

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук Романа Андрійовича Заторського на дисертаційну роботу Надії Борисівни Ілаш “Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр SL_2 -інваріантів”, подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертаційна робота виконана в галузі класичної теорії інваріантів і присвячена дослідженню асимптотичних властивостей рядів Пуанкаре градуїованих алгебр SL_2 -інваріантів. В даній роботі досліджуються ряди Пуанкаре $\Pi(R, z)$ алгебр SL_2 -інваріантів R з точністю до перших двох доданків розкладу цього ряду в ряд Лорана в точці $z = 1$.

Теорія інваріантів, історія якої налічує більш, ніж півтора століття, наразі переживає період активного розвитку, пов'язаний з проникненням у цю теорію методів теорії алгебраїчних груп та комутативної алгебри. Виникнення класичної теорії інваріантів пов'язане саме з дослідженням алгебр SL_2 -інваріантів.

Хоча явну формулу для ряду Пуанкаре алгебри інваріантів однієї бінарної форми було отримано Спрінгером лише у 1980 році, ряди Пуанкаре алгебр SL_n -інваріантів в тій чи іншій мірі досліджувались ще наприкінці дев'ятнадцятого століття (Д. Гільберт, Дж. Сільвестр, А. Келі, Т. Молін). Тим не менше, на сьогодні ця проблема не втратила актуальності – варто згадати роботи Б. Стурмфелза (2009 рік), А. Е. Броуера та М. Поповіку (2010–2012 роки), Л. Бедратюка (2010–2012 роки), А. Абдеселама (2012–2017 роки) М. Оліве (2017 рік), Кові та ін. (2019 рік). Аналіз цих праць показує, що ряди Пуанкаре алгебр інваріантів окремих класичних груп, зокрема, алгебр SL_2 -інваріантів, не є достатньо досліджені. Власне, ряди Пуанкаре цих алгебр є предметом дослідження дисертаційної роботи Ілаш Н. Б.

Дисертаційна робота містить анотацію, перелік умовних позначень і термінів, вступ, 4 розділи, висновки та додатки, в яких подано список публікацій автора за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Наприкінці розділів 2, 3, 4 наведено висновки.

Перший розділ є допоміжним і не містить результатів автора. В ньому здійснено огляд літератури з теми дослідження, наведено основні поняття та позначення, подано допоміжні результати інших авторів, необхідні в наступних розділах.

У другому розділі досліджується асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр коваріантів бінарної d -форми. Зокрема, обчислено степінь цієї алгебри, досліджено асимптотичну поведінку цього степеня та знайдено його інтегральне зображення.

Третій розділ присвячений дослідженню асимптотичної поведінки рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних

форм. Розглядаються різні випадки відносно парності порядків цих форм. Результатом цього розділу є обчислення степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм.

Останній, четвертий розділ присвячено дослідженню рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм. Ряди Пуанкаре цих алгебр виражено в термінах многочленів Нараяна. Це дало можливість автору отримати степені цих алгебр, дослідити асимптотичну поведінку та знайти інтегральне зображення цих степенів. Крім цього, в четвертому розділі знайдено явний вигляд многочленів Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм.

Загалом в дисертації вперше отримано такі нові результати:

- 1) обчислено степені алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм та степені алгебр спільних інваріантів скінченної кількості лінійних та квадратичних форм;
- 2) знайдено коефіцієнти перших двох доданків розкладу в ряд Лорана в околі точки $z=1$ рядів Пуанкаре алгебри коваріантів бінарної d -форми та алгебр спільних коваріантів n лінійних та n квадратичних форм; зокрема, обчислено степені цих алгебр;
- 3) досліджено асимптотичну поведінку степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та n квадратичних форм, а також степеня алгебри коваріантів бінарної d -форми;
- 4) доведено, що степінь алгебри коваріантів бінарної d -форми є додатним числом;
- 5) ряди Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм виражено у вигляді раціонального дробу; знайдено рекурентні співвідношення для цих рядів Пуанкаре;
- 6) знайдено явний вигляд многочленів Гільберта алгебр спільних інваріантів та коваріантів n лінійних та квадратичних форм;
- 7) отримано декілька комбінаторних тотожностей, зокрема, встановлено нові вирази для многочленів Нараяна.

Достовірність результатів роботи в цілому не викликає сумніву. Доведення результатів лем, теорем і наслідків повні та детальні. Раніше відомі факти, що використовуються у доведеннях та прикладах мають відповідні посилання.

Основні наукові результати досить повно відображені у 6 наукових публікаціях, з них 2 статті у закордонних виданнях, внесених до наукометричної бази Scopus та 4 – у вітчизняних фахових виданнях (зокрема, дві з них опубліковані у виданні, що внесено до наукометричної бази Web of Science). Результати роботи апробовані на одній всеукраїнській, 7 міжнародних та одній закордонній конференціях, а також на алгебраїчних семінарах Інституту математики НАН України та Київського національного університету імені Тараса Шевченка. За

результатами дисертації опубліковано 8 тез доповідей на наукових конференціях.

Разом з тим можна висловити такі побажання та рекомендації.

- 1) В українській математичній термінології прийнято вживати термін “твірні”, натомість автор вживає термін “породжуючі”.
- 2) У роботі зустрічаються незначні граматичні й технічні огріхи:
 - на сторінці 30, шостий рядок знизу термін “ a -інваріант” потрібно взяти в лапки;
 - на сторінці 37 в рядку 11 наявна зайва кома;
 - в останньому рядку сторінки 61 описка у формулі;
 - некоректно вжито слово “оскільки” на сторінці 52 у рядках 7–9 та на сторінці 64;
 - на сторінці 103 загублено знак рівності наприкінці рядка 7 і на початку рядка 8.
- 3) На сторінці 78 в рядках 5–6 є таке речення “Згідно теореми 1.2.7 ряд Пуанкаре алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм порядку d має такий вигляд”, проте в рядку 7 наведена формула ряду Пуанкаре алгебри спільних інваріантів двох бінарних форм порядку d .
- 4) Доцільно було б комбінаторні формули, отримані в розділі 3 виділити окремо.
- 5) В деяких нумерованих списках після крапки з комою автор починає наступний пункт списку з великої літери (див., наприклад, лема 2.1.1 на сторінці 42, лема 3.1.1 на сторінках 54–55).
- 6) Доцільно було б внести позначення біноміального коефіцієнта $\binom{n}{k}$ (кількість сполучень з n елементів по k елементів) до переліку умовних позначень і термінів.
- 7) У підрозділі 4.4 (сторінка 98) слід було б зазначити за яких умов многочлен Лежандра є розв’язком наведеного в рядку 12 цієї ж сторінки диференціального рівняння.
- 8) Теорема 4.1.1 у статті автора подана як лема. Більше того на сторінці 88 дисертації (рядок 5) автор посилається на неї, як на лему.

Вказані недоліки мають виключно редакційний характер, не змінюють загального позитивного висновку про подану до захисту роботу і не ставлять під сумнів її положення. Дисертація є завершеною науковою працею, в якій отримані нові науково обґрунтовані результати, які в сукупності є суттєвими для розвитку класичної теорії інваріантів. Робота належно оформлена, автореферат адекватно відображає зміст дисертації.

Робота має теоретичну і практичну цінність і може бути основою для подальших досліджень у теорії інваріантів, комбінаториці, комутативній алгебрі. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані у Львівському, Київському, Прикарпатському національних

університетах, Інституті математики та Інституті прикладних проблем механіки та математики НАНУ.

Вважаю, що подана до захисту дисертаційна робота за науковою новизною, структурою та оформленням повністю задовольняє вимоги пп. 9, 11, 12-14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, а її автор – Ілаш Надія Борисівна заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент
завідувач кафедри диференціальних
рівнянь і прикладної математики
ДВНЗ “Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника”
доктор фіз.-мат. наук, професор

Р.А.Заторський

