядку, а саме:

— ‘вислів’, наприклад, в множині дійсних чисел $(\mathbb{R};\cdot)$, істиною є така тотожність

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ \ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z); \tag{1.4}$$

— ‘предикат’, наприклад, клас квазігруп визначається такою тотожністю

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ \ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z), \tag{1.5}$$

тобто тотожність асоціативності для множення дійсних чисел – це вислів, а у твердженні “асоціативність визначає клас напівгруп”, теж в літературі вживається термін – ‘тотожність’, хоча насправді тут – це ‘предикат’. У випадку (1.4) символ $(\cdot)$ – то є функційна стала, а в випадку (1.5), символ $(\cdot)$ – то функційна змінна. Саме в другому випадку тотожність доцільно називати ‘функційним рівнянням’, а клас всіх напівгруп є класом всіх розв’язків функційного рівняння асоціативності. Слід розрізняти ці два поняття, тому збережемо назву ‘тотожність’ лише для (1.4), а (1.5) називатимемо ‘функційне рівняння’.

Для визначення функційного рівняння випишемо додаткові позначення та означення, які були введені в статті Ф. М. Сохацього [118].

Нехай Q — базова множина і нехай маємо такі позначення:

$\mathcal{Q} := \{a, b, c, a_1, \dots\}$ — множина фіксованих елементів із Q (предметні сталі, тобто константи);

$\mathcal{F} := \{f, g, h, f_1, f_2, \dots\}$ — множина функційних символів, які позначають одну і лише одну операцію, що визначена на Q (функційні сталі);

$\mathcal{X} := \{x, y, x_1, x_2, \dots\}$ — множина предметних змінних, які набувають значень в множині Q;

$\mathfrak{F} := \{F, F_1, F_1, \dots\}$ — множина функційних змінних, які набувають значень в множині функцій, що визначені на множині Q, причому функційна змінна арності n набуває значень лише серед n-місних функцій.

Означення терма:

1) кожна змінна із $\mathcal{X}$ і кожна константа із $\mathcal{Q}$ є термом;

2) якщо $f \in \mathcal{F}$ є n-арна функція, $F \in \mathfrak{F}$ є n-арна функційна змінна і $T_1, \ldots, T_n$ є термами, то $f(T_1, \ldots, T_n)$, $F(T_1, \ldots, T_n)$ є термами;

3) інших термів не існує.

Терм називається словом, якщо він не має жодної функційної змінної. Нехай T терм, тоді $[T]$ і $\langle T \rangle$ відповідно позначають множини всіх предметних і функційних змінних, які з'являються в записі терма T. Якщо терм має вид $F(x; x)$, то його називають квадратом.

Нехай $[T_1] \cup [T_2] := \{x_1, \ldots, x_n\}$ and $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\} \subseteq \langle T_1 \rangle \cup \langle T_2 \rangle$, тоді формула

$$(\forall F_1)(\forall F_2) \ldots (\forall F_k)(\forall x_1)(\forall x_2) \ldots (\forall x_n)(T_1 = T_2) \tag{1.6}$$

називається *універсальною (квантифікованою) рівністю*. Скрізь в дисертації позначатимемо таку рівність без кванторів.

Означення 1.3 (Ф. М. Сохацький [118, с. 81]). *Універсальна рівність (1.6) називається функційним рівнянням на Q, якщо вона має принаймні одну вільну функційну змінну, інакше вона називається:*

— тотожністю, якщо вона є висловом і цей вислів істинний;

— протиріччям, якщо цей вислів хибний.

Означення 1.4 (Ф. М. Сохацький [118, с. 81]). *Функційне рівняння називається чистим, якщо воно не має ні функційних, ні предметних сталих.*

Означення 1.5 (Ф. М. Сохацький [118, с. 81]). *Значення лексикографічної послідовності всіх вільних функційних змінних даного функційного рівняння називається його розв'язком, якщо рівняння стає тотожністю після підстановки компонентів розв'язку замість функційних змінних.*

Чисті функційні рівняння можна розглядати на кожній базовій множині та на кожному носієві воно має свою множину розв'язків. Отже, розв'язком чистого функційного рівняння є пара: носій і послідовність функцій, що визначена на базовій множині. Тому всі розв'язки функційного рівняння утворюють алгебру. Клас називається многовидом, якщо він описується тотожностями, тобто в цій термінології — клас є многовидом, якщо він є розв'язком чистого функційного рівняння.

Означення 1.6 (Ф. М. Сохацький [118, с. 81]). *Формула (1.6) називається універсальною квазігруповою рівністю, якщо і функційні змінні, і функційні сталі є квазігруповими операціями.*

Квазігрупові гіпертотожності досліджував Ю. Мовсісян [91]. Нова редакція означення та перелік всіх бінарних гіпертотожностей виписані Ф. М. Сохацьким [118].

Первинні квазігрупові гіпертотожності — це чисті квазігрупові тотожності (чисті функційні рівняння), які випливають із означення оборотних операцій та їх парастрофів. Для бінарного випадку ці тотожності такі:

$$\begin{array}{ll} {}^{\sigma}({}^{\tau}F) = {}^{\sigma\tau}F, & {}^{s}F(x,y) = F(y,x), \\ {}^{\ell}F(F(x,y),y) = x, & F({}^{\ell}F(x,y),y) = x, \\ {}^{r}F(x,F(x,y)) = y, & F(x,{}^{r}F(x,y)) = y, \\ {}^{s\ell}F(x,F(y,x)) = y, & F({}^{s\ell}F(x,y),x) = y, \\ {}^{sr}F(F(y,x),y) = x, & F(y,{}^{sr}F(x,y)) = x. \end{array} \tag{1.7}$$

Зауваження 1.1. *Зауважимо, що перейменувавши предметні змінні у функційному рівнянні, ми отримаємо різні формули, які є записами одного й того ж функційного рівняння, оскільки всі предметні змінні у цих формулах зв'язані кванторами загальності.*

Розв'язок функційного рівняння — це послідовність функцій (операцій), що визначені на множині, яка після підстановки замість функційних змінних їх значень із послідовності при лексикографічному порядку, перетворює дане рівняння в істинне висловлення. Лексикографічний порядок предметних змінних означає, що їх появи записуються відповідно до алфавітного порядку змінних.

Означення 1.7. *Кажуть, що два функційні рівняння рівносильні на носієві, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків на даному носієві. Два чистих функційних рівняння називають рівносильними, якщо вони рівносильні на кожному носієві, тобто якщо вони мають один і то й же многовид розв'язків.*

Слідуючи А. Саду [104], операцію назвемо діагональною, якщо $f(x;x)$ є підстановкою носія. Бінарну функційну змінну назвемо діагональною, якщо вона представляє діагональні операції.

Два функційні рівняння називаються парастрофно-первинно-рівносильними, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків:

1) застосування гіпертотожностей (1.7);

2) заміна сторін рівняння;

3) переіменування предметних змінних;

4) переіменування функційних змінних.

Означення 1.8 ([112]). *Два функційних рівняння називаються парастрофно-первинно-рівносильними, якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість застосувань таких парастрофно-первинних перетворень:*

1) перейменування предметних змінних;

2) перейменування функційних змінних;

3) перетворення за комутуванням: заміна підтерма виду $F(\omega, \upsilon)$ термом ${}^{s}F(\upsilon, \omega)$;

4) перетворення за зовнішнім діленням: перехід від рівності виду $F_1(\omega_1, \omega_2) = F_2(\upsilon_1, \upsilon_2)$ до рівності ${}^{r}F_1(\omega_1, F_2(\upsilon_1, \upsilon_2)) = \omega_2$;

5) перетворення за внутрішнім правим (лівим) діленням через змінну x: заміна підтерма $F(x, \omega)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^{r}F(x, \omega)$ (заміна підтерма $F(\omega, x)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^{\ell}F(\omega, x)$), якщо x не має появи в термі ω;

6) заміна частин рівняння: заміна рівняння $\omega = \upsilon$ на $\upsilon = \omega$.

Для скороченого запису парастрофно-первинну рівносильність позначатимемо знаком $\asymp$. Перетворення за комутуванням, внутрішнє ділення на підтерм через змінну та зовнішнє ділення на деякий підтерм називають парастрофно-первинними перетвореннями рівняння. Кажуть, що рівняння $\omega = \upsilon$ зводиться до рівняння $\omega^{'} = \upsilon^{'}$, якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість застосувань парастрофно-первинних перетворень 1)-6).

Лема 1.2 ([50]). *Кожне функційне рівняння зводиться комутуванням до рівняння, в якому довільне підслово* $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2$ *задовольняє умову* $|\upsilon_1| \leqslant |\upsilon_2|$, *а підслово* t_1t_2, *– умову* $t_1 \preccurlyeq t_2$, *де* t_1, t_2 *– предметні змінні.*

Два функційні рівняння називаються діагонально парастрофними, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків:

1) застосування надтотожностей (1.7);

2) заміна сторін рівняння;

3) переіменування предметних змінних;

4) переіменування функційних змінних

5) заміна підтерма $F(x;x)$ на підтерм $\delta_F(x)$, якщо F є діагональною функційною змінною і навпаки.

Лема 1.3 (Р. Коваль [50, с. 54]). *Множини предметних змінних первинно самодостатніх послідовностей підтермів не змінюються при первинних перетвореннях.*

Наслідок 1.1 (Р. Коваль [50, с. 54]). *Кількість (мінімальних) первинно самодостатніх підмножин предметних змінних функційного рівняння є інваріантною при первинних перетвореннях.*

Лема 1.4 (Р. Коваль [50, с. 54]). *Якщо узагальнені функційні рівняння* $\omega = \upsilon$ *і* $\omega^{'} = \upsilon^{'}$ *від* n *предметних змінних та* m *функційних змінних є парастрофно-первинно-рівносильними, то існують послідовність перестановок* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ *множини* $\{1, 2, 3\}$ *та* *перестановки* τ *множини* $\{1, \ldots, m\}$ *такі, що для довільної множини* Q *для довільного розв'язку* $(f_1, \ldots, f_m)$ *рівняння* $\omega = \upsilon$ *вибірка* $({}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}, \ldots, {}^{\sigma_{m\tau}}f_{m\tau})$ *є розв'язком рівняння* $\omega' = \upsilon'$.

Оскільки вивчаються функційні рівняння лише квазігрупові, то кожна предметна змінна має принаймні дві появи у рівнянні. Звідси випливає таке зауваження.

Твердження 1.1 (Р. Коваль [50, с. 54]). *Якщо функційне рівняння має лише одну появу однієї із незалежних предметних змінних і таке рівняння має розв'язок в множині квазігрупових операцій деякого носія, то носій є одноелементним.*

Згідно з цим твердженням, вважаємо, що у функційному рівнянні кожна незалежна предметна змінна має не менше двох появ. Якщо кожна незалежна предметна змінна має точно по дві появи у рівнянні, то таке рівняння називають квадратичним (вперше термін ввів А. Крапєж, як строго квадратичне [83]).

1.3.1. Рівняння від двох та трьох функційних змінних

Узагальнені функційні рівняння від двох функційних змінних на бінарних квазігрупах вивчали та розв'язували, виходячи із застосування, різні автори С. Крстич [86], А. Крапєж [78,83], В. Д. Білоусов [13,20], М. Тейлор, Р. Коваль [50], Ф. М. Сохацький [112] та інші. Зокрема, класифікацією таких рівнянь на квазігрупах займалися Р. Коваль [50] та А. Крапєж [78]. Вони вивчали лише квадратичні функційні рівняння. Р. Коваль в Теоремі 2.2.2 (стор. 20 [50]) дала повну класифікацію квадратичних узагальнених функційних рівнянь від двох функційних змінних з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та виписала відповідно множини розв'язків отриманих рівнянь (в її дисертації термін “парастрофно-первинна рівносильність” називається “парастрофна рівносильність”, а термін “узагальнене рівняння” називається “загальне рівняння”).

Теорема 1.1 (Р. Коваль [50, с. 20]). *Кожне загальне квадратичне функційне рівняння від двох предметних змінних парастрофно-рівносильне точно одному з рівнянь:*

$$F_1(x; x) = F_2(y; y), \tag{1.8}$$

$$F_1(x; y) = F_2(x; y) \tag{1.9}$$

і їх множини розв'язків відповідно дорівнюють:

$$\{(f_1; f_2) | unf_1 = unf_2\}, \qquad \{(f_1; f_2) | f_1 = f_2\}.$$

Обидва рівняння цієї теореми є квадратичними. Рівняння (1.8) — неврівноважене, (1.9) — врівноважене. А. Крапєж [78] підтвердив результати класифікації таких квадратичних рівнянь, використавши неізоморфні графи Крстича, а саме встановлено: якщо два 3-зв'язні мультиграфи Крстича з двома вершинами та трьома ребрами неізоморфні, то відповідні їм узагальнені функційні рівняння парастрофно-нерівносильні.

Розв'язування квадратичних врівноважених функційних рівнянь на різних множинах, в тому числі й на квазігрупах досліджував А. Крапєж [83]. Загальну формулу розв'язків квадратичних рівнянь (1.8) та (1.9) на квазігрупах у 2005 році запропонувала Р. Коваль [50]. У 2010 році А. Крапєж з іншими авторами у спільних працях отримали формулу загального розв'язку для будь-якого узагальненого квадратичного врівноваженого функційного рівняння [84, 85].

Крім класифікації та розв'язування функційних рівнянь від двох функційних змінних вивчали і кількість різних варіацій виглядів таких функційних рівнянь з деякими умовами. Наприклад, А. Крапєж [79] описує, що узагальнених функційних рівнянь від двох різних предметних і двох різних функційних символів є 24 форми, які він поділяє на $\{1, 2\}$-, $\{1, 3\}$- і $\{2, 3\}$-послідовності, при цьому надає одному із функційних символів значення константи. Квадратичні функційні рівняння від двох різних предметних і двох різних функційних змінних на квазігрупах досліджувала

Р. Коваль [50] і встановила, що їх є понад 12 рівнянь.

Узагальнені функційні рівняння від трьох функційних змінних досліджував В. Д. Білоусов [13, 20], зокрема він вивчав рівняння в термах яких немає квадратів і називав такі рівняння мінімальними нетривіальними тотожностями.

Теорема 1.2 (В. Білоусов [13, с. 7]). *Будь-яка мінімальна нетривіальна тотожність в квазігруповій алгебрі зводиться лише до одного вигляду:*

$$F_1(x; F_2(x; F_3(x; y)))) = y. \tag{1.10}$$

З огляду на ортогональність квазігруп, в зв'язку з комбінаторними питаннями, які виникли в результаті застосувань, В. Д. Білоусов почав інтуїтивно вивчати функційні рівняння, не визначаючи чітких понять та оначень. Питання, яке поставив Білоусов, було вдосконалене та уточнене Ф. М. Сохацьким [112]. Як наслідок, Р. Коваль [50] розглядала узагальнені функційні рівняння на квазігрупах, що мають три появи однієї предметної змінної та дві появи іншої предметної змінної. Всього таких класів узагальнених рівнянь виявилося три.

Теорема 1.3 (Р. Коваль [50, с. 56]). *Кожне загальне функційне рівняння, запис якого містить дві різні предметні і три функційні змінні, парастрофно-рівносильне точно одному з рівнянь:*

$$F_1(F_2(x; y); y) = F_3(x; y), \tag{1.11}$$

$$F_1(F_2(y; y); x) = F_3(x; y), \tag{1.12}$$

$$F_1(F_2(y; y); y) = F_3(x; x). \tag{1.13}$$

Крім цього Р. Коваль порахувала, що узагальнених функційних рівнянь від двох різних предметних змінних та трьох різних функційних змінних є понад 140.

1.3.2. Рівняння від чотирьох та п'яти функційних змінних

Узагальнені функційні рівняння від чотирьох функційних змінних та трьох предметних змінних досліджувала Р. Коваль [50] та систематизував А. Крапєж [82]. Парастрофно-первинну нерівносильність отриманих рівнянь Крапєж встановив за допомогою неізоморфних графів: функційні рівняння парастрофно-первинно рівносильні, якщо відповідні їм 3-зв'язні мультиграфи С. Крстича з чотирма вершинами та трьома ребрами ізоморфні. Всього таких рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності виявилося точно п'ять. Сформулюємо в термінах функційних рівнянь теорему отриману Р. Коваль та уточнену А. Крапєжем.

Теорема 1.4 (Р. Коваль [50, с. 20], А. Крапєж [82, с. 269])**.** *Кожне чисте узагальнене бінарне квазігрупове нетривіальне квадратичне функційне рівняння парастрофно-первинно рівносильне точно одному з рівнянь:*

$$F_1(F_2(x;y);z) = F_3(x;F_4(y;z)), \tag{1.14}$$

$$F_1(x;x) = F_2(F_3(y;y);F_4(z;z), \tag{1.15}$$

$$F_1(F_2(x;y);z) = F_3(F_4(x;y);z), \tag{1.16}$$

$$F_1(x;x) = F_2(F_3(y;z);F_4(y;z)), \tag{1.17}$$

$$F_1(x;x) = F_2(y;F_3(y;F_4(z;z))). \tag{1.18}$$

Перше рівняння є відомим узагальненим рівнянням асоціативності, його розв'язав В. Д. Білоусов [9]. Теорема про його розв'язки має назву "теорема про чотири квазігрупи", яка з повним доведенням опублікована в [4]. Деякі удосконалення в розв'язках отримав Ф. М. Сохацький [121]. Використовуючи методи теорії графів, рівняння (1.18) знайшов і розв'язав А. Крапєж [82]. Решту рівнянь (1.15)–(1.17) знайшла і розв'язала на множині бінаних квазігруп Р. Коваль [51].

Теорема про чотири квазігрупи в уточненому формулюванні, знайденому Ф. Сохацьким [121].

Теорема 1.5 (В. Білоусов [9]). *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— група та* α, β, γ, δ, ν *— перестановки множини* Q. *Тоді четвірка* $(g_1; g_2; g_3; g_4)$, *визначена рівностями*

$$\begin{aligned} g_1(t;z) &= \delta t\cdot\gamma z, \qquad g_2(x;y) = \delta^{-1}(\alpha x\cdot\beta y),\\ g_3(x;u) &= \alpha x\cdot\nu u, \qquad g_4(y;z) = \nu^{-1}(\beta y\cdot\gamma z), \end{aligned} \tag{1.19}$$

є квазігруповим розв'язком (1.14) *на* Q.

Навпаки, якщо четвірка операцій $(g_1; g_2; g_3; g_4)$ *є квазігруповим розв'язком* (1.14), *тоді для довільного елемента* $e \in Q$ *існує унікальна послідовність* $(\cdot;\alpha;\beta;\gamma;\delta;\nu)$ *оборотних операцій, визначених на* Q *таких, що* $(Q;\cdot)$ *— група з нейтральним елементом* e, $\delta e = \nu e = e$ *та рівності* (1.19) *істинні. В цьому випадку операції* $(\cdot)$, α, β, γ, δ, ν *можуть бути визначені таким чином:*

$$\begin{gathered} \delta x = g_1(x; {}^r g_1(e;e)), \quad \alpha x = g_3(x;e), \quad \nu x = g_3({}^\ell g_3(e;e);x)\\ \gamma x = g_1(e;x), \quad x\cdot y = g_1(\delta^{-1}(x);\gamma^{-1}(y)), \quad \beta x = \delta g_2({}^\ell g_3(e;e);x). \end{gathered} \tag{1.20}$$

Існування узагальнених функційні рівняння від чотирьох функційних змінних та двох різних функційних змінних встановила Р. Коваль [50]. Вона знайшла 13 таких рівнянь.

Теорема 1.6 (Р. Коваль [50, с. 58]). *Кожне неквадратичне функційне рівняння, запис якого містить дві різні предметні і чотири функційні змінні, парастрофно-рівносильне принаймні одному з рівнянь:*

$$F_1(F_2(x,y),F_3(x,y)) = F_4(y,y); \tag{1.21}$$

$$F_1(F_2(x,x),F_3(y,y)) = F_4(y,y); \tag{1.22}$$

$$F_1(F_2(x,x),F_3(x,y)) = F_4(y,y); \tag{1.23}$$

$$F_1(F_2(x,y),F_3(x,y)) = F_4(x,y); \tag{1.24}$$

$$F_1(F_2(y,y),y) = F_3(F_4(x,y),x); \tag{1.25}$$

$$F_1(F_2(x,x),x) = F_3(F_4(y,y),x); \tag{1.26}$$

$$F_1(F_2(y,y),y) = F_3(F_4(x,x),x); \tag{1.27}$$

$$F_1(F_2(y,y),x) = F_3(F_4(y,y),x); \tag{1.28}$$

$$F_1(F_2(y,y),x) = F_3(F_4(x,y),y); \tag{1.29}$$

$$F_1(F_2(x,y),x) = F_3(F_4(y,y),x); \tag{1.30}$$

$$F_1(F_2(x,x),y) = F_3(F_4(y,y),x); \tag{1.31}$$

$$F_1(F_2(x,y),y) = F_3(F_4(x,y),y); \tag{1.32}$$

$$F_1(F_2(x,y),x) = F_3(F_4(x,y),y). \tag{1.33}$$

Крім того, Р. Коваль [50] пораховано, що узагальнених функційних рівнянь від чотирьох різних функційних змінних та від двох різних предметних змінних є понад 1100, а від трьох різних предметних змінних є понад 1000.

В [119], а пізніше в [116] було встановлено, що кожне узагальнене дистрибутивно-подібне квазігрупове функційне рівняння без квадратів парастрофно-первинно-рівносильне принаймні одному з рівнянь

$$F_1(x;F_2(y;z)) = F_3(F_4(x;y);F_5(x;z)), \tag{1.34}$$

$$F_1(y;F_2(x;z)) = F_3(F_4(y;F_5(x;z));x), \tag{1.35}$$

$$F_1(F_2(x;y);y) = F_3(x;F_4(F_5(x;z);z)), \tag{1.36}$$

$$F_1(x;F_2(x;z) = F_3(F_4(F_5(x;y);y);z), \tag{1.37}$$

$$F_1(y;F_2(x;z)) = F_3(y;F_4(x;F_5(x;z))). \tag{1.38}$$

Перше рівняння є відомим рівнянням узагальненої дистрибутивності, часткові розв'язки його дано [18, 21, 34]. До сьогодні знайти всі розв'язки на множині квазігрупових операцій цього рівняння — це відома проблема.

Інші функційні рівняння, що є парастрофно-первинно-еквівалентними рівнянню (1.35), розв'язані Р. Коваль в [52].

Теорема 1.7 (Р. Коваль [52]). *П'ятірка* $(f_1,\ldots,f_5)$ *квазігрупових операцій, що визначені на довільній фіксованій множині* Q*, є розв'язком рівняння*

$$F_1(F_2(z;x);F_3(y;z)) = F_4(F_5(x;y);x) \tag{1.39}$$

тоді і тільки тоді, коли існує групова операція $(+)$ *та підстановки* α, β, γ, δ, μ *множини* Q *такі, що*

$$\begin{aligned} f_1(x;y) &= \alpha x + \gamma y, & f_2(x;y) &= \alpha^{-1}(\mu y - \beta x), \\ f_3(x;y) &= \gamma^{-1}(\beta y + \delta x), & f_5(x;y) &= {}^{\ell}f_4(\mu x + \delta y; y), \end{aligned} \tag{1.40}$$

для квазігрупової операції f_4 *ортогональної до групового ізотопу* $(\circ)$, *де* $x \circ y := \mu x + \delta y$.

1.4. Основний закон парастрофної симетрії

Нехай P довільне твердження в класі квазігруп $\mathfrak{A}$. Твердження ${}^{\sigma}P$ називаємо σ-парастрофом твердження P, якщо його можна отримати з P заміною кожного парастрофа $(\overset{\tau}{\cdot})$ на $(\overset{\tau\sigma^{-1}}{\cdot})$; де ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ позначає клас всіх σ-парастрофів квазігруп з класу $\mathfrak{A}$. Основний закон симетрії формулюється в такій теоремі:

Теорема 1.8 (Ф. Сохацький [118]). *Нехай* $\mathfrak{A}$ *– клас квазігруп. Твердження* P *істинне в* $\mathfrak{A}$ *тоді і тільки тоді, коли* ${}^{\sigma}P$ *істинне в* ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$.

З основного закону парастрофної симетрії випливає низка наслідків.

Наслідок 1.2 (Ф. Сохацький [118]). *Нехай* P *істинне в класі квазігруп* $\mathfrak{A}$, *тоді для всіх* $\sigma \in \mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$ *в цьому ж класі буде істине твердження* ${}^{\sigma}P$.

Наслідок 1.3 (Ф. Сохацький [118]). *В тотально-симетричному класі квазігруп разом з довільним твердженням істинний довільний парастроф цього твердження.*

Прикладами тотально-симетричних класів є многовид дистрибутивних квазігруп, многовид всіх квазігруп, многовид ідемпотентних квазігруп, многовид уніпотентних луп тощо. Серед довільних тверджень найпоширенішим є тотожність, тому для тотожності маємо такий наслідок.

Наслідок 1.4 (Ф. Сохацький [118]). *Тотожність* $\omega = \upsilon$ *визначає многовид квазігруп* $\mathfrak{A}$, *тоді і тільки тоді, коли* σ*-парастроф* ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ *цієї тотожності визначає многовид* ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, *де* $\sigma \in S_3$.

Зауважимо, що тотожність ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ отримується з тотожності $\omega = \upsilon$ заміною довільного парастрофа $(\overset{\tau}{\cdot})$ на $(\overset{\tau\sigma^{-1}}{\cdot})$. Наприклад, $s\ell$-парастрофом тотожності $xy \cdot y = x$ є тотожність $(x \overset{sr}{\cdot} y) \overset{sr}{\cdot} y = x$, оскільки $(s\ell)^{-1} = sr$. Отриману тотожність запишемо у вигляді $(x \ {}^{s}(\overset{r}{\cdot})\ y) \ {}^{s}(\overset{r}{\cdot})\ y = x$. Але з означення s-парастрофа випливає, що $t_1 \overset{s}{\cdot} t_2 = t_2 \cdot t_1$ для довільних термів t_1, t_2. Тому маємо рівносильну їй тотожність $y \overset{r}{\cdot} (y \overset{r}{\cdot} x) = x$. Скориставшись означенням r-парастрофа, маємо $y \cdot x = y \overset{r}{\cdot} x$. Знову застосуємо означення r-парастрофа: $x = y \cdot yx$. Отже, клас ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ є многовидом, який визначається тотожністю $y \cdot yx = x$.

Зауважимо, що має місце такий наслідок.

Наслідок 1.5. *Тотожність* ${}^{\tau}({}^{\sigma}(\omega = \upsilon))$ *рівносильна тотожності* ${}^{\tau\sigma}(\omega = \upsilon)$*, де* $\sigma, \tau \in S_3$.

Клас усіх квазігруп покритий шістьма класами: класом всіх асиметричних квазігруп і п'ятьма многовидами квазігруп (комутативних, лівосиметричних, правосиметричних, напівсиметричних і тотально-симетричних). Кожен з цих класів характеризується групою симетрії його квазігрупи.

Будемо говорити, що *квазігрупа має властивість симетрії*, якщо вона задовольняє одній з таких властивостей симетрії: комутативність, симетрію зліва, симетрію справа, напівсиметрію або тотальну симетрію.

Якщо всі парастрофи оборотної функції збігаються, то функція називається *TS-квазігрупою.* Двомісна оборотна функція називається *ідемпотентною*, якщо для довільного елемента x виконується тотожність

$$x^2 = x. \tag{1.41}$$

Ідемпотентні TS-квазігрупи називають *квазігрупами Штейнера*. *Лупою* називають квазігрупу з одиничним елементом. *Лупа Штейнера* – це TS-квазігрупа з одиницею, парастрофи якої рівні між собою.

Елемент e квазігрупи $(Q; f)$ називається односторонньо нейтральним, якщо в $(Q; f)$ виконується принаймні одна із тотожностей

$$f(e, x) = x, \qquad f(x, e) = x, \qquad f(x, x) = e.$$

Із твердження 6 із [118] випливає такий наслідок.

Лема 1.5. *Якщо елемент квазігрупи односторонньо нейтральний, то він є односторонньо нейтральним в довільному парастрофі цієї квазігрупи.*

Теорема 1.9 (Ф. М. Сохацький [76, Теорема 1])**.** *Якщо квазігрупа має квазігрупову ортогональну пару, то кожен з її парастрофів має квазігрупову ортогональну пару.*

З цієї теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1.6. *Властивість 'мати ортогональну пару' є інваріантною при парастрофії.*

Приклад 1.1. *Побудуємо квазігрупу $(Q; \circ)$ на множині з п'яти елементів $Q := 0, 1, 2, 3, 4$, яка не має ортогональної пари. Для цього використовуємо формулу Я. Ванлеса [132] (див. також [47, с.120]):*

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & if\,(i,j) = (0,0)\ or\ (1,4) \\ 0 & if\,(i,j) = (1,0)\ or\ (2,4) \\ j+2 & if\, i = 0\ and\ j = \{1,3\} \\ j & if\, i = 2\ and\ j = \{1,3\} \\ i+j & otherwise \end{cases}$$

Побудована квазігрупа $(Q; \circ)$ через латинський квадрат має вигляд:

$(\circ)$	0	1	2	3	4
0	1	3	2	0	4
1	0	2	3	4	1
2	2	1	4	3	0
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$(\cdot)$	0	1	2	3	4
0	4	2	1	0	3
1	1	3	0	4	2
2	0	4	2	3	1
3	2	0	3	1	4
4	3	1	4	2	0

.

Використовуючи перестановку $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ стовбців, отримаємо таку квазігрупу $(Q; \cdot)$, яка є діагональною і не має ортогональної пари, тому що вона є ізотопом до $(Q; \circ)$ (див. також [137]).

Формула Я. Ванлеса має на увазі, що входження 0 *з пари* $(1,0)$ *не входить до жодної трансверсалі квазігрупи* $(Q;\circ)$. *Отже, входження* 0 *з пари* $(1,2)$ *не належить жодній з трансверсалей квазігрупи* $(Q;\cdot)$. *Саме тому* $(Q;\circ)$ *не має ортогональної квазігрупової пари.*

1.4.1. Класифікація квазігруп за групами симетрій

Нехай квазігрупа задана, як алгебра $(Q;\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot})$. Операція $(\cdot)$ називається головною, а $(\overset{\ell}{\cdot})$ та $(\overset{r}{\cdot})$ — відповідно лівим та правим діленням операції $(\cdot)$. Ці операції та дуальні до них, які визначаються тотожностями

$$x\overset{s}{\cdot}y := y\cdot x,\qquad x\overset{s\ell}{\cdot}y := y\overset{\ell}{\cdot}x,\qquad x\overset{sr}{\cdot}y := y\overset{r}{\cdot}x \tag{1.42}$$

називаються *парастрофами (спряженнями)* операції $(\cdot)$ і визначаючі тотожності *первинними.*

Використовуючи означення лівого, правого ділень та комутування, маємо такі позначення:

$$\text{якщо}\quad x\overset{\ell}{\cdot}y = z,\quad\text{то}\quad zy = x; \tag{1.43}$$

$$\text{якщо}\quad x\overset{r}{\cdot}y = z,\quad\text{то}\quad xz = y; \tag{1.44}$$

$$\text{якщо}\quad x\overset{s\ell}{\cdot}y = z,\quad\text{то}\quad zx = y; \tag{1.45}$$

$$\text{якщо}\quad x\overset{sr}{\cdot}y = z,\quad\text{то}\quad yz = x. \tag{1.46}$$

Співвідношення (1.42) встановлюють взаємнооднозначну відповідність між тотожностями сигнатури $(\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot})$ і тотожностями сигнатури $(\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot},\overset{s}{\cdot},\overset{s\ell}{\cdot},\overset{sr}{\cdot})$. В цій роботі вивчаються тотожності на квазігрупах сигнатури $(\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot},\overset{s}{\cdot},\overset{s\ell}{\cdot},\overset{sr}{\cdot})$. Всі тотожності операції $(\cdot)$ можуть визначатися за формулою:

$$x_{1\sigma}\overset{\sigma}{\cdot}x_{2\sigma} = x_{3\sigma} :\Leftrightarrow\ x_1\cdot x_2 = x_3,$$

де $\sigma\in S_3 := \{\iota,\ell,r,s,s\ell,sr\}$, $s := (12)$, $\ell := (13)$, $r := (23)$. Очевидно, що

$$^{\sigma}\Big(\overset{\tau}{\cdot}\Big) = \Big(\overset{\sigma\tau}{\cdot}\Big)$$

виконується для всіх $\sigma,\tau\in S_3$. З цієї рівності випливає, що відображення $(\sigma;(\cdot))\ \mapsto\ (\overset{\sigma}{\cdot})$ є дією групи S_3 на множині всіх квазігрупових операцій множини Q. Стабілізатор $\mathrm{Ps}(\cdot)$ цієї дії називається *парастрофною симетрією* операції $(\cdot)$ [118], тому $6/|\mathrm{Ps}(\cdot)|$ є кількістю різних парастрофів операції $(\cdot)$. Оскільки $\mathrm{Ps}(\cdot)$ є підгрупою симетричної групи S_3, то існує шість класів квазігруп.

Квазігрупа називається:
— *асиметричною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) = \{\iota\}$, тобто, всі парастрофи попарно різні;
— *комутативною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, s\}$, тобто, клас всіх комутативних квазігруп описується тотожністю

$$xy = yx, \tag{1.47}$$

це означає, що $(\cdot) = (\overset{s}{\cdot})$, $(\overset{\ell}{\cdot}) = (\overset{sr}{\cdot})$, $(\overset{r}{\cdot}) = (\overset{s\ell}{\cdot})$;
— лівосиметричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, r\}$, тобто, клас всіх лівосиметричних квазігруп описується тотожністю

$$x \cdot xy = y, \tag{1.48}$$

це означає, що $(\cdot) = (\overset{r}{\cdot})$, $(\overset{s}{\cdot}) = (\overset{\ell}{\cdot})$, $(\overset{s\ell}{\cdot}) = (\overset{sr}{\cdot})$;
— правосиметричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, \ell\}$, тобто, клас всіх правосиметричних квазігруп описується тотожністю

$$xy \cdot y = x, \tag{1.49}$$

це означає, що $(\cdot) = (\overset{\ell}{\cdot})$, $(\overset{s}{\cdot}) = (\overset{r}{\cdot})$, $(\overset{sr}{\cdot}) = (\overset{s\ell}{\cdot})$;
— напівсиметричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq A_3$, тобто, клас всіх напівсиметричних квазігруп описується тотожністю

$$xy \cdot x = y, \tag{1.50}$$

це означає, що

$$(\cdot) = (\overset{s\ell}{\cdot}) = (\overset{sr}{\cdot}), \quad (\overset{s}{\cdot}) = (\overset{\ell}{\cdot}) = (\overset{r}{\cdot}); \tag{1.51}$$

— тотально-симетричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) = S_3$, тобто, клас всіх тотально-симетричних квазігруп описується тотожностями (1.47) і (1.49), це означає, що всі парастрофи збігаються.

Аналогічно вводиться парастрофна симетрія для многовидів квазігруп [118]. Многовид ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, який складається з усіх σ-парастрофів квазігруп із $\mathfrak{A}$, називається *σ-парастрофом многовида* $\mathfrak{A}$. Пучком многовидів називається множина всіх попарно парастрофних між собою многовидів. Група парастрофних симетрій многовида $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) := \{\sigma \mid {}^{\sigma}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\}$ є пігрупою групи S_3. Многовид називається:

— тотально-симетричним, якщо $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) = S_3$;

— напівсиметричним, якщо $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) = A_3$;

— односторонньо-симетричним, якщо $|\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})| = 2$;

— асиметричним, якщо $|\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})| = 1$.

Пучком многовидів називається множина всіх попарно парастрофних між собою многовидів. Пучок многовидів називаємо: *тотально-симетричним*, якщо він має один многовид; *напівсиметричним*, якщо він має 2 многовиди; *односторонньо-симетричним*, якщо він має 3 многовиди; *асиметричним*, якщо він має 6 многовидів.

1.4.2. Відомі парастрофні тотожності

Означення 1.9. *Перехід від тотожності* $\mathfrak{id}$ *до тотожності* ${}^{\sigma}\mathfrak{id}$ *називається парастрофним перетворенням (σ-парастрофним перетворенням), якщо її можна отримати заміною головної операції на її σ^{-1}-парастроф.*

Перетворення від тотожності $\mathfrak{id}$ до тотожності $\mathfrak{id}'$ з використанням первинних тотожностей (1.2)–(1.42) називається первинним перетворенням в статті Ф. Сохацького [112] раніше вживався термін “парастрофне” перетворення.

Дві тотожності називаємо:

— рівносильними, якщо вони визначають один і той самий многовид;

— первинно-рівносильними, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою скінченної кількості застосувань первинних тотожностей (1.2)–(1.42) (первинно-рівносильні тотожності є рівносильними);

— σ-парастрофними, якщо одну з іншої можна отримати за допомогою σ-парастрофних перетворень;

— σ-парастрофно-рівносильними, якщо вони визначають σ-парастрофні многовиди (згідно р теоремою 1.8, σ-парастрофно-рівносильні тотожності визначають σ-парастрофні многовиди);

— σ-парастрофно-первинно-рівносильними, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою скінченної кількості застосувань первинних тотожностей (1.2)–(1.42) і σ_1-, σ_2-, ..., σ_k-парастрофних перетворень, таких що $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k = \sigma$ для деяких $k \in \mathbb{N}$.

В загальному випадку σ будемо опускати. Наприклад, дві тотожності називаємо парастрофно-рівносильними, якщо вони σ-парастрофно-рівносильні для деяких $\sigma \in S_3$.

Тотожності, які виконуються в ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ Ш. Стейн називає спряженими [124], А. Сад — парастрофними [101].

В. Д. Білоусов [13] вивчав тотожності, які гарантують ортогональність парастрофів квазігрупи. Ідею пошуку парастрофних тотожностей запропонував А. Сад [104], його методом скористався Ш. Стейн [124] і отримав деякі парастрофні тотожності для одного пучка многовидів, зокрема таких як асоціативність, ідемпотентність, медіальність, комутативність і тотожність Стейна (I закон Стейна). В. Білоусов [12] описує отримані результати Стейна і подає в табл. 1.1. Множини парастрофів квазігруп для тотожностей з класу комутативності виписала Т. Попович [96] з Г. Білявською [23].

Таблиця 1.1

Пучки різних многовидів квазігруп

	Ідемпотентність	*Комутативність*	*Перший закон Стейна*	*Асоціативність*	*Медіальність*
$\mathfrak{A}$	$xx = x$	$xy = yx$	$x \cdot xy = yx$	$xy \cdot z = x \cdot yz$	$xy \cdot uv = xu \cdot yv$
${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$y \cdot yx = x$	$x(y \cdot yx) = yx$	$yx \cdot zx = yz$	$\mathfrak{A}$
${}^{r}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yx \cdot x = y$	$(x \cdot xy)y) = x$	$xy \cdot xz = yz$	$\mathfrak{A}$
${}^{s}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yx \cdot x = xy$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$(xy \cdot y)x = xy$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	$y(yx \cdot x) = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$

В таблиці, яку сформував В. Білоусов [12], є ще дві парастрофні тотожності — ліва дистрибутивність та двостороння дистрибутивність. Парастрофні тотожності двосторонньої дистрибутивності В. Білоусов описав у [12]. В його таблиці у рядку лівої дистрибутивності залишилися пустими клітинки для ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ та для ${}^{sr}\mathfrak{A}$, оскільки для нього було невідомим існування тотожностей з відповідними операціями. Ф. Сохацький в [122] вводить поняття середньої дистрибутивності і заповнює пропущені клітинки. Разом з результатами Білоусова [12] та Сохацького [122] формуємо пучок парастрофних многовидів дистрибутивних квазігруп, які записані в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

В'язка дистрибутивних квазігруп

	Двостороння дистрибутивність	*Ліва дистрибутивність*
$\mathfrak{A}$	$x\cdot yz = xy\cdot xz, \quad yz\cdot x = yx\cdot zx$	$x\cdot yz = xy\cdot xz$
${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$x \overset{\ell}{\cdot} yz = (x \overset{\ell}{\cdot} y)\cdot(x \overset{\ell}{\cdot} z)$
${}^{r}\mathfrak{D}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
${}^{s}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yz\cdot x = yx\cdot zx$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yz \overset{r}{\cdot} x = (y \overset{r}{\cdot} x)\cdot(z \overset{r}{\cdot} x)$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A}$

Таблиця 1.3.

В'язка многовидів луп

Многовиди односторонніх луп	$\mathfrak{L}\ (= {}^{r}\mathfrak{L})$	${}^{s}\mathfrak{L}\ (= {}^{sr}\mathfrak{L})$	${}^{\ell}\mathfrak{L}\ (= {}^{s\ell}\mathfrak{L})$
	1-лупи, тобто ліві лупи	2-лупи, тобто праві лупи	3-лупи, тобто середні лупи
	$x \overset{\ell}{\cdot} x = y \overset{\ell}{\cdot} y$	$x \overset{r}{\cdot} x = y \overset{r}{\cdot} y$	$x\cdot x = y\cdot y$
Многовиди двосторонніх луп	$\mathfrak{L}\cap{}^{s}\mathfrak{L}$	$\mathfrak{L}\cap{}^{\ell}\mathfrak{L}$	${}^{s}\mathfrak{L}\cap{}^{\ell}\mathfrak{L}$
	12-лупи, тобто ліво-праві лупи	13-лупи, тобто ліво-середні лупи	23-лупи, тобто право-середні лупи
	$x \overset{\ell}{\cdot} x = y \overset{r}{\cdot} y$	$x \overset{\ell}{\cdot} x = y\cdot y$	$x \overset{r}{\cdot} x = y\cdot y$
Многовиди тристоронніх луп	$\mathfrak{L}\cap{}^{s}\mathfrak{L}\cap{}^{\ell}\mathfrak{L}$		
	тотальні лупи, тобто уніпотентні лупи		
	$x^2y = y,\ \ yx^2 = y$		

1.5. Ізотопи та ізотопне замикання

Однією із задач є вивчення та описання напівсиметричного ізотопного замикання деяких групових многовидів. Необхідні та достатні умови для того, щоб групові ізотопи були напівсиметричними, добре відомі.

Наприклад, Ф. Радо [97] знайшов необхідні та достатні умови існування напівсиметричних групових ізотопів простих порядків. У статті [56] встановлено критерій напівсиметричності групових ізотопів, а в статті [128] наведено многовид ізотопів абелевої групи, що містить напівсиметричні медіальні квазігрупи. І. М. Х.Етерінгтон [35] і А. Сад [99] показали, що кожний напівсиметричний групоїд обов'язково є напівсиметричною квазігрупою. В. Ілієв [42] вивчав побудову напівсиметричних алгебр над комутативним кільцем з одиницею. В. Білоусов [16] знайшов квадратичну тотожність з п'ятьма змінними, що описує ізотопне замикання всіх груп. Ф. Сохацький [114] встановив тотожність з чотирма змінними, що також описує цей многовид, але його тотожність не є квадратичною. Ізотопне замикання деяких многовидів груп вивчалося Г. Білявською [22], А. Драпалом [31, 32], А. Х. Табаровим [126, 127].

Нагадаємо основні поняття та твердження щодо ізотопії.

Групоїд $(Q;\cdot)$ називається *ізотопом групоїда* $(Q;+)$, якщо існує трійка біекцій (α,β,γ), яка називається *ізотопізмом* така, що виконується відношення $x\cdot y := \gamma^{-1}(\alpha x+\beta y)$. Ізотоп групи називається а *груповим ізотопом.*

Підстановка α множини Q називається *унітарною* групи $(Q;+)$, якщо $\alpha(0)=0$, де 0 є нейтральним елементом групи $(Q;+)$.

Означення 1.10 ([114]). *Нехай $(Q;\cdot)$ — груповий ізотоп і 0 — довільний елемент із Q, тоді права частина формули*

$$x\cdot y=\alpha x+a+\beta y \tag{1.52}$$

називається 0-канонічним розкладом, якщо $(Q;+)$ є група, 0 є її нейтральний елемент і α, β є унітарними підстановками групи $(Q;+)$.

В цьому випадку ми говоримо: елемент 0 визначає *канонічний розклад*; $(Q;+)$ — його *група розкладу*; α, β — його *коефіцієнти* і a є його *вільним елементом.*

Теорема 1.10 ([114]). *Довільний елемент групового ізотопу* *однозначно визначає його канонічний розклад.*

Наслідок 1.7 ([113]). *Якщо груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ задовольняє тотожність*

$$w_1(x)\cdot w_2(y) = w_3(y)\cdot w_4(x)$$

і змінні x, y є квадратичними, тоді $(Q;\cdot)$ ізотопний комутативній групі.

Якщо квазігрупа $(Q;\cdot)$ ізотопна парастрофу квазігрупи $(Q;\circ)$, то $(Q;\cdot)$ і $(Q;\circ)$ називаються *ізострофними.*

Подана нижче теорема 1.11 та її наслідок 1.8 добре відомі і можуть бути знайдені в багатьох статтях, наприклад, в [11], [135], [114, 115].

Теорема 1.11. *Трійка (α,β,γ) підстановок множини Q є автотопізмом групи $(Q,+)$ тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм θ групи $(Q,+)$ та елементи $b,c\in Q$ такі, що*

$$\alpha = L_c R_{b^{-1}}\theta,\quad \beta = L_b\theta,\quad \gamma = L_c\theta.$$

Наслідок 1.8. *Нехай α, β_1, β_2, β_3, β_4 підстановки множини Q, крім того α є унітарне перетворення групи $(Q,+)$ і нехай*

$$\alpha(\beta_1 x + \beta_2 y) = \beta_3 u + \beta_4 v,$$

де $\{x,y\} = \{u,v\}$ виконується для всіх $x,y\in Q$. Тоді істинними є такі твердження:

1) – α є довільний автоморфізм групи $(Q,+)$, якщо $u = x,\ v = y$;

2) – α є довільний антиавтоморфізм групи $(Q,+)$, якщо $u = y,\ v = x$.

Наслідок 1.9. *(1.52) є канонічним розкладом групи тоді і тільки тоді, коли має місце рівність $\alpha=\beta=\iota$.*

Доведення. Нехай (1.52) є канонічним розкладом групи $(Q;\cdot)$. Тоді групи $(Q;+)$ і $(Q;\cdot)$ є ізотопними, оскільки вони є ізоморфними і нехай φ є відповідний їм ізоморфізм. Тоді виконується

$$\varphi(\varphi^{-1}x + \varphi^{-1}y) = \alpha x + a + \beta y$$

Теорема 1.11 спричинює існування автоморфізму θ і елемента b з $(Q;+)$ таких, що $\varphi x = b + \theta x$. Тому виконується $x - b + y = \alpha x + a + \beta$. Ліва і права сторона цієї рівності є канонічним розкладом деякого групового ізотопу, який передбачає $\alpha = \beta = \iota$. □

Теорема 1.12 ([112]). *Нехай чотири попарних ізострофних операції, зв'язані квадратичною тотожністю, задовольняють такі умови:*

1) – довільний підтерм довжини два має дві різні змінні;

2) – довільний підтерм довжини три має три різні змінні.

Тоді всі ці операції ізотопні деякій групі.

З теореми В. Д. Білоусова про чотири квазігрупи [4], [9], [121] випливає такий наслідок.

Наслідок 1.10. *Якщо чотири квазігрупи з'єднані узагальненим законом асоціативності, то кожна з цих квазігруп ізотопна до однієї й тієї деякої групи.*

Квазігрупа є *лінійною* [16], якщо існує група $(Q;+)$, її автоморфізми φ, ψ, довільний елемент c такі, що для всіх $x, y \in Q$

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y.$$

Т. Кепка, П. Нємєц [44, 45] ввели поняття T-квазігрупи і вивчали їх властивості, а саме, клас всіх T-квазігруп є многовидом. T-квазігрупи називають також *центральними* квазігрупами. Центральні квазігрупи також є точно абелевими квазігрупами в сенсі універсальних алгебр. $T/!$-квазігрупа є лінійним ізотопом абелевої групи. Згідно з теоремою Брака-Тойоди [24, 130], вони є медіальними тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти канонічного розкладу комутують. *Медіальна квазігрупа* [11] квазігрупа, яка визначається тотожністю

$$xy \cdot uv = xu \cdot yv.$$

Наслідок 1.11 ([114]). *Ізотопне замикання многовида всіх груп є многовидом квазігруп, який описується такою тотожністю:*

$$(x(u \overset{r}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} u)z = x(u \overset{r}{\cdot} (y \overset{\ell}{\cdot} u)z). \tag{1.53}$$

РОЗДІЛ 2

ДЕЯКІ КЛАСИ КВАЗІГРУП ЗА ГРУПАМИ СИМЕТРІЙ

В цьому розділі описано деякі класи квазігруп, враховуючи закон парастрофної симетрії. Знайдено напівсиметричне ізотопне замикання Булевих груп та довільних груп; встановлено рівносильні та парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають клас напівсиметричного ізотопного замикання груп; показано ланцюг включення многовидів напівсиметричних ізотопів.

2.1. Класифікація ізотопів груп за групами їх симетрій

Необхідні та достатні умови для комутативного, лівосиметричного та правосиметричного групових ізотопів знайдені О. Кирнасовським [48]. Критерії існування для тотально-симетричного групового ізотопу описані Ф. М. Сохацьким [117], критерії напівсиметричності та асиметричності для групових ізотопів знайдені автором в [71]. Підсумковою є така теорема про класифікацію всіх групових ізотопів за групами їх симетрій.

Теорема 2.1. *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— груповий ізотоп і (1.52) його канонічний розклад, тоді*
1) $(Q;\cdot)$ *є комутативним тоді і тільки тоді, коли* $(Q;+)$ *є абелевою і* $\beta=\alpha$*;*
2) $(Q;\cdot)$ *є правосиметричним тоді і тільки тоді, коли* $(Q;+)$ *є абелевою і* $\alpha=-\iota$*;*
3) $(Q;\cdot)$ *є лівосиметричним тоді і тільки тоді, коли* $(Q;+)$ *є абелевою і* $\beta=-\iota$*;*
4) $(Q;\cdot)$ *є тотально-симетричним тоді і тільки тоді, коли* $(Q;+)$ *є абелевою і* $\alpha=\beta=-\iota$*;*
5) $(Q;\cdot)$ *є напівсиметричним тоді і тільки тоді, коли* α *є*

антиавтоморфізмом групи $(Q;+)$, $\beta=\alpha^{-1}$, $\alpha^3=-I_a^{-1}$, $\alpha a=-a$, *де* $I_a(x):=-a+x+a$;

6) $(Q;\cdot)$ *є асиметричним тоді і тільки тоді, коли* $(Q;+)$ *є неабелевою або* $-\iota\neq\alpha\neq\beta\neq-\iota$ *і принаймні одна з таких умов є істинною:* α *не є антиавтоморфізмом,* $\beta\neq\alpha^{-1}$, $\alpha^3\neq-I_a^{-1}$, $\alpha a\neq-a$.

Доведення. *1)* Нехай груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ комутативний, тобто виконується тотожність (1.47). Користуючись канонічним розкладом (1.52), маємо $\alpha x+a+\beta y=\alpha y+a+\beta x$. Наслідок 1.7 спричинює комутативність групи $(Q;+)$. Якщо $x=0$, отримуємо $\alpha=\beta$.

Навпаки, нехай $(Q;+)$ комутативна група і $\beta=\alpha$, тоді

$$x\cdot y=\alpha x+a+\alpha y=\alpha y+a+\alpha x=y\cdot x.$$

Отже, $(Q;\cdot)$ є комутативною квазігрупою.

2) Нехай груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ правосиметричний, тобто виконується тотожність (1.49). Користуючись канонічним розкладом (1.52), маємо

$$\alpha(\alpha x+a+\beta y)+a+\beta y=x.$$

Замінюючи $a+\beta y$ на y, отримуємо $\alpha(\alpha x+y)=x-y$. З наслідку 1.8 випливає, що α є автоморфізмом. Якщо $x=0$, то маємо $\alpha y=-y$, тобто $\alpha=-\iota$. Позаяк α є автоморфізмом і антиавтоморфізм одночасно, то група $(Q;+)$ комутативна.

Навпаки, припустимо, що умова *2)* виконується, тоді $(Q;\cdot)$ є правосиметричною квазігрупою. Справді,

$$xy\cdot y=-(-x+\beta y)+\beta y=x-\beta y+\beta y=x.$$

Доведення співвідношень *3)* аналогічне до доведення співвідношень *2)*. Умова *4)* випливає з *2)* та *3)*.

5) Нехай груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ напівсиметричний, тобто виконується тотожність (1.50). Розглянемо тотожність (2.4), яка згідно з наслідком 2.11 рівносильна (1.50). Користуючись (1.52), маємо для тотожності (2.4) $\alpha x+a+\beta(\alpha y+a+\beta x)=y$, звідси, $\beta(\alpha y+a+\beta x)=-a-\alpha x+y$.

Наслідок 1.8 спричинює антиавтоморфізм підстановки β групи $(Q;+)$, тому користуючись цим маємо

$$\beta^2x + \beta a + \beta\alpha y = -a - \alpha x + y. \tag{2.1}$$

Коли $x = y = 0$, отримуємо $\beta a = -a$ і коли $x = 0$, маємо $\beta\alpha = \iota$, тобто $\beta = \alpha^{-1}$. Підставимо отримані співвідношення в (2.1):

$$\alpha^{-2}x - a + y = -a - \alpha x + y.$$

Скорочуючи на y справа і замінюючи x на α^2x, маємо $x - a = -a - \alpha^3x$, звідки $-\alpha^3x = a + x - a$ тобто $\alpha^3 = -I_a^{-1}$.

Навпаки, припустимо виконання умов *5)*. Квазігрупа $(Q;\cdot)$, яка визначена рівністю $x \cdot y := \alpha x + a + \alpha^{-1}y$ є напівсиметричною. Справді, перевіримо виконання тотожності (2.4)

$$x \cdot yx = \alpha x + a + \alpha^{-1}(\alpha y + a + \alpha^{-1}x).$$

Оскільки α є антиавтоморфізмом групи $(Q;\cdot)$, то

$$x \cdot yx = \alpha x + a + \alpha^{-2}x + \alpha^{-1}a + y.$$

$\alpha^3 = -I_a^{-1}$ спричинює $a + \alpha^{-2}x = -\alpha x + a$, тому,

$$x \cdot yx = \alpha x - \alpha x + a + \alpha^{-1}a + y = a + \alpha^{-1}a + y.$$

Позаяк $\alpha^{-1}a = -a$, то $x \cdot yx = y$. Таким чином, $(Q;\cdot)$ є напівсиметричною.

6) Асиметричність групового ізотопа означає, що він не є ні комутативним, ні лівосиметричним, ні правосиметричним, ні напівсиметричним. Це означає, що всі умови *1)–6)* цієї теореми хибні. Хибність *1)* спричинює хибність *4)*. Хибність *5)* рівносильна виконанню принаймні однієї з умов: α не є антиавтоморфізмом, $\beta \neq \alpha^{-1}$, $\alpha^3 \neq -I_a^{-1}$, $\alpha(a) \neq -a$. Хибність *1)*, *2)*, *3)* означає, що $(Q;+)$ є некомутативною або кожна з нерівностей $\beta \neq \alpha$, $\beta \neq -\iota$, $\alpha \neq -\iota$ істинна. Таким чином, *6)* доведено. $\square$

З теореми 2.1 можна отримати наслідок для класифікації групових ізотопів над некомутативними групами.

Наслідок 2.1. *Ізотоп некомутативної групи є або напівсиметричним або асиметричним.*

Доведення. З умов *5)* та *6)* теореми 2.1 маємо, що ізотоп некомутативної групи може бути напівсиметричним або асиметричним. Одночасне виконання цих умов неможливе, оскільки вони мають різні групи симетрій. □

Наслідок 2.2. *Комутативні, лівосиметричні, правосиметричні і тотально-симетричні групові ізотопи є медіальними квазігрупами.*

Доведення. Оскільки група канонічного розкладу групового ізотопа комутативна і коефіцієнти є комутуючими автоморфізмами в комутативних, лівосиметричних, правосиметричних і тотально-симетричних групових ізотопах, то згідно з теоремою 2.1 ці ізотопи є медіальними квазігрупами. □

З теореми 2.1 і наслідку 2.2 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.3. *Немедіальний лінійний ізотоп довільної групи є або напівсиметричним або асиметричним.*

Ізотоп неабелевої групи є або напівсиметричним або асиметричним (див. наслідок 2.1). Іншими словами, комутативна, лівосиметрична, правосиметрична і тотально-симетричні групові ізотопи існують лише серед ізотопів абелевих груп. Тому доцільно сформулювати наслідок, в якому подати класифікацію групових ізотопів абелевих груп.

Наслідок 2.4. *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— ізотоп комутативної групи і (1.52) її канонічний розклад, тоді такі умови істинні: 1)-4) із теореми 2.1, а також*

- $5')$ $(Q;\cdot)$ *є напівсиметричним тоді і тільки тоді, коли* α *є автоморфізмом групи* $(Q;+)$, $\beta=\alpha^{-1}$, $\alpha^3=-\iota$, $\alpha a=-a$;
- $6')$ $(Q;\cdot)$ *є асиметричним тоді і тільки тоді, коли* $-\iota\neq\alpha\neq\beta\neq-\iota$ *і виконується принаймні одна з таких умов:* α *не є автоморфізмом,* $\beta\neq\alpha^{-1}$, $\alpha^3\neq-\iota$, $\alpha a\neq-a$.

Доведення. Беручи до уваги комутативність групи $(Q;+)$, доведення *1)–4)* випливає з теореми 2.1. Оскільки α є автоморфізмом комутативної групи, то умови $5')$ та $6')$ цього наслідку отримуються з умов *5)* та *6)* теореми 2.1 відповідно. □

2.1.1. Лінійні ізотопи скінченних циклічних груп

Повний опис усіх n-арних лінійних ізотопів циклічних груп з точністю до ізоморфізму виконано Ф. Сохацьким і П. Сиваківським [123]. Усі попарно неізоморфні групові ізотопи до 15 порядку та критерій їх існування встановлені О. Кирнасовським [48].

Нехай Q — множина та $\mathrm{Is}(+)$ — множина усіх ізотопів групи $(Q;+)$. Теорема 2.1 не дає розбиття $\mathrm{Is}(+)$. Але тільки тотально-симетричні квазігрупи є спільними для двох класів симетричних квазігруп, тобто ізотопів груп, які не є асиметричними. Щоб підкреслити, що ізотоп групи не є тотально-симетричним, використаємо термін 'строго'. Наприклад, вислів 'строго комутативні групові ізотопи' означає, що вони є комутативними, але не тотально-симетричними. З теореми 2.1 випливає, що умови виключення тотально-симетричних квазігруп з множини групових ізотопів є такими: коефіцієнти їх канонічних розкладів не дорівнюють $-\iota$ одночасно. Взагалі кажучи, множина $\mathrm{Is}(+)$ розбивається на шість підмножин, див. табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Розбиття групових ізотопів

Ізотоп групи: $(Q;\cdot)$	$\mathrm{Ps}(\cdot)$	Умови його канонічного розкладу (1.52)
строго комутативний	$\{\iota, s\}$	$(Q;+)$ абелева, $\beta=\alpha\neq-\iota$
строго лівосиметричний	$\{\iota, r\}$	$(Q;+)$ абелева, $\beta=-\iota\neq\alpha$
строго правосиметричний	$\{\iota, \ell\}$	$(Q;+)$ абелева, $\alpha=-\iota\neq\beta$
строго напів-симетричний	A_3	α антиавтоморфізм $(Q;+)$, $\beta=\alpha^{-1}$, $\alpha a=-a$, $\alpha^3=-I_a^{-1}$, *де* $I_a(x):=-a+x+a$, $(Q;+)$ не є абелевою або $\alpha\neq-\iota$
тотально-симетричний	S_3	$(Q;+)$ абелева $\alpha=\beta=-\iota$
асиметричний	$\{\iota\}$	α не є антиавтоморфізмом $(Q;+)$, $\beta\neq\alpha^{-1}$, $\alpha^3\neq-I_a^{-1}$, $\alpha a\neq-a$, $(Q;+)$ не є абелевою або $-\iota\neq\alpha\neq\beta\neq-\iota$.

Розглянемо множину всіх лінійних ізотопів скінченної циклічної групи. Їх опис з точністю до ізоморфізму виконано Ф. Сохацьким та

П. Сиваківським [123]. Нижче використаємо такі позначення: $\mathbb{Z}_m$ позначає кільце цілих чисел за модулем m; $\mathbb{Z}_m^*$ — групу оборотних елементів кільця $\mathbb{Z}_m$; та (α, β, d), де $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_m^*$ та $d \in \mathbb{Z}_m$, позначає операцію $(\circ)$, що визначена на $\mathbb{Z}_m$ рівністю

$$x \circ y = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + d. \tag{2.2}$$

Оскільки кожен автоморфізм θ циклічної групи $(\mathbb{Z}_m; +)$ може бути визначений рівністю $\theta(x) = k \cdot x$ для деякого $k \in \mathbb{Z}_m^*$, то лінійні ізотопи $(\mathbb{Z}_m; +)$ є операціями, що визначені (2.2), тобто вони є трійками (α, β, d).

Теорема 2.2 ([123]). *Довільний лінійний ізотоп циклічної групи порядку m ізоморфний в точності одному ізотопу $(\mathbb{Z}_m, \circ)$, визначеному (2.2), де α, β — пара оборотних елементів в кільці $\mathbb{Z}_m$ та d — спільний дільник $\mu = \alpha + \beta - 1$ та m.*

Класифікація лінійних групових ізотопів $\mathbb{Z}_m$ відповідно до їх симетричних груп дана в наведеному нижче наслідку, який випливає з теореми 2.1 із врахуванням табл. 2.1.

Наслідок 2.5. *Нехай $\mathbb{Z}_m$ — кільце цілих чисел за модулем m і нехай (α, β, d) — його довільний лінійний ізотоп, де $d \in$ НСД$(m; \alpha + \beta - 1)$. Тоді довільний лінійний ізотоп циклічної групи порядку m ізоморфний в точності одному ізотопу $(\mathbb{Z}_m, \circ)$, визначеному (2.2), крім того*

Таблиця 2.2

Розбиття лінійних групових ізотопів

Ізотоп групи $(Q; \circ)$	$\mathrm{Ps}(\cdot)$	*Умови його канонічного розкладу (1.52)*
строго комутативний	$\{1, s\}$	$\beta = \alpha \neq -1$
строго лівосиметричний	$\{1, r\}$	$\beta = -1 \neq \alpha$
строго правосиметричний	$\{1, \ell\}$	$\alpha = -1 \neq \beta$
строго напівсиметричний	A_3	$\alpha \neq -1,\ \beta = \alpha^{-1},\ \alpha^3 = -1,\ \alpha d = -d$
тотально-симетричний	S_3	$\alpha = \beta = -1$
асиметричний	$\{1\}$	$-1 \neq \alpha \neq \beta \neq -1,$ *та* $\beta \neq \alpha^{-1}$ *або* $\alpha^3 \neq -1,$ *або* $\alpha d \neq -d$

2.1.2. Ізотопи груп простого порядку

Групові ізотопи та лінійні групові ізотопи вивчалися багатьма авторами: В. Білоусовим [16], Е. Фальконер [39], Т. Кепкою та

П. Немецом [44], [45] , В. Щербаковим [136], Ф. Сохацьким [117], А. Драпалом [32], Г. Белявською [22] та іншими.

В цьому підрозділі дано повну класифікацію лінійних групових ізотопів простого порядку з точністю до відношення ізоморфізму із врахуванням їх груп симетрій.

З теореми 2.2 випливають такі твердження.

Наслідок 2.6 ([123]). *Лінійні групові ізотопи простого порядку, які визначені парою* (α, β) *є попарно ізоморфними, якщо* $\alpha + \beta \neq 1$. *Якщо* $\alpha + \beta = 1$, *тоді вони є ізоморфними або* $(\alpha, \beta, 0)$, *або* $(\alpha, \beta, 1)$.

Наслідок 2.7 ([105,123]). *Існує в точності* $p^2 - p - 1$ *лінійних групових ізотопів простого порядку* p *з точністю до ізоморфізму.*

Нехай p — просте число, тоді $\mathbb{Z}_p$ — поле, отже, відповідно до наслідку 2.6, існують два види групових ізотопів циклічної групи $\mathbb{Z}_p$:

$$M_0 := \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p-1\};$$

$$M_1 := \{(\alpha, 1-\alpha, 1) \mid \alpha = 2, \ldots, p-1\}.$$

Для стислого запису символи cs, ls, rs, ts, ss, as позначатимемо строго комутативні, строго лівосиметричні, строго правосиметричні, строго напівсиметричні, тотально-симетричні та асиметричні квазігрупи відповідно. Наприклад, M_0^{ss} позначає множину усіх строго напівсиметричних групових ізотопів з M_0.

Розглянемо квазігрупи порядку 2 та 3. Кожна така квазігрупа ізотопна циклічній групі. Оскільки ι є одиничною підстановкою $\mathbb{Z}_2$, то з теореми 1.10 випливає, що існує два групових ізотопи:

$$x \underset{0}{\circ} y := x + y, \qquad \text{і} \qquad x \underset{1}{\circ} y := x + y + 1.$$

Вони ізоморфні причому $\varphi(x) := x + 1$ — відповідний ізоморфізм. Отже, доведено таке твердження.

Твердження 2.1. *Усі квазігрупи порядку 2 є попарно ізоморфними.*

Існує дві одиничні підстановки групи $\mathbb{Z}_3$: ι та цикл (12.), вони обидві є автоморфізмами циклічної групи $\mathbb{Z}_3$. Таким чином, з теореми 1.10 випливає, що усі квазігрупи порядку 3 є лінійними ізотопами циклічної групи. Отже, з наслідку 2.6 випливає, що

$$M_0 = \{(1,1,0),(2,2,0),(1,2,0),(2,1,0)\}, \qquad M_1 = \{(2,2,1)\}.$$

Відповідно до наслідку 2.7 та наслідку 2.5, ми отримуємо такий результат.

Твердження 2.2. *Існує точно п'ять квазігруп порядку 3 з точністю до ізоморфізму, які можуть бути розподілені на чотири блоки:*
— *строго комутативний:* $(1,1,0)$*;*
— *строго лівосиметричний:* $(1,2,0)$*;*
— *строго правосиметричний:* $(2,1,0)$*;*
— *тотально-симетричний:* $(2,2,0)$*,* $(2,2,1)$*.*

Розглянемо лінійні групові ізотопи порядку $p > 3$. Повне описання цих групових ізотопів дане в наведеній нижче теоремі.

Теорема 2.3. *Множина усіх попарно неізоморфних групових ізотопів простого порядку* $p\,(p>3)$

$$M = \{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta = 1,2,\ldots,p{-}1\} \cup \{(\alpha,1{-}\alpha,1) \mid \alpha = 2,\ldots,p{-}1\}.$$

Множина M *дорівнює об'єднанню таких неперехресних множин:*
— *множини усіх строго комутативних групових ізотопів*

$$M^{cs} = \{(1,1,0),\ (2,2,0),\ldots,(p-2,p-2,0),\ (2^{-1},2^{-1},1)\};$$

— *множини усіх строго лівосиметричних групових ізотопів*

$$M^{ls} = \{(1,p-1,0),\ (2,p-1,0),\ldots,(p-2,p-1,0),\ (2,p-1,1)\};$$

— *множини усіх строго правосиметричних групових ізотопів*

$$M^{rs} = \{(p-1,1,0),\ (p-1,2,0),\ldots,(p-1,p-2,0),\ (p-1,2,1)\};$$

— *множини усіх тотально-симетричних групових ізотопів*

$$M^{ts} = \{(p-1,p-1,0)\};$$

— *множини* M^{ss} *усіх строго напівсиметричних групових ізотопів порожня, якщо* $p-3$ *не є квадратичним лишком за модулем* p*, але якщо існує* k *таке, що* $p-3=k^2$ *за модулем* p*, тоді*

$$M^{ss}=\left\{\left((1+k)2^{-1},2(1+k)^{-1},0\right),\left((1-k)2^{-1},2(1-k)^{-1},0\right)\right\};$$

— *множини усіх асиметричних групових ізотопів*

$$M^{as}=\Big\{\{(3,p-2,1),\ldots,(p-2,3-p,1)\}\setminus(2^{-1},1-2^{-1},1)\Big\}\cup$$

$$\cup\Big\{(\alpha,\beta,0)\;\Big|\;\alpha,\beta=1,2,3,\ldots,p-2,\ \alpha\neq\beta\Big\}\setminus M^{ss}.$$

Доведення. Нехай (α,β,d) — довільний груповий ізотоп.

Якщо він комутативний, то відповідно до наслідку 2.5, отримуємо

$$M_0^{cs}=\{(\alpha,\alpha,0)\mid\alpha=1,2,\ldots,p-2\},\quad |M_0^{cs}|=p-2.$$

Якщо $d=1$, тоді з наслідку 2.6 випливає $2\alpha=1$, тобто множина $M_1^{cs}=\{(2^{-1},2^{-1},1)\}$. Отже, множина усіх попарно неізоморфних комутативних групових ізотопів така $M^{cs}=M_0^{cs}\cup M_1^{cs}$ та $|M^{cs}|=p-1$.

Розглянемо лівосиметричні квазігрупи. Згідно з наслідком 2.5, маємо

$$M_0^{ls}=\{(\alpha,p-1,0)\mid\alpha=1,2,\ldots,p-2\},\quad |M_0^{ls}|=p-2.$$

Якщо $d=1$, то з наслідку 2.6 випливає $\alpha=2$ та згідно з наслідком 2.5, $M_1^{ls}=\{(2,-1,1)\}$. Отже, множина усіх попарно неізоморфних лівосиметричних групових ізотопів така $M^{ls}=M_0^{ls}\cup M_1^{ls}$ та $|M^{ls}|=p-1$.

Співвідношення для правосиметричних квазігруп доводяться тим самим шляхом. В силу наслідку 2.5, довільний тотально-симетричний ізотоп визначається парою автоморфізмів $(-1,-1)=(p-1,p-1)$. Відповідно до наслідку 2.6, $d=0,1$. Припустимо, що $d=1$, тоді $p-1+p-1=1$, тобто $2p=3$. Оскільки $p>3$, то ця рівність є неможливою, отже $d=0$. Таким чином, $M^{ts}=\{(p-1,p-1,0)\}$ та $|M^{ts}|=1$.

Розглянемо напівсиметричні квазігрупи, тоді згідно з наслідком 2.6, $\alpha\neq-1$, $\alpha^3=-1$, $\alpha d=-d$, де $d=0,1$. Але $d\neq1$, оскільки $\alpha\neq-1$, отже $d=0$. Рівність $\alpha^3=-1$ еквівалентна $(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$. Звідси

$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. Це α існує тоді і тільки тоді, коли $p-3$ є квадратичним лишком за модулем p. Якщо $p - 3 = k^2$ за модулем p, то

$$M^{ss} = \left\{ \left((1+k)2^{-1}, 2(1+k)^{-1}, 0\right), \left((1-k)2^{-1}, 2(1-k)^{-1}, 0\right) \right\}.$$

Отже, $|M^{ss}| = 2$ та $M^{ss} = \varnothing$ в іншому випадку.

Нехай (α, β, d) — довільний асиметричний груповий ізотоп. З наслідку 2.6 випливає, що $d \in \{0, 1\}$. Оскільки даний ізотоп є ні комутативним, ні лівосиметричним, ні правосиметричним, ні тотально-симетричним, тоді згідно з наслідком 2.5, $\alpha, \beta \notin \{0, p-1\}$ та $\alpha \neq \beta$.

У випадку, коли $d = 1$, з наслідку 2.6 випливає, що $\beta = 1 - \alpha$ та співвідношення $\alpha, \beta \notin \{0, p-1\}$, $\alpha \neq \beta$ спричинюють

$$\alpha \notin \{0, 1, 2, \frac{p+1}{2}, p-1\}.$$

Оскільки для $d = 1$ напівсиметричний груповий ізотоп не існує, то

$$M_1^{as} = \left\{ (\alpha, 1-\alpha, 1) \;\middle|\; \alpha = 3, \ldots, p-2,\ \alpha \neq \frac{p+1}{2} \right\}, \quad |M_1^{as}| = p - 5.$$

Множина M_0^{as} залежить від існування напівсиметричних ізотопів. Проте,

$$M_0^{as} = \left\{ (\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, p-2,\ \alpha \neq \beta \right\} \setminus M^{ss},$$

$$|M_0^{as}| = \begin{cases} p^2 - 5p + 4, & \text{якщо } p-3 \text{ є лишком за модулем } p; \\ p^2 - 5p + 6, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

□

Зазначимо, що Ф. Радо [97] ще в 1974 році довів, що напівсиметричний груповий ізотоп простого порядку p існує тоді і тільки тоді, коли $p - 3$ є квадратичним лишком за модулем p. Загальна формула усіх лінійних попарно неізоморфних групових ізотопів простого порядку p знайдена в наслідку 2.7 Ф. Сохацьким та П. Сиваківським [123], а також К. Щукіним [105]. Із врахуванням умов теореми 2.3 можна обчислити кількість усіх лінійних групових ізотопів простого порядку для $p > 3$, про що й говорить такий наслідок.

Наслідок 2.8. *Кількість усіх лінійних групових ізотопів простого порядку $p > 3$ з точністю до ізоморфізма рівна $p^2 - p - 1$, що дорівнює*

сумі таких чисел:
— $p-1$ строго комутативних квазігруп;
— $p-1$ строго лівосиметричних квазігруп;
— $p-1$ строго правосиметричних квазігруп;
— 1 тотально-симетричних квазігруп;
— 2 напівсиметричних квазігруп, якщо $p-3$ є квадратичним лишком за модулем p та 0 в іншому випадку;
— $(p-2)^2-5$ асиметричних квазігруп, якщо $p-3$ є квадратичним лишком за модулем p та $(p-2)^2-3$ в іншому випадку.

2.2. Напівсиметричне ізотопне замикання груп

В цьому розділі знайдено напівсиметричне ізотопне замикання усіх булевих груп, напівсиметричне ізотопне замикання усіх абелевих груп та напівсиметричне ізотопне замикання всіх груп.

Для початку опишемо многовид напівсиметричних квазігруп. Добре відомо, що клас всіх напівсиметричних квазігруп описується такою рівністю (1.50). А. Сад [99] встановив властивості та структуру напівсиметричних квазігруп, які описуються ще як '3-циклічні', вони вивчалися Дж. Осборном [93], А. Садом [99, 100, 102, 103], Н. Мендельсоном [89], Гратцером та Падманабхеном [40], Міцшке і Вернером [90], ДіПаола і Неметом [30]. Вперше напівсиметричні квазігрупи вживалися для скорочування гомотопій до гомоморфізмів в [108], враховуючи роботи Гварамії та Плоткіна, що інтерпретують гомотопії як гомоморфізми неоднорідних алгебр [108]. Класичним підходом до вивчення властивостей квазігрупових інваріантів при ізотопії є геометричний підхід через поняття 3-сітки, що був представлений Альбертом [6], Білоусовим [11], Пфлюгфельдер [95], Щербаковим [137], Смітом [109] та Романовською [110].

Поняття симетрії Ф. М. Сохацького [118] узагальнює симетрію, як триальність, що була досліджена Смітом [107]. Якщо σ-парастроф збігається з самою квазігрупою, тоді σ називається симетрією квазігрупи. Множина усіх симетрій бінарних квазігруп утворює групу, яка є підгрупою симетричної групи S_3. Відповідно до симетричної групи, є шість класів квазігруп: комутативний (середньосиметричний), ліво-, право-, напів-, тотально-симетричний та асиметричний.

Використовуючи означення лівого ділення в тотожності (1.50), маємо еквівалентну тотожність $y \overset{\ell}{\cdot} x = xy$. Ми застосуємо означення s-парастрофа окремо для лівої і правої сторони тотожності:

$$x \overset{s\ell}{\cdot} y = xy, \qquad y \overset{\ell}{\cdot} x = y \overset{s}{\cdot} x. \tag{2.3}$$

Ці тотожності означають, що $(\overset{s\ell}{\cdot}) = (\cdot)$ та $(\overset{\ell}{\cdot}) = (\overset{s}{\cdot})$ виконуються. Тому кожна тотожність з (2.3) еквівалентна до (1.50). Рівність $(\overset{s\ell}{\cdot}) = (\cdot)$ означає, що $s\ell \in \mathrm{Ps}(\cdot)$. Аналогічним чином можна показати, що тотожність

$$x \cdot yx = y \tag{2.4}$$

еквівалентна до

$$y \overset{sr}{\cdot} x = yx, \qquad x \overset{r}{\cdot} y = x \overset{s}{\cdot} y. \tag{2.5}$$

Отже, $(\overset{sr}{\cdot}) = (\cdot)$ та $(\overset{r}{\cdot}) = (\overset{s}{\cdot})$ виконуються, та рівність $(\overset{sr}{\cdot}) = (\cdot)$ означає, що $sr \in \mathrm{Ps}(\cdot)$. В результаті отримуємо таку лему.

Лема 2.1. *В довільній квазігрупі $(Q;\cdot)$ такі твердження є еквівалентними:*

1) $(Q;\cdot)$ є напівсиметричною;

2) A_3 є підгрупою $\mathrm{Ps}(\cdot)$;

3) $(Q;\cdot)$ задовольняє (2.4).

Доведення. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Як показано вище, (1.50) еквівалентна до $s\ell \in \mathrm{Ps}(\cdot)$. Але $s\ell$ утворює групу A_3, тоді A_3 — підгрупа $\mathrm{Ps}(\cdot)$. Зворотне твердження є очевидним. *2) $\Leftrightarrow$ 3)* доводиться тим самим чином. □

З *2)* леми 2.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.9. *Якщо напівсиметричний многовид включає s-парастроф кожної з його квазігруп, тоді він є тотально-симетричним.*

Наслідок 2.10. *Многовид усіх напівсиметричних квазігруп є тотально-симетричним.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{S}$ є многовидом напівсиметричних квазігруп. Тоді $\mathfrak{S}$ включає $s\ell$-парастроф довільної квазігрупи з $\mathfrak{S}$. s-парастроф квазігрупи з $\mathfrak{S}$ задовольняє s-парастроф тотожності (1.50), тобто, $(x \overset{s}{\cdot} y) \overset{s}{\cdot} x = y$. Тотожність є еквівалентною до $x \cdot yx = y$, що визначає $\mathfrak{S}$. Таким чином, $s\ell$ та s належать групі $\mathrm{Ps}(\mathfrak{S})$, тому $\mathrm{Ps}(\mathfrak{S}) = S_3$. Це означає, що $\mathfrak{S}$ є тотально-симетричною. □

Наслідок 2.11. *Тотожності (1.50), (2.3), (2.4), (2.5) та $x(x \overset{\ell}{\cdot} y) = y$, $(x \overset{r}{\cdot} y)y = x$, $x \overset{\ell}{\cdot} xy = y$, $xy \overset{r}{\cdot} y = x$, $x \overset{\ell}{\cdot} y = yx$, $x \overset{r}{\cdot} y = yx$ є еквівалентними.*

Доведення за допомогою використання означення лівого та правого ділення. □

Еквівалентність тотожностей (1.50), (2.4) та останніх двох тотожностей з наслідку 2.11 показана в [107, твердження 1.2]. Еквівалентність тотожностей (1.50), (2.3), (2.4), (2.5) та останніх двох тотожностей з наслідку 2.11 встановлена в [23], [96].

Таким чином, ми маємо многовид усіх напівсиметричних квазігруп, визначених однією з десяти еквівалентних аксіом з наслідку 2.11.

Наслідок 2.12. *Тотожності з наслідку 2.11 спричинюють напівсиметричність.*

Розглянемо дев'ять квадратичних тотожностей з трьома незалежними змінними, а саме:

$$\begin{array}{llllll} (x \cdot yz) \cdot z = yx, & \text{(а)} & x \cdot (xy \cdot z) = zy, & \text{(б)} & xy \cdot yz = zx, & \text{(в)} \\ x(y(yx \cdot z)) = z, & \text{(г)} & xy \cdot (y \cdot xz) = z, & \text{(ґ)} & x(xy \cdot yz) = z, & \text{(д)} \\ ((x \cdot yz)z)y = x, & \text{(е)} & (xy \cdot z) \cdot zy = x, & \text{(є)} & (xy \cdot yz)z = x. & \text{(ж)} \end{array} \qquad (2.6)$$

У цьому вигляді ці тотожності були наведені серед 100 тотожностей без квадратів, що пераховані А. Крапєжем [82]. Ніякі властивості цих тотожностей не вивчалися. Тут встановлено відношення рівносильності та парастрофної рівносильності між тотожностями (2.6) і те,що кожна квазігрупа, яка задовольняє одну із цих тотожностей є напівсиметричною.

Твердження 2.3. *Тотожності (г), (ґ), (д) із (2.6) є еквівалентними.*

Доведення. Помножимо (г) на yx зліва: $yx \cdot (x \cdot (y \cdot (yx \cdot z))) = yx \cdot z$. Замінивши $yx \cdot z$ на z, маємо $yx \cdot (x \cdot yz) = z$. Взаємно перепозначивши x та y, отримуємо тотожність (ґ). Оскільки зроблені перетворення є зворотними, то тотожності (г) та (ґ) є еквівалентними. Помноживши (ґ) на x зліва та замінивши xz на z, отримуємо еквівалентність тотожностей (ґ) та (д). □

Твердження 2.4. *Тотожності (е), (є), (ж) із (2.6) еквівалентні.*

Доведення. Помножимо тотожність (е) на yz справа:

$$(((x \cdot yz) \cdot z) \cdot y) \cdot yz = x \cdot yz.$$

Замінивши $x \cdot yz$ на x, отримуємо $(xz \cdot y) \cdot yz = x$. Взаємно перепозначивши z та y, маємо тотожність (є). Оскільки зроблені перетворення є зворотними, тотожності (е) та (є) є еквівалентними.

Помноживши тотожність (є) на y справа та замінивши xy на x, маємо $(xz \cdot zy) \cdot y = x$. Взаємно перепозначивши z та y, отримуємо еквівалентність тотожностей (є) та (ж). □

Теорема 2.4. *Кожна тотожність з (2.6) спричинює напівсиметричність.*

Доведення. Нехай $(Q, \cdot)$ — квазігрупа. Замінивши z на x в тотожностях (а) та (б), маємо $(x \cdot yx) \cdot x = y \cdot x$, $\ x \cdot (xy \cdot x) = x \cdot y$. Скоротивши на x з обох сторін, маємо тотожність напівсиметричності в обох випадках.

Підставимо $z = y \overset{r}{\cdot} x$ у тотожність (в), а $z = yx \overset{r}{\cdot} x$ у (г):

$$xy \cdot y(y \overset{r}{\cdot} x) = (y \overset{r}{\cdot} x)x, \qquad x \cdot y(yx \cdot (yx \overset{r}{\cdot} x)) = yx \overset{r}{\cdot} x.$$

Застосуємо (1.2): $xy \cdot x = (y \overset{r}{\cdot} x) \cdot x$, $\ x \cdot yx = yx \overset{r}{\cdot} x$. Скорочуючи на x в першій тотожності та замінюючи yx на x в другій тотожності, отримуємо $xy = y \overset{r}{\cdot} x$ в обох випадках. За правим діленням, маємо тотожність напівсиметричності (2.5).

Згідно з твердженням 2.3, тотожності (г), (ґ), (д) є еквівалентними. Тоді й тотожності (ґ), (д) спричинюють напівсиметричність. Замінимо x на $x \overset{\ell}{\cdot} yz$ в (е), в результаті маємо: $((x \overset{\ell}{\cdot} yz) \cdot yz)z \cdot y = x \overset{\ell}{\cdot} yz$. Застосуємо (1.2): $xz \cdot y = x \overset{\ell}{\cdot} yz$. Підставивши $x = y$, отримуємо закон напівсиметричності (1.50). Твердження 2.4 означає, що напівсиметричність випливає з (є) та (ж). □

2.2.1. Многовид напівсиметричних ізотопів усіх булевих груп

В цьому підрозділі розглянуто напівсиметричне ізотопне замикання усіх булевих груп. Встновлено, що дев'ять тотожностей (2.6) описують многовид напівсиметричних ізотопів усіх булевих груп. Цей многовид є тотально-симетричним, тобто кожний парастроф квазігрупи з многовида належить цьому ж многовиду. Ці квазігрупи є медіальними та вони є або групами, або некомутативними напівсиметричними квазігрупами.

Лема 2.2. *Тотожності (2.6) є еквівалентними і визначають тотально-симетричний многовид.*

Доведення. Для того, щоб отримати тотожність (в) із (2.6) використаємо закон напівсиметричності. Тотожність (ж) помножимо на z зліва, тотожність (д) помножимо на x справа, замінимо z на yz в тотожності (б) та помножимо отриману тотожність на x справа, в тотожності (а) замінимо x на xy та помножимо отриману тотожність на z зліва. Беручи до уваги твердження 2.3 та твердження 2.4, отримуємо еквівалентність усіх тотожностей з (2.6).

Розглянемо s-парастроф (а) : $(x \overset{s}{\cdot} (y \overset{s}{\cdot} z)) \overset{s}{\cdot} z = y \overset{s}{\cdot} x$. За означенням s-парастрофа операції $(\cdot)$, отримуємо $z \cdot (zy \cdot x) = xy$. Ця тотожність збігається з (б) після взаємного перепозначення x та z. Це означає, що s-парастроф тотожності (а) визначає той самий многовид. Оскільки многовид є напівсиметричним, він також є тотально-симетричним. □

Теорема 2.5. *В довільній квазігрупі* $(Q; \cdot)$ *такі твердження є еквівалентними:*

1) $(Q;\cdot)$ *є напівсиметричним ізотопом булевої групи;*

2) $(Q;\cdot)$ *задовольняє довільну тотожність з (2.6);*

3) існує булева група $(Q;+)$*, її автоморфізм* α*, елемент* $a \in Q$ *такий, що*

$$x \cdot y = \alpha x + a + \alpha^2 y, \quad \alpha^3 = \iota, \quad \alpha a = a. \tag{2.7}$$

Доведення. Оскільки всі тотожності з (2.6) еквівалентні в силу леми 2.2, тоді вони визначають той самий многовид. Таким чином, достатньо довести теорему для однієї з них.

1) $\Leftrightarrow$ *3).* Нехай $(Q;\cdot)$ — напівсиметричний ізотоп булевої групи $(G;*)$. Тоді всі квазігрупи, які ізотопні $(Q;\cdot)$, є булевими. Отже, відповідно до пункту *5)* теореми 2.1 та пункту *1)* і пункту *3)* цієї теореми, вони є еквівалентними.

2) $\Rightarrow$ *1).* Нехай $(Q;\cdot)$ — квазігрупа, що відповідає тотожності (a) з (2.6). За теоремою 2.4, $(Q;\cdot)$ є напівсиметричною квазігрупою. Відповідно до теореми 1.12 та наслідку 1.10, ця квазігрупа є ізотопною групі, тобто $(Q;\cdot)$ є напівсиметричним груповим ізотопом.

3) $\Rightarrow$ *2).* Нехай (2.7) виконується для квазігрупи $(Q;\cdot)$. Доведемо, що має місце тотожність (a) з (2.6). Дійсно,

$$(x \cdot yz) \cdot z = \alpha(\alpha x + a + \alpha^2(\alpha y + a + \alpha^2 z)) + a + \alpha^2 z.$$

Оскільки α — автоморфізм, то

$$(x \cdot yz) \cdot z = \alpha^2 x + \alpha a + \alpha y + a + \alpha^2 z + a + \alpha^2 z.$$

Оскільки $(Q;+)$ є булевою групою та $\alpha a = a$, тоді $2a = 0$ та $2\alpha^2 z = 0$. Отже, $(x \cdot yz) \cdot z = \alpha y + a + \alpha^2 x = y \cdot x$. □

З теореми 2.5 випливають різні наслідки. Наприклад, із врахуванням леми 2.2 та умов теореми 2.5 маємо такий наслідок.

Наслідок 2.13. *Многовид квазігруп, що визначається однією з тотожностей (2.6), є тотально-симетричним.*

З пункту *3)* теореми 2.5 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.14. *Напівсиметричне ізотопне замикання усіх булевих груп визначається попарно еквівалентними тотожностями* (2.6).

Із врахуванням наслідку 2.14 маємо такий наслідок із теореми 2.5.

Наслідок 2.15. *Напівсиметричне ізотопне замикання усіх булевих груп є перетином многовида усіх напівсиметричних квазігруп та многовида усіх булевих груп.*

Доведення. З теореми 2.4 маємо, що кожна тотожність з (2.6) спричинює напівсиметричність. З пунктів *2)* та *3)* теореми 2.5 випливає перетин многовидів. □

Наслідок 2.16. *Кожна квазігрупа, що задовольняє одну з тотожностей (2.6), є або булевою групою, або некомутативною напівсиметричною квазігрупою.*

Доведення. Нехай $(Q;\cdot)$ — квазігрупа, що задовольняє тотожність (a) з (2.6). Тоді за теоремою 2.5, її канонічний розклад має вигляд (2.7), де α — деякий автоморфізм та $a \in Q$.

Якщо $(Q;\cdot)$ — комутативна, тоді відповідно до теореми 2.1, $\alpha^2 = \alpha$, тобто $\alpha = \iota$. Рівність $x \cdot y = x + a + y$ означає, що L_a — автоморфізм між $(Q;\cdot)$ та $(Q;+)$. Отже, $(Q;\cdot)$ — булева група.

Якщо $(Q;\cdot)$ — некомутативна, тоді відповідно до теореми 2.1 $\alpha^2 \neq \alpha$. Таким чином, $\alpha \neq \iota$ та відповідно до наслідку 1.9, $(Q;\cdot)$ не є групою, але за теоремою 2.4, вона є напівсиметричною. □

Приклад 2.1. *Розглянемо групу* $\mathbb{Z}_2^2 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. *Визначимо перетворення* α *множини* $\mathbb{Z}_2^2$: $\alpha(x) := x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Оскільки* $\alpha^3 = \iota$, *то* α — *автоморфізм групи* $\mathbb{Z}_2^2$. *За теоремою 2.5, квазігрупа* $(\mathbb{Z}_2^2;\circ)$, *визначена рівністю* $x \circ y := \alpha x + \alpha^2 y$, *задовольняє тотожність (a). Враховуючи те, що* $\alpha \neq \alpha^2$, $(Q,\circ)$ — *некомутативна. З наслідку 2.16 випливає, що квазігрупа* $(Q,\circ)$ — *є напівсиметричною і не є групою.*

2.2.2. Многовид напівсиметричних ізотопів усіх груп

В. Д. Білоусов [16] знайшов квадратичну тотожність з п'ятьма змінними, що описує ізотопне замикання всіх груп:

$$(x(y \overset{r}{\cdot} z) \overset{\ell}{\cdot} u)v = x(y \overset{r}{\cdot} (z \overset{\ell}{\cdot} u)v).$$

Ф. М. Сохацький [114] встановив тотожність (1.53) з чотирма змінними, що також описує ізотопне замикання усіх груп, але не є квадратичною.

В цьому підрозділі описано напівсиметричне ізотопне замикання усіх груп, встановлено умови, за яких існує таке замикання та наведено еквівалентні твердження для многовида напівсиметричних ізотопів усіх груп, отримано ряд наслідків.

Теорема 2.6. *В довільній квазігрупі $(Q;\cdot)$ такі твердження є еквівалентними:*
1) $(Q;\cdot)$ є напівсиметричним груповим ізотопом;
2) $(Q;\cdot)$ задовольняє

$$u(x \cdot yu) = z(x \cdot (uy \cdot z)u); \tag{2.8}$$

3) існує група $(Q;+)$, її антиавтоморфізм α, елемент $a \in Q$ такий, що $x \cdot y = \alpha x + a + \alpha^{-1} y$ та $\alpha^3 = -I_a^{-1}$, $\alpha a = -a$, де $I_a(x) := -a + x + a$.

Доведення. *2) $\Rightarrow$ 1).* Нехай квазігрупа $(Q;\cdot)$ задовольняє (2.8). Підставимо $z = u$ в (2.8): $u(x \cdot yu) = u(x \cdot (uy \cdot u)u)$. Скорочуючи на u, x, u, отримуємо тотожність (1.50). Звідси, $(Q;\cdot)$ — напівсиметрична.

Помноживши (2.8) на z справа та використовуючи тотожність напівсиметричності, отримуємо:

$$u(x \cdot yu) \cdot z = x \cdot (uy \cdot z)u. \tag{2.9}$$

Оскільки $(Q;\cdot)$ є напівсиметричною, то виконується (1.51). Замінюючи операцію $(\cdot)$ з її парастрофами в (2.9), маємо (1.53). З наслідку 1.11 випливає, що $(Q;\cdot)$ ізотопна групі.

1) $\Rightarrow$ 2). Нехай $(Q;\cdot)$ — напівсиметричний груповий ізотоп, тоді мають місце рівності (1.51) та (1.53) можна записати як (2.9). Помножимо (2.9) на z зліва та застосуємо тотожність (1.50). Як результат, маємо (2.8).

3) $\Leftrightarrow$ *1).* Це випливає з пункту *5)* теореми 2.1. $\square$

Теорема 2.6 спричинює такі наслідки.

Наслідок 2.17. *Напівсиметричне ізотопне замикання усіх груп визначається* (2.8).

Наслідок 2.18. *Тотожність* (2.8) *спричинює напівсиметричність.*

Наслідок 2.19. *Многовид квазігруп, визначений (2.8), є тотально-симетричним.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{Q}$ — многовид, визначений (2.8). Це означає, що кожна квазігрупа $(Q;\cdot)$ з $\mathfrak{Q}$ задовольняє тотожність $x\cdot yx = y$, яка є еквівалентною до $xy \cdot x = y$. Визначимо операцію $(\circ) := (\overset{s}{\cdot})$. Тоді останню тотожність можна записати як $x \circ (y \circ x) = y$, тобто s-парастроф довільної квазігрупи з $\mathfrak{Q}$ належить $\mathfrak{Q}$. Отже, для всіх $\sigma \in S_3$ відношення ${}^{\sigma}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}$. Отже, многовид $\mathfrak{Q}$ — тотально-симетричний. $\square$

2.2.3. Ланцюг включень многовидів

В цьому підрозділі встановимо послідовне включення многовидів напівсиметричного замикання ізотопів груп. Для побудови включення використаємо набори тотожностей (2.6), (2.8) та

$$\begin{array}{lll} (xy \cdot u)xv = y \cdot uv, & xy(u \cdot vy) = xu \cdot v, & x((y \cdot ux)v) = y \cdot uv, \\ (x(yu \cdot v))y = xu \cdot v, & xy(ux \cdot vy) = uv, & (xy \cdot uv)xu = yv, \\ xy(ux\cdot v) = u\cdot yv, & (x\cdot yu)vy = xv\cdot u, & x((y\cdot xu)\overset{\ell}{\cdot} v) = uv\cdot y. \end{array} \tag{2.10}$$

Теорема 2.7 (О. Тарковська [77]). *Тотожності* (2.10) *є рівносильними і визначають многовид всіх медіальних напівсиметричних квазігруп.*

Наслідок 2.20 (О. Тарковська [77]). *Многовид всіх медіальних напівсиметричних квазігрупів, який визначається однією із тотожностей* (2.10) *є тотально-симетричний.*

Наслідок 2.21 (О. Тарковська [77]). *Кожна квазігрупа, яка задовольняє одну із тотожностей* (2.10) *є або булевою групою, або небулевою тотально-симетричною квазігрупою, або некомутативною напівсиметричною квазігрупою.*

Підсумовуючи результати, маємо, позначення таких многовидів:
— тотожності (2.6) є попарно еквівалентними і описують многовид $\mathfrak{B}_{\mathrm{ss}}$ напівсиметричного ізотопного замикання усіх булевих груп;
— тотожності (2.10) є попарно еквівалентними і описують многовид $\mathfrak{A}_{\mathrm{ss}}$ напівсиметричного ізотопного замикання усіх абелевих груп;
— тотожності (2.8) описують многовид $\mathfrak{G}_{\mathrm{ss}}$ напівсиметричного ізотопного замикання усіх груп;
— тотожності з наслідку 2.11 є попарно еквівалентними і описують многовид $\mathfrak{S}$ усіх напівсиметричних квазігруп.
Щоб встановити зв'язок між цими многовидами, наведемо такі приклади.

Приклад 2.2. *Квазігрупа* $(\mathbb{Z}_9;*)$, $x*y = 2x+3+5y$, *належить многовиду* $\mathfrak{A}_{\mathrm{ss}}$ *і не належить многовиду* $\mathfrak{B}_{\mathrm{ss}}$. *Справді, ця квазігрупа задовольняє канонічний розклад* $x\cdot y = \alpha x + a + \alpha^{-1}y$, $\quad \alpha^3 = -\iota$, $\alpha a = -a$, *оскільки* $\alpha^3 = 2^3 = -\iota$, $\alpha a = 2\cdot 3 = 6 = -3$ *і не задовольняє умови* (2.7), *оскільки* $\alpha^3 \neq \iota$. *Отже, враховуючи наслідок 2.21,* $(\mathbb{Z}_9;*)$ *є некомутативною напівсиметричною квазігрупою.*

Приклад 2.3. *В симетричній групі* $(S_3;\cdot)$, *де* $(\cdot)$ *позначає композицію підстановок, визначимо перетворення* α *таким чином:* $\alpha(x) := s\ell{\cdot}x^{-1}{\cdot}sr$. *В цьому випадку* α *— антиавтоморфізм групи* $(S_3;\cdot)$ *та* $\alpha^3 = I$. *Дійсно,*

$$\alpha(x\cdot y) = s\ell\cdot(xy)^{-1}\cdot sr = s\ell\cdot y^{-1}x^{-1}\cdot sr = s\ell y^{-1}sr\cdot s\ell x^{-1}sr = \alpha(y)\cdot\alpha(x),$$

$$\alpha^3(x) = \alpha\left(s\ell(s\ell x^{-1}sr)^{-1}sr\right) = \alpha(s\ell s\ell xsrsr) = (s\ell)^3x^{-1}(sr)^3 = I.$$

Відповідно до пункту 5) теореми 2.1, групоїд $(S_3;\circ)$ *визначається такою рівністю* $x\circ y := \alpha(x){\cdot}\alpha^{-1}(y)$ *та є напівсиметричним груповим ізотопом. Таким чином,* S_3 *— напівсиметричний ізотоп некомутативної групи.*

Приклад 2.4. *Нехай* $Q := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *На множині* Q *визначимо операцію* $(\cdot)$:

$(\cdot)$	1	2	3	4	5
1	1	4	5	3	2
2	5	2	4	1	3
3	4	5	3	2	1
4	2	3	1	5	4
5	3	1	2	4	5

$(\circ)$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	5	3	1
3	3	5	4	1	2
4	4	1	2	5	3
5	5	3	1	2	4

Квазігрупа $(Q; \cdot)$ — *напівсиметрична. Переставивши рядки за циклом* (2534) *та стовпці за циклом* (2435), *отримаємо лупу* $(Q; \circ)$. *Припустимо, що квазігрупа* $(Q; \cdot)$ *ізотопна групі* $(G; \diamond)$. $(Q; \circ)$ *та* $(Q; \cdot)$ *ізотопні відповідно до побудови* $(Q; \circ)$. *Тоді лупа* $(Q; \circ)$ *та група* $(G; \diamond)$ *ізотопні, отже й ізоморфні.* $(Q; \circ)$ — *комутативна, як група простого порядку. Але це так, бо* $4 \circ 2 = 1 \neq 3 = 2 \circ 4$. *Отже, припущення хибне, а квазігрупа* $(Q; \cdot)$ *не є груповим ізотопом.*

Теорема 2.8. *Многовиди* $\mathfrak{B}_{\mathrm{ss}}$, $\mathfrak{A}_{\mathrm{ss}}$, $\mathfrak{G}_{\mathrm{ss}}$ *та* $\mathfrak{S}$ *є попарно різними та утворюють такий ланцюг:* $\mathfrak{B}_{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{A}_{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{G}_{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{S}$.

Доведення. Нестроге включення цих многовидів випливає з їх означень. Для доведення строгого включення розглянемо деякі приклади квазігруп, які належить до широкого многовида, але не входять до меншого многовида. Тотальна симетричність кожного з многовидів $\mathfrak{B}_{\mathrm{ss}}$, $\mathfrak{A}_{\mathrm{ss}}$, $\mathfrak{G}_{\mathrm{ss}}$, $\mathfrak{S}$ забезпечується наслідками 2.10, 2.13, 2.20, 2.19.

В прикладі 2.2, групоїд $(\mathbb{Z}_9; *)$ є напівсиметричною квазігрупою та є ізотопним циклічній групі $(\mathbb{Z}_9; +)$, яка не є булевою. Звідси, $(\mathbb{Z}_9; *)$ належить многовиду $\mathfrak{A}_{\mathrm{ss}}$ та не належить $\mathfrak{B}_{\mathrm{ss}}$.

Квазігрупа $(S_3; \circ)$ з прикладу 2.3 належить многовиду $\mathfrak{G}_{\mathrm{ss}}$ та не належить $\mathfrak{A}_{\mathrm{ss}}$, оскільки S_3 не є комутативною.

Квазігрупа $(Q; \cdot)$ з прикладу 2.4 належить многовиду $\mathfrak{S}$ та не належить $\mathfrak{G}_{\mathrm{ss}}$, оскільки квазігрупа $(Q; \cdot)$ не є ізотопною групі. $\square$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі досліджуються деякі класи квазігруп із врахуванням їх груп симетрій, а саме:

— дано повну класифікацію групових ізотопів за групами їх парастрофних симетрій, згідно чого уточнено класифікацію лінійних ізотопів скінченних циклічних груп та ізотопів груп простого порядку;

— згідно зі строгою парастрофною симетрією, здійснено розбиття групових ізотопів, виписано множини усіх попарно неізоморфних групових ізотопів простого порядку p $(p > 3)$ та обчислено їх кількість;

— знайдено напівсиметричне ізотопне замикання многовида булевих груп та многовида всіх груп, отримано необхідні і достатні умови його існування в термінах канонічного розкладу;

— встановлено рівносильні та парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають многовид напівсиметричного ізотопного замикання булевих груп;

— знайдено співвідношення між многовидом напівсиметричних квазігруп та многовидами напівсиметричних ізотопних замикань булевих груп, абелевих груп та всіх груп.

Результати розділу опубліковані в працях [66], [71], [77].

РОЗДІЛ 3
КЛАСИФІКАЦІЯ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

В цьому розділі розглянемо функційні рівняння над множиною бінарних квазігрупових операціях довільно вибраного носія Q. Розглянемо таку класифікацію чистих узагальнених нетривіальних бінарних квазігупових функційних рівнянь мінімальної довжини, коли в один блок розбиття попадають рівняння, множини всіх розв'язків яких виразимі одна через другу.

Спочатку сформулюємо допоміжні означення понять для розумінння доведень основних теорем про класифікацію.

Означення 3.1. *Якщо незалежна предметна змінна має точні дві появи у рівнянні, то таку предметну змінну назвемо квадратичною.*

Отже, рівняння є квадратичним, якщо кожна предметна змінна є квадратичною.

Означення 3.2. *Якщо у рівнянні точно одна незалежна предметна змінна має більше двох появ, а інші незалежні предметні змінні – квадратичні, то таке рівняння назвемо майже квадратичним.*

Означення 3.3. *Якщо у рівнянні жодна предметна змінна не є квадратичною, то таке рівняння назвемо антиквадратичним.*

Для класифікації будь-яких рівнянь у докторській дисертації Ф. М. Сохацького [111, с. 58] введено поняття "функційної довжини терма", тобто довжина послідовності функційних змінних у термі та поняття "предметної довжини терма", тобто довжини послідовності предметних символів у термі. У кандидатській дисертації Р. Ф. Коваль [50, с. 37], для класифікації квадратичних рівнянь, вводить поняття "типу функційного рівняння", а саме, послідовність $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ натуральних чисел, де

n_s дорівнює кількості мінімальних парастрофно-самодостатніх підслів від s предметних змінних для всіх $s = 1, 2, \dots, p$ та поняття "довжини рівняння", як суми довжини термів лівої і правої частин рівняння, не уточнюючи чи довжина ця за кількістю функційних змінних, чи за кількістю предметних змінних. Тому цих означень виявилося недостатньо для повної класифікації узагальнених функційних рівнянь.

Наведені нижче означення є уточненням описаних вище понять.

Означення 3.4. *Під функційною довжиною функційного рівняння розуміємо натуральне число, яке дорівнює кількості всіх функційних змінних у рівнянні, враховуючи повторення всіх функційних змінних, як різні функційні змінні.*

Іншими словами, це сума функційної довжини термів лівої і правої частин функційного рівняння. Наприклад, рівняння узагальненої асоціативності (1.14) є функційним рівнянням функційної довжини 4, бо кількість всіх функційних змінних у цьому рівнянні дорівнює чотирьом. Рівняння узагальненої дистрибутивності (1.34) є рівнянням функційної довжини 5, бо всього функційних змінних у рівнянні п'ять.

Означення 3.5. *Під предметною довжиною функційного рівняння розуміємо натуральне число, яке дорівнює кількості всіх появ предметних змінних у рівнянні, враховуючи повторення всіх предметних змінних, як різні предметні змінні.*

Точніше, це сума предметної довжини термів лівої і правої частин рівняння. Наприклад, рівняння узагальненої асоціативності (1.14) є функційним рівнянням предметної довжини 6, бо кількість різних незалежних предметних змінних у цьому рівнянні три, кожна з яких має точно по дві появи. Рівняння узагальненої дистрибутивності (1.34) є функційним рівнянням функційної довжини 7, бо хоча кількість різних незалежних предметних змінних у цьому рівнянні три, одна з них має три появи, інших дві – квадратичні.

Означення 3.6. *Під предметним типом рівняння від k різних незалежних предметних змінних розуміємо послідовність натуральних чисел $(m_1,m_2,\ldots,m_k)$, де m_i позначає кількість появ у рівнянні i-ї незалежної предметної змінної при їх розташуванні у лексикографічному порядку.*

Оскільки ототожнюємо функційні рівняння, які відрізняються перейменуванням предметних змінних (див. зауваження 1.1), то, не втрачаючи загальності, розглядатимемо лише рівняння типу $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ з умовою $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k$. Наприклад, замість функційних рівнянь

$$F_1(z, F_2(x, y)) = F_3(F_4(z, x), F_5(z, y)),$$

$$F_1(y, F_2(x, z)) = F_3(F_4(y, x), F_5(y, z))$$

типів $(2, 2, 3)$ та $(2, 3, 2)$ віповідно, розглядатимемо рівняння

$$F_1(x; F_2(y; z)) = F_3(F_4(x; y), F_5(x, z))$$

типу $(3, 2, 2)$. Наведені рівняння є майже квадратичними.

Нехай Q — довільна множина, тоді пара підстановок (θ, τ) називається трансверсаллю оборотної операції f, яка визначена на Q, якщо для $\forall x \in Q$ виконується рівність $f(x, \theta x) = \tau x$. Операцію f називають допустимою, якщо вона має трансверсаль. Якщо пара (ι, τ) є трансверсаллю для деякої підстановки τ, то таку операцію назвемо діагональною.

Далі в тексті доведень і формулювань тверджень, теорем і наслідків цього розділу замість слів ‘функційне рівняння функційної довжини’ будемо вживати ‘рівняння функційної довжини’, замість слів ‘функційне рівняння предметної довжини’ – ‘рівняння предметної довжини’ та замість слів ‘функційне рівняння предметного типу’ – ‘рівняння типу’, а під поняттям ‘узагальнене рівняння’ розумітимемо ‘чисте узагальнене бінарне квазігрупове нетривіальне функційне рівняння’.

3.1. Класифікація рівнянь довжини 1 та довжини 2

В цьому підрозділі досліджуються узагальнені рівняння функційної довжини 1 та 2, їх повна класифікація з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та розв'язування на множині бінарних квазігруп.

Розглянемо узагальнені рівняння від однієї функційної змінної, тобто функційної довжини 1. В такому рівнянні всього три місця предметних змінних, тому за означенням 3.5 предметна довжина його — 3. Із твердження 1.1 випливає, що всі предметні змінні збігаються, тобто у рівнянні лише одна незалежна предметна змінна з трьома своїми появами.

Нехай x — незалежна предметна змінна цього рівняння, тоді воно має вигляд $F(x;x) = x$. Розв'язком цього рівняння є ідемпотентні квазігрупи і тільки вони. Отже, маємо таке очевидне твердження.

Твердження 3.1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності узагальнене функційне рівняння функційної довжини 1 точно одне* $F(x;x) = x$*, розв'язком його є ідемпотентні квазігрупи і тільки вони.*

Класифікацією рівнянь функційної довжини 2 на квазігрупах займалися Р. Коваль [50] та А. Крапєж [78]. Вони вивчали лише квадратичні узагальнені рівняння. Обидва автори дали класифікацію частини рівнянь функційної довжини 2, які тут названі типом $(2;2)$. Інші типи таких рівнянь були опущені і не вивчалися.

Нижче подано класифікацію рівнянь функційної довжини 2 всіх можливих типів і дано інше доведення та формулювання теореми 1.8. Крім того, наведено множину розв'язків отриманого нового рівняння та виписано наслідки для майже квадратичних та антиквадратичних рівнянь.

Теорема 3.1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 3 узагальнені рівняння функційної довжини* 2*, які мають розподіл на: предметний тип* $(2;2)$ *—* (1.8), (1.9)*; предметний тип* $(4;0)$

$$F_1(x;x) = F_2(x;x). \tag{3.1}$$

Доведення. Узагальнені рівняння функційної довжини 2 можуть мати два розташування функційних змінних: 1) обидві функційні змінні є в одній частині рівняння, 2) функційні змінні знаходяться по різні сторони рівняння. Якщо обидві функційні змінні знаходяться по одну сторону рівняння, то за допомогою зовнішнього ділення, отримаємо рівняння, в якому функційні змінні знаходяться по різні сторони рівняння. Тому досить розглянути лише другий випадок.

Бінарні квазігрупові рівняння, які задовольняють умову теореми, мають чотири предметних змінних. Із Твердження 1.1 випливає, що різних незалежних предметних змінних у рівнянні може бути одна або дві.

Якщо незалежна предметна змінна одна, то рівняння має тип $(4;0)$ і має вигляд (3.1).

Якщо незалежних предметних змінних дві, то обидві предметні змінні квадратичні, тому рівняння має тип $(2;2)$. Якщо появи однієї квадратичної змінної знаходяться по одну сторону рівняння, то таке рівняння має вигляд (1.8). Якщо вони знаходяться по різні сторони рівняння, то в лівій частині рівняння першу предметну змінну позначимо через x, а другу через y. Таких рівнянь може бути два: (1.9) та $F_1(x;y) = F_2(y;x)$. Останнє рівняння за комутуванням в правій частині зводиться до рівняння (1.9).

Покажемо, що всі три рівняння попарно парастрофно-первинно-нерівносильні.

Розглянемо пари рівнянь (1.8), (1.9) і (1.8), (3.1) та припустимо, що вони парастрофно-первинно-рівносильні. Нехай $(Q;f)$ — довільна ідемпотентна квазігрупа, причому $|Q| > 1$. Очевидно, що пара (f,f) є розв'язком рівнянь (1.9) і (3.1). Тоді в обох випадках, згідно з лемою 1.4, для деяких σ і τ пара $({}^{\sigma}f, {}^{\tau}f)$ є розв'язком рівняння (1.8) і для деяких σ' і τ' пара $({}^{\sigma'}f, {}^{\tau'}f)$ є розв'язком рівняння (1.8), тобто для всіх x, y виконуються рівності

$$ {}^{\sigma}f(x,x) = {}^{\tau}f(y,y), \qquad {}^{\sigma'}f(x,x) = {}^{\tau'}f(y,y). $$

Оскільки довільний парастроф ідемпотентної квазігрупи також ідемпотентний, то кожна з цих тотожностей рівносильна рівності $x = y$ для всіх $x, y \in Q$, яка означає, що $|Q| = 1$. З отриманого протиріччя випливає, що наше припущення неправильне, тобто рівняння (1.8), (1.9), а також рівняння (1.8), (3.1) парастрофно-первинно-нерівносильні.

Розглянемо пару рівнянь (1.9), (3.1). Над кільцем лишків за модулем 7, тобто над $\mathbb{Z}_7$ визначимо квазігрупові операції f і g:

$$f(x,y) := 4x + 4y, \qquad g(x,y) := 3x + 5y.$$

Оскільки операція f комутативна, то вона має не більше трьох різних парастрофів: f, ${}^{\ell}f$, ${}^{r}f$, де

$$\begin{aligned} {}^{\ell}f(x,y) &= 4^{-1}(x - 4y) = 2(x - 4y) = 2x + 6y, \\ {}^{r}f(x,y) &= 4^{-1}(-4x + y) = 6x + 2y. \end{aligned}$$

Позаяк операції f і g ідемпотентні:

$$f(x,x) := 4x + 4x = (4+4)x = x, \qquad g(x,x) := 3x + 5x = (3+5)x = x,$$

то пара (f, g) є розв'язком рівняння (3.1). Припустимо, що рівняння (1.9) і (3.1) парастрофно-первинно-рівносильні. Тоді згідно з лемою 1.4 для деяких σ, τ пара квазігруп $({}^{\sigma}f, {}^{\tau}g)$ або пара $({}^{\tau}g, {}^{\sigma}f)$ є розв'язком рівняння (1.9), тобто для всіх $x, y \in Q$ виконується принаймні одна із рівностей

$${}^{\sigma}f(x,y) = {}^{\tau}g(x,y), \qquad {}^{\tau}g(x,y) = {}^{\sigma}f(x,y).$$

Звідси ${}^{\sigma}f = {}^{\tau}g$. Застосувавши τ^{-1} до обох частин та скориставшись першою надтотожністю (1.7), отримаємо ${}^{\tau^{-1}\sigma}f = g$. Але з доведеного вище випливає, що жоден парастроф операції f не дорівнює операції g. Отримане протиріччя говорить про те, що наше припущення неправильне, тобто рівняння (1.9) і (3.1) парастрофно-первинно-нерівносильні. □

Множини всіх розв'язків рівнянь (1.8) і (1.9) виписано в теоремі 1.1. Скориставшись означенням діагоналі, розв'язки рівняння (3.1) подамо в такому очевидному твердженні.

Твердження 3.2. *Множиною всіх розв'язків рівняння* (3.1) *є множина всіх пар квазігрупових операцій, в яких однакові головні діагоналі в їх таблицях Келі.*

Наслідок 3.1. *Існує точно одне антиквадратичне узагальнене рівняння функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад (3.1).*

Доведення випливає із теореми 3.1 та означення 3.3. □

Нижче наведені твердження є наслідками з теореми 3.1 результатів Р. Коваль [50] та А. Крапєжа [83].

Наслідок 3.2. *Існує точно два квадратичних узагальнених рівнянь функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (1.8), (1.9).

Наслідок 3.3. *Існує точно одне квадратичне узагальнене рівняння без квадратів функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (1.9).

3.2. Класифікація та розв'язування рівнянь довжини 3

Класифікацію узагальнених рівнянь функційної довжини 3 на квазігрупах досліджували В. Д. Білоусов [13] та Р. Коваль [50]. Вони встановили існування таких рівнянь, але не вивчали їх розв'язки. Р. Коваль [50] в теоремі 1.4 дала класифікацію не всіх рівнянь, а лише тих, які тут названі рівняннями типу $(3;2)$. Інші типи рівнянь були опущені і не розглядалися.

В цьому підрозділі доведено теорему про повну класифікацію всіх узагальнених рівнянь довжини 3 всіх можливих типів з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та розв'язано на множині бінарних квазігруп кожного з представників блоків розбиття.

Теорема 3.2. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 4 узагальнені рівняння функційної довжини* 3*, які мають розподіл на: предметний тип* $(3;2)$ *— це рівняння*

$$F_1(x; F_2(x; y)) = F_3(x; y), \tag{3.2}$$

$$F_1(F_2(x; x); y) = F_3(x; y), \tag{3.3}$$

$$F_1(F_2(x;x);x) = F_3(y;y); \tag{3.4}$$

предметний тип $(5;0)$

$$F_1(x;F_2(x;x))) = F_3(x;x). \tag{3.5}$$

Для доведення цієї теореми використаємо множини їх розв'язків.

Твердження 3.3. *Трійка оборотних бінарних функцій* (f_1, f_2, f_3)*, що визначені на множині* Q*, є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (3.2) *тоді і тільки тоді, коли існує оборотна операція* g *така, що* $f_1 \perp g$ *і виконуються такі співвідношення:* $f_2 = {}^r g$*,* $\quad f_3 = f_1 \underset{r}{\oplus} {}^r g$*, де* $(f \underset{r}{\oplus} h)(x,y) := f(x, h(x,y))$*.*

Доведення. Нехай трійка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3), що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (3.2), тобто виконується тотожність $f_1(x; {}^r g(x;y)) = f_3(x;y)$, де $g := {}^r f_2$, тобто $f_2 = {}^r g$. За лемою 1.1 маємо $f_1 \perp g$.

Навпаки, згідно з лемою 1.1,

$$\left(f_1 \underset{r}{\oplus} {}^r g\right)(x;y) = f_1(x; {}^r g(x;y)) = f_1(x; f_2(x;y)).$$

Оскільки $f_1 \perp g$, то згідно з лемою 1.1 операція f_3 є оборотною. $\square$

Твердження 3.4. *Трійка оборотних бінарних функцій* (f_1, f_2, f_3)*, що визначені на множині* Q*, є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (3.3) *тоді і тільки тоді, коли існує підстановка* α *та ідемпотентна квазігрупа* g *такі, що виконуються співвідношення:*

$$f_3(x;y) = f_1(\alpha x; y), \quad f_2(x;y) = g(\alpha x; \alpha y).$$

Доведення. Нехай трійка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3), що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (3.3), тобто виконується тотожність $f_1(f_2(x;x);y) = f_3(x;y)$. Звідси $f_2(x;x) = {}^\ell f_1(f_3(x;y), y)$. Підставимо $y := a \in Q$, тому $f_2(x;x) = \alpha x$, де $\alpha x := {}^\ell f_1(f_3(x;a), a)$. Перетворення α є підстановкою множини Q, оскільки α є композицією трансляцій оборотних функцій ${}^\ell f_1$ і f_3. Підставивши αx замість $f_2(x;x)$, отримаємо першу рівність із умови твердження. Визначимо операцію g, поклавши $g(x;y) := f_2(\alpha^{-1}x;\alpha^{-1}y)$, звідси маємо другу рівність із умови твердження.

Навпаки, нехай виконуються співвідношення теореми, тоді з ідемпотентності операції g випливає рівність $f_2(x,x) = g(\alpha x, \alpha x) = \alpha x$, тому $f_3(x,y) = f_1(\alpha x; y) = f_1(f_2(x;x);y)$. $\square$

Твердження 3.5. *Трійка оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3)*, які визначені на множині* Q*, є квазігруповим розв'язком узагальненого рівняння* (3.4) *тоді і тільки тоді, коли існує елемент* $e \in Q$*, підстановка* α *множини* Q*, оборотна операція* h *та ідемпотентна оборотна функція* g *такі, що операції* f_3, h *— уніпотентні і* e *є їх спільним уніпотентним елементом, а також виконуються співвідношення:*

$$f_1(x;y) = h(\alpha^{-1}x, y), \qquad f_2(x;y) = g(\alpha x, \alpha y). \tag{3.6}$$

Доведення. Нехай трійка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3), що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (3.4), тобто виконується тотожність

$$f_1(f_2(x;x);x) = f_3(y;y). \tag{3.7}$$

Нехай a — довільний елемент носія. Введемо такі позначення:

$$e := f_3(a,a), \qquad g(x,y) := f_2(\alpha^{-1}x, \alpha^{-1}y),$$

$$\alpha x := {}^{\ell}f_1(e,x), \qquad h(x,y) := f_1(\alpha x, y).$$

Покладемо в (3.7) $y = a$:

$$f_1(f_2(x;x);x) = e, \quad \text{звідси} \quad f_2(x;x) = {}^{\ell}f_1(e,x) = \alpha x.$$

Перетворення α є підстановкою носія, позаяк α є зсувом оборотної функції. З отриманої рівності маємо $x = f_2(\alpha^{-1}x, \alpha^{-1}y) = g(x,x)$. З означення випливає, що операція g є ізотопом оборотної операції, тому g — оборотна ідемпотентна операція.

Ліва частина рівності (3.7) дорівнює e, тому операція f_3 є уніпотентною, тобто e є середнім нейтральним елементом для операції f_3.

З рівності $\alpha x := {}^{\ell}f_1(e,x)$ випливає рівність $f_1(\alpha x, x) = e$, тобто операція h уніпотентна.

Навпаки, нехай виконуються умови теореми, тоді

$$\begin{aligned} f_1(f_2(x,x),x) &= f_1(g(\alpha x,\alpha x),x) = f_1(\alpha x,x) = \\ &= h(\alpha^{-1}\alpha x,x) = h(x,x) = e = f_3(y,y). \end{aligned}$$

□

Твердження 3.6. *Трійка діагональних функцій* (f_1, f_2, f_3) *є розв'язком функційного рівняння типу* $(5;0)$ *тоді і тільки тоді, коли пара* $(\delta_2;\delta_3)$ *є трансверсаллю операції* f_1*, де* $\delta_2(x) := f_2(x,x)$*,* $\delta_3(x) := f_3(x,x)$*.*

Доведення. Згідно з означенням, трійка операцій (f_1, f_2, f_3) є розв'язком функційного рівняння (3.5) тоді і тільки тоді, коли виконується тотожність $f_1(x; f_2(x;x))) = f_3(x;x)$. Згідно з позначеннями ця рівність рівносильна рівності $f_1(x;\delta_2(x))) = \delta_3(x)$. Діагональність операцій f_2 і f_3 означає, що і δ_2 і δ_3 є підстановками множини Q. Тому виконання рівності означає, що пара $(\delta_2;\delta_3)$ є трансверсаллю операції f_1. □

Доведення теореми 3.2. За умовою теореми розглядаємо лише функційні рівняння функційної довжини 3, тому предметних змінних, враховуючи повторення, п'ять. Розглянемо росташування функційних змінних, не беручи до уваги предметні змінні.

Якщо всі три функційні змінні знаходяться по одну сторону рівняння, то таке рівняння має один із таких видів:

$$F_1(F_2(u_1,u_2), F_3(u_3,u_4)) = u_5, \qquad F_1(u_1, F_2(u_2, F_3(u_3,u_4))) = u_5.$$

Обидві частини першого рівняння підставимо у вираз ${}^{\ell}F_1(z, F_3(u_3,u_4))$ замість змінної z, отримаємо рівність

$${}^{\ell}F_1(F_1(F_2(u_1,u_2), F_3(u_3,u_4)), F_3(u_3,u_4)) = {}^{\ell}F_1(u_5, F_3(u_3,u_4)).$$

В лівій частині рівняння скористаємось однією із первинних тотожностей (1.7), в результаті маємо $F_2(u_1,u_2) = {}^{\ell}F_1(u_5, F_3(u_3,u_4))$. В отриманому рівнянні функційні змінні знаходяться по обидві сторони рівняння. До того ж це рівняння парастрофно-первинно-рівносильне вихідному рівнянню, оскільки отримане з нього перетворенням зовнішнього ділення. Так само рівняння другого типу парастрофно-первинно-рівносильні рівнянням, в яких функційні змінні знаходяться по обидві сторони рівняння. Здійснивши, при необхідності, перетворення комутування, отримуємо, що надалі досить обмежитись рівняннями виду

$$F_1(u_1, F_2(u_2, u_3)) = F_3(u_4, u_5). \tag{3.8}$$

Позаяк ми розглядаємо лише нетривіальні квазігрупові рівняння, то, згідно із твердженням 1.1, різних незалежних предметних змінних у рівнянні може бути одна або дві.

Якщо незалежна предметна змінна одна, назвімо її x, то за означенням 3.6 рівняння має тип $(5; 0)$ і це є рівняння (3.5).

Якщо ж незалежних предметних змінних дві, то одна з них має три появи. а інша — дві. Назвімо їх x та y відповідно. Тому за означенням 3.6 рівняння має тип $(3; 2)$ і $u_i \in \{x, y\}$. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що u_2 лексикографічно менше за u_3, а u_4 — за u_5. Якщо це не так, то здійснимо перетворення комутування операції F_2 чи F_3.

Нехай $u_1 = x$. Якщо $u_2 = u_3 = x$, то $u_4 = u_5 = y$, тому маємо рівняння (3.4). Якщо ж $u_2 = u_3 = y$, то $u_4 = u_5 = x$ і маємо $F_1(x, F_2(y, y)) = F_3(x, x)$. За зовнішнім діленням, отримаємо рівняння $F_2(y, y) = {}^{\ell}F_1(x, F_3(x, x))$, яке з точністю до переіменування функційних змінних, збігається з (3.4). І, нарешті, якщо $u_2 \neq u_3$, то, враховуючи лексикографічний порядок, маємо $u_2 = u_4 = x$ і $u_3 = u_5 = y$, тому в даному випадку маємо рівняння (3.2).

Припустимо тепер, що $u_1 = y$, тоді $u_2 = u_3 = x$ або $u_4 = u_5 = x$. Обидва рівняння комутуванням та зовнішнім діленням зводяться до рівняння (3.3).

Повне доведення узагальнених рівнянь типу $(3; 2)$ отримане Р. Коваль у теоремі 1.4. За перейменуванням предметних змінних рівняння теореми відповідно (1.12)$\asymp$(3.3), (1.13)$\asymp$(3.4), а рівняння (1.11) не має квадратів, тому (1.11)$\asymp$(3.2)$\asymp$(1.10).

Доведемо, що рівняння (3.2)–(3.5) парастрофно-первинно-нерівносильні. Оскільки жодне з парастрофно-первинних перетворень не змінює кількості різних предметних змінних, то парастрофно-первинні перетворення з різною кількістю предметних змінних парастрофно-первинно-нерівносильні. Тому рівняння (3.5) парастрофно-первинно-нерівносильне жодному з рівнянь (3.2)–(3.4).

Для доведення парастрофно-попарної первинної нерівносильності рівнянь (3.2)–(3.4) для кожної невпорядкованої пари цих рівнянь наведемо приклад трійки оборотних операцій, яка є розв'язком одного рівняння і жодна із трійок парастрофів цих операцій не є розв'язком іншого рівняння. Зазначені трійки операцій зручно подати в такій табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Попарна парастрофна нерівносильність рівнянь довжини 3.

	(3.2)	(3.3)	(3.4)
(3.3)	(h,h,h)	$\times$	$\times$
(3.4)	(k,f,k)	(h,h,h)	$\times$
(3.5)	(h,h,h)	(f,g,h)	(h,h,h)

В цій таблиці f, h, g — попарно різні (можливо ізоморфні) квазігрупи Штейнера, k — лупа Штейнера, які визначені на носієві Q, де $|Q|>1$. Тут і далі знак $\times$ використовується для усунення повторень. На перетині одного рядка і стовпця розташована трійка функцій, які є розв'язком одного рівняння і не є розв'язком жодного парастрофно-первинно-рівносильного іншого рівняння.

Справді, трійка (h,h,h) в табл. 3.1 є розв'язком кожного з рівнянь (3.3) і (3.5) за будь-якого носія, а рівняння (3.2) і (3.4) ця трійка задовольняє лише тоді, коли носій одноелементний. Тому кожна пара рінянь (3.2), (3.3); (3.2), (3.5); (3.3), (3.4); і (3.4), (3.5) парастрофно-первинно-нерівносильні.

Оскільки квазігрупа Штейнера ідемпотентна, то трійка (f,g,h) з табл. 3.1 є розв'язком рівняння (3.5). Із того, що квазігрупа Штейнера тотально-симетрична, тобто всі парастрофи однакові, то трійка (f',g',h'), яка є перестановкою операцій f, h, g, мала би бути розв'язком рівняння (3.3), але це можливо лише тоді, коли носій одноелементний. Тому ріняння (3.3) і (3.5) парастрофно-первинно-нерівносильні.

І нарешті, трійка (k, f, k) з табл. 3.1 є розв'язком рівняння (3.4), тоді принаймні одна із трійок (f, k, k), (k, f, k), (k, k, f) є розв'язком рівняння (3.2), тобто виконується принаймні одна із тотожностей

$$f(x, k(x, y)) = k(x, y), \qquad k(x, f(x, y)) = k(x, y), \qquad k(x, k(x, y)) = f(x, y).$$

В першій рівності замінимо $k(x, y)$ на y, в другій — скоротимо на x, а в третій — скористаємося тотожністю тотально-симетричної квазігрупи. В усіх трьох випадках отримаємо одноелементність носія. Це означає, що рівняння (3.2) і (3.4) парастрофно-первинно-нерівносильні. □

Наслідок 3.4. *Існує точно одне антиквадратичне узагальнене рівняння функційної довжини 3 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (3.5).

Доведення випливає з теореми 3.2 і означення 3.3. □

Результат Р. Коваль [50], а саме теорему 1.4, можна сформулювати як наслідок, що випливає з теореми 3.2.

Наслідок 3.5. *Існує точно три майже квадратичних узагальнених рівнянь функційної довжини 3 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (3.2), (3.3) *і* (3.4).

Теорема 1.2, отримана В. Д. Білоусовим [13], нижче подана як наслідок з теореми 3.2 та наслідку 3.5 і сформульована в новій редакції.

Наслідок 3.6. *Існує точно одне майже квадратичне узагальнене рівняння без квадратів функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (3.2).

3.3. Класифікація та розв'язування рівнянь довжини 4

В цьому підрозділі досліджуються узагальнені рівняння функційної довжини 4, їх повна класифікація з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та розв'язування рівнянь на множині бінарних квазігруп.

Часткову класифікацію таких рівнянь вивчали Коваль, Сохацький та Крапєж. Коваль дала класифікацію рівнянь, які тут названі рівняннями типу $(2;2;2)$, проте вона дослідила не всі рівняння цього типу, лише чотири класи та навела множини розв'язків представників цих класів. Уточнену класифікацію лише квадратичних рівнянь функційної довжини 4 дав Крапєж, користуючись описанням ізоморфних графів. Він встановив, що таких рівнянь точно п'ять і виділив представника п'ятого класу та знайшов множину його розв'язків на бінарних квазігрупах. Проте його метод застосовний лише для квадратичних функційних рівнянь.

Певні класи неквадратичних рівнянь виділила Коваль (теорема 1.6) Тут ці рівняння названі рівняннями предметних типів $(4;2;0)$ та $(3;3;0)$. Але ніяка незалежність цих рівнянь не досліджувалась, тобто ніякої класифікації незроблено.

В цьому підрозділі не лише дана повна класифікація рівнянь функційної довжини 4 за відношенням парастрофно-первинної рівносильності, а і класифіковано їх за предметними типами, зокрема встановлена їх парастрофно-первинна нерівносильність. До того ж, з кожного отриманого блока розбиття виділено представника та знайдено множину всіх його розв'язків на оборотних функціях довільної множини.

3.3.1. Класифікація рівнянь за типами

Лема 3.1. *Якщо у функційних рівняннях різна кількість різних незалежних предметних змінних, то такі рівняння парастрофно-первинно-нерівносильні.*

Доведення. Істинність цієї леми випливає з означення про парастрофно-первинні перетворення. Як і перейменування предметних змінних, так і перейменування функційних змінних не змінює кількості різних незалежних предметних змінних. Перетворення комутування теж залишає на місці цю кількість. Парастрофні перетворення ділення як лівого, так і правого збільшують кількість появ предметних змінних, а кількість різних предметних змінних залишається сталою. □

Лема 3.2. *Квазігрупові нетривіальні функційні рівняння функційної довжини 4 існують лише чотирьох типів:* $(2;2;2)$, $(4;2;0)$, $(3;3;0)$, $(6;0;0)$.

Доведення. Оскільки всі функційні змінні в рівнянні бінарні, то кількість предметних змінних дорівнює 6, враховуючи їх повторення. Оскільки рівняння квазігрупове і нетривіальне, то кожна предметна змінна повторюється принаймні два рази, тому таке рівняння має не більше, ніж три різні предметні змінні, тобто предметний тип має вигляд (a, b, c), де $a, b, c > 1$ і $a + b + c = 6$. Занумеруємо предметні змінні так, що змінні лексикографічного порядку мають незростаючу кількість появ. Тому досить розглядати лише функційні рівняння із змінними x, y, z, в яких x має a появ, y — b появ, а z — c появ, тобто лише рівняння типів (a, b, c), де $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$ і $a+b+c = 6$. Ці умови задовольняють лише такі вибірки: $(2;2;2)$, $(4;2;0)$, $(3;3;0)$, $(6;0;0)$. □

Лема 3.3. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує принаймні 19 узагальнених рівнянь функційної довжини 4, які мають розподіл на:*
— предметний тип $(2;2;2)$ *— це рівняння:* (1.14)–(1.18)*;*
— предметний тип $(4;2;0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(x;y) = F_2(x;F_3(x;F_4(x;y))), \tag{3.9}$$

$$F_1(y;y) = F_2(F_3(x;x);F_4(x;x)), \tag{3.10}$$

$$F_1(x;x) = F_2(y;F_3(y;F_4(x;x))), \tag{3.11}$$

$$F_1(y;y) = F_2(x;F_3(x;F_4(x;x))), \tag{3.12}$$

$$F_1(x;x) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \tag{3.13}$$

$$F_1(x;x) = F_2(x;F_3(y;F_4(x;y))); \tag{3.14}$$

— предметний тип $(3;3;0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(x;y) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \tag{3.15}$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;y);y), \tag{3.16}$$

$$F_1(x; F_2(y; y)) = F_3(x; F_4(x; y)), \tag{3.17}$$

$$F_1(x; y) = F_2(F_3(x; x); F_4(y; y)), \tag{3.18}$$

$$F_1(x; F_2(x; x)) = F_3(y; F_4(y; y)), \tag{3.19}$$

$$F_1(x; F_2(y; y)) = F_3(y; F_4(x; x)); \tag{3.20}$$

— *предметний тип* $(6; 0; 0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(x; F_2(x; x)) = F_3(x; F_4(x; x)), \tag{3.21}$$

$$F_1(x; x) = F_2(F_3(x; x); F_4(x; x)). \tag{3.22}$$

Доведення. З точністю до комутування, всі узагальнені рівняння функційної довжини 4 можна поділити за довжиною підтермів. Оскільки рівняння бінарні, то згідно з означенням 3.5 предметна довжина такого рівняння є 6. Оскільки предметна довжина рівняння – це сума довжин лівої і правої частини рівняння, то враховуючи лему 1.2, всі такі рівняння за довжиною можна поділити на три види: $1 = 5$, $2 = 4$, $3 = 3$, де $m = n$ означає, m – предметна довжина терма лівої частини, а n – предметна довжина терма правої частини рівняння. Вид $1 = 5$ може мати вигляди $1 = 1 + 4$ та $1 = 2 + 3$. Перший поділимо зовні на одиничний підтерм, а другий на терм довжини два, в результаті отримаємо вид $2 = 4$ та вид $3 = 3$ відповідно. Вид $2 = 4$ може бути такого вигляду $2 = 1 + (1 + 2)$ або $2 = 2 + 2$. У першому випадку зовнішнім діленням на терм довжини один, отримаємо вид $3 = 3$, який має вигляд $1 + 2 = 1 + 2$. Отже, всі узагальнені рівняння досить розглянути за розташуванням дужок таких форм:

$$A)\ 2 = 2 + 2, \quad B)\ 2 = 1 + (1 + 2).$$

В межах даного доведення, всі функційні змінні позначаємо одним і тим самим символом $(\cdot)$ і вважаємо, що різні появи цього символу позначають різні функційні змінні, оскільки в загальному рівнянні всі функційні змінні є попарно різними. Інколи $(\cdot)$ опускаємо, наприклад, за цих позначень рівняння (3.9) мають вигляд: $xy = x \cdot (x \cdot xy)$.

Із твердження 1.1 випливає, що такі рівняння предметної довжини 6 можуть мати одну, дві, або три різних незалежних предметних змінних, кожна з яких має не менше дві появи. За означенням 3.6 — якщо рівняння мають одну незалежну предметну змінну, то їх тип — $(6;0;0)$, якщо — дві незалежних предметних змінних, то тип таких рівнянь може бути $(4;2;0)$ та $(3;3;0)$. Якщо рівняння мають три різних незалежних предметних змінних, то тип рівняння — $(2;2;2)$.

Враховуючи різні розташування дужок та зовнішнє ділення термів, маємо, що рівняння типу $(6;0;0)$ з точністю до парастрофно-первинної рівносильності можуть мати принаймні один із виглядів (3.21) та (3.22).

Розглянемо рівняння предметного типу $(4;2;0)$. Всі такі рівняння класифікуємо з точністю до комутування підтермів. Оскільки функційні рівняння мають дві предметні змінні, то враховуючи лексикографічний порядок, предметну змінну, яка має чотири появи, позначимо через x, а змінну, яка має дві появи — через y.

Спочатку розглянемо функційні рівняння, які не мають квадратів. Це означає, що підтерми довжини два мають появи різних предметних змінних. Таких рівнянь з розташуванням дужок для випадку $A)$ немає, оскільки маємо три підтерми і чотири появи однієї і тієї ж змінної. Для випадку $B)$ таке рівняння одне: дві появи змінної y знаходяться в різних підтермах довжини два, а в усіх інших термах розташована змінна x. З точністю до комутування, отримуємо $xy = x \cdot (x \cdot xy)$, тобто рівняння (3.9).

Розглянемо функційні рівняння, в яких є квадрати. Припустимо, що y^2 є підтермом рівняння, тоді на всіх інших місцях знаходиться змінна x. Для випадку $A)$ маємо три такі рівняння:

$$y^2 = x^2 \cdot x^2, \quad x^2 = y^2 \cdot x^2, \quad x^2 = x^2 \cdot y^2.$$

Перше рівняння збігається з (3.13), а інші два -– за допомогою зовнішнього ділення на x^2 зліва і справа відповідно парастрофно-первинно-рівносильні до першого рівняння. У випадку $B)$ маємо два такі рівняння:

$$y^2 = x \cdot (x \cdot x^2), \qquad x^2 = x \cdot (x \cdot y^2).$$

Перше рівняння збігається з (3.12), а друге — за допомогою зовнішнього ділення двічі на x парастрофно-первинно-рівносильне до першого рівняння.

Надалі розглядатимемо рівняння, в яких y^2 не є підтермом, тобто y розташований в термах довжини один. Для цього розглянемо квадрати змінної x.

Нехай рівняння має точно один квадрат, а саме x^2, тоді для розташування дужок випадку A) інші два підтерми довжини два будуть мати вигляд xy, тому маємо такі три рівняння:

$$x^2 = xy \cdot xy, \quad xy = x^2 \cdot xy, \quad xy = xy \cdot x^2.$$

Перше рівняння збігається з рівнянням (3.13), а два інші рівняння за допомогою зовнішнього ділення на терм xy парастрофно-первинно-рівносильні до першого рівняння. Для розташування дужок випадку B) один із підтермів довжини два збігається з x^2, а інший з xy. Якщо x^2 знаходиться зліва, то маємо такі два рівняння:

$$x^2 = x \cdot (y \cdot xy), \qquad x^2 = y \cdot (x \cdot xy).$$

Перше рівняння збігається з (3.14). Друге рівняння поділимо на x через y, отримаємо рівняння (3.13). Якщо x^2 знаходиться справа, то маємо:

$$xy = x \cdot (y \cdot x^2), \qquad xy = y \cdot (x \cdot x^2).$$

Ці рівняння, послідовним діленням зовні на предметні змінні x та y відповідно та комутуванням частин рівняння, парастрофно-первинно-рівносильні до двох попередніх рівнянь, які, в свою чергу, з точністю до комутування, парастрофно-первинно-рівносильні до рівнянь (3.14) і (3.13) відповідно.

Припустимо, що рівняння має два квадрати, тобто підтерм x^2 має дві появи в рівнянні. З розташуванням дужок випадку A) таких рівнянь немає. З розташуванням дужок B) маємо одне рівняння $x^2 = y \cdot (y \cdot x^2)$, яке збігається з рівнянням (3.11).

Розглянемо узагальнені рівняння предметного типу $(3;3;0)$. Спочатку опишемо рівняння, які не мають квадратів. Оскільки кожна предметна змінна має по три появи, то підтерми довжини два мають появи різних змінних, тому таке рівняння з розташуванням дужок $A)$ має вигляд (3.15), а з розташуванням дужок $B)$, за допомогою зовнішнього ділення на одиничний підтерм рівняння має вигляд (3.16).

Нехай рівняння має один квадрат, позначимо його $F(y;y)$. Тоді таких рівнянь з розташуванням дужок $A)$ немає, а рівняння з розташуванням дужок $B)$, за допомогою зовнішнього ділення на одиничний підтерм, має вигляд (3.17).

Нехай рівняння має два квадрати, тоді рівняння з розташуванням дужок $A)$ має вигляд (3.18). Справді, оскільки в рівнянні три терми довжини два, і два квадрати, то нехай обидва квадрати розташовані в правій частині рівняння, тому рівняння має вигляд (3.18). Якщо квадрати розташовані по різні сторони рівняння, то зовні поділимо на квадрат, тому отримаємо рівняння (3.18). Рівнянь з розташуванням дужок $B)$ з двома квадратами може бути два: $x^2 = x \cdot (y \cdot y^2)$, $\quad x^2 = y \cdot (x \cdot y^2)$. Кожне з них зовні поділимо на одиничний терм, отримаємо рівняння (3.19), (3.20) відповідно .

Узагальнених рівнянь предметного типу $(2;2;2)$ існує п'ять, згідно з теоремою 1.4, а саме рівняння (1.14)–(1.18). $\square$

3.3.2. Розв'язання рівнянь типу (4;2;0)

Згідно з лемою 3.3, різних узагальнених функційних рівнянь типу $(4;2;0)$ є принаймні шість. У цьому підрозділі подано їх розв'язки на бінарних оборотних функціях.

Нехай f_1, f_2, f_3, f_4 -– двомісні оборотні функції, які визначені на множині Q.

Твердження 3.7. *Четвірка оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (3.9) тоді і тільки тоді, коли вико-*

нується співвідношення $f_1(x;y) = f_2(x; f_3(x; f_4(x;y)))$.

Доведення очевидне. Наприклад, вибірка $(f, f, g, {}^r g)$ є розв'язком функційного рівняння (3.9), якщо операції f, g оборотні. □

Твердження 3.8. *Четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (3.10) тоді і тільки тоді, коли існує елемент* a *з множини* Q *такий, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(y;y) = a; \qquad f_4(x;x) = {}^r f_2(f_3(x;x); a). \tag{3.23}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (3.10), тобто виконується тотожність:

$$f_1(y;y) = f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)). \tag{3.24}$$

Нехай $c \in Q$ і $a := f_2(f_3(c;c); f_4(c;c))$. Покладемо $x = c$ в (3.10), отримаємо $f_1(y;y) = a$, тобто першу рівність з (3.23). Враховуючи це, з (3.24) отримуємо $f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)) = a$. Звідси, враховуючи означення правого ділення для функції f_2, маємо другу рівність з (3.23) для всіх $x \in Q$.

Навпаки, нехай четвірка операцій (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існує елемент a з множини Q такий, що виконуються рівності (3.23). Тоді

$$f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)) = f_2(f_3(x;x); {}^r f_2(f_3(x;x); a)) = a = f_1(y;y).$$

Отже, (3.24) — тотожність, що й треба було довести. □

Твердження 3.9. *Четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (3.11), тоді і тільки тоді, коли існує перетворення* δ*, підстановка* α *множини* Q *такі, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(x;x) = \alpha\delta x; \quad f_4(x;x) = \delta x, \quad f_3(y;\delta x) = {}^r f_2(y; \alpha\delta x). \tag{3.25}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (3.11), тобто виконується тотожність:

$$f_1(x;x) = f_2(y; f_3(y; f_4(x;x))). \tag{3.26}$$

Нехай a довільний елемент множини Q. Тоді при $y = a$ визначимо $\alpha x := f_2(a; f_3(a; x))$. Врахувавши це позначення з тотожності (3.26) маємо $f_1(x; x) = \alpha f_4(x; x)$. Позначимо $\delta x := f_4(x; x)$, тоді з останньої рівності отримуємо першу рівність з (3.25). Врахувавши її для (3.26), отримаємо $\alpha\delta x = f_2(y; f_3(y; \delta x))$. Звідси, за правим діленням функції f_2, отримуємо третю рівність з (3.25).

Навпаки, нехай четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існують перетворення δ, підстановка α множини Q такі, що виконуються рівності (3.25). Тоді отримуємо

$$f_2(y; f_3(y; f_4(x; x))) = f_2(y; f_3(y; \delta x)) = f_2(y; {}^r\!f_2(y; \alpha\delta x)) = \alpha\delta x.$$

Отже, (3.26) є тотожністю, а це означає, що четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком функційного рівняння (3.11). $\square$

Твердження 3.10. *Четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (3.12), тоді і тільки тоді, коли існує підстановка* α *та елемент* a *з множини* Q *такі, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(y; y) = a; \quad f_2(x; \alpha x) = a, \quad f_4(x; x) = {}^r\!f_3(x; \alpha x). \tag{3.27}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (3.12), тобто виконується тотожність:

$$f_1(y; y) = f_2(x; f_3(x; f_4(x; x))). \tag{3.28}$$

Нехай c довільний елемент з Q, визначимо $a := f_2(c; f_3(c; f_4(c; c)))$. Покладемо $x = c$ в (3.28), отримаємо першу рівність з (3.27). Врахувавши її у (3.28), маємо $f_2(x; f_3(x; f_4(x; x))) = a$. З отриманої рівності, за означенням правого ділення функції f_2, отримуємо ${}^r\!f_2(x; a) = f_3(x; f_4(x; x))$.

Визначимо перетворення $\alpha x := {}^r\!f_2(x; a)$, яке є підстановкою множини Q, позаяк воно визначено як зсув квазігрупової операції. З визначення перетворення α отримуємо другу рівність із (3.27). Враховуючи перетворення α, з рівності ${}^r\!f_2(x; a) = f_3(x; f_4(x; x))$ маємо $f_3(x; f_4(x; x)) = \alpha x$. Звідси, за правим діленням функції f_3, випливає третя рівність з (3.28).

Навпаки, нехай четвірка квазігрупових операцій (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існують підстановка α та елемент a з множини Q такі, що виконуються співвідношення (3.27). Тоді отримуємо

$$f_2(x; f_3(x; f_4(x; x))) = f_2(x; f_3(x; {}^r f_3(x; \alpha x))) = f_2(x; \alpha x) = a = f_1(y; y).$$

Отже, (3.28) є тотожністю, тобто, четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком функційного рівняння (3.12). □

Твердження 3.11. *Четвірка функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком функційного рівняння (3.13), тоді і тільки тоді, коли*

$$f_4(x; y) = {}^r f_2(f_3(x; y); f_1(x; x)). \tag{3.29}$$

Доведення. Нехай (f_1, f_2, f_3, f_4) – довільна четвірка двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q. Тоді ця четвірка є розв'язком функційного рівняння (3.13), а це означає виконання тотожності

$$f_1(x; x) = f_2(f_3(x; y); f_4(x; y)),$$

яка за означенням правого ділення функції f_2 рівносильна (3.29). □

Твердження 3.12. *Четвірка функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком функційного рівняння (3.14), тоді і тільки тоді, коли функції f_2, f_3 оборотні, існує підстановка α з множини Q така, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(x; x) = f_2(x; \alpha x), \qquad f_4(x; y) = {}^r f_3(y; \alpha x). \tag{3.30}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (3.14), тобто виконується тотожність:

$$f_1(x; x) = f_2(x; f_3(y; f_4(x; y))). \tag{3.31}$$

Нехай $a \in Q$ і $\alpha x := f_3(a; f_4(x; a))$. Покладемо $y = a$ в (3.31), отримаємо першу рівність з (3.30). Враховуючи отримане, рівність (3.31) має вигляд:

$$f_2(x; \alpha x) = f_2(x; f_3(y; f_4(x; y))).$$

Скоротимо ліву і праву частини рівняння зовні на x, в результаті отримаємо $\alpha x = f_3(y; f_4(x; y))$. Звідси, за означенням правого ділення функції f_3, отримуємо другу рівність з (3.30).

Навпаки, нехай четвірка операцій (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існують підстановка α, оборотні функції f_2, f_3 множини Q такі, що виконуються співвідношення (3.30), тоді

$$f_2(x; f_3(y; f_4(x; y))) = f_2(x; f_3(y; {}^r f_3(y; \alpha x))) = f_2(x; \alpha x) = f_1(x; x),$$

тобто (3.31) є тотожністю. □

3.3.3. Розв'язання рівнянь типів (3;3;0)

У цьому розділі знайдено розв'язки узагальнених функційних рівнянь (3.15)–(3.20) на множині бінарних квазігрупових операцій.

Твердження 3.13. *Четвірка* (f_1, f_2, f_3, f_4) *оборотних бінарних функцій є квазігруповим розв'язком* (3.15) *тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення*

$$f_1(x; y) = f_2(f_3(x; y); f_4(x; y)). \tag{3.32}$$

Доведення. Якщо (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком (3.15), то очевидно, що виконується тотожність (3.32). Наприклад, якщо f_3 і f_4 оборотні, то f_2 оборотна як композиція оборотних, а f_1 — оборотна з рівності до оборотної функції. Таким прикладом є приклад, в якому всі чотири функції є ідемпотентними квазігрупами. □

Твердження 3.14. *Четвірка* (f_1, f_2, f_3, f_4) *оборотних бінарних функцій є квазігруповим розв'язком* (3.15) *тоді і тільки тоді, коли існує оборотна функція* f *така, що виконуються співвідношення*

$$f_2(x; y) = {}^r f_1(x; f(x; y)), \quad f_4(x; y) = {}^\ell f_3(f(x; y); y), \tag{3.33}$$

операції f_1, f_2 *обернені та*

$${}^r f_1 \perp {}^r f, \qquad {}^\ell f_3 \perp {}^\ell f. \tag{3.34}$$

Доведення. Нехай (f_1, f_2, f_3, f_4) буде квазігруповим розв'язком (3.16), тобто виконується тотожність

$$f_1(x; f_2(x; y)) = f_3(f_4(x; y); y). \tag{3.35}$$

Визначимо операцію f:

$$f(x; y) := f_1(x; f_2(x; y)), \tag{3.36}$$

потім, відповідно до (3.35), маємо

$$f(x; y) = f_3(f_4(x; y); y). \tag{3.37}$$

З рівностей (3.36) і (3.37), згідно з лемою 1.1, маємо (3.34).

Навпаки, нехай (3.33) і (3.34) є істинними, то згідно з лемою 1.1 функції f_2 і f_4 є оборотними. Крім того

$$f_1(x; f_2(x; y)) = f_1(x; {}^r f_1(x; f(x; y))) = f(x; y),$$

$$f_3(f_4(x; y); y) = f_3({}^\ell f_3((f(x; y); y); y) = f(x; y).$$

Таким чином, (3.35) є тотожністю, тому четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком рівняння (3.16). □

Наслідок 3.7. *Довільний парастроф кожної компоненти кожного розв'язку рівняння* (3.16) *має ортогональну пару.*

Доведення. Рівності (3.33) можна записати таким чином:

$$f_2(x; {}^r f(x; y)) = {}^r f_1(x; y), \quad f_4(x; {}^\ell f(x; y)) = {}^\ell f_3(x; y).$$

Згідно з лемою 1.1 та твердженням 3.14, кожна з функцій f_2 f_4, ${}^r f_1$, ${}^\ell f_3$ має ортогональну пару. Завдяки теоремі 1.9, всі парастрофи f_1, f_2, f_3, f_4 мають ортогональні пари. □

Твердження 3.15. *Четвірка* (f_1, f_2, f_3, f_4) *бінарних функцій є квазігруповим розв'язком* (3.17), *тоді і тільки тоді, коли* f_2 *є діагональною оборотною функцією,* f_1, f_3 *оборотні та виконуються співвідношення:*

$${}^r f_3 \perp {}^r f_1; \tag{3.38}$$

$$f_4(x; y) = {}^r f_3(x; f_1(x; \delta_{f_2} y)). \tag{3.39}$$

Доведення. Нехай (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком (3.17), тобто виконується тотожність

$$f_1(x; f_2(y; y)) = f_3(x; f_4(x; y)). \tag{3.40}$$

Покладемо $x = a \in Q$ в (3.40): $\delta_{f_2} = \left(L_a^{f_1}\right)^{-1} L_a^{f_3} L_a^{f_4}$. Операція δ_{f_2} є бієкцією множини Q, тому що це композиція трансляцій оборотних функцій. Це означає, що f_2 діагональ, тож з (3.40) маємо

$$f_1(x; \delta_{f_2} y) = f_3(x; f_4(x; y)). \tag{3.41}$$

Використовуючи праве ділення f_3, отримаємо (3.39). З леми 1.1, рівність (3.41) означає (3.38).

Навпаки, згідно з лемою 1.1, функція f_4 оборотна. З (3.39) визначимо f_1, використовуючи праве ділення, f_3, як результат отримаємо (3.41). Замінючи δ_{f_2} з $f_2(y; y)$, матимемо тотожність (3.40). Таким чином, четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком (3.17). □

Твердження 3.16. *Четвірка* (f_1, f_2, f_3, f_4) *бінарних функцій є квазігруповим розв'язком* (3.18), *тоді і тільки тоді, коли* f_2*,* f_3*,* f_4 *оборотні,* f_3*,* f_4 *діагоналі і виконуються такі співвідношення:*

$$f_1(x; y) = f_2\left(\delta_{f_3} x; \delta_{f_4} y\right). \tag{3.42}$$

Доведення. Нехай (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком (3.17), тобто виконується тотожність

$$f_1(x; y) = f_2(f_3(x; x); f_4(y; y)). \tag{3.43}$$

Замінимо $x = c \in Q$ і $y = c$ в (3.43) по черзі, отримаємо

$$\delta_{f_3} = \left(L_{f_3(c;c)}^{f_2}\right)^{-1} L_c^{f_1}, \quad \delta_{f_4} = \left(R_{f_4(c;c)}^{f_2}\right)^{-1} R_c^{f_1}. \tag{3.44}$$

δ_{f_3} і δ_{f_4} є бієкціями множини Q, тому що вони є композицією трансляцій оборотних функцій. Операції f_3, f_4 діагональні, що випливають з (3.44). Замінивши δ_{f_3} і δ_{f_4} в (3.43) для f_3, f_4, як результат отримаємо (3.42).

І навпаки, згідно з лемою 1.1, функція f_1 оберотна. Перевіримо виконання тотожності (3.43):

$$f_2(f_3(x; x); f_4(y; y)) = f_2(\delta_{f_3} x; \delta_{f_4} y) = f_1(x; y).$$

Таким чином, четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком (3.18). $\square$

Твердження 3.17. *Четвірка* (f_1, f_2, f_3, f_4) *оборотних бінарних функцій є квазігруповим розв'язком* (3.19)*, тоді і тільки тоді, коли функції* f_2*,* f_4 *діагональні та існує такий елемент* a *з* Q*, для якого виконуються співвідношення:*

$$\delta_{f_2} = M_a^{f_1}, \quad \delta_{f_4} = M_a^{f_3}. \tag{3.45}$$

Доведення. Нехай (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком (3.17), тобто має місце така тотожність

$$f_1\left(x; \delta_{f_2}(x)\right) = f_3\left(y; \delta_{f_4}(y)\right). \tag{3.46}$$

Замінивши x елементом a носія, в результаті отримаємо $f_1(x; \delta_{f_2}(x)) = a$, $f_3(y; \delta_{f_4}(y)) = a$. Ці рівності еквівалетні до (3.45). $\square$

Твердження 3.18. *Четвірка* (f_1, f_2, f_3, f_4) *оборотних бінарних функцій є квазігруповим розв'язком* (3.20)*, тоді і тільки тоді, коли функції* f_2*,* f_4 *діагональні та виконуються співвідношення:*

$$f_1(x; y) = f_3\left(\delta_{f_2}^{-1}(y); \delta_{f_4}(x)\right). \tag{3.47}$$

Доведення. Нехай (f_1, f_2, f_3, f_4) квазігруповий розв'язок (3.17), тобто виконується тотожність

$$f_1(x; f_2(y; y)) = f_3(y; f_4(x; x)). \tag{3.48}$$

Покладемо $x = a \in Q$ і $y = a$ в (3.48):

$$\delta_{f_2} = \left(L_a^{f_1}\right)^{-1} R_{f_4(a;a)}^{f_3}, \quad \delta_{f_4} = \left(L_a^{f_3}\right)^{-1} R_{f_2(a;a)}^{f_1}.$$

Перетворення δ_{f_2} і δ_{f_4} є бієкцією множини Q, тому що вони є композицією трансляцій оборотних операцій, тобто функції f_2, f_4 діагональні. Замінимо δ_{f_2} і δ_{f_4} для f_2, f_4 в (3.48). Як результат отримаємо (3.47).

І навпаки, з цього припущення випливає, що функції f_2, f_4 ортогональні. Отже, $f_1(x; \delta_{f_2} y) = f_3\left(y; \delta_{f_4}(x)\right)$, це тотожність (3.48) і вона правильна. Таким чином, четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) є квазігруповим розв'язком рівняння (3.20). $\square$

Розглянемо рівняння

$$F_1(F_3(x;x);y) = F_2(x;F_4(y;y)), \tag{3.49}$$

яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (3.20). Справді, за комутування підтермів, зміною частин рівняння місцями та перейменуванням функційних змінних, рівняння (3.20)$\asymp$(3.49). З твердження 3.18 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.8. *Четвірка оборотних операцій* (f_1, f_2, f_3, f_4), *що визначені на множині* Q, *є розв'язком рівняння* (3.49) *тоді і тільки тоді, коли існують підстановки* γ, δ *множини* Q *такі, що*

$$f_1(x;y) = f_2(\gamma^{-1}(x);\delta(y)), \quad f_3(x;x) = \gamma(x), \quad f_4(y;y) = \delta(y).$$

3.3.4. Розв'язання рівнянь типів (6;0;0)

У цьому підрозділі розв'язано функційні рівняння типу $(6;0;0)$ на множині діагональних оборотних операцій.

Твердження 3.19. *Четвірка оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком рівняння* (3.21) *тоді і тільки тоді, коли функції* f_2, f_4 *діагональні; існують підстановки* α, β *носія, ідемпотентні оборотні операції* g_2, g_4 *та оборотні* — g_1, g_3 *із однаковими головними діагоналями такі, що*

$$\begin{aligned} f_1(x;y) &= g_1(x, \alpha^{-1}y), \qquad & f_2(x;y) &= g_2(\alpha x, \alpha y), \\ f_3(x;y) &= g_1(x, \beta^{-1}y), \qquad & f_4(x;y) &= g_4(\beta x, \beta y). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Доведення. Нехай четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (3.21) і функції f_2 і f_4 діагональні. Діагональність означає існування підстановок α, β носія таких, що $f_2(x;x) = \alpha x$, $f_4(y,y) = \beta y$. Замінимо в цих рівностях x на $\alpha^{-1}x$ та y на $\beta^{-1}y$, в результаті матимемо: $f_2(\alpha^{-1}x;\alpha^{-1}x) = x$, $f_4(\beta^{-1}y, \beta^{-1}y) = y$. Це означає, що операції, які визначені рівностями

$$g_2(x;y) := f_2(\alpha^{-1}x;\alpha^{-1}y), \qquad g_2(x;y) := f_4(\beta^{-1}x, \beta^{-1}y),$$

є оборотними та ідемпотентними, а з їх означення випливають дві рівності із (3.50). Знайдені значення для f_2 f_4 підставимо в (3.21):

$$f_1(x, g_2(\alpha x, \alpha x)) = f_3(x, g_4(\beta x, \beta x)).$$

Оскільки операції g_2, g_4 ідемпотентні, то дана рівність рівносильна рівності $f_1(x, \alpha x) = f_3(x, \beta x)$. А ця рівність означає, що операції, які визначені співвідношеннями

$$g_1(x, y) := f_1(x, \alpha y), \qquad g_3(x, y) := f_3(x, \beta y)$$

мають однакові діагоналі. Звідси й випливають дві інші рівності з (3.50).

Навпаки, нехай виконуються умови теореми, тоді

$$f_1(x, f_2(x, x)) = g_1(x, \alpha^{-1} g_2(\alpha x, \alpha x)) = g_1(x, \alpha^{-1}\alpha x) = g_1(x, x) =$$

$$= g_2(x, x) = g_2(x, \beta^{-1}\beta x) = g_2(x, \beta^{-1} g_4(\beta x, \beta x)) = f_3(x, f_4(x, x)).$$

Отже, четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (3.21) і функції f_2, f_4 діагональні. □

Твердження 3.20. *Четвірка оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком рівняння* (3.22) *тоді і тільки тоді, коли функції* f_1, f_3, f_4 *діагональні; існують підстановки* γ_i, $i = 1, 3, 4$, *носія та ідемпотентні оборотні операції* g_1, g_2, g_3, g_4 *такі, що виконуються співвідношення:*

$$\begin{aligned} f_i(x; y) &= g_i(\gamma_i x, \gamma_i y), \quad i = 1, 3, 4; \\ f_2(x; y) &= g_2(\gamma_1\gamma_3^{-1} x, \gamma_1\gamma_4^{-1} y). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Доведення. Нехай четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (3.22) і функції f_1, f_3, f_4 діагональні, тобто виконується тотожність

$$f_1(x, x) = f_2(f_3(x, x), f_4(x, x)) \tag{3.52}$$

та існують підстановки γ_i, $i = 1, 3, 4$, носія такі, що $f_i(x, x) = \gamma_i x$, де $i = 1, 3, 4$. Замінимо в останній рівності x на $\gamma_i^{-1} x$: $f_i(\gamma_i^{-1} x, \gamma_i^{-1} x) = x$, $i = 1, 3, 4$. Це означає, що операції, які визначені рівностями

$$g_i(x, y) := f_i(\gamma_i^{-1} x, \gamma_i^{-1} x), \quad i = 1, 3, 4,$$

ідемпотентні та оборотні. Очевидно, що з цих рівностей випливають три рівності із (3.51). Знайдені значення для f_1, f_3, f_4 підставимо в (3.52):

$$g_1(\gamma_1 x, \gamma_1 x) = f_2(g_3(\gamma_3 x, \gamma_3 x), g_4(\gamma_4 x, \gamma_4 x)).$$

Позаяк операції g_1, g_3, g_4 ідемпотентні, то дана рівність рівносильна рівності $\gamma_1 x = f_2(\gamma_3 x, \gamma_4 x)$. Замінивши x на $\gamma_1^{-1}x$, маємо ідемпотентність операції, яка визначена рівністю $g_2(x,y) := f_2(\gamma_3\gamma_1^{-1}x, \gamma_4\gamma_1^{-1}y)$. З цієї рівності випливає четверта рівність із (3.51).

Навпаки, нехай виконуються співвідношення (3.51) для деяких підстановок γ_1, γ_3, γ_4 носія і для деяких ідемпотентних оборотних операцій g_1, g_2, g_3, g_4, тоді

$$\begin{aligned} f_1(x;x) &= g_1(\gamma_1 x, \gamma_1 x) = \gamma_1 x = g_2(\gamma_1 x, \gamma_1 x) = f_2(\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_1 x, \gamma_4\gamma_1^{-1}\gamma_1 x) = \\ &= f_2(\gamma_3 x, \gamma_4 x) = f_2(g_3(\gamma_3 x, \gamma_3 x), g_4(\gamma_4 x, \gamma_4 x)) = \\ &= f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)). \end{aligned}$$

Отже, четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (3.22) і функції f_1, f_3, f_4 діагональні, позаяк функції g_1, g_3, g_4 ідемпотентні. □

3.3.5. Повна класифікація рівнянь довжини 4

В цьому підрозділі наведено теорему про повну класифікацію узагальнених рівнянь довжини 4, доведення якої складається з декількох частин. Перша частина доведення викладена в лемі 3.3, друга частина наведена тут після формулювання теореми і стосується попарної парастрофно-первинної нерівносильності отриманих рівнянь в лемі 3.3.

Теорема 3.3. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності узагальнених рівнянь функційної довжини* 4 *існує точно 19:*
— предметного типу $(2;2;2)$ *— це рівняння* (1.14)–(1.18)*;*
— предметного типу $(4;2;0)$ *— це рівняння* (3.9)–(3.14)*;*
— предметного типу $(3;3;0)$ *— це рівняння* (3.15)–(3.20)*;*
— предметного типу $(6;0;0)$ *— це рівняння* (3.21)–(3.22)*.*

Доведення. Згідно з лемою 3.3 кожне функційне рівняння довжини 4 парастрофно-первинно-рівносильне принаймні одному із рівнянь списку (1.14)–(1.18), (3.9)–(3.22), які розприділені за предметними типами.

Попарна парастрофно-первинна нерівносильність рівнянь типу $(2;2;2)$, тобто рівнянь (1.14)–(1.18) доведена в теоремі 1.4. Кожне з цих рівнянь має три предметних змінних, а інші рівняння із цього списку мають дві і одну предметну змінну відповідно. Тому, згідно з лемою 3.1, кожне з рівнянь (1.14)–(1.18) парастрофно-первинно-нерівносильне кожному з рівнянь (3.9)–(3.22).

Рівняння (3.21) та (3.22) мають одну змінну, а рівняння (3.9)–(3.20) мають дві предметних змінних, тому, згідно з лемою 3.1, і (3.21), і (3.22) парастрофно-первинно-нерівносильні кожному з рівнянь (3.9)–(3.20).

Доведемо парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (3.21) і (3.22). Кожне рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (3.21) з точністю до перестановки підтермів, має один із таких видів:

$$1+2=1+2, \quad 2=1+(1+2), \quad 1=1+(1+(1+2)). \tag{3.53}$$

Ця множина таких рівнянь інваріантна відносно всіх можливих парастрофно-первинних перетворень. Справді, застосування внутрішнього ділення до рівняння (3.21) неможливе, оскільки це перетворення передбачає наявність у рівнянні принаймні двох різних предметних змінних. Перейменування предметних, функційних змінних і перестановка сторін рівняння не змінює його виду з точністю до комутування. Результатом зовнішнього ділення на підтерм будь-якого рівняння одного із цих видів є також рівняння одного із цих видів. Отже, будь-яке рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (3.21) має з точністю до перестановки підтермів один із видів (3.53). Рівняння (3.22) має вид $2=2+2$, тому воно парастрофно-первинно-нерівносильне рівнянню (3.21).

Рівняння (3.9)–(3.20) розподілені за двома типами $(4;2;0)$ та $(3;3;0)$. Доведення їх попарної парастрофно-первинної нерівносильність розіб'ємо на три етапи: спочатку для рівнянь типу $(4;2;0)$, потім — для рівнянь типу

$(3;3;0)$, а потім доведемо для рівнянь, які мають різний тип.

Розглянемо рівняння типу $(4;2;0)$. Згідно з лемою 3.3, це рівняння (3.9)–(3.14). З леми 1.3 випливає, що різна кількість самодостатніх послідовностей спричинює парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь. Тому обчислимо кількість самодостатніх множин в кожному із рівнянь (3.9)–(3.14), а результат подамо в табл. 3.2:

Таблиця 3.2

Кількість самодостатніх множин у (3.9)–(3.14).

Рівняння	(3.9)	(3.10)	(3.11)	(3.12)	(3.13)	(3.14)
Самодостатні множини	0	2	1	2	0	0

З наслідку 1.1 випливає первинна нерівносильність пар рівнянь, які мають різну кількість самодостатніх множин. Залишилося встановити первинну нерівносильність чотирьох пар рівнянь, що видно із табл. 3.3:

Таблиця 3.3

Попарна первинна нерівносильність рівнянь (3.9)-(3.14).

	(3.10)	(3.11)	(3.12)	(3.13)	(3.14)
(3.9)	табл. 3.2	табл. 3.2	табл. 3.2	**пункт 3.1**	**пункт 3.2**
(3.10)	×	табл. 3.2	**пункт 3.3**	табл. 3.2	табл. 3.2
(3.11)	×	×	табл. 3.2	табл. 3.2	табл. 3.2
(3.12)	×	×	×	табл. 3.2	табл. 3.2
(3.13)	×	×	×	×	**пункт 3.1**

Записи в цій табл. “пункт 3.1”, “пункт 3.2” та “пункт 3.3” означають, що доведення попарної парастрофно-первинної нерівносильності відповідних пар рівнянь знаходяться у відповідних частинах доведення теореми. Запис “табл. 3.2” означає, що відповідні пари рівнянь парастрофно-первинно-нерівносильні, про що встановлено в табл. 3.2.

Пункт 3.1. Розглянемо первинну нерівносильність пар рівнянь (3.13), (3.9) та (3.13), (3.14). Припустимо, що вони первинно рівносильні. Нехай $(Q;\cdot)$ – довільна неодноелементна квазігрупа Штейнера, тоді четвірка функцій $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ є розв'язком і рівняння (3.9), і рівняння (3.14). З леми 1.4 випливає, що ця ж четвірка квазігруп є розв'язком рівняння (3.13), тобто

$$x \cdot x = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y).$$

Оскільки квазігрупа Штейнера ідемпотентна, то дана тотожність рівносильна тотожності $x = xy$, яка виконується лише в одноелементній квазігрупі. Отримане протиріччя доводить парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (3.13) і (3.9), а також рівнянь (3.13) і (3.14).

Пункт 3.2. Припустимо, що рівняння (3.9) і (3.14) первинно рівносильні. Згідно з лемою1.4, існують перестановки σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 множини $\{1,2,3\}$ та перестановка τ множини $\{1,2,3,4\}$ такі, що для довільного носія Q і для довільного розв'язку (f_1, f_2, f_3, f_4) рівняння (3.14) вибірка

$$({}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}, {}^{\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}, {}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}, {}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau})$$

є розв'язком рівняння (3.9), тобто виконується тотожність

$${}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}(x;y) = {}^{\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}(x; {}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x; {}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;y))). \tag{3.54}$$

Для доведення парастрофно-первинної нерівносильності зазначених рівнянь для кожного значення параметрів σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, τ наведемо розв'язок (f_1, f_2, f_3, f_4) для якого зазначена тотожність не виконується.

Відповідно до твердження 3.12, четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) операцій, які задовольняють умови

$$f_1(x;x) = f_2(x;x), \qquad f_4(x;y) = {}^{\ell}f_3(x;y). \tag{3.55}$$

є розв'язком рівняння (3.14).

Позаяк τ є перестановкою множини $\{1,2,3,4\}$, то множина $\{3,4\}$ має шість образів. Якщо $\{3,4\} \in \{\{1\tau, 2\tau\}, \{1\tau, 4\tau\}, \{2\tau, 3\tau\}, \{3\tau, 4\tau\}\}$, то за розв'язок візьмемо четвірку функцій (f_1, f_2, f_3, f_4), яка задовольняє співвідношення (3.55) і в якій функція f_3 є TS-квазігрупою, а функції f_1, f_2, f_3 попарно непарастрофні (існування таких квазігруп встановлено в [25]), тоді $f_3 = f_4$.

Оскільки в TS-квазігрупі всі парастрофи однакові, то, враховуючи другий вираз із (3.55) та замінивши в (3.54) $f_3(x;y)$ на y, отримаємо, для всіх випадків, парастрофність двох інших функцій f_1, f_2, що суперечить їх вибору. Справді, наприклад, для випадку $\{3,4\} = \{1\tau, 2\tau\}$ з тотожності (3.54) маємо $f_3(x;y) = f_3(x; {}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x; {}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;y)))$. Отриману рівність скоротимо на y, або, що теж саме, замінимо $f_3(x;y)$ на y, в результаті маємо парастрофність двох інших функцій ${}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}$ і ${}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}$, де $\{3\tau, 4\tau\} = \{1,2\}$, що суперечить їх вибору. Для інших випадків доведення аналогічне.

Нехай $\{3,4\} \in \{\{1\tau, 3\tau\}, \{2\tau, 4\tau\}\}$, тоді візьмемо розв'язок $(\cdot, \circ, \cdot, \circ)$, якщо $\{3,4\} = \{1\tau, 3\tau\}$ і розв'язок $(\circ, \cdot, \circ, \cdot)$, якщо $\{3,4\} = \{2\tau, 4\tau\}$, де $(Q;\cdot)$, $(Q;\circ)$ – TS-квазігрупи, які визначаються такими таблицями Келі:

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	2	5	4	7	6
2	3	2	1	6	7	4	5
3	2	1	3	7	6	5	4
4	5	6	7	4	1	2	3
5	4	7	6	1	5	3	2
6	7	4	5	2	3	6	1
7	6	5	4	3	2	1	7

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	7	5	6	3	4	2
2	7	2	6	5	4	3	1
3	5	6	3	7	1	2	4
4	6	5	7	4	2	1	3
5	3	4	1	2	5	7	6
6	4	3	2	1	7	6	5
7	2	1	4	3	6	5	7

В обох випадках (3.54) матиме вигляд $x \cdot y = x \circ (x \cdot (x \circ y))$. Проте, ця рівність не є тотожністю. Справді, обчислимо її ліву і праву частини при $x = 2$ та $y = 4$:

$$2 \cdot 4 = 6 \neq 1 = 2 \circ 7 = 2 \circ (2 \cdot 5) = 2 \circ (2 \cdot (2 \circ 4)).$$

Отримане протиріччя доводить, що припущення неправильне, тобто рівняння (3.9) і (3.14) не є парастрофно-первинно-рівносильними.

Пункт 3.3. Залишилося розглянути пару рівнянь (3.10) і (3.12). Припустимо, що ці рівняння парастрофно-первинно-рівносильні. Згідно з лемою 1.4, виконується така тотожність:

$${}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}(y;y) = {}^{\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}(x; {}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x; {}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;x))).$$

Будемо розглядати розв'язки рівняння (3.10), які, згідно з твердженням 3.8, визначаються такими співвідношеннями:

$$f_1(y;y) = e, \qquad f_4(x;x) = {}^{r}f_2(f_3(x;x);e), \tag{3.56}$$

де e – довільний фіксований елемент множини Q.

Розглянемо розв'язок (3.56), такий, що f_1 – суто середня лупа (це та, яка не є ні лівою, ні правою), f_2, f_3, f_4 – квазігрупи, які не є односторонніми лупами, ні лівими, ні правими, ні середніми. Тоді, з леми 1.4 та твердження 3.10 випливає, що

$$^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}(y;y)=a, \qquad ^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;x)={}^{r\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x;{}^{r\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}(x;a)) \tag{3.57}$$

для деякого $a\in Q$. Це означає, що елемент a є середнім елементом операції $^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}$. Оскільки операції f_2, f_3, f_4 не мають нейтральних елементів, то кожен з їх парастрофів також не має нейтральних елементів, тому $1\tau=1$. Позаяк f_1 є суто середньою лупою, то операція $^{\sigma_1}f_1$ з (3.57) буде середньою лупою лише тоді, коли $\sigma_1\in\{\iota;s\}$. Звідси випливає, що $a=e$. Отже, надалі вважатимемо, що $1\tau=1$, $\sigma_1\in\{\iota;s\}$.

Розглянемо інший розв'язок (3.56), вважаючи, що f_3, f_4 – тристоронні лупи з нейтральним елементом e (див. табл. 1.3) і $f_2(e;e)=e$, до того ж, f_2 – квазігрупа, яка не є лупою. Оскільки $1\tau=1$ і $\sigma_1\in\{\iota;s\}$, то з (3.57) випливає

$$^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;x)={}^{r\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x;{}^{r\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}(x;e)).$$

Якщо в цьому співвідношенні $4\tau=2$, то $^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}$ та $^{\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}$ є тристоронніми лупами з нейтральним елементом e, тому $^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;x)=e$, враховуючи це, $^{\sigma_2}f_2(x;x)=e$. Отримана рівність означає, що $^{\sigma_2}f_2$ є середньою лупою, тобто f_2 є односторонньою лупою, що суперечить припущенню. Це ж саме протиріччя отримуємо при $3\tau=2$ та $2\tau=2$.

Отже, припущення про парастрофно-первинну рівносильність рівнянь (3.10) і (3.12) хибне, тому рівняння парастрофно-первинно-нерівносильні.

Розглянемо парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь типу $(3;3;0)$. Згідно з лемою 3.3, досить довести парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (3.15)–(3.20). Результат зобразимо у вигляді таблиці, в якій в кожній із комірок наведемо приклад четвірок квазігрупових операцій, що доводять парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь, на перетині яких знаходиться дана комірка таблиці. Для цього введемо такі позначення: 1) $|Q| > 1$; 2)$(Q; h)$ – довільна квазігрупа Штейнера, $(Q; f)$ – TS-квазігрупа, $(Q; g, e)$ – лупа Штейнера, $(Q; p)$ довільна ідемпотентна жодна TS-квазігрупа; 3) $\mathbb{Z}_5$ є кільцем за модулем п'ять і $f_1(x; y) := 4x + y$, $f_3(x; y) := 2x + 3y$, f_2 – операція квазігрупи $(\cdot)$ визначена у прикладі 2.4, f_4 визначається (3.39).

Таблиця 3.4

Попарна парастрофно-первинна нерівносильність (3.15)–(3.20)

	(3.16)	(3.17)	(3.18)	(3.19)	(3.20)
(3.15)	(h, h, h, h)	(h, h, h, h)	(f, p, f, f)	(h, h, h, h)	**Пункт 3.4**
(3.16)	$\times$	(f_1, f_2, f_3, f_4)	(h, h, h, h)	(g, h, g, h)	(h, h, h, h)
(3.17)	$\times$	$\times$	(h, h, h, h)	(g, h, g, h)	(h, h, h, h)
(3.18)	$\times$	$\times$	$\times$	(h, h, h, h)	**Пункт 3.5**
(3.19)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	(h, h, h, h)

Доведемо, що на перетині (i)-го рядка і (j)-го стовпця табл. 3.4 існують четвірки функції, які є розв'язком одного з рівнянь (i) та не є розв'язком іншого (j) .

Четвірка операцій (h, h, h, h) з табл. 3.4 є розв'язком рівнянь (3.15), (3.18) та (3.20). Справді, якщо підставити цю четвірку функцій в кожне з рівнянь (3.15), (3.18) та (3.20): $xy = xy, \cdot xy$, $xy = x^2y^2$, $xy^2 = yx^2$. Ці рівності справедливі, тому що $(Q; \cdot)$ є ідемпотентною. Припустимо, що ця четвірка (h, h, h, h) є розв'язком рівнянь (3.16), (3.17) та (3.19). Замінивши кожну функційну змінну на $(\cdot)$ в кожному з (3.16), (3.17), (3.19), отримаємо $x \cdot xy = xy \cdot y$, $xy^2 = x \cdot xy$, $xx^2 = yy^2$. Кожна з цих рівностей має на увазі $|Q| = 1$. Протиріччя з припущення. Отже, відповідно до леми 1.4, четвірка (h, h, h, h) не є розв'язком жодного з рівнянь (3.16), (3.17), (3.19). Таким чином, доведено попарну парастрофно-первинну нееквівалентність рівнянь (3.15), (3.18), (3.20) з рівняннями (3.16), (3.17), (3.19) відповідно.

Четвірка (f, p, f, f) з табл. 3.4 є розв'язком (3.15). Припустимо (3.15)$\asymp$(3.18). З леми 1.4 випливає, що для деякої $\sigma \in S_3$ принаймні одна з четвірок функцій

$$({}^{\sigma}p, f, f, f); \qquad (f, {}^{\sigma}p, f, f); \qquad (f, f, {}^{\sigma}p, f); \qquad (f, f, f, {}^{\sigma}p) \tag{3.58}$$

є розв'язком (3.18). Іншими словами, справедливі такі тотожності

$${}^{\sigma}p(x;y) = f(f(x;x); f(y;y))\ (\text{а}), \qquad f(x;y) = {}^{\sigma}p(f(x;x); f(y;y))\ (\text{б}),$$

$$f(x;y) = f({}^{\sigma}p(x;x); f(y;y))\ (\text{в}), \qquad f(x;y) = f(f(x;x); {}^{\sigma}p(y;y))\ (\text{г}).$$

Якщо f ідемпотентна, то (а), (б) означають ${}^{\sigma}p = f$. Отже, $(Q;p)$ тотально-симетрична. Протиріччя з припущенням. Якщо $(Q; f, e)$ — лупа, то $f(x,x) = e$. Отже, (в) і (г) означають $f(x;y) = x$ і $(Q;f)$ — не є квазігрупами. Знову отримали протиріччя. Таким чином, (3.15) і (3.18) парастрофно-первинно-еквівалентні.

Четвірка (g,h,g,h) з табл. 3.4 є розв'язком (3.19). Припустимо, (3.16)$\asymp$(3.19) і (3.17)$\asymp$(3.19). Завдяки лемі 1.4, розв'язком рівнянь (3.16) і (3.17) є, принаймні одна з таких четвірок функцій:

$$\begin{array}{c} (h,h,g,g),\ \ (h,g,h,g),\ \ (h,g,g,h), \\ (g,h,h,g),\ \ (g,h,g,h),\ \ (g,g,h,h). \end{array} \tag{3.59}$$

Покладемо (3.59) в (3.16), в результаті отримаємо тотожності:

$$(a_1):\ h(x,h(x;y)) = g(g(x;y);y); \quad (a_2):\ h(x,g(x;y)) = h(g(x;y);y);$$

$$(a_3):\ h(x,g(x;y)) = g(h(x;y);y); \quad (a_4):\ g(x,h(x;y)) = h(g(x;y);y);$$

$$(a_5):\ g(x,h(x;y)) = g(h(x;y);y); \quad (a_6):\ g(x,g(x;y)) = h(h(x;y);y),$$

і підставивши (3.59) в (3.17), маємо:

$$(a_7):\ h(x,h(y;y)) = g(x;g(x;y)); \quad (a_8):\ h(x,g(y;y)) = h(x;g(x;y));$$

$$(a_9):\ h(x,g(y;y)) = g(x;h(x;y)); \quad (a_{10}):\ g(x,h(y;y)) = h(x;g(x;y));$$

$$(a_{11}):\ g(x,h(y;y)) = g(x;h(x;y)); \quad (a_{12}):\ g(x,g(y;y)) = h(x;h(x;y)).$$

Тотожності (a_2), (a_5), (a_8), (a_{11}) означають $|Q| = 1$, для цього замінюємо: $g(x;y)$ з x в (a_2); $h(x;y)$ з x в (a_5); $g(y;y)$ з e в (a_8); і $h(y;y)$ з y в (a_{11}).

Підставивши $x = y$ в (a_3), (a_4), (a_9), (a_{10}) та використовуючи властивості квазігрупи Штейнера і лупи Штейнера, отримаємо $h(x;e) = f(x;x)$ або $f(x;x) = h(e;x)$, тобто $h(x;e) = e$ або $h(e;x) = e$. Це означає, що $|Q| = 1$. Таким чином, (3.16) і (3.19), (3.17) і (3.19) є парастрофно-первинно-нееквівалентними.

Встановимо, що четвірка функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) з табл. 3.4 є квазігруповим розв'язком (3.17). Справді, рівності ${}^r f_1(x;y) = x + y$, ${}^r f_3(x;y) = x + 2y$ випливають з визначення функцій f_1, f_3. З $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, тоді (3.40) є істинним. Зауважимо, що f_2 є діагональною операцією і

$$f_2(x;x) = \delta_{f_2}(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}(x).$$

Тому четвірка функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) з табл. 3.4 є квазігруповим розв'язком (3.17). Крім того, відповідно до побудови, f_2 не має ортогональної пари.

Припустимо, що (3.16)$\asymp$(3.17). Відповідно до леми 1.4, четвірка $({}^{\sigma_{1\tau}} f_{1\tau}, {}^{\sigma_{2\tau}} f_{2\tau}, {}^{\sigma_{3\tau}} f_{3\tau}, {}^{\sigma_{4\tau}} f_{4\tau})$ є розв'язком (3.16). Але в силу наслідків 3.7, f_2 має ортогональну пару. Отримане протиріччя доводить, що (3.16) і (3.17) парастрофно-первинно-нееквівалентні.

Пункт 3.4. Доведемо парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (3.15) і (3.20). В рівнянні (3.20) є дві самодостатніх підмножини підтермів, а в рівнянні (3.15) немає жодної, тому згідно з лемою 1.3 рівняння (3.15) і (3.20) парастрофно-первинно нерівносильні.

Пункт 3.5. Доведемо парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (3.18) і (3.20). Для початку покажемо, що (3.18) і (3.20) діагонально парастрофно-первинно-рівносильні. Справді, (3.18) можна записати так:

$$F_1(x;y) = {}^s F_2(\delta_{F_4}(y), F_3(x;x)), \qquad F_1(x;\delta_{F_4}^{-1}(y)) = {}^s F_2(y, F_3(x;x)).$$

Позначимо $F_2'(y;y) := \delta_{F_4}^{-1}(y)$, $F_3' := {}^s F_2$, $F_4' = F_3$, як результат отримуємо $F_1(x; F_2'(y;y)) = F_3'(y, F_4'(x;x))$, що збігається з (3.20).

Проте ці рівняння (3.18) і (3.20) парастрофно-первинно-нерівносильні. Доведемо цей факт, використовуючи парастрофно-первинно-рівносильне рівняння (3.49), методом припущення.

Припустимо, що (3.18)$\asymp$(3.20). Оскільки (3.20)$\asymp$(3.49) за побудовою, то й рівняння (3.18)$\asymp$(3.49). Це означає як наслідок з леми1.4, що існує вибірка перестановок $(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ від рівняння (3.18) до рівняння (3.49) така, що для довільного квазігрупового розв'язку (f_1, f_2, f_3, f_4) рівняння (3.18) вибірка

$$({}^{\sigma_1}f_{1\tau}, {}^{\sigma_2}f_{2\tau}, {}^{\sigma_3}f_{3\tau}, {}^{\sigma_4}f_{4\tau}), \tag{3.60}$$

є розв'язком рівняння (3.49). Виберемо довільні попарно різні квазігрупи Штейнера, які можуть бути навіть ізоморфними. Тоді четвірка цих квазігруп (f_1, f_2, f_3, f_4), де $f_1 = f_2$ є розв'язком рівняння (3.18). Оскільки квазігрупа Штейнера за означенням є ідемпотентною квазігрупою, то всі парастрофи квазігрупи Штейнера збігаються з нею самою. Врахувавши цей факт, вибірка з (3.60) має вигляд $(f_{1\tau}, f_{2\tau}, f_{3\tau}, f_{4\tau})$ і теж є розв'язком рівняння (3.49), тобто виконується така тотожність:

$$f_{1\tau}(f_{3\tau}(x;x);y) = f_{2\tau}(x;f_{4\tau}(y;y)).$$

Оскільки операція ідемпотентна, то отримані тотожності рівносильні рівності $f_{1\tau} = f_{2\tau}$. Оскільки у вибраній четвірці операцій лише дві операції збігаються, то $\{1\tau, 2\tau\} = \{1, 2\}$. Тому надалі вважатимемо, що

$$\{1\tau, 2\tau\} = \{1, 2\}, \qquad \{3\tau, 4\tau\} = \{3, 4\}. \tag{3.61}$$

Нехай оборотна операція f є асиметричною, тобто всі її парастрофи попарно різні, а h — довільна ідемпотентна операція, тоді четвірка (f, f, h, h) є розв'язком рівняння (3.18). Враховуючи співвідношення (3.61) вибірка з (3.60) має вигляд $({}^{\sigma_1}f, {}^{\sigma_2}f, {}^{\sigma_3}h, {}^{\sigma_4}h)$ і є розв'язком рівняння (3.49). Оскільки всі парастрофи операції h ідемпотентні, то підставивши дану четвірку в рівняння (3.49), отримаємо рівність ${}^{\sigma_1}f = {}^{\sigma_2}f$. Оскільки всі парастрофи операції f попарно різні, бо вона асиметрична, то $\sigma_1 = \sigma_2$, тому далі розглянемо вибірку перестановок

$$(\tau, \sigma, \sigma, \sigma_3, \sigma_4), \tag{3.62}$$

для яких виконується (3.61).

Розглянемо адитивну групу кільця $Z_3 \times Z_3$ і α автоморфізм цієї групи, який визначений матрицею A: $\alpha(\bar{x}) := \bar{x} \cdot A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Оберненою до цієї матриці є матриця $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Операції f_1, f_2 та f визначимо такими рівностями:

$$f_1(\bar{x};\bar{y}) := \bar{x}A + \bar{y}A, \quad f_2(\bar{x};\bar{y}) := \bar{x} + \bar{y}, \tag{3.63}$$

$$f(\bar{x};\bar{y}) := \bar{x}A^{-1} + \bar{y}A^{-1}. \tag{3.64}$$

Оскільки $f(\bar{x};\bar{x}) = \bar{x}A^{-1} + \bar{x}A^{-1} = \bar{x}(2A^{-1}) = \bar{x}A$, то четвірка (f_1, f_2, f, f) є розв'язком рівняння (3.18). Згідно з (3.60) та (3.62), розв'язком рівняння (3.49) є вибірка $({}^{\sigma}f_1, {}^{\sigma}f_2, {}^{\sigma_3}f, {}^{\sigma_4}f)$. Згідно з наслідком 3.8 дана вибірка є розв'язком рівняння (3.49) тоді і тільки тоді, коли існують підстановки γ, δ такі, що

$${}^{\sigma}f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}f_2(\gamma^{-1}(\bar{x});\delta(\bar{y})), \quad {}^{\sigma_3}f(\bar{x};\bar{x}) = \gamma(\bar{x}), \quad {}^{\sigma_4}f(\bar{y};\bar{y}) = \delta(\bar{y}). \tag{3.65}$$

Оскільки останні дві рівності однакові, тому розглянемо співвідношення

$${}^{\tau}f(\bar{x};\bar{x}) = \theta(\bar{x}), \tag{3.66}$$

для якого $\tau \in \{\sigma_3, \sigma_4\}$, $\theta \in \{\gamma, \delta\}$.

Якщо $\tau \in \{\iota, s\}$, то $f(\bar{x};\bar{x}) = \theta(\bar{x})$, тоді з (3.64) випливає, що $\theta\bar{x} = \bar{x}A$.

Якщо $\tau \in \{\ell, s\ell\}$, то ${}^{\ell}f(\bar{x};\bar{x}) = \theta\bar{x}$, тобто $f(\theta\bar{x};\bar{x}) = \bar{x}$. Скориставшись (3.64) маємо $\theta(\bar{x}) \cdot A^{-1} + \bar{x}A^{-1} = \bar{x}$. Звідси знайдемо $\theta(\bar{x})$:

$$\theta\bar{x} + \bar{x} = \bar{x}A, \quad \theta\bar{x} = \bar{x}A - \bar{x} = \bar{x}(A - E).$$

Підставивши замість матриць їх значення, маємо

$$\bar{x}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \bar{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

І нарешті, якщо $\tau \in \{\ell, s\ell\}$, то ${}^{r}f(\bar{x};\bar{x}) = \theta\bar{x}$, тобто $f(\bar{x};\theta\bar{x}) = \bar{x}$. Оскільки операція f комутативна, то дане рівняння рівносильне $f(\theta\bar{x};\bar{x}) = \bar{x}$, а цей випадок розглянуто вище. Отже, (3.66) спричинює таку залежність

$$\theta(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{x}A & \text{якщо } \tau \in \{\iota, s\}, \\ \bar{x}B & \text{якщо } \tau \notin \{\iota, s\}, \end{cases}$$

де $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ і $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Для σ_3 і σ_4 розглянемо чотири можливих варіанти:

$$\sigma_3 \in \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \in \{\iota, s\}; \qquad \sigma_3 \in \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \notin \{\iota, s\};$$

$$\sigma_3 \notin \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \in \{\iota, s\}; \qquad \sigma_3 \notin \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \notin \{\iota, s\}.$$

Застосувавши щойно доведене співвідношення до другої і третьої рівностей із (3.65), отримаємо

$$\gamma\bar{x} = \bar{x}A \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}A; \qquad \gamma\bar{x} = \bar{x}A \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}B;$$

$$\gamma\bar{x} = \bar{x}B \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}A; \qquad \gamma\bar{x} = \bar{x}B \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}B.$$

Тому для першої рівності із (3.65) маємо чотири можливих випадки:

$$\begin{aligned} &{}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}A^{-1};\bar{y}A); \qquad &&{}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}A^{-1};\bar{y}B); \\ &{}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}B^{-1};\bar{y}A); \qquad &&{}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}B^{-1};\bar{y}B). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Розглянемо дані рівності для всіх можливих $\sigma \in S_3$. Точніше розглянемо всі різні парастрофи операцій f_1 та f_2.

Позаяк операції f_1 і f_2 комутативні, тому кожна з них має три різні парастрофи, тобто сама операція, її ліве ділення та її праве ділення. Самі операції визначені рівностями (3.63), а їх ділення можна обчислити за такими формулами:

$$\begin{aligned} &{}^{\ell}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = \bar{x}A^{-1} - \bar{y}, \qquad &&{}^{r}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = -\bar{x} + \bar{y}A^{-1}, \\ &{}^{\ell}\!f_2(\bar{x};\bar{y}) = \bar{x} - \bar{y}, \qquad &&{}^{r}\!f_2(\bar{x};\bar{y}) = -\bar{x} + \bar{y}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Кожну із цих чотирьох рівностей розглянемо для кожного із значень параметра $\sigma \in \{\iota, \ell, r\}$.

Якщо $\sigma = \iota$, то із (3.63), враховуючи (3.67) маємо:

$$\bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}A^{-1} + \bar{y}A; \qquad \bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}A^{-1} + \bar{y}B;$$

$$\bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}B^{-1} + \bar{y}A; \qquad \bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}B^{-1} + \bar{y}B.$$

Покладемо в усіх цих рівностях $\bar{y} = \bar{0}$, в результаті отримаємо $A = A^{-1}$ або $A = B^{-1}$. Обидві рівності не виконуються, тому маємо протиріччя.

Якщо $\sigma = \ell$, то з (3.68), враховуючи (3.67) маємо:

$$\bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}A^{-1} - \bar{y}A; \qquad \bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}A^{-1} - \bar{y}B;$$

$$\bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}B^{-1} - \bar{y}A; \qquad \bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}B^{-1} - \bar{y}B.$$

В усіх цих рівностях при $\bar{x} = \bar{0}$ маємо $A = E$ або $B = E$, тобто в кожному випадку маємо протиріччя.

І нарешті, якщо $\sigma = r$, то з (3.68) і (3.67) маємо:

$$-\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}A^{-1} + \bar{y}A; \qquad -\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}A^{-1} + \bar{y}B;$$

$$-\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}B^{-1} + \bar{y}A; \qquad -\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}B^{-1} + \bar{y}B.$$

При $\bar{y} = \bar{0}$ з усіх цих рівностей отримуємо $A = E$ або $B = E$. Знову отримали протиріччя.

Отримані протиріччя показують, що припущення неправильне, тому рівняння (3.18) і (3.49) парастрофно-первинно-нерівносильні. А отже, парастрофно-первинно-нерівносильними є рівняння (3.18) і (3.20).

Встановимо парастрофно-первинну нерівносильність між типами узагальнених рівнянь теореми. Згідно Леми 3.1, всі рівняння типів $(6;0;0)$ і $(2;2;2)$ попарно парастрофно-первинно-нерівносильні між собою та між всіма іншими типами узагальнених рівнянь. Залишається дослідити парастрофно-первинну нерівносильність між типами рівнянь $(4;2;0)$ і $(3;3;0)$. Як доведено вище, рівнянь типу $(3;3;0)$ та типу $(4;2;0)$ є точно по шість, а саме (3.9)–(3.14) та (3.15)–(3.20). Довільна TS-лупа є розв'язком кожного з рівнянь (3.9)–(3.14), але вона не є розв'язком жодного з рівнянь (3.15)–(3.20), оскільки в результаті отримуємо одноелемнтну квазігрупу в кожному з рівнянь. Справді, покажемо спочатку, що довільна TS-лупа, нехай $(Q;\cdot)$, є розв'язком кожного з рівнянь (3.9)–(3.14). Оскільки всі парастрофи довільної TS-лупи збігаються, то досить показати, що це означає, що четвірка функцій $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ є розв'язком кожного з рівнянь (3.9)–(3.14). Це означає, що виконуються такі тотожності:

$$y^2 = x \cdot (x \cdot x^2), \quad x^2 = xy \cdot xy, \quad x^2 = x(y \cdot xy),$$

$$xy = x(x \cdot xy), \quad y^2 = x^2x^2, \quad x^2 = y(y \cdot x^2).$$

Підставимо четвірку функцій $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ в кожне з рівнянь (3.15)–(3.20), в результаті отримаємо виконання відповідних тотожностей:

$$xy = x^2 \cdot y^2, \quad x \cdot x^2 = y \cdot y^2, \quad x \cdot y^2 = y \cdot x^2,$$

$$xy = xy \cdot xy, \quad x \cdot xy = xy \cdot y, \quad xy^2 = x \cdot xy.$$

Згідно з властивостями TS-лупи ці тотожності можливі лише в одноелементних квазігрупах, тому згідно з лемою 1.4, четвірка операцій $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ не є розв'язком жодного з рівнянь (3.15)–(3.20). Це доводить попарну парастрофно-первинну нерівносильність відповідних пар рівнянь між типами $(4; 2; 0)$ і $(3; 3; 0)$. $\square$

Наслідок 3.9. *Існує точно вісім антиквадратичних узагальнених рівняннь функційної довжини 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (3.15)–(3.22)*, з них точно два рівняння без квадратів, наприклад* (3.15), (3.16)*.*

Доведення випливає з доведення теореми 3.3 і означення 3.3. $\square$

Наслідок 3.10. *Існує точно шість майже квадратичних узагальнених рівняннь функційної довжини 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад (3.9)–(3.14), з них точно одне рівняння без квадратів, наприклад (3.9).*

Доведення випливає з доведення теореми 3.3 і означення 3.2. $\square$

Наслідок 3.11. *Існує точно п'ять квадратичних узагальнених рівнянь функційної довжини 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (1.14)–(1.18)*, з них точно два рівняння без квадратів* (1.14) *та* (1.16).

Доведення випливає з доведення теореми 3.3, доведення теореми 1.4 і означення квадратичного рівняння. $\square$

3.4. Розв'язання дистрибутивно-подібних рівнянь

В цьому підрозділі описано розв'язки узагальнених рівнянь довжини 5, в термах яких немає квадратів. Відомо, що таких рівнянь є 5, тут наведено множини розв'язків для чотирьох із них.

Теорема 3.4. *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— група;* g *— квазігрупа та* ${}^{\ell}g\perp(\cdot)$*;* α, β, γ, δ, μ *— перестановки множини* Q*; тоді п'ятірка операцій* $(f_1,\dots,f_5)$ *визначена на* Q*:*

$$f_1(x;y)=\alpha x\cdot\delta y;\ f_2(x;z)=\delta^{-1}\big(g(z;\gamma x)\cdot\gamma x\big);$$
$$f_3(x;y)=\beta x\cdot\gamma y;\ f_4(x;y)=\beta^{-1}(\alpha x\cdot\mu y);\ f_5(x;z)=\mu^{-1}g(z;\gamma x), \tag{3.69}$$

є квазігруповим розв'язком (1.35).

І навпаки, якщо п'ятірка $(f_1,\dots,f_5)$ *є квазігруповим розв'язком (1.35), тоді для* $\forall e\in Q$ *існує єдина послідовність* $(\cdot,g,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu)$ *квазігрупових операцій таких, що* $(Q;\cdot)$ *— група з нейтральним елементом* e*,* $\alpha e=\beta e=\delta e=e$*, операція* ${}^{\ell}g\perp(\cdot)$*, формули* (3.69) *є правильними та мають місце умови*

$$\alpha x=f_1(x;e),\quad \beta x=f_3(x;{}^{r}f_3(e;e)),\quad \gamma x=f_3(e;x),$$
$$\delta y=f_1(e;y),\quad \mu x=f_3(f_4(e;x);{}^{r}f_3(e;e)), \tag{3.70}$$
$$x\cdot y=f_3(\beta^{-1}x;\gamma^{-1}y),\quad g(z;x)=\mu f_5(\gamma^{-1}x;z).$$

Доведення. Нехай $(Q;\cdot)$ — група, α, β, γ, δ, μ — довільні перестановки множини Q, g — довільна бінарна квазігрупова операція, ${}^{\ell}g\perp(\cdot)$ та операції f_1,..., f_5 визначені в (3.69). Оскільки операції f_1, f_3, f_4, f_5 є ізострофами оборотної операції, то кожна з них є оборотною. Відповідно до леми 1.1, ортогональність ${}^{\ell}g\perp(\cdot)$ та оборотність g спричинюють оборотність f_2. Тепер доведемо тотожність

$$f_1(y;f_2(x;z))=f_3(f_4(y;f_5(x;z));x). \tag{3.71}$$

Для цього ми розраховуємо її ліву та праву частини:

$$f_1(y;f_2(x;z))=\alpha y\cdot\delta f_2(x;z)=\alpha y\cdot g(z;\gamma x)\cdot\gamma x,$$
$$f_3(f_4(y;f_5(x;z));x)=\beta f_4(y;f_5(x;z))\cdot\gamma x=$$
$$=\alpha y\cdot\mu f_5(x;z)\cdot\gamma x=\alpha y\cdot g(z;\gamma x)\cdot\gamma x.$$

Праві частини однакові, тому і ліві частини також однакові. Це означає, що $(f_1,\dots,f_5)$ є квазігруповим розв'язком (1.35).

Навпаки, нехай $(f_1, \dots, f_5)$ є квазігруповим розв'язком (1.35). Це означає, що тотожність (3.71) є істинною.

Нехай e — довільний елемент з множини Q. Об'єднавши (1.3) та (3.71), де $y = e$, ми отримуємо $f_2(x; z) = L_1^{-1} f_3(L_4 f_5(x; z); x)$. Покладемо вираз в (3.71): $f_1(y; L_1^{-1} f_3(L_4 f_5(x; z); x)) = f_3(f_4(y; f_5(x; z)); x)$. Змінна $t := L_4 f_5(x; z)$ разом з z приймає всі значення в Q, отже,

$$f_3(f_4(y; L_4^{-1} t); x) = f_1(y; L_1^{-1} f_3(t; x)) \tag{3.72}$$

для всіх $x, y, t \in Q$. Введемо такі позначення:

$$g_1 := f_3, \qquad g_2(y; t) := f_4(y; L_4^{-1} t), \qquad g_3(y; u) := f_1(y; L_1^{-1} u). \tag{3.73}$$

(3.72) означає, що четвірка операцій $(g_1; g_2; g_3; g_1)$ є розв'язком узагальненого функційного рівняння асоціативності (1.14). З теореми 1.5 випливають рівності (1.19) та (1.20), де $g_4 = g_1$. З (3.73) та (1.3) випливає, що e — лівий нейтральний елемент в g_2 та g_3, тобто

$$g_2(e; x) = f_4(e; L_4^{-1} x) = L_4 L_4^{-1} x = x, \quad g_3(e; x) = f_1(e; L_1^{-1} x) = L_1 L_1^{-1} x = x.$$

Отже, ${}^{\ell}g_3(e; e) = e$ та з (1.20) маємо $\nu = \varepsilon$, $\alpha e = e$ та $\beta = \delta$:

$$\beta x = \delta g_2({}^{\ell}g_3(e; e); x) = \delta g_2(e; x) = \delta x.$$

Об'єднавши (3.73) та (1.19), отримуємо:

$$f_1(x; L_1^{-1} u) = g_3(x; u) = \alpha x \cdot u, \qquad f_3(t; z) = g_1(t; z) = \beta t \cdot \gamma z,$$

$$f_4(x; L_4^{-1} y) = g_2(x; y) = \beta^{-1}(\alpha x \cdot \beta y).$$

Позначивши $\delta := L_1$, $\mu := \beta L_4$, ми отримуємо рівності для f_1, f_3, f_4 з (3.69) і залежність (3.70) для α, β, γ, δ, $(\cdot)$, μ. Тепер повертаємось до (3.71):

$$\alpha y \cdot \delta f_2(x; z) = \alpha y \cdot \mu f_5(x; z) \cdot \gamma x.$$

Ми зменшуємо рівність на αy та отримуємо $\delta f_2(x; z) = \mu f_5(x; z) \cdot \gamma x$. Визначимо $g(z; x) := \mu f_5(\gamma^{-1} x; z)$. Отже, $\delta f_2(\gamma^{-1} x; z) = g(z; x) \cdot x$. Оскільки операція f_2 оборотна відповідно до леми 1.1, ця рівність спричинює ортогональність ${}^{\ell}g \perp (\cdot)$. Отже, отримуємо вирази (3.69) для f_2 та f_5. $\square$

Теорема 3.5. *Нехай $f_1, \ldots, f_5$ — бінарні операції, визначені на множині Q. Тоді $(f_1; \ldots; f_5)$ є квазігруповим розв'язком рівняння* (1.36) *тоді і тільки тоді, коли f_1, f_3 та f_4 — квазігрупові операції та існують перестановки α і θ множини Q такі, що виконуються тотожності*

$$f_3(x;\theta x) = \alpha x, \qquad f_2(x;y) = {}^{\ell}f_1(\alpha x;y), \qquad f_5(x;y) = {}^{\ell}f_4(\theta x;y). \quad (3.74)$$

Доведення. Нехай п'ятірка квазігрупових операцій $(f_1; \ldots; f_5)$ є розв'язком (1.36). Це означає, що

$$f_1(f_2(x;y);y) = f_3(x;f_4(f_5(x;z);z)) \quad (3.75)$$

є тотожністю на Q. Нехай e — елемент з Q. Згідно з позначенням (1.3), визначимо α і θ таким чином: $\alpha := R_1R_2$, $\theta := R_4R_5$.

Якщо $y = z = e$, то з (3.75) випливає перша тотожність в (3.74). Це означає, що ${}^{r}f_3(x;\alpha x) = \theta x$. Покладемо $z = e$ в (3.75) та отримаємо $f_1(f_2(x;y);y) = f_3(x;\theta x) = \alpha x$. Отже, друга тотожність (3.74) істинна. Поклавши $y = e$ в (3.75), ми $f_3(x;f_4(f_5(x;z);z)) = \alpha x$. Застосувавши праве ділення для f_3, отримуємо $f_4(f_5(x;z);z) = {}^{r}f_3(x;\alpha x) = \theta x$. Використавши означення лівого ділення для f_4, ми отримаємо третю тотожність з (3.74).

Навпаки, нехай співвідношення (3.74) істинні та операції f_1, f_3, f_4 — оборотні. Тоді f_2 і f_5 — оборотні, оскільки кожна з них є ізострофом оборотної операції. Більше того, маємо

$$f_1(f_2(x;y);y) = f_1({}^{\ell}f_1(\alpha x;y);y) = \alpha x = f_3(x;\theta x) =$$

$$= f_3(x;f_4({}^{\ell}f_4(\theta x;z);z)) = f_3(x;f_4(f_5(x;z);z)),$$

тобто (3.75) — тотожність. Отже, п'ятірка операцій $(f_1; \ldots; f_5)$ є квазігруповим розв'язком функційного рівняння (1.36). □

Зауваження 3.1. *Для будь-якого розв'язку $(f_1; \ldots; f_5)$ існує тільки одна пара перестановок $(\alpha;\theta)$ множини Q така, що рівності* (3.74) *є правильними.*

Справді, нехай $(\alpha_1;\theta_2)$ та $(\alpha;\theta)$ — пари перестановок множини Q, що задовольняють (3.74). Звідси

$$f_2(x;y) = {}^{\ell}f_1(\alpha_1 x;y), \quad f_5(x;y) = {}^{\ell}f_4(\theta_1 x;y),$$

$$f_2(x;y) = {}^{\ell}f_1(\alpha_2 x;y), \quad f_5(x;y) = {}^{\ell}f_4(\theta_2 x;y).$$

Отже, ${}^{\ell}f_1(\alpha_1 x;y) = {}^{\ell}f_1(\alpha_2 x;y)$ та ${}^{\ell}f_4(\theta_1 x;y) = {}^{\ell}f_4(\theta_2 x;y)$, звідки випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2$, $\theta_1 = \theta_2$.

Теорема 3.6. *Нехай Q — множина та $f_1,\dots,f_5$ — бінарні операції, визначені на Q. Тоді $(f_1;\dots;f_5)$ є квазігруповим розв'язком рівняння* (1.37) *тоді і тільки тоді, коли f_1, f_2 та f_4 — квазігрупові операції, $f_1 \perp {}^{r}f_2$ та існує перестановка α множини Q така, що виконуються тотожності*

$$f_3(x;z) = f_1(\alpha^{-1}x; f_2(\alpha^{-1}x;z)); \quad f_5(x;y) = {}^{\ell}f_4(\alpha x;y). \tag{3.76}$$

Доведення. Нехай п'ятірка $(f_1;\dots;f_5)$ задовольняє умови теореми. Операція f_5 є оборотною, оскільки є ізострофом оборотної операції f_4. Згідно з лемою 1.1, оборотність f_3 випливає з $f_1 \perp {}^{r}f_2$. Використовуючи означення лівого ділення для f_6, з відношення (3.76) випливає

$$f_1(x; f_2(x;z)) = f_3(\alpha x;z), \quad f_4(f_5(x;y);y) = \alpha x. \tag{3.77}$$

Це означає, що виконується тотожність

$$f_1(x; f_2(x;z)) = f_3(f_4(f_5(x;y);y);z). \tag{3.78}$$

Таким чином, $(f_1,\dots,f_5)$ є квазігруповим розв'язком (1.37).

Навпаки, нехай п'ятірка квазігрупових операцій $(f_1;\dots;f_5)$ є розв'язком (1.37), тоді виконується тотожність (3.78). Нехай e — елемент з Q та $\alpha := R_4R_5$. Виконавши заміну $y = e$ в (3.78), маємо першу рівність з (3.77). Об'єднавши отриману тотожність з (3.78), маємо другу рівність з (3.77). З цих тотожностей отримуємо (3.76). Згідно з лемою 1.1, з першої рівності з (3.77) та оборотності f_1, f_2, f_3 випливає $f_1 \perp {}^{r}f_2$. $\square$

Зауваження 3.2. *Для будь-якого розв'язку $(f_1;\dots;f_5)$ з* (1.37) *існує точно одна перестановка α така, що виконується* (3.76).

Справді, нехай α, α_1 — перестановки множини Q, що задовольняють (3.76). Отже, $f_5(x;y) = {}^{\ell}f_4(\alpha x;y)$, $f_5(x;y) = {}^{\ell}f_4(\alpha_1 x;y)$. Порівнюючи тотожності, отримуємо $\alpha_1 = \alpha$.

Теорема 3.7. *Нехай Q — множина та $f_1, \ldots, f_5$ — бінарні операції, визначені на Q. Тоді $(f_1;\ldots;f_5)$ є квазігруповим розв'язком рівняння* (1.38) *тоді і тільки тоді, коли операції f_2, f_3 і f_5 є квазігрупами, $f_2 \perp f_5$ та існує перестановка α множини Q така, що*

$$f_1(x;y) = f_3(x;\alpha y), \qquad f_4(x;y) = \alpha f_2(x;{}^{r}f_5(x;y)). \tag{3.79}$$

Доведення. Нехай п'ятірка операцій $(f_1;\ldots;f_5)$ задовольняє умови теореми. Операція f_1 оборотна, оскільки є ізотопом оборотної операції. Згідно з лемою 1.1, $f_2 \perp f_5$ спричинює оборотність f_4. Доведемо, що

$$f_1(y;f_2(x;z)) = f_3(y;f_4(x;f_5(x;z))) \tag{3.80}$$

є тотожністю. Для цього обчислимо її ліву та праву сторони:

$$f_1(y;f_2(x;z)) = f_3(y;\alpha f_2(x;z)),$$

$$f_3(y;f_4(x;f_5(x;z))) = f_3(y;\alpha f_2(x;{}^{r}f_5(x;f_5(x;z)))) = f_3(y;\alpha f_2(x;z)).$$

Отримуємо однаковий вираз, тобто (3.80) є істинним. Це означає, що $(f_1;\ldots;f_5)$ є квазігруповим розв'язком (1.38).

Навпаки, нехай п'ятірка квазігрупових операцій $(f_1;\ldots;f_5)$ є розв'язком (1.38), тобто тотожність (3.80) істинна, та нехай $e \in Q$. Об'єднавши (3.80), $y = e$ та $\alpha := L_3^{-1}L_1$, отримуємо

$$f_4(x;f_5(x;z)) = \alpha f_2(x;z). \tag{3.81}$$

Використовуючи цю рівність, робимо заміну в правій частині (3.80):

$$f_1(y;f_2(x;z)) = f_3(y;\alpha f_2(x;z)).$$

Замінивши $f_2(x;z)$ на t, отримуємо першу тотожність з (3.79). Визначивши операцію f_4 з рівності (3.81), отримуємо другу тотожність з (3.79). Згідно з лемою 1.1, з оборотності $\alpha^{-1}f_4$ випливає, що $f_2 \perp f_5$. $\square$

Зауваження 3.3. *Для будь-якого розв'язку* $(f_1, \ldots, f_5)$ *функційного рівняння* (1.38) *існує точно одна перестановка* α *така, що виконуються рівності (3.79).*

Висновки до розділу 3

В цьому розділі класифіковано чисті узагальнені нетривіальні бінарні квазігрупові функційні рівняння. Для цього визначено поняття предметної довжини, предметного типу та уточнено поняття функційної довжини рівняння. Основним результатом розділу є класифікація узагальнених рівнянь до функційної довжини чотири всіх можливих предметних типів з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Встановлено, що їх кількість є точно 1, 3, 4, 19 відповідно для рівнянь довжин один, два, три, чотири. З кожного блока розбиття класифікації виділено представника та розв'язано його на множині бінарних квазігрупових операцій. А саме:

— дано повну класифікацію узагальнених рівнянь функційних довжин 1, 2, 3, 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності;

— знайдені представники кожного блока розбиття, новими з яких виявилися узагальнені рівняння предметного типу (4;0) функційної довжини 2, предметного типу (5;0) функційної довжини 3 та предметних типів (6;0;0), (4;2;0) і (3;3;0) функційної довжини 4;

— розв'язані представники всіх блоків класифікації, які раніше не були розв'язані, а саме таких предметних типів $(4;0)$, $(3;2)$, $(5;0)$, $(6;0;0)$, $(4;2;0)$ та $(3;3;0)$;

— наведено наслідки для квадратичних, майже квадратичних та антиквадратичних рівнянь;

— розв'язані чотири із п'яти відомих дистрибутивно-подібних функційних рівнянь без квадратів на квазігрупах.

Результати цього розділу опубліковано в працях [53–56], [58], [60], [61], [67–69], [72], [73], [75], [76], [119–121].

РОЗДІЛ 4

КЛАСИФІКАЦІЯ ТОТОЖНОСТЕЙ НА КВАЗІГРУПАХ

Основними класами квазігруп, які розглядаються, є многовиди, тобто класи квазігруп, що визначаються тотожностями. Тотожність в класі квазігруп можна визначити як квазігрупове функційне рівняння, в якому всі функційні змінні попарно парастрофні. Множина квазігрупових тотожностей замкнена відносно парастрофно-первинних перетворень. Довільні парастрофно-первинно рівносильні квазігрупові тотожності є парастрофно-рівносильними, але навпаки це не так. Тому класифікація узагальнених функційних рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності спричинює деяку класифікацію тотожностей.

В цьому розділі, використовуючи класифікацію узагальнених функційних рівнянь довжини 2 і 3 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, дано класифікацію тотожностей в класі квазігруп з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності. Як наслідок отримано опис многовидів квазігруп, які визначаються цими тотожностями, а також їх розподіл на пучки.

Введемо декілька означень.

Означення 4.1. *Нехай F — довільна функційна змінна, тоді ${}^{\iota}F$, ${}^{\ell}F$, ${}^{r}F$, ${}^{s}F$, ${}^{s\ell}F$, ${}^{sr}F$ називаємо парастрофами функційної змінної F і вони набувають значення відповідного парастрофа операції f, якщо змінна F набуває значення f.*

Означення 4.2. *Узагальненим парастрофом функційної змінної F назвемо функційну змінну ${}^{\sigma}F$, де σ — змінна, яка набуває значення в множині S_3.*

Означення 4.3. *Залежні функційні змінні назвемо парастрофно-незалежними, якщо вони незалежно набувають значень в множині* *парастрофів однієї й тієї ж змінної.*

Означення 4.4. *Функційне рівняння назвемо узагальненою тотожністю, якщо всі функційні змінні є попарно різними узагальненими парастрофами однієї і тієї ж функційної змінної.*

Вивчаючи узагальнені функційні рівняння, описуємо їх з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. В цьому розділі вивчаємо лише функційні рівняння, які є тотожностями в класі квазігруп, тобто функційні рівняння, які мають одну незалежну функційну змінну, а всі інші функційні змінні є її парастрофами. На тотожностях розглядаємо три відношення: парастрофно-первинної рівносильності, парастрофної рівносильності та рівносильності. Ці три відношення різні.

Рівносильні тотожності визначають один і той самий многовид, а тому визначають один і то самий пучок многовидів. Отже, будь-які рівносильні тотожності є парастрофно-рівносильними. Проте, навпаки це не так: якщо тотожності визачають різні парастрофні многовиди, то вони нерівносильні, але парастрофно-рівносильні, оскільки парастрофні многовиди належать одному пучку.

Як при перейменуванні предметних змінних, так і при застосуванні первинних тотожностей, довільна тотожність перетворюється в рівносильну їй тотожність, а при перейменуванні функційних змінних довільна тотожність переходить в парастрофно-рівносильну їй тотожність. Тому з парастрофно-первинно-рівносильних тотожностей випливає їх парастрофна рівносильність. Але навпаки це не так, тотожності можуть бути парастрофно-рівносильними, але не парастрофно-первинно-рівносильними.

Парастрофно-рівносильні тотожності визначають парастрофні многовиди, тобто один і той же пучок многовидів. Оскільки кількість елементів в пучку многовидів дорівнює $6/|G|$, де G — група парстрофних симетрій довільного многовида пучка, то тотожності парастрофно-нерівносильні, якщо групи симетрій відповідних многовидів різнопотужні.

Отже, спочатку будемо класифікувати тотожності, які належать одній і тій же узагальненій тотожності, а потім з'ясуємо парастрофну рівносильність між тотожностями, які мають рівнопотужні групи симетрій відповідних многовидів.

4.1. Класифікація тотожностей довжини 2

В цьому підрозділі класифіковано тотожності довжини 2 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності та описано відповідні їм многовиди за групами симетрій, знайдено пучки різних многовидів квазігруп згідно з законом парастрофної симетрії.

Тотожністю в квазігрупі ми називаємо функційне рівняння, в якому всі функційні змінні попарно парастрофні. Інакше кажучи, це функційне рівняння, в якому одна незалежна функційна змінна, а інші є її парастрофами. Тому множина тотожностей замкнена відносно парастрофно-первинних перетворень. Отже, відповідно до означення 4.4 та з теореми 3.1 випливає таке твердження.

Наслідок 4.1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно три узагальнені тотожності довжини 2*

$$x \overset{\tau}{\cdot} y = x \overset{\sigma}{\cdot} y, \tag{4.1}$$

$$x \overset{\nu}{\cdot} x = y \overset{\pi}{\cdot} y, \tag{4.2}$$

$$x \overset{\delta}{\cdot} x = x \overset{\rho}{\cdot} x, \tag{4.3}$$

де $\tau, \sigma, \nu, \pi, \delta, \rho \in S_3$.

Якщо тотожність отримана з узагальненої тотожності наданням конкретних значень параметрам τ, σ, ν, π, δ, ρ, то будемо говорити, що вона належить деякій узагальненій тотожності.

З наслідку 4.1 випливає, що з довільної тотожності довжини 2 шляхом застосування ланцюжка парастрофно-первинних перетворень можна отримати тотожність, яка належить одній із узагальнених тотожностей (4.1)–(4.3). Оскільки довільні парастрофно-первинні перетворення перетворюють тотожність в парастрофно-рівносильну, то для класифікації тотожностей з точністю до парастрофної рівносильності досить розглянути тотожності, які належать узагальненим тотожностям (4.1)–(4.3).

4.1.1. Многовиди розв'язків тотожностей довжини 2

У цьому підрозділі знайдено многовиди розв'язків узагальнених тотожностей (функційних рівнянь) довжини 2, в яких всі функційні змінні є узагальненими парастрофами однієї функційної змінної. Описано парастрофні тотожності довжини 2 з врахуванням груп симетрій кожного многовида, який вони визначають.

Розглянемо випадок, коли функційні змінні залежні, а саме, коли вони є парастрофами однієї і тієї ж змінної, наприклад $F_1 = {}^{\tau}F$, $F_2 = {}^{\sigma}F$, де $\tau\sigma \in S_3$. Узагальнені рівняння функційної довжини 2 на квазігрупах, а саме (1.8), (1.9) та (3.1) у префіксному позначенні матимуть вигляд:

$$ {}^{\tau}F(x;y) = {}^{\sigma}F(x;y), \qquad {}^{\nu}F(x;x) = {}^{\pi}F(y;y), \qquad {}^{\delta}F(x;x) = {}^{\rho}F(x;x). $$

В основному користуємося інфіксним позначенням для узагальнених тотожностей, тому ці узагальнені тотожності довжини 2 мають вигляд (4.1), (4.2), (4.3). Коли мова йде про функційні рівняння, то користуємося префіксним позначенням, наприклад як і в наведених нижче теоремах.

Теорема 4.1. *Розв'язком рівняння (4.1) є многовид:*
— *всіх квазігруп, якщо $\sigma = \tau \in S_3$;*
— *правосиметричних квазігруп, якщо $\sigma^{-1}\tau = \ell$;*
— *лівосиметричних квазігруп, якщо $\sigma^{-1}\tau = r$;*
— *напівсиметричних квазігруп, якщо $\sigma^{-1}\tau = s\ell$ або $\sigma^{-1}\tau = sr$;*
— *комутативних квазігруп, якщо $\sigma^{-1}\tau = s$.*

Доведення. Нехай квазігрупа $(Q; f)$ є розв'язком рівняння (4.1), тобто в $(Q; f)$ виконується тотожність ${}^{\tau}f = {}^{\sigma}f$. Дана тотожність рівносильна тотожності ${}^{\sigma^{-1}\tau}f = f$, яка означає, що $\sigma^{-1}\tau$ належить групі парастрофних симетрій операції f: $\sigma^{-1}\tau \in \mathrm{Ps}(f)$.

Отже, розв'язками рівняння (4.1) є квазігрупи, група симетрій яких містить перестановку $\sigma^{-1}\tau$. Клас всіх таких квазігруп є многовид, група симетрій якого дорівнює циклічній групі, що породжена елементом $\sigma^{-1}\tau$. Оскільки група S_3 має п'ять циклічних підгруп: $\{\iota\}$, $\{\iota, s\}$, $\{\iota, \ell\}$, $\{\iota, r\}$, $\{\iota, s\ell, sr\}$, то й многовидів також буде п'ять з умови теореми. □

Теорема 4.2. *Розв'язком рівняння (4.2) є многовид:*
— *середніх луп, якщо* $\nu = \pi$ *або* $\nu = s\pi$, *де* $\pi \in \{\iota, s\}$;
— *лівих луп, якщо* $\nu = \pi$ *або* $\nu = s\pi$, *де* $\pi \in \{\ell, s\ell\}$;
— *правих луп, якщо* $\nu = \pi$ *або* $\nu = s\pi$, *де* $\pi \in \{r, sr\}$;
— *ліво-середніх луп, якщо* $\nu \neq \pi$, *де* $\{\nu, \pi\} \in \{\{\iota, \ell\}, \{s, s\ell\}, \{\iota, s\ell\}, \{s, \ell\}\}$;
— *право-середніх луп, якщо* $\nu \neq \pi$, $\{\nu, \pi\} \in \{\{\iota, r\}, \{s, sr\}, \{\iota, sr\}, \{s, r\}\}$;
— *ліво-правих луп, якщо* $\nu \neq \pi$, *де* $\{\nu, \pi\} \in \{\{\ell, r\}, \{s\ell, sr\}, \{r, s\ell\}, \{\ell, sr\}\}$.

Доведення. Нехай квазігрупа $(Q; f)$ є розв'язком рівняння (4.1), тобто в $(Q; f)$ виконується тотожність ${}^{\nu}f = {}^{\pi}f$. Оскільки на кожному місці є шість можливих парастрофів функційних змінних, то всього 36 пар функцій можуть бути розв'язком рівняння (4.1). Дана тотожність рівносильна тотожності ${}^{\pi^{-1}\nu}f = f$, де $\pi^{-1}\nu \in S_3$. Якщо $\nu = \pi$, то маємо парастрофні многовиди односторонніх луп. Таких пар функцій буде 4, наприклад для середніх луп (ι, ι), (s, s) або (ι, s), (s, ι) та всього для односторонніх луп буде 12. Якщо $\nu \neq \pi$, то маємо парастрофні многовиди двосторонніх луп при відповідних наборах множин парастрофів. Всього таких пар функцій буде 24. □

Теорема 4.3. *Розв'язком рівняння (4.3) є многовид, який визначається тотожністю:*
— *всіх квазігруп, якщо* $\delta = \rho \in S_3$ *або якщо* $\delta \neq \rho$ *при* $\delta^{-1}\rho = \{\iota, s\}$;
— $x^2 \cdot x = x$, *якщо* $\delta \neq \rho$ *при* $\delta^{-1}\rho = \ell$ *або* $\delta^{-1}\rho = s\ell$;
— $x \cdot x^2 = x$, *якщо* $\delta \neq \rho$ *при* $\delta^{-1}\rho = r$ *або* $\delta^{-1}\rho = sr$;
— $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot x = x$ *або* $x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$ *в інших випадках.*

Доведення. Нехай квазігрупа $(Q; f)$ є розв'язком рівняння (4.3), тобто в $(Q; f)$ виконується тотожність ${}^{\delta}f = {}^{\rho}f$. Оскільки на кожному місці можливих шість парастрофів функційних змінних, то всього 36 пар функцій можуть бути розв'язком рівняння (4.3). Дана тотожність рівносильна тотожності ${}^{\delta^{-1}\rho}f = f$, де $\delta^{-1}\rho \in S_3$, яка означає, що $\delta^{-1}\rho$ належить групі парастрофних симетрій операції f: $\delta^{-1}\rho \in \mathrm{Ps}(f)$.

Отже, розв'язками рівняння (4.3) є квазігрупи, група симетрій яких містить перестановку $\delta^{-1}\rho$. Класом всіх таких квазігруп є многовид, група симетрій якого дорівнює циклічній групі, що породжена елементом $\delta^{-1}\rho$. Оскільки група S_3 має п'ять циклічних підгруп: $\{\iota\}$, $\{\iota, s\}$, $\{\iota, \ell\}$, $\{\iota, r\}$, $\{\iota, s\ell, sr\}$, то многовидів теж буде не більше п'яти. Розглянемо всі випадки.

Якщо $\delta = \rho \in S_3$, то маємо многовид всіх квазігруп. Якщо $\delta \neq \rho$, то при $\rho\delta^{-1} = s$ теж маємо многовид всіх квазігруп. Якщо $\rho\delta^{-1} = \ell$ або $\rho\delta^{-1} = s\ell$, то в першому випадку (за означенням лівого ділення), а в другому випадку (за означенням комутуваняння та означенням лівого ділення) маємо тотожність $x^2 \cdot x = x$. Якщо $\rho\delta^{-1} = r$ або $\rho\delta^{-1} = sr$, то в першому випадку (за означнням правого ділення), а в другому випадку (за означеннями комутування та правого ділення) маємо тотожність $x \cdot x^2 = x$. $\square$

4.1.2. Повна класифікація тотожностей довжини 2

В цьому підрозділі описано класифікацію узагальнених тотожностей довжини 2 на квазігрупах. Описано пучки різних многовидів квазігруп згідно з законом парастрофної симетрії.

З означення парастрофно-первинної рівносильності випливає, що тотожності рівносильні, якщо вони парастрофно-первинно рівносильні, але навпаки, це не завжди так. Наприклад, при $\tau = \sigma = \iota$ з (4.1) та при $\delta = \rho = \iota$ з (4.3) маємо тотожність, яка визначає клас всіх квазігруп. Наприклад, згідно з наслідком 4.1, тотожності (4.1) і (4.3) парастрофно-первинно нерівносильні. Враховуючи це, при класифікації потрібно доводити парастрофну нерівносильність тотожностей, які отримуємо з різних узагальнених тотожностей наслідку 4.1. Для цього спочатку кожну узагальнену тотожність розіб'ємо на пучки тотожностей, визначимо групу симетрій многовидів у кожному отриманому пучку.

Теорема 4.4. *Клас многовидів квазігруп, який визначається узагальненою тотожністю* (4.1) *з точністю до парастрофної рівносильності має три різних пучки многовидів:*
— клас всіх квазігруп, якщо $\tau = \sigma \in S_3$;
— клас напівсиметричних квазігруп, якщо

$$\{\tau, \sigma\} \in \{\{\iota, s\ell\}; \{\iota, sr\}; \{s\ell, sr\}; \{s, \ell\}; \{s, r\}; \{\ell, r\}\};$$

— клас односторонньо-симетричних квазігруп в інших випадках.

Доведення. Покажемо, що узагальнена тотожність (4.1) парастрофно-рівносильна точно одній із тотожностей односторонньо-симетричних квазігруп, напівсиметричних квазігруп та тотожності всіх квазігруп. Інакше кажучи, при будь-яких значеннях параметрів τ, σ із S_3 тотожність (4.1) визначає многовид, який парастрофний одному із многовидів, що визначені тотожностями (1.47), (1.50) та тотожності тривіальної квазігрупи. До того ж, зазначені многовиди належать до різних пучків, тобто вони попарно не парастрофні між собою.

Оскільки многовиди маємо визначити з точністю до парастрофності, то заміну функційної змінної $(\cdot)$ будемо робити не лише використовуючи первинні тотожності, а і замінюватимемо її на довільний парастроф.

Якщо $\tau = \sigma \in S_3$ в (4.1), то маємо клас тривіальних квазігруп. Надалі розглянемо випадок, коли $\tau \neq \sigma$. З теореми 4.1 випливає, що досить розглянути в одній частині тотожності $\tau = \iota$, а в іншій всі парастрофи. Якщо $\sigma = s$ маємо тотожність (1.47), яка за означенням визначає клас односторонньо-симетричних квазігруп.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = \ell$, то за означенням лівого ділення маємо тотожність (1.49). Згідно з результатом Ш. Стейна (див. табл. 1.1), тотожності (1.49) і (1.47) визначають парастрофні многовиди, тому вони парастрофно-рівносильні.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = r$, то за означенням правого ділення маємо тотожність (1.48). Згідно з результатом Ш. Стейна (див. табл. 1.1), тотожності (1.48) і (1.47) визначають парастрофні многовиди, тому вони парастрофно-рівносильні.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = s\ell$, то за означенням спочатку комутування, а потім лівого ділення маємо тотожність (1.50), яка визначає клас напівсиметричних квазігруп.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = sr$, то за означенням спочатку комутування, а потім правого ділення маємо тотожність (2.4), яка, згідно з лемою 2.1, рівносильна тотожності (1.50).

Щоб отримати всі множини парастрофів для тотожностей, які визначають клас напівсиметричних квазігруп, досить перейти в тотожності до σ^{-1}-парастрофа. Наприклад, за основну множину візьмемо $\{\iota, s\ell\}$, тоді обчислимо множини для всіх парастрофів. Для ι маємо цю ж саму множину. Для s-парастрофа — $\{\iota, s\ell\}s^{-1} = \{\iota, s\ell\}s = \{s, s\ell s\} = \{s, r\}$. Для r-парастрофа маємо $\{\iota, s\ell\}r^{-1} = \{\iota, s\ell\}r = \{r, s\ell r\} = \{r, \ell\}$. Для ℓ-парастрофа — $\{\iota, s\ell\}\ell^{-1} = \{\iota, s\ell\}\ell = \{\ell, s\ell\ell\} = \{\ell, s\}$. Для $s\ell$-парастрофа маємо $\{\iota, s\ell\}(s\ell)^{-1} = \{\iota, s\ell\}sr = \{sr, s\ell sr\} = \{sr, \iota\}$. Для sr-парастрофа маємо $\{\iota, s\ell\}(sr)^{-1} = \{\iota, s\ell\}s\ell = \{s\ell, s\ell s\ell\} = \{s\ell, sr\}$.

Для всіх інших множин парастрофів отримуємо тотожності, які визначають клас односторонньо-симетричних квазігруп.

Оскільки група симетрій многовида одностороньо-симетричних квазігруп складається з трьох елементів, а група симетрії напівсиметричних квазігруп з одного елемента, тому ці класи парастрофно-нерівносильні. $\square$

Деякий результат отримала Т. Попович [23], [96]. Вона не розглядала класифікації тотожностей, лише виписувала множини парастрофів для мінімальних тотожностей. Наведене нижче твердження дає класифікацію непарастрофних тотожностей, які визначають многовиди, а точніше пучки многовидів з різних класів розбиття.

Твердження 4.1. *Будь-яка тотожність виду* (4.1) *на квазігрупах* *парастрофно-рівносильна точно одній із таких тотожностей* (1.47), (1.50) *та тотожності тривіальної квазігрупи.*

Доведення. Це твердження є наслідком з теореми 4.4, тому що тотожності односторонніх квазігруп парастрофно-рівносильні між собою. Наприклад, ℓ-парастроф тотожності (1.47) буде тотожність (1.48). Справді, замінимо головну операцію $(\cdot)$ в (1.47) на її σ^{-1} парастроф. Оскільки $\ell^{-1} = \ell$, то маємо тотожність $x \overset{\ell}{\cdot} y = y \overset{\ell}{\cdot} x$. За означенням лівого ділення отримаємо $(x \overset{\ell}{\cdot} y) \cdot x = y$. Скориставшись позначенням 1.43 та перейменуванням змінних, матимемо тотожність (1.48). □

Парастрофні многовиди, які визначаються тотожністю (1.47), виписав у 1957 році Стейн [124], а після нього інші автори, наприклад В. Дудек [33], який вивчав ізотопізм парастрофів, що характеризуються тотожностями комутативності, симетрії зліва та симетрії справа (див. табл. 1.1).

Наслідок 4.2. *Будь-яка тотожність виду* (4.1) *рівносильна точно одній із таких 5 тотожностей* (1.47), (1.48), (1.49), (1.50) *та* $x = x$.

Доведення випливає з теореми 4.1, твердження 4.1 та табл. 1.1. □

Теорема 4.5. *Клас многовидів квазігруп, який визначається узагальненою тотожністю* (4.2) *з точністю до парастрофної рівносильності має два різних пучки многовидів:*
— *клас односторонніх луп, якщо* $\nu = \pi$ *або* $\nu = s\pi$, *де* $\pi \in S_3$;
— *клас двосторонніх луп в інших випадках.*

Доведення. При описанні тотожностей (4.2), користуємося первинними тотожнотями (1.2)–(1.42). Згідно з наслідком 1.5 та означенням 1.9, досить розглядати тотожності з (4.2), які мають вигляд $x \overset{\pi^{-1}\nu}{\cdot} x = y^2$. Звідси при $\pi^{-1}\nu \in \{\iota, s\}$, отримуємо тотожність, яка визначає клас односторонніх луп (див. табл. 1.3). При $\pi^{-1}\nu \in \{\ell, s\ell\}$ маємо тотожність ліво-середньої лупи. Якщо $\pi^{-1}\nu \in \{r, sr\}$, то отримуємо тотожність право-середньої лупи, тобто яка визначає клас двосторонніх луп (див. табл. 1.3).

Отже всього різних два пучки многовидів. Справді, нехай маємо квазігрупу $(\mathbb{Z}_5; \star)$, яка визначена $x \star y := 2x + 3y$. Вона задовольняє тотожність односторонніх луп, а саме, тотожність середньо-симетричних луп та не задовольняє жодну тотожність з пучка двосторонніх луп. Справді, виберемо довільну пару чисел, наприклад, $(1;2)$, підставимо в кожну тотожність, яка визначає пучок двосторонніх луп, в результаті отримаємо протиріччя. □

Твердження 4.2. *Будь-яка тотожність виду* (4.2) *на квазігрупах парастрофно-рівносильна тотожності або $x^2 = y^2$ або $x^2y = y$.*

Доведення. Це твердження є наслідком з теореми 4.5, тому що многовиди, які визначаються тотожностями односторонніх луп парастрофні між собою, а це означає, що тотожності лівих луп, правих та середніх луп σ-парастрофно-рівносильні між собою, де $\sigma \in S_3$. Аналогічно тотожності, які визначають многовиди ліво-правих луп, ліво-середніх та право-середніх луп попарно парастрофно-первинно-рівносильні. □

Підсумовуючи теорему 4.5 та твердження 4.1, із врахуванням закону парастрофної симетрії, отримуємо результати із табл. 1.3.

Наслідок 4.3. *Будь-яка тотожність виду* (4.2) *рівносильна точно одній із таких 6 тотожностей $x^2 = y^2$, $(x \overset{\ell}{\cdot} x)y = y$, $x(y \overset{r}{\cdot} y) = x$, $x(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x$, $x^2 \cdot y = y$, $x \cdot y^2 = y$.*

Доведення випливає з теореми 4.2, твердження 4.1 та табл. 1.3. □

Теорема 4.6. *Клас многовидів квазігруп, який визначається узагальненою тотожністю* (4.3) *з точністю до парастрофної рівносильності має два різних пучки парастрофних многовидів:*
— клас всіх квазігруп, якщо $\delta = \rho \in S_3$ або якщо $\delta \neq \rho$ при $\delta^{-1}\rho = s$;
— клас квазігруп, який визначається тотожністю $x^2 \cdot x = x$ в інших випадках.

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 4.3 тому, що многовид квазігруп, який визначається тотожністю $x \cdot x^2 = x$ є s-парастрофним многовидом до многовида, який визначається тотожністю $x^2 \cdot x = x$. За означенням ці многовиди належать одному пучку многовидів. □

Твердження 4.3. *Будь-яка тотожність виду* (4.3) *на квазігрупах парастрофно-рівносильна точно одній із тотожностей* $x^2 \cdot x = x$ *та тотожності тривіальної квазігрупи.*

Доведення. Це твердження є наслідком з теореми 4.6 тому, що тотожність $x \cdot x^2 = x$ отримується з тотожності $x^2 \cdot x = x$ заміною головного її парастрофа на s-парастроф. □

Наслідок 4.4. *Будь-яка тотожність виду* (4.3) *рівносильна точно одній із таких тотожностей* $x = x$, $x^2 \cdot x = x$, $x \cdot x^2 = x$, $x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$.

Доведення випливає з теореми 4.3, твердження 4.3 та такої таблиці

Парастрофні многовиди	$\mathfrak{A} = {}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A}$
Тотожності з (4.3)	$x^2 \cdot x = x$	$x \cdot x^2 = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot x = x$ $x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$,

З цієї таблиці видно, що такий пучок є односторонньо-симетричний, а тотожність $x = x$ визначає тотально-симетричний пучок. Покажемо, що три многовиди з цієї таблиці різні.

Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_7; \circ)$, що визначена рівністю $x \circ y = 6x + 5y$ і задовольняє тотожність $x^2 \cdot x = x$. Справді,

$$(1 \circ 1) \circ 1 = 6(6 + 5) + 5 = 8 = 1 \pmod 7.$$

Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \circ)$ не задовольняє жодну із парастрофних тотожностей відповідних парастрофних многовидів. Дійсно,

$$1 \circ (1 \circ 1) = 6 + 5(6 + 5) = 5 \neq 1 \pmod 7,$$

тобто квазігрупа не задовольняє тотожність $x \cdot x^2 = x$. Оскільки r-парастроф квазігрупи $(\mathbb{Z}_7; \circ)$ має вигляд $x \overset{\ell}{\circ} y = 3x + 3y$, то підставивши його у тотожність $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot x = x$, отримуємо теж невиконання тотожності в квазігрупі $(\mathbb{Z}_7; \circ)$.

Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_7; *)$, яка визначена рівністю $x * y = 5x + 6y$. Тотожність $x \cdot x^2 = x$ виконується в квазігрупі $(\mathbb{Z}_7; *)$, а тотожність в r-парастрофі: $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot x = x$ не виконується. Цим самим показали, що всі многовиди квазіруп, які визначаються узагальненою тотожністю (4.3) різні. □

Теорема 4.7. *Будь-яка квазігрупова тотожність довжини 2 рівносильна точно одній із таких 14 тотожностей та парастрофно-рівносильна точно одній із 6 тотожностей, що мають різні цифри:*

$$\begin{array}{llllllll}
1) & x=x, & 2) & xy\cdot x=y, & & & & \\
3) & xy=yx, & 4) & x^2=y^2, & 5) & x^2\cdot y=y, & 6) & x^2\cdot x=x, \\
{}^{\ell}3) & x\cdot xy=y, & {}^{\ell}4) & (x\overset{\ell}{\cdot}x)y=y, & {}^{s}5) & x\cdot y^2=x, & {}^{s}6) & x\cdot x^2=x, \\
{}^{r}3) & xy\cdot y=x, & {}^{r}4) & x(y\overset{r}{\cdot}y)=x, & {}^{\ell}5) & x(y\overset{\ell}{\cdot}y)=x, & {}^{\ell}6) & x(x\overset{\ell}{\cdot}x)=x.
\end{array}$$

Доведення. Ця теорема є узагальнюючим наслідком з теорем 4.4, 4.5, 4.6. Доведення рівносильності тотожностей довжини 2 поєднує доведення наслідків 4.2, 4.3, 4.4 з вилученням повторення. А доведення парастрофної рівносильності поєднує доведення тверджень 4.1, 4.2 та 4.3, теж з вилученням повторення.

Кількість всіх різних тотожностей обчислюємо як суму різних тотожностей із наслідків 4.2, 4.3, 4.4. Всього різних тотожностей отримано 14. Оскільки кожна тотожність визначає многовид, то покажемо, що всі ці многовиди різні. Віднімаючи повторення маємо, що різних пучків многовидів є 6. Тотожності, отримані з множини узагальнених тотожностей, не можуть бути парастрофно-рівносильними, якщо групи симетрій їх відповідних многовидів мають різну потужність. З наслідку 4.1 випливає, що досить показати, що многовиди відрізняються в середині кожного отриманого пучка. Два пучки є тотально-симетричними пучками, бо згідно з означенням всі парастрофи визначають один і той самий многовид, а саме многовид всіх квазігруп та многовид всіх напівсиметричних квазігруп. Різницю між многовидами лівосиметричних квазігруп, правосиметричних квазігруп та комутативних квазігруп показані ще Ш. Стейном (див. табл. 1.1). Різницю між многовидами односторонніх луп та многовидами двосторонніх луп знайдено Ф. Сохацьким (див. в'язку многовидів луп в табл. 1.3). Різницю між многовидами квазіруп, які визначаються тотожностями із (4.3) знайдено в наслідку 4.4.

Залишається встановити, що всі 6 пучків многовидів різні. Два пучки тотально-симетричні, а саме, клас всіх квазігруп та клас напівсиметричних квазігруп. Вони очевидно різні, оскільки напівсиметричні квазігрупи існують. Чотири пучки односторонньо-симетричні, покажемо, що вони теж різні. Для цього побудуємо табл. 4.1, в якій вкажемо приклад, що відрізняє один многовид від іншого.

Таблиця 4.1

Парастрофна нерівносильність тотожностей довжини 2

	$x^2=y^2$	$x^2\cdot y=y$	$x^2\cdot x=x$
$xy=yx$	$S_3:\ x\circ y:=xy$	$S_3:\ x\circ y:=yx^{-1}$	$\mathbb{Z}_7:\ x\circ y:=3x+5y$
$x^2=y^2$	$\times$	$\mathbb{Z}_5:\ x\circ y:=2x+3y$	$\mathbb{Z}_5:\ x\circ y:=3x+3y$
$x^2\cdot y=y$	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_5:\ x\cdot y:=3x+3y$

В групі S_3 виконуються тотожності $x^2=y^2$ та $x^2\cdot y=y$. Справді

$$(x\circ x)\circ y=y(x\circ x)^{-1}=y(x\cdot x^{-1})^{-1}=y.$$

Оскільки S_3 не комутативна, то жодна тотожність з табл. 1.1 в стовпчику “комутативність” не виконується. Це означає, що пучки класів комутативних квазігруп та класів односторонніх, двосторонніх луп різні.

Аналогічно доводиться, що тотожність $x^2\cdot x=x$ виконується в квазігрупі, яка визначена $x\circ y:=3x+5y$ над $\mathbb{Z}_7$, а жодна тотожність комутативності, симетрії зліва та симетрії справа, не виконується. І так для всіх квазігруп, які наведені в табл. 4.1.

Наприклад, тотожність $x^2\cdot x=x$ виконується в квазігрупі, яка визначена $x\circ y:=3x+3y$ над $\mathbb{Z}_7$, вона ідемпотентна, а тому не має ні лівого, ні правого, ні середнього елементів, а також ідемпотентні всі її парастрофи. А жодна тотожність із табл. 1.3 не виконується в цій квазігрупі тому, що вони мають односторонні елементи. Це означає, що тотожності з різних пучків парастрофно-нерівносильні, а самі пучки многовидів різні.

Отже, всі 14 отриманих многовидів квазігруп, які визначються тотожностями довжини 2 різні. $\square$

З цієї теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 4.5. *Всі квазігрупові узагальнені тотожності довжини 2 визначають 14 різних многовидів, які розподілені в 6 пучків за законом парастрофної симетрії. Серед яких: напівсиметричних та* *асиметричних пучків немає; 2 — тотально-симетричних:* 1), 2)*; 4 — односторонньо-симетричних:* 3), 4), 5), 6)*.*

Зауважимо, що будь-яка тотожність довжини 2 визначає з точністю до парастрофно-первинної рівносильності точно один із таких пучків многовидів: 1) пучок всіх квазігруп; 2) напівсиметричних квазігруп; 3) комутативних квазігруп; 4) односторонніх луп; 5) двосторонніх луп; 6) пучок квазігруп, які визначаються тотожністю $x^2 \cdot x = x$.

Підсумковий результат класифікації складений в такій таблиці.

Таблиця 4.2

Тотожності довжини 2 за парастрофною симетрією

Многовид	$\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	${}^{sr}\mathfrak{A}$
всіх квазігруп	$x = x$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
комутативних квазігруп	$xy = yx$	$\mathfrak{A}$	$x \cdot xy = y$	$xy \cdot y = x$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$
напівсиметричних квазігруп	$xy \cdot x = y$ $x \cdot yx = y$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
односторонніх луп	$x^2 = y^2$	$\mathfrak{A}$	$(x \overset{\ell}{\cdot} x)y = y$	$x(y \overset{r}{\cdot} y) = x$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$
двосторонніх луп	$x^2 \cdot y = y$	$x \cdot y^2 = y$	$\mathfrak{A}$	$x(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x$	${}^{s}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$
	$\mathbf{x^2 \cdot x = x}$	$\mathbf{x \cdot x^2 = x}$	$\mathbf{x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x}$, $\mathbf{(x \overset{r}{\cdot} x)x = x}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$

У цій таблиці виділені жирним шрифтом тотожності знайдені здобувачем. В одній довільній комірці записано рівносильні тотожності. У двох довільних комірках одного рядка — парастрофні тотожності. У різних стовпцях одного довільного рядка розміщені парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають один пучок, де стовпчики показують парастрофні многовиди квазігруп. У різних рядках записані тотожності, які визначають різні пучки многовидів. Між подвійними лініями розташовано парастрофно-первинно-рівносильні тотожності, які визначають одину множину узагальнених тотожностей.

4.2. Класифікація тотожностей довжини 3

В цьому підрозділі класифіковано тотожності довжини 3 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності та описано відповідні їм многовиди за групами симетрій, знайдено пучки різних многовидів квазігруп із врахуванням закону парастрофної симетрії.

З теореми 3.2 випливає таке твердження.

Наслідок 4.6. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно чотири узагальнених тотожностей довжини 3:*

$$x \overset{\delta}{\cdot} (x \overset{\tau}{\cdot} (x \overset{\nu}{\cdot} y)) = y; \tag{4.4}$$

$$(x \overset{\delta}{\cdot} x) \overset{\tau}{\cdot} y = x \overset{\nu}{\cdot} y; \tag{4.5}$$

$$(x \overset{\delta}{\cdot} x) \overset{\tau}{\cdot} x = y \overset{\nu}{\cdot} y; \tag{4.6}$$

$$(x \overset{\delta}{\cdot} x) \overset{\tau}{\cdot} x = x \overset{\nu}{\cdot} x, \tag{4.7}$$

де $\delta, \tau, \nu \in S_3$.

Якщо тотожність отримана з узагальненої тотожності наданням конкретних значень параметрам δ, τ, ν, то будемо говорити, що вона належить даній узагальненій тотожності. З означення парастрофно-первинної рівносильності випливає, що тотожності рівносильні, якщо вони парастрофно-первинно рівносильні, але навпаки, це не завжди так. Наприклад, при $\delta = \tau = \nu = \iota$ тотожності (4.5) та (4.7) парастрофно-рівносильні, але не є не парастрофно-первинно-рівносильними.

З наслідку 4.6 випливає, що з довільної тотожності довжини 3 шляхом застосування ланцюжка парастрофно-первинних перетворень можна отримати тотожність, яка належить одній із узагальнених тотожностей (4.4)–(4.7). Оскільки довільні парастрофно-первинні перетворення зводять тотожність до парастрофно-рівносильної, то для класифікації тотожностей з точністю до парастрофної рівносильності досить розглянути тотожності з (4.4)–(4.7).

Спочатку кожну узагальнену тотожність розіб'ємо на пучки тотожностей, визначимо групу симетрій многовидів у кожному отриманому пучку, а потім доведемо парастрофну нерівносильність між ними, враховуючи парастрофну симетрію відповідних пучків многовидів.

4.2.1. Класифікація тотожностей на пучки

Парастрофні тотожності виду (4.4) класифікував В. Білоусов [20] на квазігрупах. В своїй теоремі він отримав три тотожності Стейна (I, II та III закони Стейна), дві тотожності Шредера та ще дві нових тотожності, які сьогодні ми називаємо законами Білоусова. Над цим питанням працював Т. Іванс [36], який довів, що таких класів 14. Паралельно із В. Білоусовим, результати Т. Іванса спростовує Ф. Бенет [8] і встановлює, що їх 8. Проте, всього їх виявилося точно сім, як доведено у В. Білоусова [13]. Його уточнена теорема про класифікацію мінімальних нетривіальних тотожностей має такий вигляд.

Теорема 4.8 (В. Білоусов [20, с. 16])**.** *Будь-яка тотожність виду* (4.4) *на квазігрупах парастрофно-рівносильна точно одній із тотожностей:*

$$\text{\textit{I закон Білоусова-Бенета}} \quad x(x \cdot xy) = y; \tag{4.8}$$

$$\text{\textit{II закон Білоусова-Бенета}} \quad y(x \cdot xy) = x; \tag{4.9}$$

$$\text{\textit{I закон Стейна}} \quad x \cdot xy = yx; \tag{4.10}$$

$$\text{\textit{II закон Стейна}} \quad xy \cdot x = y \cdot xy; \tag{4.11}$$

$$\text{\textit{III закон Стейна}} \quad yx \cdot xy = x; \tag{4.12}$$

$$\text{\textit{I закон Шредера}} \quad xy \cdot y = x \cdot xy; \tag{4.13}$$

$$\text{\textit{II закон Шредера}} \quad xy \cdot yx = x; \tag{4.14}$$

$$\text{\textit{одноелементні квазігрупи}} \quad x = y. \tag{4.15}$$

Доведемо нижче теореми про розбиття множини інших трьох узагальнених тотожностей з наслідку 4.6 на пучки.

Теорема 4.9. *Будь-яка тотожність виду* (4.5) *на квазігрупах парастрофно-рівносильна точно одній із таких систем тотожностей:* (1.41)*;*

$$x^2 = x \quad \wedge \quad xy = yx; \tag{4.16}$$

$$x^2 = x \ \wedge \ yx \cdot y = x; \tag{4.17}$$

$$(y \cdot x^2) \cdot y = x; \tag{4.18}$$

$$x \cdot (y \cdot x^2) = y; \tag{4.19}$$

$$x^2 \cdot xy = y. \tag{4.20}$$

Доведення. Покажемо, що кожна тотожність узагальненої тотожності (4.5) парастрофно-рівносильна точно одній системі тотожностей (1.41), (4.16)–(4.20). Інакше кажучи, при будь-яких значеннях параметрів δ, τ, ν із S_3 тотожність (4.5) визначає многовид, який парастрофний одному із многовидів, що визначені системами тотожностей (1.41) та (4.16)–(4.20). До того ж, зазначені многовиди належать до різних пучків, тобто вони попарно непарастрофні між собою. Оскільки многовиди визначаємо з точністю до парастрофності, то функційну змінну $(\cdot)$ замінюватимемо на її довільний парастроф, використовуючи первинні тотожності.

В узагальненій тотожності (4.5) виберемо за головну операцію $(\overset{\tau}{\cdot})$, тобто підставимо $(\overset{\tau^{-1}}{\cdot})$ в тотожність замість $(\cdot)$: $(x \overset{\delta\tau^{-1}}{\cdot} x) \cdot y = x \overset{\nu\tau^{-1}}{\cdot} y$. Оскільки $x \overset{s}{\cdot} x = x \cdot x$, то дана узагальнена тотожність парастрофно-рівносильна тотожності $(x \overset{\pi}{\cdot} x) \cdot y = x \overset{\kappa}{\cdot} y$, де $\pi \in \{\iota, \ell, r\}$, $\kappa \in S_3$. В отриманій рівності тепер вибираємо головною операцію $(\overset{\pi}{\cdot})$, в результаті заміни $\tau := \kappa\pi^{-1} \in S_3$ маємо $x^2 \overset{\pi^{-1}}{\cdot} y = x \overset{\tau}{\cdot} y$, де $\pi^{-1} \in \{\iota, \ell, r\}$. Отже, маємо три тотожності: $x^2 y = x \overset{\tau}{\cdot} y$, $\;x^2 \overset{\ell}{\cdot} y = x \overset{\tau}{\cdot} y$, $\;x^2 \overset{r}{\cdot} y = x \overset{\tau}{\cdot} y$. Звідси, за означенням лівого і правого ділення, маємо:

$$x^2 y = x \overset{\tau}{\cdot} y \quad (\text{а}), \qquad (x \overset{\tau}{\cdot} y) \cdot y = x^2 \quad (\text{б}), \qquad x^2 \cdot (x \overset{\tau}{\cdot} y) = y \quad (\text{в}).$$

Проаналізуємо кожну з них:

Тотожність (а) при $\tau = \iota$ рівносильна ідемпотентності, оскільки її можна скоротити на y, тому маємо (1.41). Якщо $\tau = s$, то тотожність (а) має вигляд $x^2 y = yx$. Поклавши $y = r_{x^2}$ отримаємо $x \cdot x = r_{x^2} \cdot x$. Скоротимо на x: $x = r_{x^2}$. Домножимо зліва на x^2 : $x^2 \cdot x = x \cdot x$. Скоротивши на x, отримаємо ідемпотентність, яка разом з $x^2 y = yx$ дає (4.16).

Якщо $\tau = \ell$, то (а) рівносильна $x^2 = x$ при $y = r_{x^2}$, тому тотожність парастрофно-рівносильна системі (4.16). Якщо $\tau = r$, то (а) рівносильна $x \cdot x^2 y = y$. Це ліва IP-квазігрупа, тому отримаємо (4.20).

Якщо $\tau = s\ell$, то (а) рівносильна тотожності $x^2y = y \overset{\ell}{\cdot} x$. За означенням лівого ділення: $x^2y \cdot x = y$. При $y = x^2$ отримаємо $(x^2)^2 = x$. Враховуючи отримане, підставимо x^2 замість x: $xy \cdot x^2 = y$. Домножимо зліва на x і замінимо xy на y, в результаті отримаємо (4.19). Якщо $\tau = sr$, то (а) має вигляд $x^2y = y \overset{r}{\cdot} x$. Звідси $y \cdot x^2y = x$. Замінимо $(\cdot)$ на $(\overset{s}{\cdot})$, отримаємо $y \overset{s}{\cdot} ((x \overset{s}{\cdot} x) \overset{s}{\cdot} y) = x$, тобто за комутуванням виконується (4.18).

Тотожність (б) при $\tau = \iota$ має вигляд $xy \cdot y = x^2$, підставивши в яку $y = r_x$, маємо ідемпотентність, тому виконується (1.49), а r-парастроф тотожності (1.49) є комутативністю, тому виконується (4.16). Якщо $\tau = s$, то (б) має вигляд $yx \cdot y = x^2$. При $y = x$ отримуємо ідемпотентність, тому (4.17) виконується.

Якщо $\tau = r$, то (б) має вигляд $(x \overset{r}{\cdot} y) \cdot y = x^2$. Врахувавши заміну (1.43), отримуємо $y \cdot xy = x^2$. При $y = x$ отримуємо ідемпотентність, тому виконується (4.17). Якщо $\tau = \ell$, то (б) має вигляд $(x \overset{\ell}{\cdot} y)y = x^2$, звідки, згідно із заміною (1.43), маємо (1.41).

Якщо $\tau = s\ell$, то (б) має вигляд $(y \overset{\ell}{\cdot} x)y = x^2$. Врахувавши заміну (1.43), маємо $y \cdot yx = x^2$, звідки при $y = x$ маємо $x = x^2$, тобто виконується тотожність (1.48), яка парастрофна комутативності. Отже, виконується (4.16). Якщо $\tau = sr$, то (б) має вигляд $(y \overset{r}{\cdot} x)y = x^2$. Позаяк $r_x = x \overset{r}{\cdot} x$, то при $y = x$ маємо $r_x \cdot x = x \cdot x$, тобто $r_x = x$. Врахувавши заміну (1.44), отримуємо комутативність. Отже, (б) парастрофно-рівносильна (4.16).

Тотожність (в) при $\tau = \iota$ має вигляд (4.20). Якщо $\tau = s$, то (в) має вигляд $x^2 \cdot yx = y$. Звідси при $y = x$ маємо $(x^2)^2 = x$, тому, замінивши x на x^2, отримаємо (4.19).

Якщо $\tau = \ell$, то (в) рівносильна тотожності $x^2(x \overset{\ell}{\cdot} y) = y$. За заміною (1.43) маємо $(xy)^2 \cdot x = y$. Отриману рівність домножимо зліва на x, а потім, замінивши xy на y, в результаті отримаємо s-парастроф тотожності (4.18). Якщо $\tau = r$, то (в) має вигляд $x^2 \cdot (x \overset{r}{\cdot} y) = y$. Скориставшись заміною (1.44), маємо тотожність $x^2z = xz$. Скоротивши на z, отримаємо ідемпотентність, тому дана тотожність рівносильна (1.41).

Якщо $\tau = s\ell$, то (в): $\quad x^2(y \overset{\ell}{\cdot} x) = y$. Згідно з заміною (1.43), маємо $x^2 z = zx$. При $z = r_{x^2}$ маємо $x \cdot x = r_{x^2} \cdot x$. Звідси $x = r_{x^2}$ домножимо на x^2 зліва, маємо $x^2 \cdot x = x^2$. Скоротивши на x, отримаємо ідемпотентність. Тому з $x^2 z = zx$ випливає комутативність. Отже, виконується (4.16). Якщо $\tau = sr$, то (в): $\quad x^2(y \overset{r}{\cdot} x) = y$. Скориставшись заміною (1.44), маємо $(yz)^2 \cdot z = y$. Домножимо отриману рівність на z справа, а потім замінимо yz на y, в результаті отримаємо $y^2 z \cdot z = y$. Звідси при $z = r_{y^2}$ отримуємо ідемпотентність. Це означає, що виконується тотожність $yz \cdot z = y$, яка парастрофна комутативності. Отже, виконується (4.16).

Для доведення парастрофної нерівносильності використаємо такі таблиці Келі для квазігруп різних порядків:

$*$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	4	2	1	3
3	2	4	3	1
4	3	1	2	4

$(Q_4;*)$

$\diamond$	1	2	3	4	5
1	1	5	2	3	4
2	5	2	4	1	3
3	2	4	3	5	1
4	3	1	5	4	2
5	4	3	1	2	5

$(Q_5;\diamond)$

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	1	8	9	5	4	7	6
3	3	1	2	7	6	9	8	4	5
4	4	9	6	5	1	8	3	2	7
5	5	8	7	1	4	3	9	6	2
6	6	5	9	2	8	7	1	3	4
7	7	4	8	9	2	1	6	5	3
8	8	7	4	6	3	2	5	9	1
9	9	6	5	3	7	4	2	1	8

$(Q_9;\circ)$

Результати попарної парастрофної нерівносильності можна подати в наступній таблиці, де на перетині рядків та стовбців знаходиться відповідна квазігрупа, яка задовольняє одну тотожність і не задовольняє другу.

Таблиця 4.3

Попарна парастрофна нерівносильність тотожностей виду (4.5)

	(4.16)	(4.17)	(4.18)	(4.19)	(4.20)
(1.41)	$(Q_4;*)$	$(Q_5;\diamond)$	$(Q_5;\diamond)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
(4.16)	$\times$	$(Q_4;*)$	$(Q_5;\diamond)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
(4.17)	$\times$	$\times$	$(Q;\circ)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
(4.18)	$\times$	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
(4.19)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(Q_9;\circ)$

Тотожність (1.41) інваріантна при парастрофній рівносильності (див. табл. 1.1). Група $\mathbb{Z}_3$ задовольняє тотожності (4.19) та (4.20), проте вона неідемпотентна, тому тотожності (4.19) та (4.20) не парастрофно-рівносильні жодній з тотожностей (1.41), (4.16), (4.17), (4.18). Квазігрупа $(Q;\circ)$ над $\mathbb{Z}_5$, яка визначена рівністю $x \circ y := 2x + y$ задовольняє (4.18). Оскільки кожен парастроф $(Q;\circ)$ неідемпотентний, то (4.17) не виконується, тобто (4.17) і (4.18) парастрофно-нерівносильні.

Розглянемо тотожності (1.41), (4.16) та (4.17). Системи тотожностей (1.41), (4.17) інваріантні при парастрофії. Якщо припустити, що пари тотожностей (1.41) і (4.16) та (4.16) і (4.17) парастрофно-рівносильні, то це означає, що в кожній квазігрупі, в якій виконуються (1.41), (4.17), має виконуватися принаймні один із парастрофів тотожностей, які парастрофно-рівносильні (4.16). Із тотожностей (4.16): ідемпотентність інваріантна при парастрофії, комутативність парастрофно-рівносильна сама собі, або (1.48), або (1.49). В $(Q_4;*)$ виконуються (1.41), (4.17), але не виконуються (4.16). Справді, очевидно, що комутативність з $(Q_4;*)$ не виконується, для тотожності (1.48) візьмемо довільну пару з $(Q_4;*)$, наприклад, $2 \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 1 = 4 \neq 3$, отримали суперечність. Для тотожності (1.49) з $(Q_4;*)$ маємо $(3 \cdot 4) \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 2 \neq 3$, теж суперечність. Отже, (1.41) і (4.16) та (4.16) і (4.17) попарно парастрофно-нерівносильні.

Розглянемо пару тотожностей (1.41) і (4.17). Оскільки ідемпотентність і напівсиметричність інваріантна при парастрофії, то для доведення парастрофної нерівносильності (1.41) і (4.17) необхідно побудувати ідемпотентну квазігрупу, в якій не виконується напівсиметричність. Такою квазігрупою є $(Q_5;\diamond)$. Справді, $(3 \cdot 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 5 \neq 2$. Отже, (1.41) і (4.17) парастрофно-нерівносильні.

Розглянемо пари тотожностей (1.41) і (4.18), (4.16) і (4.18). В квазігрупі $(Q_5;\diamond)$, тотожності (1.41) і (4.16) виконуються. Доведемо, що квазігрупа $(Q_5;\diamond)$ не виконується в жодному парастрофі тотожності (4.18). Справді, для ι-парастрофа маємо $(3 \cdot (5 \cdot 5)) \cdot 3 = (3 \cdot 5) \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 2 \neq 5$, для s-парастрофа маємо тотожність $y \cdot (x^2 \cdot y) = x$, а з квазігрупи $(Q_5;\diamond)$ отримуємо $5 \cdot ((4 \cdot 4) \cdot 5) = 5 \cdot (4 \cdot 5) = 5 \cdot 2 = 3 \neq 4$. В ℓ-парастрофі, згідно з означенням лівого ділення маємо тотожність $xy \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$, а з квазігрупи

$(Q_5;\diamond)$ отримуємо $(3{\cdot}2){\cdot}(3 \overset{\ell}{\cdot} 3) = 4{\cdot}3 = 5 \neq 2$. Для r-парастрофа за означенням правого ділення отримуємо тотожність $(y \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x)) \cdot x = y$, а з квазігрупи $(Q_5;\diamond)$ маємо $(2 \overset{r}{\cdot} (5 \overset{r}{\cdot} 5)){\cdot}5 = (2 \overset{r}{\cdot} 5){\cdot}5 = 1{\cdot}5 = 4 \neq 2$. В sr-парастрофі за комутуванням та означенням правого ділення отримуємо тотожність $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot yx = y$, а з квазігрупи $(Q_5;\diamond)$ маємо $(5 \overset{r}{\cdot} 5) \cdot (3 \cdot 5) = 5 \cdot 1 = 4 \neq 3$. І нарешті, для $s\ell$-парастрофа за означенням комутування та лівого ділення отримуємо тотожність $x \cdot ((x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} y) = y$, а з квазігрупи $(Q_5;\diamond)$ маємо $3 \cdot ((3 \overset{\ell}{\cdot} 3) \overset{\ell}{\cdot} 2) = 3 \cdot (3 \overset{\ell}{\cdot} 2) = 3 \cdot 5 = 1 \neq 2$. Отже, (1.41) і (4.18) та (4.16) і (4.18) парастрофно-нерівносильні.

Розглянемо пару тотожностей (4.19) і (4.20). Вони різні, оскільки тотожність (4.20) виконується в квазігрупі 9-го порядку $(Q;\circ)$, а тотожність (4.19) в цій квазігрупі не виконується. Справді, нехай візьмемо будь-яку пару чисел з квазігрупи $(Q;\circ)$ і перевіримо чи виконується тотожність (4.19): $5 \circ (8 \circ (5 \circ 5)) = 5 \circ (8 \circ 4) = 5 \circ 6 = 3 \neq 8$. Отже, тотожності (4.19) і (4.20) незалежні. □

Теорема 4.10. *Будь-яка тотожність виду (4.6) на квазігрупах парастрофно-рівносильна точно одній із таких тотожностей:*

$$xy^2 \cdot x = x; \tag{4.21}$$

$$(x^2 \cdot x)y = y; \tag{4.22}$$

$$(x \cdot x^2)y = y. \tag{4.23}$$

Доведення. При описанні тотожностей (4.6) скористаємося первинними тотожностями, для цього перепозначимо відповідно операції $\delta^{-1}\tau$ на τ, $\delta^{-1}\nu$ на ν, $\delta^{-1}\delta$ на $(\cdot)$. Тоді (4.6) матиме вигляд:

$$x^2 \overset{\tau}{\cdot} x = y \overset{\nu}{\cdot} y, \tag{4.24}$$

яка визначає многовид з того ж пучка. Замінивши $x = e$, отримаємо, що дана тотожність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 \overset{\tau}{\cdot} x = e, \\ y \overset{\nu}{\cdot} y = e; \end{cases} \tag{4.25}$$

для деякого елемента e носія. Замінимо в системі $(\cdot)$ на $(\overset{s}{\cdot})$, отримаємо

$$\begin{cases} x^2 \overset{\tau s}{\cdot} x = e, \\ y \overset{\nu s}{\cdot} y = e; \end{cases}$$

При фіксованих τ, ν дана система визначає многовид, який належить тому самому пучку, що і многовид, який визначається системою (4.25). Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\tau \in \{\iota, \ell, r\}$.

Оскільки $y \overset{\nu}{\cdot} y$ та $y \overset{\nu s}{\cdot} y$ рівносильні, то досить розглянути $\nu \in \{\iota, \ell, r\}$.

Якщо $\nu = \iota$, то перша тотожність із системи (4.25), із врахуванням другої, має вигляд $e \overset{\tau}{\cdot} x = e$, а це означає, що квазігрупа, в якій вона виконується одноелементна.

Нехай $\nu = \ell$, то друга тотожність із (4.25) рівносильна $ex = x$, тобто e є лівим нейтральним елементом. Якщо $\tau = \iota$, то маємо нетривіальний многовид із системи (4.25), який містить групи експоненти три, тобто визначається тотожністю (4.22). Якщо $\tau = \ell$, то перша тотожність із системи (4.25) рівносильна тотожності $ex = x^2$, тобто $x = e$, тому вона тривіальна. Якщо $\tau = r$, то отримуємо тотожність $x = x^2 e$, тобто $x = x^2 \cdot (y \overset{\ell}{\cdot} y)$. Дана тотожність нетривіальна, бо виконується в квазігрупі $(\mathbb{Z}_{11}; *)$, яка визначена рівністю $x * y := 7x + y + 4$. Справді, елемент 1 є лівим нейтральним в цій квазігрупі: $1 * y = 7 \cdot 1 + y + 4 = y$, а також виконується і сама тотожність:

$$(x * x) * 1 = 7(7x + x + 4) + 1 + 4 = 56x + 33 = x \pmod{11}.$$

Ця тотожність в ℓ-парастрофі має вигляд $x = (x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} y^2$, яка за означенням лівого ділення рівносильна (4.21).

Нехай $\nu = r$, то друга тотожність із (4.25) означає, що e є правим нейтральним елементом. Якщо $\tau = \iota$, то дана тотожність нетривіальна, оскільки довільна група експоненти три їй задовольняє, тобто многовид визначається тотожністю (4.23), яку отримуємо з (4.25) в s-парастрофі. Якщо $\tau = \ell$, то перша тотожність із системи (4.25) рівносильна тотожності $ex = x^2$, тобто тривіальній. Якщо $\tau = r$, то отримуємо тотожність $x^2 e = x$, тобто $x^2 = x$ або $x^2 = xe$. Це означає, що тотожність знову тривіальна. Отже, нетривіальними є такі системи тотожностей:

$$\begin{cases} ey = y, \\ x^2 \cdot x = e; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 e = x, \\ ey = y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 \cdot x = e, \\ ye = y; \end{cases}$$

тобто тотожності з умови теореми.

Доведемо попарну парастрофну нерівносильність отриманих тотожностей, яку подамо в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Парастрофна нерівносильність тотожностей виду (4.6)

	(4.22)	(4.23)
(4.21)	$\mathbb{Z}_{11}:\ x*y = 8x+3y+1$	$\mathbb{Z}_{11}:\ x*y = 8x+3y+1$
(4.22)	$\times$	$\mathbb{Z}_7:\ x\star y = 2x+y$

Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{11};*)$, яка визначена рівністю $x*y := 8x+3y+1$ задовольняє тотожність (4.21). Жоден із парастрофів цієї квазігрупи не задовольняє ні (4.22), ні (4.23). Справді, випишемо парастрофи квазігрупи $(\mathbb{Z}_{11};*)$:

$$x*y = 8x+3y+1, \quad x\overset{\ell}{*}y = 7x+y+4, \quad x\overset{r}{*}y = x+4y+7;$$
$$x\overset{s}{*}y = 3x+8y+1, \quad x\overset{s\ell}{*}y = x+7y+4, \quad x\overset{sr}{*}y = 4x+y+7,$$

які по черзі підставимо в (4.22) і (4.23) та обчислимо, в результаті отримаємо невиконання жодної із цих тотожностей, наприклад,

$$(x^2 \cdot x)\cdot y = 8(8(8x+3x+1)+3x+1)+3y+1 \neq y \pmod{11}.$$

Решта парастрофів для кожної тотожності перевіряється аналогічно. Отже, (4.21), (4.22) та (4.21), (4.23) попарно парастрофно-нерівносильні.

Для доведення парастрофної нерівносильності тотожностей (4.22) та (4.23) візьмемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_7;\star)$, яка визначена рівністю $x\star y := 2x+y$. Ця квазігрупа задовольняє тотожність (4.22), справді,

$$(x^2 \cdot x)\cdot y = 2(2(2x+x)+x)+y = y \pmod 7,$$

але жоден із її парастрофів не задовольняє тотожність (4.23). Цим самим доводиться, що тотожності (4.22) та (4.23) парастрофно-нерівносильні. $\square$

Теорема 4.11. *Будь-яка тотожність виду (4.7) на квазігрупах парастрофно-рівносильна точно одній із таких тотожностей:* (1.41)*;*

$$x^2 \cdot x^2 = x; \tag{4.26}$$

$$(x^2 \cdot x)x = x; \tag{4.27}$$

$$(x \cdot x^2)x = x. \tag{4.28}$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.9 та теореми 4.10. А саме, перепозначивши відповідно операції з (4.7) маємо $(x \overset{\delta}{\cdot} x) \overset{\tau}{\cdot} x = x^2$. Якщо $\tau \in \{\iota, s\}$, то скоротивши на x, маємо (1.41). Якщо $\tau \in \{\ell, sr, r, s\ell\}$, то

$$x^2 \cdot x = x \overset{\delta}{\cdot} x, \text{ (а)} \quad x \cdot x^2 = x \overset{\delta}{\cdot} x, \text{ (б)} \quad (x \overset{\delta}{\cdot} x)x^2 = x, \text{ (в)} \quad x^2(x \overset{\delta}{\cdot} x) = x. \text{ (ґ)}$$

Не втрачаючи загальності можемо вважати, що $\delta \in \{\iota, \ell, r\}$. Якщо $\delta = \iota$, то з тотожностей (а), (б), (в) та (ґ) маємо (1.41), (1.41), (4.26) та (4.26) відповідно. Якщо $\delta = \ell$, то з тотожності (а) маємо (4.27), а з тотожності (б) отримуємо (4.28), а з (в) та (ґ) маємо $(x \overset{\ell}{\cdot} x)x^2 = x$ та $x^2(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$ відповідно. З цих всіх тотожностей в ℓ-парастрофі отримуємо відповідно: $x^2 \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$, та $(x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x^2 = x$. Звідси, згідно з лівим діленням, маємо $x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x^2$ та $x \cdot x^2 = x \overset{\ell}{\cdot} x$ відповідно. У першому випадку, скоротивши на x, маємо (1.41), а з другої тотожності в s-парастрофі маємо (4.27).

Якщо $\delta = r$, то з тотожностей (а) та (б) маємо $x \cdot x^2 x = x$ та $x \cdot xx^2 = x$ відповідно. Обидві тотожності в s-парастрофі парастрофно-рівносильні (4.28) та (4.27) відповідно. А з тотожностей (в) та (ґ) маємо $(x \overset{r}{\cdot} x)x^2 = x$ та $x^2(x \overset{r}{\cdot} x) = x$. З них в r-парастрофі відповідно $x^2 \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x) = x$, $(x \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x^2 = x$. Звідси відповідно за правим діленням маємо $x^2 \cdot x = x \overset{r}{\cdot} x$ та $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot x = x^2$. З першої тотожності в s-парастрофі маємо (4.28), а з другої, скоротивши на x, маємо (1.41).

Результати попарної парастрофної нерівносильності подані в табл. 4.5, де на перетині рядків та стовпців знаходиться канонічний розклад групового ізотопу квазігрупи $(\mathbb{Z}_7; \circ)$, яка задовольняє одну тотожність і не задовольняє жодної парастрофної тотожності до неї. Наприклад, квазігрупа з розкладом $x \circ y := 4x + 2y$ задовольняє (4.26), (4.27) та не задовольняє жоден із парастрофів тотожності (4.28). Це означає, що пари тотожностей (4.26) і (4.28), (4.27) і (4.28) парастрофно-нерівносильні.

Таблиця 4.5

Парастрофна нерівносильність тотожностей виду (4.7)

	(4.26)	(4.27)	(4.28)
(1.41)	$\mathbb{Z}_7: \ x \circ y = 4x + 2y$	$\mathbb{Z}_7: \ x \circ y = 4x + 5y$	$\mathbb{Z}_3$
(4.26)	$\times$	$\mathbb{Z}_7: \ x \circ y = 4x + 5y$	$\mathbb{Z}_7: \ x \circ y = 4x + 2y$
(4.27)	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_7: \ x \circ y = 4x + 2y$

Оскільки кожна квазігрупа $(Q; \circ)$ в табл. 4.5 неідемпотентна, тому не задовольняє (1.41). Тотожність (4.27) виконується в квазігрупі з розкладом $x \circ y := 4x + 5y$, тоді як (4.26) не виконується в жодному парастрофі цієї квазігрупи. Цим самим доводиться попарна парастрофна-нерівносильність пучків, які визначені в теоремі. $\square$

4.2.2. Класифікація тотожностей в пучках

В цьому підрозділі досліджено тотожності з точністю до парастрофної рівносильності, які визначають парастрофні многовиди та описано тотожності з точністю до рівносильності, які визначають один многовид в пучку.

Тотожності виду (4.4) досліджували Т. Іванс [36], Ф. Бенет [8] та В. Білоусов [13]. Остаточний результат отримав В. Білоусов, який описав 7 пучків многовидів. Проаналізуємо всі 7 пучків, випишемо всі многовиди та рівносильні і парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають їх.

Твердження 4.4. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.8), тоді його парастрофи визначаються відповідною тотожністю:*

$$\mathfrak{A} = {}^{r}\mathfrak{A}: \quad x(x \cdot xy) = y; \tag{4.29}$$

$$^{s}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A}: \quad (yx \cdot x)x = y; \tag{4.30}$$

$$^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}: \ x(yx \overset{\ell}{\cdot} y) = yx, \quad \text{або} \ \ (x \overset{r}{\cdot} yx)y = yx. \tag{4.31}$$

Доведення. З наслідку 1.4 випливає, що r-парастроф ${}^{r}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} y)) = y$. Скориставшись правим діленням тричі, отримуємо тотожність (4.29), яка збігається з

(4.8), тобто тотожність (4.29) визначає многовид $\mathfrak{A} = {}^{r}\mathfrak{A}$. s-парастроф ${}^{s}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y)) = y$. За означенням комутування, переставивши підтерми, отримаємо (4.30). Згідно з наслідком 1.5, s-парастроф тотожності (4.30) визначає многовид ${}^{s}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A}$. А це означає істинність пункту (4.30). ℓ-парастроф ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = y$. Звідси, за означенням лівого ділення з лівої частини, маємо $y(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = x$. В отриманій тотожності скористаємося заміною (1.43): $y(zy \overset{\ell}{\cdot} z) = zy$. Перейменуємо відповідно предметні змінні y на x, z на y, в результаті отримаємо першу тотожність з (4.31). В тотожності (4.31) використаємо праве ділення зліва, отримаємо $x \overset{r}{\cdot} yx = yx \overset{\ell}{\cdot} y$, звідси за означенням лівого діленя з правої сторони маємо другу тотожність з (4.31). Отже, тотожності в (4.31) рівносильні і визначають многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$. Згідно з наслідком 1.5, s-парастроф тотожності (4.31), визначає многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}$. □

Твердження 4.5. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.9), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$\mathfrak{A}: \quad y(x \cdot xy) = x, \quad xy(xy \cdot x) = y; \tag{4.32}$$

$$ {}^{s}\mathfrak{A}: \quad (yx \cdot x)y = x, \quad (x \cdot yx)yx = y; \tag{4.33}$$

$$ {}^{\ell}\mathfrak{A}: \quad x(yx \cdot y) = yx; \tag{4.34}$$

$$ {}^{r}\mathfrak{A}: \quad x(x \cdot yx) = y, \quad (x \cdot xy)x = y, \quad x(xy \cdot x) = y; \tag{4.35}$$

$$ {}^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad (x \cdot yx)y = yx; \tag{4.36}$$

$$ {}^{sr}\mathfrak{A}: \quad (xy \cdot x)x = y, \quad x(yx \cdot x) = y, \quad (x \cdot yx)x = y. \tag{4.37}$$

Доведення. Для знаходження тотожностей, які визначають парастрофи многовида $\mathfrak{A}$, застосовуватимемо наслідок 1.4. Отже, s-парастроф ${}^{s}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $y \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y)) = x$. Згідно з комутуванням, переставивши підтерми, отримуємо першу тотожність (4.33). Отже, многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.33). ℓ-парастроф ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $y \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = x$. За означенням лівого ділення отримуємо: $x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = y$. Використовуючи (1.43) для $(x \overset{\ell}{\cdot} y)$ маємо $x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} t) = t \overset{r}{\cdot} x$. За означенням правого ділення маємо $t(x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} t)) = x$. Скориставшись заміною (1.43) для терма $(x \overset{\ell}{\cdot} t)$ та відповідним перейменуванням змінних, в результаті отримаємо тотожність з (4.34). Отже, многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.34).

Замінивши в тотожності (4.34) головну операцію на s-парастроф, отримаємо тотожність $x \overset{s}{\cdot} ((y \overset{s}{\cdot} x) \overset{s}{\cdot} y) = y \overset{s}{\cdot} x$, яка, згідно з наслідком 1.5, є $s\ell$-парастрофом тотожності (4.9), тобто визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$.

Скориставшись означенням комутування термів, в результаті отримаємо першу тотожність з (4.36). Отже, многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.36). r-парастроф ${}^{r}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $y \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} y)) = x$. Звідси, за означенням правого ділення лівої частини тричі підряд, маємо першу тотожність з (4.35). Це означає, що ${}^{r}\mathfrak{A}$ визначається першою тотожністю з (4.35).

Замінивши в тотожності (4.35) головну операцію на s-парастроф, потім згідно з комутуванням отримаємо (4.37). Це означає, що многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$ визначається першою тотожністю з (4.37).

Доведемо рівносильність тотожностей в кожному многовидів. Розглянемо многовид $\mathfrak{A}$. В першій тотожності (4.32) скористаємося означенням правого ділення зліва: $y \overset{r}{\cdot} x = x \cdot xy$. Скориставшись заміною (1.44) для лівої частини отриманої рівності та перейменувавши відповідно предметні змінні, отримуємо другу тотожність з (4.32).

Розглянемо многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$. В першій рівності (4.33) за означенням лівого ділення зліва маємо $x \overset{\ell}{\cdot} y = yx \cdot x$. Скориставшись заміною (1.43) для лівої частини отриманої рівності та перейменувавши відповідно предметні змінні, отримуємо другу тотожність з (4.33).

Розглянемо многовид ${}^{r}\mathfrak{A}$. Домножимо обидві частини рівності (4.34) на x справа та замінимо в отриманій рівності yx на x, в результаті отримаємо другу рівність з (4.34). Домножимо другу рівність з (4.34) на x зліва та замінимо xy на y, в результаті матимемо третю рівність з (4.34). Оскільки рухалися за рівносильністю, то всі тотожності (4.34) рівносильні і визначають многовид ${}^{r}\mathfrak{A}$.

Аналогічно доводиться рівносильність тотожностей многовида ${}^{sr}\mathfrak{A}$. $\square$

Твердження 4.6. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.10), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$ {}^{s}\mathfrak{A}: \quad yx\cdot x = xy; \tag{4.38}$$

$$ {}^{\ell}\mathfrak{A}: \quad x(y\cdot yx) = yx; \tag{4.39}$$

$$ {}^{r}\mathfrak{A}: \quad xy\cdot(xy\cdot y) = x, \;\; (x\cdot xy)\cdot y = x; \tag{4.40}$$

$$ {}^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad (xy\cdot y)\cdot x = xy; \tag{4.41}$$

$$ {}^{sr}\mathfrak{A}: \quad (x\cdot xy)\cdot xy = y, \;\; y\cdot(yx\cdot x) = x. \tag{4.42}$$

Доведення. Для знаходження тотожностей, які визначають парастрофи многовида $\mathfrak{A}$, застосовуватимемо наслідок 1.4. Отже, s-парастроф ${}^{s}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y) = y \overset{s}{\cdot} x$. Згідно з комутуванням, переставивши підтерми, отримаємо (4.38).

ℓ-парастроф ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю, в якій головна операція замінена на ліве ділення, а потім за означенням лівого ділення отримуємо: $(y \overset{\ell}{\cdot} x)\cdot(x \overset{\ell}{\cdot} y) = x$. Для $(y \overset{\ell}{\cdot} x)$ скористаємося заміною (1.43), в результаті отримаємо $t\cdot(x \overset{\ell}{\cdot} tx) = x$. З цієї тотожності за означенням правого ділення маємо: $t \overset{r}{\cdot} x = x \overset{\ell}{\cdot} tx$, а за означенням лівого ділення отримуємо: $(t \overset{r}{\cdot} x)\cdot tx = x$. Для цієї рівності, згідно з (1.44), використаємо заміну $t \overset{r}{\cdot} x =: y$, тобто $ty = x$. В результаті отримаємо $y\cdot(t\cdot ty) = ty$. Перейменувавши y через x та t через y, отримаємо тотожність з (4.39). Отже, многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.39).

Замінивши в (4.39) головну операцію на s-парастроф, отримаємо тотожність, яка, згідно з наслідком 1.5, є $s\ell$-парастрофом тотожності (4.10), тобто визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$. Скориставшись означенням комутування термів, в результаті отримаємо тотожність з (4.41).

r-парастроф ${}^{r}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається так: $x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} y) = y \overset{r}{\cdot} x$.

Звідси за правим діленням лівої частини $x \cdot (y \overset{r}{\cdot} x) = x \overset{r}{\cdot} y$. В цій тотожності за правим діленням правої частини, маємо $x \cdot (x \cdot (y \overset{r}{\cdot} x)) = y$. Скориставшись заміною (1.44), отримуємо тотожність, в якій перейменуємо відповідно предметні змінні, в результаті отримаємо першу тотожність з (4.40). Отже, тотожність (4.40) визначає многовид ${}^{r}\mathfrak{A}$.

Оскільки тотожність (4.42) є s-парастрофом тотожності (4.40), то, згідно з наслідком 1.5, тотожність (4.42) визначає многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$.

Згідно з означенням 1.9, $s\ell$-парастроф ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $x \overset{sr}{\cdot} (x \overset{sr}{\cdot} y) = y \overset{sr}{\cdot} x$ тому, що $(s\ell)^{-1} = sr$. Звідси, за означенням комутування, маємо $(y \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x = x \overset{r}{\cdot} y$. Скористаємося в цій тотожності означенням правого ділення для лівої частини: $(y \overset{r}{\cdot} x) \cdot (x \overset{r}{\cdot} y) = x$. В цій тотожності скористаємося заміною (1.44) для терма $(y \overset{r}{\cdot} x)$, в результаті отримаємо $t \cdot (yt \overset{r}{\cdot} y) = yt$. За означенням правого ділення маємо $t \overset{r}{\cdot} yt = yt \overset{r}{\cdot} y$. В отриманій тотожності введемо заміну, а саме $yt =: x$, тобто $x \overset{\ell}{\cdot} t = y$. В результаті маємо рівносильну тотожність $t \overset{r}{\cdot} x = x \overset{r}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} t)$. В цій тотожності спочатку за означення правого, а потім лівого ділення з правої частини отримуємо $(x \cdot (t \overset{r}{\cdot} x)) \cdot t = x$. Скористаємося заміною (1.44) для терма $(t \overset{r}{\cdot} x)$ із взаємним перейменуванням предметних змінних, маємо тотожність (4.41). Отже, (4.41) визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$.

Згідно з означенням 1.9, sr-парастроф ${}^{sr}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $x \overset{s\ell}{\cdot} (x \overset{s\ell}{\cdot} y) = y \overset{s\ell}{\cdot} x$, де $(sr)^{-1} = s\ell$. Звідси за комутуванням маємо $(y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x = x \overset{\ell}{\cdot} y$. За означенням правого ділення для лівої частини тотожності маємо $(y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{r\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y) = x$, оскільки $r\ell = r\ell rr = sr$, то, за комутатуванням, маємо $(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{r}{\cdot} (y \overset{\ell}{\cdot} x) = x$. В отриманій тотожності, скористаємося заміною (1.43) для терму $(y \overset{\ell}{\cdot} x)$, матимемо: $(x \overset{\ell}{\cdot} tx) \overset{r}{\cdot} t = x$. За означенням лівого ділення для лівої частини маємо: $x \overset{\ell}{\cdot} tx = x \overset{\ell r}{\cdot} t$. Оскільки $\ell r = \ell r \ell\ell = s\ell$, то, скориставшись комутуванням, отримуємо $x \overset{\ell}{\cdot} tx = t \overset{\ell}{\cdot} x$. Згідно з лівим діленням для лівої частини цієї рівності маємо $(t \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot tx = x$. В отриманій тотожності покладемо $t \overset{\ell}{\cdot} x =: y$, тобто $yx = t$. В результаті маємо другу тотожність з (4.42), тому вона визначає многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$.

Для отримання інших тотожностей скористаємося наслідком 1.5. А саме, друга тотожність із (4.42) визначає многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$, тому її s-парастроф визначає многовид ${}^{ssr}\mathfrak{A} = {}^{r}\mathfrak{A}$, тобто отримали другу тотожність з (4.40).

ℓ-парастроф другої тотожності з (4.42) $y \overset{\ell}{\cdot} ((y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = x$. За лівим діленням $x \cdot ((y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = y$. Покладемо $t := (y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x$, звідси $y = tx \cdot x$, тобто маємо тотожність (4.38). Знову згідно з наслідком 1.5, дана тотожність визначає ℓsr-парастроф многовида $\mathfrak{A}$, тобто многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$, позаяк $\ell sr = s$.

r-парастроф другої тотожності з (4.42) $y \overset{r}{\cdot} ((y \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x) = x$. За правим діленням зовні маємо $yx = (y \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x$, тобто $x = (y \overset{r}{\cdot} x) \cdot yx$. Замінивши $y \overset{r}{\cdot} x$ на y, отримаємо тотожність з (4.39). За наслідком 1.5, вона визначає многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$, оскільки $rsr = \ell$.

sr-парастроф другої тотожності з (4.42): $y \overset{s\ell}{\cdot} ((y \overset{s\ell}{\cdot} x) \overset{s\ell}{\cdot} x) = x$, тобто $(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) \overset{\ell}{\cdot} y = x$. За лівим діленням зовні маємо $xy = x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)$, тобто $xy \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y) = x$. Покладемо $t := x \overset{\ell}{\cdot} y$, тобто $x = ty$: $(ty \cdot y)t = ty$. Отримана тотожність збігається з тотожністю з (4.41), тому (4.41) визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$, оскільки $srsr = s\ell$.

$s\ell$-парастроф другої тотожності з (4.42) має вигляд (4.10). □

Твердження 4.7. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.11), тоді його парастрофні многовиди визначаються відповідною тотожністю*

$$\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A} \quad xy \cdot x = y \cdot xy; \tag{4.43}$$

$$ {}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A} \quad y \cdot (x \cdot yx) = x; \tag{4.44}$$

$$ {}^{r}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A} \quad (xy \cdot x) \cdot y = x. \tag{4.45}$$

Доведення. З наслідку 1.4 випливає, що многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $(x \overset{s}{\cdot} y) \overset{s}{\cdot} x = y \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y)$, тобто $x \cdot yx = yx \cdot y$, яка збігається з (4.43). Це означає, що $\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A}$. З цієї рівності випливають такі рівності ${}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{\ell s}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A}, \qquad {}^{r}\mathfrak{A} = {}^{rs}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}$.

Скориставшись знову наслідком 1.4, отримуємо, що многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} x = y \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)$. В цій тотожності використаємо заміну (1.43), отримаємо $z \overset{\ell}{\cdot} zy = y \overset{\ell}{\cdot} z$, звідси за означенням лівого ділення лівої частини маємо $(y \overset{\ell}{\cdot} z) \cdot zy = z$. Знову скористаємося заміною (1.43), а саме, $y \overset{\ell}{\cdot} z =: u$, $uz = y$, в результаті отримаємо тотожність $u \cdot (z \cdot uz) = z$. Перейменувавши $y := u$, $x := z$, отримаємо (4.44).

З наслідку 1.5 випливає, що многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ визначається s-парастрофом тотожності (4.44), тобто $y \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} (y \overset{s}{\cdot} x)) = x$, яка рівносильна (4.45). □

Твердження 4.8. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.12), тоді його парастрофні многовиди визначаються відповідною тотожністю*

$$\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A} \qquad yx \cdot xy = x; \tag{4.46}$$

$${}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A} \quad (xy \cdot x) \cdot xy = y; \tag{4.47}$$

$${}^{r}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A} \quad xy \cdot (y \cdot xy) = x. \tag{4.48}$$

Доведення. З наслідку 1.4 випливає, що многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$, визначається s-парастрофом тотожності (4.46), яка збігаться з (4.46). Це означає, що $\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A}$, яка, в свою чергу, спричинює інші рівності многовидів.

ℓ-парастроф ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ $(y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y) = x$, звідси, за лівим діленням з лівої частини, отримуємо $x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y) = y \overset{\ell}{\cdot} x$, потім знову за лівим діленням з правої частини, маємо $(x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y)) \cdot x = y$. В отриманій тотожності скористаємося заміною (1.43) та перейменуємо відповідно предметні змінні. В результаті отримаємо (4.47), тобто тотожність (4.47) визначає многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$. Згідно з наслідком 1.5 s-парастроф тотожності (4.47), тобто тотожність (4.48), визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A} = {}^{r}\mathfrak{A}$. А це означає істинність пунктів твердження (4.47) та (4.48). □

Твердження 4.9. *Многовид, що визначається тотожністю (4.13), тотально-симетричний.*

Доведення. Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.13). За наслідком 1.4, многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$ визначається так: $(x \overset{s}{\cdot} y) \overset{s}{\cdot} y = x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y)$.

За комутуванням, заміною лівої і правої частин місцями та взаємним перейменуванням предметних змінних x, y маємо тотожність (4.13). Це означає, що виконується рівність $\mathfrak{A} = {}^s\mathfrak{A}$, тому група парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$ містить перестановку s.

Згідно з наслідком 1.4, многовид ${}^\ell\mathfrak{A}$: $(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} y = x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)$. В отриманій тотожності скористаємося заміною (1.43): $z \overset{\ell}{\cdot} y = zy \overset{\ell}{\cdot} z$. За лівим діленням для правої частини маємо $(z \overset{\ell}{\cdot} y) \cdot z = zy$. Покладемо $t := z \overset{\ell}{\cdot} y$, тобто $ty = z$: $t \cdot ty = ty \cdot y$, тобто отримали тотожність (4.13). Це означає, що виконується рівність $\mathfrak{A} = {}^\ell\mathfrak{A}$, тому група парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$ містить перестановку ℓ. Оскільки перестановки ℓ, s є твірними групи S_3, то група парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$ дорівнює S_3, а це означає, що многовид $\mathfrak{A}$ є тотально-симетричним. $\square$

Твердження 4.10. *Многовид, що визначається тотожністю (4.14), тотально-симетричний.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ — многовид, який визначається тотожністю (4.14). Очевидно, що s-парастроф цієї тотожності збігається з нею самою, тому $\mathfrak{A} = {}^s\mathfrak{A}$, тобто s належить групі парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$. Тоді ℓ-парастроф ${}^\ell\mathfrak{A}$ визначається тотожністю $(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} (y \overset{\ell}{\cdot} x) = x$, звідки, за означенням лівого ділення маємо $x \cdot (y \overset{\ell}{\cdot} x) = x \overset{\ell}{\cdot} y$, ще раз, згідно з лівим діленням отримуємо $(x \cdot (y \overset{\ell}{\cdot} x)) \cdot y = x$. Покладемо $t := y \overset{\ell}{\cdot} x$, тобто $y = tx$. В результаті отримаємо тотожність $xt \cdot tx = x$, тому ℓ також належить групі парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$. Оскільки ця група містить твірні групи S_3, то вона дорівнює S_3, тобто $\mathfrak{A}$ тотально-симетричний. $\square$

Опишемо пучки тотожностей виду (4.5). Многовид, що визначається тотожністю (1.41), тотально-симетричний. Многовид, що визначається системою тотожностей (4.16) є односторонньо-симетричний. Справді, в системі тотожностей (4.16) є тотожність ідемпотентності, її група симетрій одноелементна, та тотожність комутативності, група симетрій якої двоелементна. Об'єднавши ці дві групи симетрій, отримуємо, що пучок є односторонньо-симетричним, група симетрій якого двоелементна. Ці результати отримані Ш. Стейном в 1957 році [124] (див. табл.1.1.)

Твердження 4.11. *Многовид, що визначається тотожністю (4.17), тотально-симетричний.*

Доведення. В системі тотожностей (4.17) є тотожність ідемпотентності та тотожності напівсиметричності, група симетрій кожної з них одноелементна, тому об'єднавши їх отримуємо теж одноелементну групу симетрій, яка означає, що пучок є тотально-симетричним. □

Твердження 4.12. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.18), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$\mathfrak{A}: \quad yx^2 \cdot y = x, \quad y \cdot (xy)^2 = x; \tag{4.49}$$

$$^{s}\mathfrak{A}: \quad y \cdot x^2 y = x, \quad (yx)^2 \cdot y = x; \tag{4.50}$$

$$^{\ell}\mathfrak{A}: \quad xy \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = y, \quad x \cdot y(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y; \tag{4.51}$$

$$^{r}\mathfrak{A}: \quad x(yx \cdot y) = x; \tag{4.52}$$

$$^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad (x \overset{r}{\cdot} x) \cdot yx = y, \quad (x \overset{r}{\cdot} x)y \cdot x = y; \tag{4.53}$$

$$^{sr}\mathfrak{A}: \quad (y \cdot xy)x = x. \tag{4.54}$$

Доведення першого стовпця парастрофних тотожностей аналогічне доведенню твердження 4.6, тобто підставляємо замість головної операції кожен парастроф та здійснюємо відповідні парастрофні перетворення.

Покажемо, що тотожності в одному рядку рівносильні. У тотожність (4.18) замість x підставимо xy, отриману рівність скоротимо на y: маємо другу тотожність з (4.49). Друга тотожність з (4.50) отримується аналогічно, враховуючи комутування. Першу тотожність з (4.51) домножимо на x зліва, а потім перепозначимо xy на y, в результаті маємо другу тотожність з (4.51). Аналогічно отримується друга тотожність з (4.53).

Далі встановимо, що всі отримані многовиди різні. Для цього виберемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_5; \bullet)$, яка визначена рівністю $x \bullet y := 2x + y$. Тотожність (4.18) виконується в цій квазігрупі: $2(2y+(2x+x))+y=x \pmod 7$. Але жодна парастрофна тотожність не виконується в ній. Для цього визначимо всі парастрофи цієї квазігрупи: $x \overset{s}{\cdot} y = x+2y$, $x \overset{\ell}{\cdot} y = 3x+y$, $x \overset{r}{\cdot} y = 3x+2y$, $x \overset{s\ell}{\cdot} y = x+3y$, $x \overset{sr}{\cdot} y = 2x+3y$. Підставимо їх в (4.18), отримаємо протиріччя, а саме, досить показати для будь-якої пари, наприклад:

$$x=y=1: \quad (1+2\cdot(1+2\cdot 1))+2\cdot 1 = 4 \neq 1 \pmod 7,$$

$$x=1,\ y=0: \quad 3(3\cdot 0+2\cdot(3\cdot 1+2\cdot 1))+2\cdot 0 = 0 \neq 1 \pmod 7,$$

$$x=y=1: \quad 3(3\cdot 1+(3\cdot 1+1))+1 = 2 \neq 1 \pmod 7,$$

$$x=0,\ y=1: \quad (1+3(0+3\cdot 0))+3\cdot 1 = 4 \neq 1 \pmod 7,$$

$$x=y=1: \quad 2(2\cdot 1+3\cdot(2\cdot 1+3\cdot 1))+3\cdot 1 = 2 \neq 1 \pmod 7.$$

□

Далі випишемо твердження, доведення яких аналогічні до доведення твердження 4.6 та твердження 4.12.

Твердження 4.13. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.19), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$\mathfrak{A} = {}^s\mathfrak{A}: \quad xy\cdot x^2 = y,\ x^2y\cdot x = y,\ x\cdot yx^2 = y,\ x^2\cdot yx = y; \tag{4.55}$$

$${}^\ell\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A}: \quad x(yx\cdot y) = yx\cdot y, \quad (y\cdot xy)x = y\cdot xy, \tag{4.56}$$

$$y(x\overset{\ell}{\cdot}x)\cdot y = x, \qquad y\cdot(x\overset{r}{\cdot}x)y = x; \tag{4.57}$$

$${}^r\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad x(y\cdot xy) = x;\ (yx\cdot y)x = x. \tag{4.58}$$

Твердження 4.14. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (4.20), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей,* *що зазначені у відповідному рядку:*

$$ {}^{s}\mathfrak{A}: \quad yx \cdot x^2 = y, \tag{4.59} $$

$$ {}^{\ell}\mathfrak{A}: \quad xy \cdot yx = yx, \tag{4.60} $$

$$ {}^{r}\mathfrak{A}: \quad x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)y = y; \;\; x(y \overset{\ell}{\cdot} xy) = x, \tag{4.61} $$

$$ {}^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad y(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = y, \;\; (yx \overset{r}{\cdot} y)x = x, \tag{4.62} $$

$$ {}^{sr}\mathfrak{A}: \quad xy \cdot yx = xy. \tag{4.63} $$

Пучки тотожностей виду (4.6) знайдені в такому твердженні.

Твердження 4.15. *Узагальнена тотожність (4.6) визначає три пучки асиметричних многовидів:*

Парастрофні многовиди	*Пучок (4.21)*	*Пучок (4.22)*	*Пучок (4.23)*
$\mathfrak{A}$	$xy^2 \cdot x = x$	$(x^2 \cdot x)y = y$	$(x \cdot x^2)y = y$
${}^{s}\mathfrak{A}$	$x \cdot y^2x = x$	$y(x \cdot x^2) = y$	$y(x^2 \cdot x) = y$
${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$x^2(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x$	$(y^2 \cdot x)x = x$	$y^2 \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$
${}^{r}\mathfrak{A}$	$y \cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x$	$x \cdot x(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	$(y \overset{r}{\cdot} y)x^2 = x$	$x \cdot xy^2 = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)y^2 = x$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x \cdot y = y$	$(y \overset{r}{\cdot} y)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$(y \overset{r}{\cdot} y)x \cdot x = x$

Доведення. В таблиці цього твердження в одній довільній комірці розташовано тотожність, яка визначає відповідний многовид. В двох довільних комірках одного стовпця знаходяться парастрофні тотожності. В різних рядках одного довільного стовпця розміщені парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають один пучок многовидів, де рядки показують парастрофні многовиди квазігруп.

Доведення кожного стовпця, тобто встановлення тотожностей одного пучка аналогічне доведенню твердження 4.6. Те, що вони визначають різні пучки доведено в теоремі 4.10. Покажемо, що многовиди різні в пучках.

Розглянемо пучок (4.21). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{11}; \circ)$, яка визначається рівністю $x \circ y := 8x + 3y + 1$ задовольняє тотожність $xy^2 \cdot x = x$ та не задовольняє жодну парастрофну тотожність до неї. Доведення аналогічне як в теоремі 4.10, тобто знаходяться всі парастрофи квазігрупи і їх канонічні вирази підставляються в тотожність, яка визначає пучок.

Розглянемо пучок (4.22). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \circ)$, яка визначається рівністю $x \circ y := 2x + y$ над задовольняє тотожність $(x^2 \cdot x)y = y$ та не задовольняє жодну парастрофну тотожність до неї, записану у відповідному стовпці таблиці даного твердження. Доведення аналогічне теоремі 4.10.

Розглянемо пучок (4.23). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \circ)$, яка визначається рівністю $x \circ y := 3x + y$ задовольняє тотожність $(x \cdot x^2)y = y$ та не задовольняє жодну парастрофну тотожність до неї. Доведення аналогічне теоремі 4.10.
$\square$

Пучки тотожностей виду (4.7) описані в такому твердженні:

Твердження 4.16. *Узагальнена тотожність (4.7) визначає три пучки многовидів, які подані в такій таблиці, два з яких односторонньо-симетричні, а один — асиметричний:*

Парастрофні многовиди	*Пучок (4.26)*	*Пучок (4.27)*	*Пучок (4.28)*
$\mathfrak{A}$	$x^2 \cdot x^2 = x$	$x^2x \cdot x = x$	$xx^2 \cdot x = x$
${}^s\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$x \cdot xx^2 = x$	$x \cdot x^2x = x$
${}^\ell\mathfrak{A}$	$x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)x = x$	$\mathfrak{A}$	$x^2 \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$
${}^r\mathfrak{A}$	$x(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$x \cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$	${}^r\mathfrak{A}$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x^2 = x$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	${}^r\mathfrak{A}$	${}^s\mathfrak{A}$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x \cdot x = x$

Доведення цього твердження та елементів його таблиці аналогічне доведенню попереднього твердження та характеристиці його таблиці. Те, що вони визначають різні пучки доведено в теоремі 4.11. Покажемо, що ці многовиди різні в кожному пучку.

Для пучка (4.26) візьмемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_7; *)$, яка визначається рівністю $x * y := 4x + 2y$, вона задовольняє тотожність $x^2 \cdot x^2 = x$ та не задовольняє жодну парастрофну їй тотожність. Доведення аналогічне як в теоремі 4.11. Аналогічно для пучка (4.28) ця сама квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; *)$ задовольняє тотожність $xx^2 \cdot x = x$ та не задовольняє жодну парастрофну їй тотожність. Для пучка (4.27) квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \diamond)$, яка визначається рівністю $x \diamond y := 4x + 5y$ задовольняє тотожність $x^2x \cdot x = x$ і не задовольняє жодну парастрофну їй тотожність з пучка. Для цього визначимо парастофи квазігрупи, підставимо їх у тотожність, в результаті маємо протиріччя. $\square$

4.2.3. Повна класифікація тотожностей довжини 3

У цьому підрозділі сформульовано основний результат класифікації тотожностей довжини 3 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності та описано пучки відповідних многовидів квазігруп з їх розподілом на пучки за законом парастрофної симетрії.

Теорема 4.12. *Будь-яка квазігрупова тотожність довжини 3 рівносильна точно одній із таких 74 тотожностей та парастрофно-рівносильна точно одній із 20 тотожностей, що мають різні цифри:*

1)	$x = y$	2)	$x^2 = x$	3)	$x^2 = x \wedge yx \cdot y = x$
4)	$x^2 = x \wedge xy = yx,$	${}^{\ell}4)$	$x^2 = x \wedge x \cdot xy = y,$	${}^{r}4)$	$x^2 = x \wedge xy \cdot y = x,$
5)	$x \cdot xy = yx,$	${}^{s}5)$	$yx \cdot x = xy,$	${}^{\ell}5)$	$x(y \cdot yx) = yx,$
${}^{r}5)$	$(x \cdot xy)y = x,$	${}^{s\ell}5)$	$y(yx \cdot x) = x,$	${}^{sr}5)$	$(xy \cdot y)x = xy,$
6)	$xy \cdot x = y \cdot xy,$	${}^{\ell}6)$	$y(x \cdot yx) = x,$	${}^{r}6)$	$(xy \cdot x)y = x,$
7)	$yx \cdot xy = x,$	${}^{\ell}7)$	$y(xy \cdot x) = x,$	${}^{r}7)$	$(x \cdot yx)y = x,$
8)	$x(x \cdot xy) = y,$	${}^{s}8)$	$(yx \cdot x)x = y,$	${}^{\ell}8)$	$x(yx \overset{\ell}{\cdot} y) = yx,$
9)	$y(x \cdot xy) = x,$	${}^{s}9)$	$(yx \cdot x)y = x,$	${}^{\ell}9)$	$x(yx \cdot y) = yx,$
${}^{r}9)$	$(x \cdot xy)x = y,$	${}^{s\ell}9)$	$(xy \cdot x)x = y,$	${}^{sr}9)$	$(x \cdot yx)y = yx,$
10)	$x^2 \cdot xy = y,$	${}^{s}10)$	$yx \cdot x^2 = y,$	${}^{\ell}10)$	$xy \cdot yx = yx,$
${}^{r}10)$	$x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)y = y,$	${}^{s\ell}10)$	$xy \cdot yx = xy,$	${}^{sr}10)$	$y(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = y,$
11)	$xy \cdot x^2 = y,$	${}^{\ell}11)$	$x(yx \cdot y) = yx \cdot y,$	${}^{r}11)$	$x(y \cdot xy) = x,$
12)	$yx^2 \cdot y = x,$	${}^{s}12)$	$y \cdot x^2y = x,$	${}^{\ell}12)$	$xy \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = y,$
${}^{r}12)$	$x(yx \cdot y) = x,$	${}^{s\ell}12)$	$(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot yx = y,$	${}^{sr}12)$	$(y \cdot xy)x = x,$
13)	$xy^2 \cdot x = x,$	${}^{s}13)$	$x \cdot y^2x = x,$	${}^{\ell}13)$	$x^2(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$
${}^{r}13)$	$y \cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y,$	${}^{s\ell}13)$	$(y \overset{r}{\cdot} y)x^2 = x,$	${}^{sr}13)$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x \cdot y = y,$
14)	$x^2x \cdot y = y,$	${}^{s}14)$	$y \cdot xx^2 = y,$	${}^{\ell}14)$	$y^2x \cdot x = x,$
${}^{r}14)$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$	${}^{s\ell}14)$	$x \cdot xy^2 = x,$	${}^{sr}14)$	$(y \overset{r}{\cdot} y)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
15)	$xx^2 \cdot y = y,$	${}^{s}15)$	$y \cdot x^2x = y,$	${}^{\ell}15)$	$y^2(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
${}^{r}15)$	$x \cdot x(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$	${}^{s\ell}15)$	$(x \overset{r}{\cdot} x)y^2 = x,$	${}^{sr}15)$	$(y \overset{r}{\cdot} y)x \cdot x = x,$
16)	$x^2 \cdot x^2 = x,$	${}^{\ell}16)$	$x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)x = x,$	${}^{r}16)$	$x(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = x,$
17)	$x^2x \cdot x = x,$	${}^{s}17)$	$x \cdot xx^2 = x,$	${}^{r}17)$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
18)	$xx^2 \cdot x = x,$	${}^{s}18)$	$x \cdot x^2x = x,$	${}^{\ell}18)$	$x^2(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
${}^{r}18)$	$x \cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$	${}^{s\ell}18)$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x^2 = x,$	${}^{sr}18)$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x \cdot x = x,$
19)	$xy \cdot y = x \cdot xy,$	20)	$xy \cdot yx = x.$		

Зауважимо, що тотожність 1) визначає пучок тривіальних квазігруп; 2) — пучок ідемпотентних квазігруп; 3) — пучок ідемпотентно-напівсиметричних квазігруп; 4) — пучок ідемпотентно-комутативних квазігруп; 10) — пучок IP-квазігруп з оборотним елементом x^2; 11) — пучок CIP-квазігруп з оборотним елементом x^2; 13) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2e = x$; 14) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2 \cdot x = e$; 15) — пучок лівих луп з тотожністю $x \cdot x^2 = e$, де e — нейтральний елемент лупи.

Тотожності 5), ${}^{r}5)$, ${}^{sr}5)$, 6), ${}^{r}6)$, 7), ${}^{r}7)$, ${}^{s}8)$, ${}^{s}9)$, ${}^{r}9)$, ${}^{s\ell}9)$, 19), 20) знайшов Т. Іванс [36], вивчаючи парастрофну ортогональність. При описанні мінімальних нетривіальних тотожностей, які теж спричинюють ортогональність парастрофів, тотожності 5), 6), 7), 8), 9), 19), 20) отримані В. Білоусовим [13]. Незалежно від нього, тотожності 5), 6), ${}^{r}6)$, 7), ${}^{s}8)$, ${}^{r}9)$, 19), 20) виділив Ф. Бенет [8]. Парастрофні тотожності 5), ${}^{s}5)$, ${}^{\ell}5)$, ${}^{r}5)$, ${}^{s\ell}5)$, ${}^{sr}5)$ описані Ш. Стейном [124]. Тотожність 5) відома як І закон Стейна, 6) — ІІ закон Стейна, 7) — ІІІ закон Стейна, 19) — І закон Шредера, 20) — ІІ закон Шредера. Тотожність 8) називатимемо І законом Білоусова, а тотожність 9) — ІІ законом Білоусова.

Доведення теореми 4.12 є сумарним наслідком результатів з теорем 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 та тверджень 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 відповідно та результатів для ідемпотентності, комутативності з табл. 1.1. В цих теоремах та твердженнях сумарно всього многовидів отримано 75, два з них визначають один і той самий многовид ідемпотентних квазігруп, а саме в теоремах 4.9 та 4.11, тому досить розглянути 74 многовиди. Всього різних тотожностей отримано 74. Оскільки кожна тотожність визначає многовид, то покажемо, що всі ці 74 многовиди різні. Віднімаючи повторення маємо, що різних пучків многовидів є 20. Тотожності, отримані з множини узагальнених тотожностей, не можуть бути парастрофно-рівносильними, якщо відповідні многовиди їх групи симетрій мають різну потужність. З наслідку 4.6 випливає, що досить показати, що многовиди відрізняються в середині кожного отриманого пучка. Крім того, покажемо різницю між многовидами, групи симетрій яких мають однакову потужність.

Серед всіх пучків п'ять — є тотально-симетричними, бо згідно з означенням всі парастрофи визначають один і той самий многовид, а саме 1) — многовид тривіальних квазігруп (4.15), 2) — многовид ідемпотентних квазігруп (1.41), 3) — многовид ідемпотентно-напівсиметричних квазігруп (4.17) та 19), 20) — многовиди I та II законів Шредера (4.13) та (4.14). Для кожної пари многовидів знайдено протиріччя, яке записано в такій таблиці.

	2)	3)	19)	20)
1)	тривіал.	тривіал.	тривіал.	тривіал.
2)	×	$\mathbb{Z}_5: \ x \circ y := 2x + 4y$	$\mathbb{Z}_5: \ x \circ y := 2x + 4y$	$\mathbb{Z}_5: \ x \circ y := 2x + 4y$
3)	×	×	$\mathbb{Z}_{19}: \ x \circ y := 12x + 8y$	$\mathbb{Z}_{19}: \ x \circ y := 12x + 8y$
19)	×	×	×	Іванс

Квазігрупи, які відрізняють один многовид від іншого для обох законів Шредера, тобто для 19) і 20), знайшов Т. Іванс [36]. Оскільки ідемпотентні квазігрупи, ідемпотентно-напівсиметричні квазігрупи існують, то тривіальні відрізняються від інших чотирьох. Квазігрупа, яка визначена відповідною рівністю в цій таблиці над відповідною групою, наприклад $\mathbb{Z}_5$ є ідемпотентною, а тому задовольняє (1.41) і не задовольняє жодного парастрофа кожної із тотожностей (4.13), (4.14), (4.15), (4.17). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{19}; \circ)$, яка визначена так: $x \circ y := 12x + 8y$ задовольняє тотожність (4.17), а не задовольняє жодну парастрофну тотожність до тотожностей (4.13), (4.14), (4.15). Це означає, що многовиди 1), 2), 3), 19), 20), які визначають тотально-симетричні многовиди попарно різні.

Розглянемо односторонньо-симетричні пучки многовидів: 4) — многовид ідемпотентно-комутативних квазігруп (4.16); 6) — многовид II закону Стейна (4.11); 7) — многовид III закону Стейна (4.12); 8) — многовид I закону Білоусова (4.8); 11) — многовид CIP-квазігруп з оборотним елементом x^2, який визначається тотожністю (4.19); 16) — многовид квазігруп, який визначається тотожністю (4.26); 17) — многовид квазігруп, який визначається тотожністю (4.27). Приклади квазігруп, які відрізняють один многовид від всіх парастофів іншого запишемо в таку таблицю:

	6)	7)	8)	11)	16)	17)
4)	$\mathbb{Z}_7: \ 4x + 4y$	$\mathbb{Z}_5: \ 2x + 3y$	$\mathbb{Z}_7: \ x + 2y$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
6)	×	Білоусов	$\mathbb{Z}_7: \ x + 2y$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
7)	×	×	$\mathbb{Z}_7: \ x + 2y$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
8)	×	×	×	$\mathbb{Z}_7: \ x + 2y$	$\mathbb{Z}_7: \ x + 2y$	$\mathbb{Z}_7: \ x + 2y$
11)	×	×	×	×	$\mathbb{Z}_7: \ 4x + 4y$	$\mathbb{Z}_7: \ 4x + 4y$
16)	×	×	×	×	×	$\mathbb{Z}_7: \ 4x + 5y$

Квазігрупи, які відрізняють многовиди II та III законів Стейна, тобто для 6) і 7) знайшов В. Д. Білоусов [13]. Група $\mathbb{Z}_3$ задовольняє тотожності (4.19), (4.26), (4.27), які визначають відповідно многовиди 11), 16), 17) і не задовольняють жодної парастрофної тотожності, які визначають пучки 4), 6), 7). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$, яка визначена рівністю $x\circ y := 4x+4y$, задовольняє тотожності (4.16), (4.26), (4.27), які визначають відповідно многовиди 4), 16), 17) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності, які визначають пучки 6) та 11). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\star)$, де $x\star y := x+2y$, задовольняє (4.8), яка визначає 8) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності, які визначають пучки 4), 6), 7), 16), 17). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_5;\circ)$, де $x\circ y := 2x+3y$, задовольняє (4.16), яка визначає 4) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності із пучка 7). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$, де $x * y := 4x+5y$, задовольняє (4.27), яка визначає 17) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності із пучка 16). Цим самим доводиться, що всі односторонньо-симетричні многовиди попарно різні.

Розглянемо асиметричні пучки многовидів: 5) — I закону Стейна (4.10); 9) — многовид II закону Білоусова (4.9); 10) — многовид IP-квазігруп з оборотним елементом x^2 (4.20); 12) — многовид, який визначається тотожністю (4.18); 13) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2e = x$, тобто (4.21); 14) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2\cdot x = e$, тобто (4.22); 15) — пучок лівих луп з тотожністю $x\cdot x^2 = e$, тобто (4.23), де e — нейтральний елемент лупи; 18) — многовид квазігруп, який визначається тотожністю (4.28). Приклади квазігруп, які відрізняють один з многовидів пучка від всіх парастрофів многовиду іншого пучка, аналогічно запишемо в наступну таблицю:

	9)	10)	12)	13)	14)	15)	18)
5)	$(\mathbb{Z}_7;\diamond)$	$\mathbb{Z}_7\colon 5x+y$	$\mathbb{Z}_5\colon 2x+y$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
9)	$\times$	$(\mathbb{Z}_7;\diamond)$	$(\mathbb{Z}_7;\diamond)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
10)	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_3$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$\mathbb{Z}_7\colon 5x+y$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
12)	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
13)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$\mathbb{Z}_7\colon 2x+2y$
14)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
15)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$

де $x\circ y := 8x+3y+1$, $x * y := 3x+y$, $x\star y := 2x+y$, $x\diamond y := 6x+2y$. Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{11};\circ)$ задовольняє тотожності (4.21) і (4.27), які визначають відповідно многовиди 13) і 18), але не задовольняє жодної парастрофної тотожності, які визначають всі інші пучки цієї таблиці. Між собою пучки многовидів 13) і 18) теж різні, бо квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \circ)$, де $x \circ y := 2x + 2y$, задовольняє тотожність (4.27) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності до (4.21). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \star)$ задовольняє тотожність (4.22), яка визначає многовид 14), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучки 5), 9), 10), 12), 15). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \star)$ задовольняє тотожність (4.23), яка визначає многовид 15), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучки 5), 9), 10), 12). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{11}; \diamond)$ задовольняє тотожність (4.9), яка визначає многовид 9), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучки 5), 10), 12). Група $\mathbb{Z}_3$ задовольняє тотожність (4.20) і не задовольняє жодну парастрофну тотожність з (4.18). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7; \cdot)$, де $x \cdot y := 5x + y$, задовольняє тотожність (4.20), яка визначає многовид 10), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучок 5). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_5; \bullet)$, де $x \bullet y := 2x + y$ задовольняє тотожність (4.18), яка визначає многовид 12), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучок 5). Цим самим доводиться, що всі асиметричні многовиди попарно різні.

Отже, всі 74 многовиди різні. $\square$

Наслідок 4.7. *Всі квазігрупові тотожності довжини 3 визначають 74 різні многовиди, які розподілені в 20 пучків за законом парастрофної симетрії. Серед яких: напівсиметричних пучків немає; тотально-симетричних п'ять:* 1), 2), 3), 19), 20)*; асиметричних вісім:* 5), 9), 10), 12), 13), 14), 15), 18)*; односторонньо-симетричних сім:* 4), 6), 7), 8), 11), 16), 17).

Підсумковий результат класифікацій тотожностей довжини 3 та відповідних їм многовидів за парастрофною симетрією дано у табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Тотожності довжини 3 за парастрофною симетрією

Многовид	$\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	${}^{sr}\mathfrak{A}$
І з. Білоусова	$\mathbf{x(x\cdot xy) = y}$	$\mathbf{(yx\cdot x)x = y}$	$x(yx \overset{\ell}{\cdot} y)=yx$ $(x \overset{r}{\cdot} yx)y=yx$	$\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A}$
ІІ з. Білоусова	$\mathbf{y(x\cdot xy) = x}$ $xy\cdot(xy\cdot x)=y$	$\mathbf{(yx\cdot x)y = x}$ $(x\cdot yx)\cdot yx = y$	$x(yx\cdot y) = yx$ $y(xy\cdot x) = xy$	$x(xy\cdot x) = y$ $x(x\cdot yx) = y$ $\mathbf{(x\cdot xy)x = y}$	$\mathbf{(xy\cdot x)x = y}$ $x(yx\cdot x) = y$ $\mathbf{(x\cdot yx)x = y}$	$(x\cdot yx)y = yx$ $(y\cdot xy)x = xy$
І з. Стейна	$\mathbf{x\cdot xy = yx}$	$\mathbf{yx\cdot x = xy}$	$\mathbf{x(y\cdot yx) = yx}$	$\mathbf{(x\cdot xy)y = x}$ $xy\cdot(xy\cdot y) = x$	$\mathbf{y(yx\cdot x) = x}$ $(x\cdot xy)\cdot xy = y$	$\mathbf{(xy\cdot y)x=xy}$
ІІ з. Стейна	$\mathbf{xy\cdot x = y\cdot xy}$	$\mathfrak{A}$	$y(x\cdot yx) = x$	$\mathbf{(xy\cdot x)y = x}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
ІІІ з. Стейна	$\mathbf{yx\cdot xy = x}$	$\mathfrak{A}$	$(xy\cdot x)\cdot xy = y$ $y(xy\cdot x) = x$	$xy\cdot(y\cdot xy) = x$ $(x\cdot yx)y = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
І з. Шредера	$\mathbf{xy\cdot y = x\cdot xy}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
ІІ з. Шредера	$\mathbf{xy\cdot yx = y}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
ідемпотентн.	$\mathbf{x^2 = x}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
ідемпотентн. та комутат.	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{xy = yx}$	$\mathfrak{A}$	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{x\cdot xy = y}$	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{xy\cdot y = x}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
ідемпотентн. та напів-симетр.	$x^2 = x \wedge$ $\mathbf{(xy\cdot x = y} \vee$ $\mathbf{x\cdot yx = y)}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
	$yx^2\cdot y = x$ $y(xy)^2 = x$	$y\cdot x^2y = x$ $(yx)^2y = x$	$xy\cdot(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$ $x\cdot y(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$	$x(yx\cdot y) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)\cdot yx = y$ $(x \overset{r}{\cdot} x)y\cdot x=y$	$(y\cdot xy)x = x$
CIP-квазігруп з обор. ел. x^2	$\mathbf{x\cdot yx^2 = y}$ $\mathbf{xy\cdot x^2 = y}$ $\mathbf{x^2y\cdot x = y}$ $\mathbf{yx^2\cdot x = y}$	$\mathfrak{A}$	$x(yx\cdot y)=yx\cdot y$ $(y\cdot xy)x=y\cdot xy$ $y(x \overset{\ell}{\cdot} x)\cdot y=x$ $y\cdot(x \overset{r}{\cdot} x)y=x$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$x(y\cdot xy) = x$ $(yx\cdot y)x = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$
IP-квазігруп з обор. ел. x^2	$\mathbf{x^2\cdot xy = y}$ $\mathbf{x\cdot x^2y = y}$	$yx\cdot x^2 = y$ $yx^2\cdot x = y$	$xy\cdot yx = yx$	$x\cdot(x \overset{r}{\cdot} x)y = y$ $x(y \overset{\ell}{\cdot} xy) = x$	$xy\cdot yx = xy$	$y(x \overset{\ell}{\cdot} x)\cdot x = y$ $(yx \overset{r}{\cdot} y)x = x$
LL з $x^2e = x$	$xy^2\cdot x = x$	$x\cdot y^2x = x$	$x^2(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x$	$y\cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$	$(y \overset{r}{\cdot} y)x^2 = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x\cdot y = y$
LL з $x^2\cdot x = e$	$x^2x\cdot y = y$	$y\cdot xx^2 = y$	$y^2x\cdot x = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(y \overset{\ell}{\cdot} y)=x$	$x(x\cdot y^2) = x$	$(y \overset{r}{\cdot} y)(x \overset{\ell}{\cdot} x)=x$
LL з $x\cdot x^2 = e$	$xx^2\cdot y = y$	$y\cdot x^2x = y$	$y^2(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$x\cdot x(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)y^2 = x$	$(y \overset{r}{\cdot} y)x\cdot x = x$
тривіальн.	$\mathbf{x = y}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
	$x^2\cdot x^2 = x$	$\mathfrak{A}$	$x\cdot(x \overset{r}{\cdot} x)x = x$	$x(x \overset{\ell}{\cdot} x)\cdot x = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$
	$x^2x\cdot x = x$	$x\cdot xx^2 = x$	$\mathfrak{A}$	$(x \overset{r}{\cdot} x)(x \overset{\ell}{\cdot} x)=x$	${}^{s}\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$
	$xx^2\cdot x = x$	$x\cdot x^2x = x$	$x^2(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$x\cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x^2 = x$	$(x \overset{r}{\cdot} x)x\cdot x = x$

У цій таблиці, тотожності, виділені жирним шрифтом, знайдені різними авторами в різні роки. В одній довільній комірці записано рівносильні тотожності або систему тотожностей. У двох довільних комірках одного рядка — парастрофні тотожності. У різних стовпцях одного довільного рядка розміщені парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають один пучок, де стовпці показують парастрофні многовиди квазігруп. У різних рядках записані тотожності, які визначають різні пучки многовидів. Між подвійними лініями в таблиці в усіх рядках і стовпцях знаходяться парастрофно-первинно рівносильні тотожності, які визначають один клас узагальнених тотожностей.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі досліджуються тотожності довжини 2 і 3 на квазігрупах та відповідні многовиди, які визначаються ними. Основним результатом є класифікація всіх квазігрупових тотожностей довжини 2 та 3 з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності та опис відповідних многовидів, які визначаються цими тотожностями згідно з парастрофною симетрією. Доведено, що тотожності довжини два визначають 14, а тотожності довжини три — 74 многовиди, які розподілені згідно з законом парастрофної симетрії, в 6 та 20 пучків відповідно. З використанням інструментів парастрофної симетрії:
— описано многовиди розв'язків узагальнених рівнянь довжини 2;
— класифіковано всі узагальнені тотожності довжини 2 та 3 з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності;
— знайдено рівносильні та парастрофно-рівносильні тотожності довжини 2 та 3;
— класифіковано многовиди квазігруп, які визначаються отриманими мінімальними тотожностями довжини 2 та 3 за групами парастрофних симетрій;
— проаналізовано пучки парастрофних многовидів та відповідних їм тотожностей за групами парастрофних симетрій;
— для кожної пари парастрофних многовидів знайдено приклади квазігруп, які відрізняють один многовид від іншого між собою в одному пучку та один пучок многовидів від іншого.

Результати цього розділу опубліковано в працях [54], [55], [57], [59], [67], [62], [63], [64], [65], [70], [74].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота має теоретичний характер, де вивчаються функційні рівняння, тотожності та відповідні многовиди, що визначаються ними. Встановлено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 1, 3, 4, 19 узагальнених нетривіальних функційних рівнянь без функційних і предметних сталих функційної довжини один, два, три, чотири відповідно; знайдено їх розв'язки на бінарних оборотних функціях довільної множини. За допомогою отриманого результату дано дві класифікації тотожностей довжини 2 і 3 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності. Доведено, що тотожності довжини 2 визначають 14 многовидів, а тотожності довжини 3 визначають 74 многовиди, які розподілені, згідно з парастрофною симетрією, в 6 та 20 пучків відповідно. Крім того, дано повну класифікацію групових ізотопів за групами парастрофної симетрії, описано напівсиметричне ізотопне замикання многовиду всіх груп та многовиду булевих груп, з'ясовано співвідношення між ними та многовидом напівсиметричних квазігруп.

Здобуті у дисертації результати можуть бути застосованими в алгебрі, топології, геометрії, математичному аналізі, дискретній математиці тощо, а також для подальших досліджень в теорії квазігруп та функційних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ацель Я., Домбр Ж. *Функциональные уравнения с несколькими переменными* // Перевод с англ. — М.: Физматлит., 2003. — 432 с.
2. Aczél J. *Vorlesungen über Functionalgleichungen und ihre Anwendungen* // VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1961.— 331 s.
3. Aczél J. *Lectures on Functional Equations and their applications* // New York and London: Academic Press, 1966. — xx+510 p. — (Series "Mathematics in Science and Engineering": in 19 vol.).
4. Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M. *Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1960. — Vol. 11, Iss. 1-2. — P. 127–136.
5. Aczél J., Dhombres J. *Functional equations in several variables* // Encyclopedia of Math. and Appl. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. — 462 p.
6. Albert A. A. *Studies in Modern Algebra* // Buffalo, Mathematical Association of America; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963. — 190 p..
7. Биркгофф Г. *Теория решеток* // М.: Наука, 1984. — 568 с.
8. Bennett F. E. *The spectra of a variety of quasigroups and related combinatorial designs* // Discrete Mathematics. — 1989. — Vol. 77, Iss. 1-3. — P. 29–50.
9. Белоусов В. Д. *Ассоциативные системы квазигрупп* // Успехи мат. наук. — 1958. — Т.13, вып. 3(81). — С. 243.
10. Белоусов В. Д. *n-Арные квазигруппы* // Кишинев: Штиинца, 1972. — 225 с.
11. Белоусов В. Д. *Основы теории квазигрупп и луп* // М.: Наука, 1967. — 223 с.

12. Белоусов В. Д. *Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами* // УМН. — 1965. — Т. 20, № 1(121). — С. 75–146.

13. Белоусов В. Д. *Парастрофно-ортогональные квазигруппы* // Препринт Акад. наук Молдавской ССР, Изд. Штиинца, Кишинев, 1983. — 50 с.

14. Белоусов В. Д. *Скрещенная изотопия квазигрупп* // Квазигруппы и их системы, Кишинев: Штиинца. — 1990. — С. 14–20.

15. Белоусов В. Д. *Уравнение общей медиальности* // Матем. исслед. Кишинев: Штиинца. — 1976. — Вып. 39. — С. 21–31.

16. Белоусов В. Д. *Уравновешенные тождества в квазигруппах* // Матем. сб. — 1966. — Т. 70(112), № 1. — С. 55–97.

17. Belousov V. D. *Balanced Identities in Algebras of Quasigroups* // Aequationes Math. — 1972. — Vol. 8. — P. 1–73.

18. Belousov V. D. *Some remarks on functional equation of generalized distributivity* // Aequationes Math. — 1968. — Vol. 1, 1/2. — P. 54–65.

19. Белоусов В. Д. Сандик М. Д. *n-арные квазигруппы и лупы* // Сиб. мат. журнал. — 1966. — № 7(1).— С. 31–54.

20. Belousov V. D. *Parastrophic-orthogonal quasigroups*// Quasigroups Related Systems — 2005. — Vol. 13, no. 1. — P. 25–72.

21. Belousov V. D., Hosszú M. *Some reduction theorems on the functional equation of generalized distributivity* // Publ. Math. Debrecen. — 1965. — Vol. 12. — P. 175–180.

22. Белявская Г. *Квазигруппы: тождества с подстановками, линейность и ядра* // LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 71 с.

23. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. *Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2012. — No. 1(68). — P. 21–31.

24. Bruck R. H. *Some results in the theory of quasigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — Vol. 55. — P. 19–52.

25. Глухов М. М. *О применениях квазигрупп в криптографии* // Прикладная дискретная математика. — 2008. — № 2. — С. 28–32.

26. Даламбер Ж. *Динамика* // Пер. с франц. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950.

27. D'Alembert, Jean le Rond *Traitè de Dynamique, dans lequel les Lois de L'Equilibre & du Mouvement des Corps sont Rèduites au plus petit Nombre Possible* // Paris: David L'Aînè. — 1743.

28. D'enes J. and D'enes T. *Non-associative algebraic system in cryptology. Protection against "meet in the middle" attack* // Quasigroups and Related Systems. — 2001. — No. 8. — P. 7–14.

29. Devidé V. *Über eine Klasse von Gruppoiden* // Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II. — 1955. — Vol. 10. No. 4. — P. 265–286.

30. DiPaola J. W. and Němeth E. *Generalized triple systems and medial quasigroups* // In Proc. of the Seventh South Eastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La.). Congressus Numerantium XVII, Utilitas Math., Winnipeg, Manitoba — 1976. — P. 289–306.

31. Drápal A. *On multiplication groups of relatively free quasigroups isotopic to abelian groups* // Czechoslovak Math. J. — 2005. — Vol. 55 (130), no. 1. — P. 61–86.

32. Drápal A. *Group isotopes and a holomorphic action* // Result. Math. — 2009. – Vol. 54, no. 3–4. — P. 253–272.

33. Dudek Wieslaw A. *Parastrophes of quasigroups* // Quasigroups Related Systems. — 2015. — Vol. 23. — P. 221–230.

34. Избаш В. И. *Моноквазигруппы и квазигруппы с дистрибутивной решёткой подквазигрупп* // Диссертация на соискание учён. степени кандидата физ.-мат. наук, Кишинёв. — 1992. — 108 с.

35. Etherington I. M. H. *Note on quasigroups and trees* // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1963. — Vol. 13, no. 3. — P. 219–222.

36. Evans T. *Algebraic structures associated with Latin squares and orthogonal arrays* // Proc. Conf. Algebraic Aspects of Combinatorics, Congressus Numerantium 13. — 1975. — P. 31–52.

37. Evans T. *A note on the associative law* // J. London Math. Soc. — 1950. — Vol. 25. — P. 196–201.

38. Evans T. *Abstract mean values* // Duke Math. J. — 1963. — Vol. 30. No. 2 — P. 331–347.

39. Falconer E. *Isotopes of some special quasigroup varieties* // Acta Math. Hungar. — 1971. — T. 22. — P. 73–79.

40. Grätzer G. and Padmanabhan R. *On idempotent commutative and nonassociative groupoids* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — 28. — P. 75–80.

41. Hosszú M. *On the functional equations of transitivity* // Acta Sci. Math. Szeged. — 1954. — Vol. 15. — P. 203–208.

42. Iliev V. V. *Semi-symmetric Algebras: General Constructions* // New York and London: Academic Press, 1992. — Vol. 148, no. 2. — P. 479–496.

43. Kannappan Pl. *Functional Equations and Inequalities with Applications* // Springer Monographs in Mathematics. Boston, MA : Springer-Verlag US, 2009. — 810 p.

44. Kepka T., Němec P. *T-quasigroups* // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, no. 1. — P. 39–49.

45. Kepka T., Němec P. *T-quasigroups* //Acta Univ. Carolin. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, no. 2. — P. 31–49.

46. Keedwell Anthony D., Shcherbacov Victor A. *Quasigroups with an inverse property and generalized parastrophic identities* // Quasigroups Related Systems. — 2005. — Vol. 13. — P. 109–124.

47. Keedwell Donald A., Dénes József *Latin Squares and their Applications* // Second Edition, Amsterdam; Boston: North–Holland, 2015. — 438 p.

48. Kirnasovsky O. U. *Linear isotopes of small orders groups* // Quasigroups Related Systems. — 1995. — Vol. 1(2). — P. 51–82.

49. Kościelny C., Mullen G. L. *A quasigroup-based public-key cryptosystem* // Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. — 1999. — Vol. 9, no. 4 — P. 955–963.

50. Юрій Р. Ф. *Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях*: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06 — Вінниця: Вінницький держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, 2006. — 133 с.

51. Коваль Р. Ф. *Класифікація квадратичних функційних рівнянь малої довжини на квазігрупах* // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 111–127.

52. Koval' R. F. *On a Functional Equation with a Group Isotopy Property* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2005. — No. 2(48). — P. 65—71.

53. Крайнічук Г. В. *Деякі розв'язки функційних рівнянь типу* $(4;2)$ *на квазігрупах* // IX Междунар. научн. конф. для молодых учёных "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях" (Харьков, 25–26 апреля 2014 г.): тезисы докладов — Харьков: Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 2014. — С. 9–10.

54. Крайнічук Г. В. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини чотири* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2018. — № 1/2. — С. 4–23.

55. Крайнічук Г. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей довжини три* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2017. — № 1/2. — С. 37–66.

56. Крайнічук Г. В. *Класифікація квазігрупових функційних рівнянь типу* $(3;3;0)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1/2. — С. 33–41.

57. Крайнічук Г. В. *Класифікація мінімальних тотожностей на квазігрупах* // Шістнадцятий міжнар. наук.-практ. семінар "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кіровоград, 11–12 квітня 2014 р.): тези. — Кіровоград: КНТУ, 2014. — С. 89–92.

58. Крайнічук Г.В. *Класифікація та розв'язання квазігрупових функційних рівнянь типу* $(4;2)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2015. — № 1/2. — С. 53–63.

59. Крайнічук Г. *Класифікація тотожностей типу* $(3;2)$ *на квазігрупах* // Конф. молодих учених "Підстригачівські читання — 2012" (Львів, 23–25 травня, 2012 р.). — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. — С. 51–52. — URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/17.pdf/ (дата звернення 22.01.2019).

60. Крайнічук (Шелепало) Г. В. *Про квазігрупові функційні рівняння малої довжини* // Наук. конф. професорсько-викладацького складу, наук. працівників і здобувачів наук. ступеня за підсумками наук.-дослід. роботи за період 2015–2016 рр. (Вінниця, 15–18 травня, 2017 р.): матеріали в 2-х томах. — Том 1. — Вінниця, Донецький національний університет імені Василя Стуса, 2017. — С. 196–197.

61. Krainichuk H. *On classification of identities of the type* $(4;2)$ *on quasigorups* // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach BANACH-120 (Lviv, September 17–21, 2012): abstracts

of reports. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2012. — P. 256.

62. Krainichuk H. *On minimal nontrivial quasigroup identities* // 9^{th} International Algebraic Conference in Ukraine (L'viv, July 8–13, 2013): book of abstracts. — L'viv: Ivan Franko National University of L'viv, 2013. — P. 98.

63. Крайнічук Г. В. *Про різні класифікації тотожностей на квазігрупах* // XII-та Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз" АТА-2017 (с. Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл., Україна, 10–23 липня 2017 р.). — Електрон. текст. дані. — с. Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл., Україна: науково-навчальна база НПУ імені М. П. Драгоманова "Синевир", 2017. — С. 7–8. — URL: https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/ata12/theses/ata12_abstracts.pdf (дата звернення 22.01.2019).

64. Крайнічук Г. В., Сохацький Ф. М. *Класифікація мінімальних тотожностей на квазігрупах* // П'ятнадцятий міжнар. наук.-практ. семінар "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кіровоград, 12–13 квітня 2013 р.): тези. — Кіровоград: ПП "Ексклюзив-систем", 2013. — С. 64–66.

65. Krainichuk H. V. *About minimal nontrivial quasigroup identities* // Intern. Conf. "Mathematics & Information Technologies: Research and Education" (MITRE-2013) (Chişinău, Moldova, August 18–22, 2013): Abstracts. — Chişinău: Institute of Mathematics and Computer Science (CEP USM), 2013. — P. 56–57.

66. Krainichuk H. *About classification of quasigroups according to symmetry groups* // The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science (Chişinău, Moldova, August 19–23, 2014): Proceeding IMCS-50. — Chişinău: Institute of Math-

ematics and Computer Science, Acad. of Sciences of Moldova (Tipogr. "Valinex SRL"), 2014. — P. 112–115.

67. Krainichuk H. V. *About classification of functional equations and identities of the type* $(3;2)$ *on quasigroups* // The International Mathematical Conference on occasion of the 70th year anniversary of Professor Vladimir Kirichenko (Mykolayiv, June 13–19, 2012): book of abstracts. — Mykolayiv: V. O. Sukhomlynsky Mykolayiv National University, 2012. — P. 162.

68. Krainichuk H. *About classification of small length generalized binary functional equations on quasigroups* // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (Kyiv, July 3–7, 2017): Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — P. 64.

69. Krainichuk H. V. *Classification and solution of functional equations of the type (4;2) on quasigroups* // The 20^{th} conference on applied and industrial mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu CAIM 2012 (Chişinău, Moldova, August 22–25, 2012): Communications, Chişinău, 2012. — P. 138–139.

70. Krainichuk H. V. *Classification of all parastrophic identities of the type* $(3;2)$ *on quasigroups* // The International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov (Kyiv, Ukraine, August 20–26, 2012): book of abstracts. — Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 69.

71. Krainichuk H. *Classification of group isotopes according to their symmetry groups* // Folia Math. — 2017. — Vol. 19, no. 1. — P. 84–98.

72. Krainichuk H. V. *On a solution of a functional equation of type* $(4;2)$ *on quasigroups* // Междунар. науч. конф. "XI Белорусская математическая конференция" (Минск, 5–9 ноября, 2012 г.): тез.

докл. — Часть 5. — Мн.: Институт математики НАН Белоруси, 2012. — С. 61–62.

73. Krainichuk H. *On classification of generalized binary quasigroup functional equations of length four* // International conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov (Bălţi, Rep. of Moldova, April 19–21, 2018): Communications MITI-2018. — Bălţi: S. n. "Alecu Russo" Bălti State Univ. (Tipografia din Bălţi), 2018. — P. 49–50.

74. Krainichuk H. *On parastrophes of quasigroup identities and corresponding varieties and trusses* // The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated centenary of Vladimir Andrunachievici (1917–1997) CMSM 4'2017 (Chişinău, Republic of Moldova, June 25–July 2, 2017): Proceedings CMSM 4. — Chişinău: Institute of Mathematics and Computer Science (CEP USM), 2017. — P. 101–104.

75. Krainichuk H. V., Sokhatsky F. M. *About solving functional equations having three subject variables on the set of invertible two-placed functions* // Ukrainian mathematical congress — 2009 (Dedicated to the Centennial of Nikolai N. Bogoliubov) (Kyiv, August 27–29, 2009): Institute of Mathematics of NASU, Kyiv. — 2009. — URL: https://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Krainichyk.pdf (дата звернення 22.01.2019).

76. Krainichuk H., Sokhatsky F. *Solution and full classification of generalized binary functional equations of the type* $(3; 3; 0)$ // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2018. — № 2(87) — P. 41–53.

77. Krainichuk H., Tarkovska O. *Semi-symmetric isotopic closure of some group varieties and the corresponding identities* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2017. — № 3(85). — P. 3–22.

78. Krapež A. *Cryptographically Suitable Quasigroups via Functional Equations* // In: S. Markovski and M. Gusev (Eds.): ICT Innovations 2012, AISC 207, Springer Verlag Berlin Heidelberg. — 2013. — P. 265–274.

79. Krapež A. *Cryptographically Suitable Quasigroups via Functional Equations* // Publ. Inst. Math. of the Serbian Academy of Sciences and Arts Knez Mihailova — 2011. — P. 36. — (Belgrade).

80. Krapež A. *Generalized balanced functional equations on n-ary groupoids* // Proceedings of the symposium n-ary structures, Skopje. — 1982. — P. 13–16.

81. Krapež A., Marinković B. *Isotopy invariant quasigroup identities (extended abstract)* // The International Mathematical Conference on Quasigroups and Loops "Loops'15" (Ohrid, Macedonia, Jun 28– Jul 4, 2015): Book of Extended Abstracts, Ohrid. — 2015. — P. 1–10.

82. Krapež A. *Generalized quadratic quasigroup equations with three variables* // Quasigroups Related Systems. — 2009. — Vol. 17. — P. 253–270.

83. Krapež A. *Strictly Quadratic Functional Equations on Quasigroups I* // Publ. Inst. Math. — 1981. — Vol. 29, № 43. — P. 125–138.

84. Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V. *Parastrophically uncancellable quasigroup equations* // Aequationes Math. — 2010. — Vol. 79. — P. 261–280.

85. Krapež A., Živković D. *Parastrophically equivalent quasigroup equations* // Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle serie. — 2010. — T. 87(101). — P. 39–58.

86. Krstić S. *Quadratic quasigroup identities* // (Serbocroatian) PhD thesis, University of Belgrade, 1985. — 101 p.

87. Kuczma M. Functional equations in a single variable // Monografie Mat. — Warszawa: PWN, 1968. — Vol. 46. — 383 p.

88. Markovski S., Dimitrova V., Samardjiska S. *Identity sieves for quasigroups* // Quasigroups Related Systems. — 2010. — Vol. 18. — P. 149–163.

89. Mendelsohn N. S. *A natural generalization of Steiner triple systems* // Computers in Number Theory. Academic Press, New York. — 1971.— P. 323–338.

90. Mitschke A. and Werner H. *On groupoids representable by vector spaces over finite fields* // Arch. Math. — 1973. — Vol. 24, no. 1. — P. 14–20.

91. Movsisyan Yu. M. *Hyperidentities and Related Concepts, I* Armenian Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 9, no 2. — P. 146–222.

92. Murdoch D. C. *Srtucture of abelian quasi-groups* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1941. — Vol. 49. — P. 392–409.

93. Osborn J. M. *New loops from old geometries* // Amer. Math. Monthly. — 1961. — Vol. 68. — P. 103–107.

94. Phillips J. D., Pushkashu D. I., Shcherbacov A. V., Shcherbacov V. A. *On Birkhoff's quasigroup axioms* // J. Algebra. — 2016. — Vol. 457. — P. 7–17.

95. Plugfelder H. O. *Quasigroups and Loops: Introduction* // Sigma series in Pure Math., Heldermann Verlag, Berlin, 1990. — Vol. 7. — 147 p.

96. Popovych T. *On conjugate sets of quasigroup* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2011. — No. 3 (67). — P. 69–76.

97. Radó F. *On semi-symmetric quasigroups* //Aeq. Math., Cluj, Romania. — 1974. — Vol. 11, Issue 2. — P. 250–255.

98. Sade A. *Entropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroupes* // Ann. Soc. Sci. Brux., Sér. I. — 1959. — Vol. 73. — P. 302–309.

99. Sade A. *Quasigroupes demi-symétriques* // Ann. Soc. Sci. Brux., Sér. I. — 1965. — Vol. 79. — P. 133–143.

100. Sade A. *Quasigroupes demi-symétriques II. Autotopies gauches* // Ann. Soc. Sci. Brux., Sér. I. — 1965. — Vol. 79. — P. 223–232.

101. Sade A. *Quasigroupes obeissant a certains lois* // Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul, Ser. A, 1957.— Vol. 22. — P. 151–184.

102. Sade A. *Quasigroupes demi-symétriques III. Constructions linéaires, A-maps* // Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I. — 1967. — Vol. 81. — P. 5–17.

103. Sade A. *Quasigroupes demi-symétriques. Isotopies préservant la demisymétrie* // Math. Nach. — 1967. — Vol. 33. — P. 177–188.

104. Sade A. *Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abéliens* //Ann. Soc. Sci. Brux., Sér. I. — 1960. — Vol. 74. — P. 91–99.

105. Щукин К. К., Гушан В. В. *Представление парастрофов луп и квазигрупп* // Дискрет. матем., 2004. — Т. 16, № 4. — С.149–157.

106. Shchukin K .K. *On isotopy, parastrophy and orthogonality of quasigroups* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2010. — No. 3. — P. 29–34.

107. Smith J.D.H. *An introduction to quasigroups and their representation* // London: Chapman and Hall/CRC. — 2007. —330 p.

108. Smith J. D. H. *Homotopy and semisymmetry of quasigroups* // Algebra Universalis — 1997. — Vol. 38. — P. 175–184.

109. Smith J. D. H. *Symmetry and entropy: a hierarchical perspective* // Symmetry. — 2005. — Vol. 16. — P. 37–45.

110. Smith J. D. H. and Romanowska A. B. *Post-Modern Algebra* // Wiley, New York, NY. — 1999. — 370 p.

111. Сохацький Ф. М. *Асоціати та розклади багатомісних операцій* // Дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.06. — Вінниц. держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, НАН України, Ін-т математики. — К., 2006. — 334 с.

112. Сохацький Ф. М. *Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах* // Укр. мат. журн. — 2004. — Т.56. — № 9. — С. 1259–1266.

113. Сохацький Ф. М. *Про ізотопи груп I* // Укр. мат. журн. — 1995. — Т 47, № 10. — С. 1387–1389.

114. Сохацький Ф. М. *Про ізотопи груп II* // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 12. — С. 1692–1703.

115. Сохацький Ф. М. *Про ізотопи груп III* // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 2. — С. 251–259.

116. Sokhatsky F. M. *On classification of distributive-like functional equations* // the 8^{th} International Algebraic Conference in Ukraine (Lugansk, Ukraine, July 5-12, 2011): Book of abstracts. — Lugansk, 2011. — P. 79.

117. Sokhatsky F. M. *Some linear conditions and their application to describing group isotopes* // Quasigroups Related Systems. — 1999. – Vol. 6. — P. 43–59.

118. Sokhatsky F. M. *Parastrophic symmetry in quasigroup theory* // Visnyk Donetsk national university, Ser. A: natural sciences. — 2016. — No. 1–2. — P. 70–83.

119. Сохацький Ф. М., Крайнічук Г. В. *Розв'язування деяких функційних рівнянь з оборотними бінарними функціями* // Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача 2009 (Львів, 25–27 травня 2009 р.): тези доп. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2009. — С. 158–159.

120. Sokhatsky F. M., Krainichuk H. V. *About classification of generalized functional equations on quasigroups* // The International Mathematical Conference on Quasigroups and Loops "Loops'11" (Trest, Czech Republic, July 21-27, 2011): booklet of abstracts. — Třešť: Česká Zemědělská Univerzita v Praze, 2011. — P. 17–18.

121. Sokhatsky F. M., Krainichuk H. V. *Solution of distributive-like quasigroup functional equations* // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2012. — Vol. 53, № 3. — P. 447–459.

122. Sokhatsky Fedir M. *On pseudoisomorphy and distributivity of quasigroups* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2016. — No. 2(81). — P. 125–142.

123. Sokhatskyj Fedir, Syvakivskyj Petro *On linear isotopes of cyclic groups* // Quasigroups Related Systems. — 1994. — Vol. 1, no.1(1). — P. 66–76.

124. Stein Sherman K.*On the foundations of quasigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 85. — P. 228–256.

125. Suschkevisch A. *On a Generalization of the Associative Law* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1929. — Vol. 31. — P. 204–214.

126. Табаров А. Х. *Тождества и линейность квазигрупп* // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06. — М.: МГУ М.В. Ломоносова, 2009. — 203 с.

127. Табаров А. Х. *Ядра, линейность и уравновешенные тождества в квазигруппах* // Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Кишинёв, 1992. — 92 с.

128. Tarkovska O. O. *Variety of semisymmetry-like medial quasigroups and its subvarieties* // Visnyk Donetsk national university. Ser. A: natural sciences. — 2015. — No. 1-2. — P. 78–88.

129. Toyoda K. *On axioms of mean transformations and automorphic transformations of abelian groups* // Tohoku Math. J. — 1940. — No. 46. — P. 239–251.

130. Toyoda K. *On Axioms of linear functions* // Proc Imp. Acad. Tokyo Conf. 17. — P. 211–237.

131. Тужилин М. Э. *Латинские квадраты и их применение в криптографии* // Прикладная дискретная математика. — 2012. — № 3(17). — С. 47–52.

132. Wanless I. M. *Transversals in latin squares: a survey. Surveys in Combinatorics* // London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press. — 2011. — No. 392. — P. 403–437.

133. Чебан А.М. *Некоторые системы квазигрупп с обобщёнными тождествами* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Кишинёв, 1971. —85 с.

134. Schauffler R. *Die Assoziativitat im Ganzen besonders bei Quasigruppen* // Math. Zeitschr. — 1957. — Vol. 67, no. 5. — P. 428–435.

135. Щербаков В. А. *Об автоморфизмах и конгруэнциях квазигрупп* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — ИМ АН МССР, 1991. — 89 с.

136. Щербаков В. А. *О линейных квазигруппах и их группах автоморфизмов* // Матем. исследования. Кишинев, 1991. — Вып. 120. — С. 104–113.

137. Shcherbacov V. A. *Elements of Quasigroup Theory and Applications* // London: Chapman and Hall/CRC. Chapman and Hall/CRC. — 2017. — P. 576.

138. Shcherbacov V. A. *Quasigroups in cryptology* // Comput. Sci. J. Moldova. — 2009. — Vol.17. No.2(50). — P. 193–228.

ДОДАТКИ

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sokhatsky F.M., Krainichuk H.V. *Solution of distributive-like quasigroup functional equations* // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2012. — Vol. 53, № 3. — P. 447–459.

2. Крайнічук Г.В. *Класифікація та розв'язання квазігрупових функційних рівнянь типу* $(4;2)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2015. — № 1/2. — С. 53–63.

3. Крайнічук Г.В. *Класифікація квазігрупових функційних рівнянь типу* $(3;3;0)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1/2. — С. 33–41.

4. Krainichuk H., Tarkovska O. *Semi-symmetric isotopic closure of some group varieties and the corresponding identities* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2017. — № 3(85). — P. 3–22.

5. Крайнічук Г. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей довжини три* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2017. — № 1/2. — С. 37–66.

6. Krainichuk H. *Classification of group isotopes according to their symmetry groups* // Folia Math. — 2017. — Vol. 19, no. 1. — P. 84–98.

7. Крайнічук Г. В. *Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини чотири* // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2018. — № 1/2. — С. 4–23.

8. Krainichuk H., Sokhatsky F. *Solution and full classification of generalized binary functional equations of the type* $(3;3;0)$ // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2018. — № 2(87), 41–53.

9. Сохацький Ф. М., Крайнічук Г. В. *Розв'язування деяких функційних рівнянь з оборотними бінарними функціями* // Конф. молодих

учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача 2009 (Львів, 25–27 травня 2009 р.): тези доп. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2009. — С. 158–159.

10. Krainichuk H. V., Sokhatsky F. M. *About solving functional equations having three subject variables on the set of invertible two-placed functions* // Ukrainian mathematical congress — 2009 (Dedicated to the Centennial of Nikolai N. Bogoliubov) (Kyiv, August 27–29, 2009): Institute of Mathematics of NASU, Kyiv. — 2009. — URL: https://www.imath.kiev.ua/∼congress2009/Abstracts/Krainichyk.pdf (дата звернення 22.01.2019).

11. Sokhatsky F. M., Krainichuk H. V. *About classification of generalized functional equations on quasigroups* // The International Mathematical Conference on Quasigroups and Loops "Loops'11" (Trest, Czech Republic, July 21-27, 2011): booklet of abstracts. — Třešť: Česká Zemědělská Univerzita v Praze, 2011. — P. 17–18.

12. Krainichuk H. V. *Classification and solution of functional equations of the type (4;2) on quasigroups* // The 20^{th} conference on applied and industrial mathematics dedicated to academician Mitrofan M. Ciobanu CAIM 2012 (Chişinău, Moldova, August 22–25, 2012): Communications, Chişinău, 2012. — P. 138–139.

13. Крайнічук Г. *Класифікація тотожностей типу* $(3;2)$ *на квазігрупах* // Конф. молодих учених "Підстригачівські читання — 2012" (Львів, 23–25 травня, 2012 р.). — Електрон. текст. дані. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. — С. 51–52. — URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/17.pdf/ (дата звернення 22.01.2019).

14. Krainichuk H. V. *On a solution of a functional equation of type* $(4;2)$ *on quasigroups* // Междунар. науч. конф. "XI Белорусская математическая конференция" (Минск, 5–9 ноября, 2012 г.): тез.

докл. — Часть 5. — Мн.: Институт математики НАН Белоруси, 2012. — С. 61–62.

15. Krainichuk H. V. *Classification of all parastrophic identities of the type* $(3;2)$ *on quasigroups* // The International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov (Kyiv, Ukraine, August 20–26, 2012): book of abstracts. — Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 69.

16. Krainichuk H. V. *About classification of functional equations and identities of the type* $(3;2)$ *on quasigroups* // The International Mathematical Conference on occasion of the 70th year anniversary of Professor Vladimir Kirichenko (Mykolayiv, June 13–19, 2012): book of abstracts. — Mykolayiv: V. O. Sukhomlynsky Mykolayiv National University, 2012. — P. 162.

17. Krainichuk H. *On classification of identities of the type* $(4;2)$ *on quasigorups* // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach BANACH-120 (Lviv, September 17–21, 2012): abstracts of reports. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2012. — P. 256.

18. Крайнічук Г. В., Сохацький Ф. М. *Класифікація мінімальних тотожностей на квазігрупах* // П’ятнадцятий міжнар. наук.-практ. семінар “Комбінаторні конфігурації та їх застосування” (Кіровоград, 12–13 квітня 2013 р.): тези. — Кіровоград: ПП “Ексклюзив-систем”, 2013. — С. 64–66.

19. Krainichuk H. *On minimal nontrivial quasigroup identities* // 9^{th} International Algebraic Conference in Ukraine (L’viv, July 8–13, 2013): book of abstracts. — L’viv: Ivan Franko National University of L’viv, 2013. — P. 98.

20. Krainichuk H. V. *About minimal nontrivial quasigroup identities* // Intern. Conf. “Mathematics & Information Technologies: Research and Education” (MITRE-2013) (Chişinău, Moldova, August 18–22, 2013): Abstracts. —

Chişinău: Institute of Mathematics and Computer Science (CEP USM), 2013. — P. 56–57.

21. Крайнічук Г. В. *Класифікація мінімальних тотожностей на квазігрупах* // Шістнадцятий міжнар. наук.-практ. семінар "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кіровоград, 11–12 квітня 2014 р.): тези. — Кіровоград: КНТУ, 2014. – С. 89–92.

22. Крайнічук Г. В. *Деякі розв'язки функційних рівнянь типу* (4; 2) *на квазігрупах* // IX Междунар. научн. конф. для молодых учёных "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях" (Харьков, 25–26 апреля 2014 г.): тезисы докладов — Харьков: Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 2014. — С. 9–10.

23. Krainichuk H. *About classification of quasigroups according to symmetry groups* // The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science (Chişinău, Moldova, August 19–23, 2014): Proceeding IMCS-50. — Chişinău: Institute of Mathematics and Computer Science, Acad. of Sciences of Moldova (Tipogr. "Valinex SRL"), 2014. — P. 112–115.

24. Крайнічук Г. В. *Про різні класифікації тотожностей на квазігрупах* // XII-та Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз" ATA-2017 (с. Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл., Україна, 10–23 липня 2017 р.). — Електрон. текст. дані. — с. Колочава, Міжгірський р-н, Закарпатська обл., Україна: науково-навчальна база НПУ імені М. П. Драгоманова "Синевир", 2017. — С. 7–8. — URL: https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/ata12/theses/ata12_abstracts.pdf (дата звернення 22.01.2019)

25. Крайнічук (Шелепало) Г. В. *Про квазігрупові функційні рівняння малої довжини* // Наук. конф. професорсько-викладацького складу,

наук. працівників і здобувачів наук. ступеня за підсумками наук.-дослід. роботи за період 2015–2016 рр. (Вінниця, 15–18 травня, 2017 р.): матеріали у 2-х томах. — Том 1. — Вінниця, Донецький національний університет імені Василя Стуса, 2017. — С. 196–197.

26. Krainichuk H. *On parastrophes of quasigroup identities and corresponding varieties and trusses* // The Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated centenary of Vladimir Andrunachievici (1917–1997) CMSM 4'2017 (Chişinău, Republic of Moldova, June 25–July 2, 2017): Proceedings CMSM 4. — Chişinău: Institute of Mathematics and Computer Science (CEP USM), 2017. — P. 101–104.

27. Krainichuk H. *About classification of small length generalized binary functional equations on quasigroups* // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (Kyiv, July 3–7, 2017): Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — P. 64.

28. Krainichuk H. *On classification of generalized binary quasigroup functional equations of length four* // International conference on mathematics, informatics and information technologies: dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov (Bălţi, Rep. of Moldova, April 19–21, 2018): Communications. — Bălţi: S. n. "Alecu Russo" Bălti State Univ. (Tipografia din Bălţi), 2018. — P. 49–50.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації здобувачка доповідала на таких конференціях та семінарах:

1. Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (м. Львів 25–27 травня 2009 р.);

2. Український математичний конгрес (м. Київ 27–29 серпня 2009 р.);
3. Міжнародна математична конференція з квазігрупп і луп "Loops'11" (м. Трешт, Чехія 25–27 липня 2011 р.);
4. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2012"(м. Львів 23–25 травня 2012 р.);
5. Міжнародна математична конференція з нагоди 70-річчя професора Володимира Кириченка (м. Миколаїв, 13–19 червня 2012 р.);
6. 9-а Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні (м. Львів 8–13 липня 2013 р.);
7. Міжнародна конференція з алгебри, присвячена 100-річчю С. М. Чернікова (м. Київ 20–26 серпня 2012 р.);
8. XX конференція з прикладної та промислової математики (CAIM 2012), присвячена академіку Митрофану М. Чобану (м. Кишинів, Республіка Молдова, 22-25 серпня 2012 р.);
9. Міжнародна наукова конференція "XI Білоруська математична конференція". Секція: Алгебра і теорія чисел (м. Мінськ, Республіка Білорусь, 5–9 листопада 2012 р.);
10. Міжнародна конференція, присвячена 120-річчю Стефана Банаха (м. Львів 17–21 вересня 2012 р.);
11. Міжнародна конференція "Математика та інформаційні технології: дослідження та освіта", (MITRE 2013) (м. Кишинів, Республіка Молдова, 18–22 серпня 2013 р.);
12. IX Міжнародна наукова конференція для молодих вчених "Сучасні проблеми математики і її застосування в природних та інформаційних технологіях" (м. Харків, 25–26 квітня. 2014 р);
13. Третя конференція математичного товариства Республіки Молдова, присвячена 50-річчю з дня заснування Інституту математики та

інформатики “IMCS-50” (м. Кишинів, Республіка Молдова, 19–23 серпня 2014 р.);

14. Наукова конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня, присвячена 85-річчю ДонНУ, за підсумками науково-дослідної роботи за період 2015-2016 рр. (м. Вінниця 15–18 травня, 2017 р.);
15. 11-а Міжнародна алгебрична конференція в Україні, присвячена 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3–7 липня 2017 р.);
16. XII Літня школа: “Алгебра, топологія, аналіз” (с. Колочава, Закарпатська область, 10–23 липня 2017 р.);
17. Четверта конференції з неасоціативної математики (м. Денвер, США, 29 липня – 5 серпня 2017 р.);
18. Міжнародна конференція з математики, інформатики та інформаційних технологій, присвячена знаменитому вченому Валентину Білоусову (м. Бєльци, Республіка Молдова, 19–21 квітня 2018 р.);
19. Міжнародний конгрес математиків 2018 (м. Ріо де Жанейро, Бразилія, 1–9 серпня 2018);
20. Міжнародний семінар Інституту математики та інформатики АН Республіки Молдови “Алгебра і математична логіка” (м. Кишинів, Республіка Молдова, 19–21 лютого 2009 р., 23–25 лютого 2011 р.);
21. X Міжнародний семінар “Дискретна математика та її застосування” (м. Москва, Росія, 1–6 лютого 2010 р.);
22. Львівський міський алгебраїчний семінар під керівництвом д. фіз.-мат. н., проф. М. Я. Комарницького (м. Львів, 18 жовтня 2011 р.);
23. П’ятнадцятий міжнародний науково-практичний семінар “Комбінаторні конфігурації та їх застосування” (Кіровоград, 12–13 квітня 2013 р.);

24. Шістнадцятий міжнародний науково-практичний семінар "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кіровоград, 11–12 квітня 2014 р.);

25. Алгебраїчний семінар Київського національного університету ім. Т. Шевченка (керівники — д. фіз.-мат. н., член-кор. НАНУ Ю. А. Дрозд, д. фіз.-мат. н. А. П. Петравчук) (м. Київ, 27 вересня 2018 р.)

26. Алгебричний семінар Інституту математики НАН України (керівник – д. фіз.-мат. н., член-кор. НАНУ Ю. А. Дрозд) (м. Київ, 30 жовтня 2018 р.).