

**ВІДГУК**  
**офіційного опонента на дисертаційну роботу**  
**Ілаш Надії Борисівни**  
**„Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр  $SL_2$ -інваріантів”,**  
**подану на здобуття наукового ступеня**  
**кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю**  
**01.01.06 – алгебра та теорія чисел**

Важливим напрямком математики є теорія інваріантів, що відіграє фундаментальну роль в математичних, технічних та природничих науках. Вона дає методологію та конкретний математичний апарат для визначення тих властивостей, характеристик та параметрів об'єктів, які залишаються незмінними при різних перетвореннях цих об'єктів.

Розробка основ теорії інваріантів пов'язана з дослідженнями всесвітньої слави математиків (А. Келі, Дж. Сільвестр, Д. Гільберт, А. Пуанкаре, Ш. Ерміт, С. Лі, Т. Молін, Е. Нетер, Г. Машке). Інтенсивні дослідження кінця дев'ятнадцятого – початку двадцятого століть призвели до виокремлення різних течій і підходів в цій теорії. Зокрема, виникли геометрична, класична, конструктивна теорії інваріантів. Основною задачею класичної теорії інваріантів є задача скінченної породженості. У випадку її позитивного розв'язання, постає задача конструктивності. Про те, що алгебри  $SL_2$ -інваріантів є скінченно породженими, було відомо ще Гільберту. Разом з тим, задача конструктивності для цих алгебр ще далека від розв'язання. Тому зацікавленість викликають задачі відшукування проміжних результатів. Однією з таких задач є дослідження ряду Пуанкаре, який дає інформацію про важливі структурні характеристики відповідної алгебри інваріантів, зокрема про степінь алгебри. Дослідженнями рядів Пуанкаре та їх асимптотичних властивостей для алгебри інваріантів бінарної форми займались Д. Гільберт, Т. Спрінгер. На сьогодні даний напрямок активно розвивається. Основні результати в Україні отримано Л. Бедратюком. Алгебри інваріантів класичних груп активно досліджують також сучасні закордонні науковці (І. Аржанцев, А. Е. Брауер, М. Бріон, Е. Вінберг, В. Дренські, В. Попов).

При дослідженні алгебр інваріантів важливо знати степені, а також явний вигляд рядів Пуанкаре і многочленів Гільберта цих алгебр. Дослідженню таких питань для алгебр інваріантів бінарних форм присвячена дисертаційна робота Н. Б. Ілаш. Таким чином, тематика дисертації є актуальною.

Дисертація складається з переліку умовних позначень і термінів, вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, виділено об'єкт, предмет та методи дослідження, сформульовано мету і задачі

дослідження, висвітлено наукову новизну, а також вказано зв'язок з науковими програмами. Крім того, наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації.

Перший розділ роботи має допоміжний характер. У ньому наведено основні поняття та результати інших авторів, які використані в ході досліджень, зроблено огляд літератури з даної тематики.

Результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, у повному обсязі викладено в другому, третьому та четвертому розділах.

Другий розділ присвячено дослідженню асимптотичної поведінки рядів Пуанкаре алгебр коваріантів бінарної форми. Зокрема, знайдено степінь алгебри коваріантів бінарної форми (Теорема 2.1.1), досліджено асимптотичну поведінку степеня та знайдено його інтегральне зображення (Теореми 2.2.1 та 2.2.2). Крім того, доведено що степінь алгебри коваріантів бінарної форми є додатним числом.

У третьому розділі обчислено степені алгебр спільних інваріантів (Теореми 3.1.2, 3.2.3, 3.2.4 та 3.3.2) та коваріантів (Теореми 3.1.1, 3.2.2 та 3.3.1) двох бінарних форм. Слід зауважити, що отримані формули є досить громіздкими.

У четвертому розділі вивчаються такі алгебри  $SL_2$ -інваріантів: алгебра спільних інваріантів  $n$  лінійних форм, алгебра спільних коваріантів  $n$  лінійних форм, алгебра спільних інваріантів  $n$  квадратичних форм та алгебра спільних коваріантів  $n$  квадратичних форм. В цьому розділі значно спрощено формули для рядів Пуанкаре та знайдено явні формули (Теореми 4.5.1 та 4.6.1) для многочленів Гільберта цих алгебр. Обчислено степені згаданих алгебр (Теореми 4.2.2 та 4.3.2) і досліджено асимптотику та інтегральне зображення даних степенів. Також у цьому розділі знайдено рекурентні співвідношення для рядів Пуанкаре алгебр спільних інваріантів та коваріантів  $n$  лінійних та квадратичних форм. Крім того, в ході обчислень отримано декілька комбінаторних тотожностей.

З наведеного огляду результатів Ілаш Н.Б. бачимо, що її робота має цілісний характер та є завершеною науковою працею. У ній розв'язано низку задач опису поведінки рядів Пуанкаре.

Усі результати, що включені в дисертацію, є новими. Вони сформульовані у вигляді теорем та наслідків з них. У дисертації наведено повні доведення теорем та допоміжних тверджень, що є свідченням обґрунтованості наукових положень і висновків дисертації. Тому їх достовірність не викликає сумніву.

Таким чином, дисертаційна робота Ілаш Надії Борисівни є завершеним науковим дослідженням, яке є суттєвим внеском в актуальний науковий напрям сучасної алгебри. Робота має теоретичний характер. Її результати є перспективними в плані можливих застосувань у галузях математики, близьких

до лінійної алгебри, а також у багатьох прикладних задачах. Результати роботи можна рекомендувати для використання фахівцями з теорії інваріантів і квантової фізики, які працюють в Інституті математики НАН України, Львівському, Київському, Дніпровському та Прикарпатському університетах, університеті „Львівська політехніка”.

Результати дисертації опубліковано в 6 наукових статтях, з них 2 статті у виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних наук, та 4 статті у наукових виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus. 5 статей опубліковано без співавторів. Із статті, написаної у співавторстві, в дисертаційну роботу ввійшли результати, отримані авторкою особисто.

Винесені на захист результати пройшли належну апробацію. Вони були оприлюднені дисертанткою на восьми міжнародних математичних конференціях, в тому числі на одній закордонній, на одній всеукраїнській конференції, а також на алгебраїчному семінарі Київського національного університету імені Тараса Шевченка та на алгебраїчному семінарі Інституту математики НАН України.

За своїм науковим спрямуванням дисертація Ілаш Н.Б. відповідає паспорту спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. Дисертація написана на належному науковому рівні, зміст дисертації повністю відображений у авторефераті.

Підкреслюючи позитивні сторони проведеного авторкою дослідження, слід відзначити, що дисертація має окремі недоліки:

- при доведенні леми 2.1.2 варто було б посилатись на теорему Безу;
- у теоремі 3.1.1 є умова „у випадку різної парності чисел  $d_1$  і  $d_2$ ”, а в теоремі 3.1.2 умова „при  $d_2 - d_1 = 1(\text{mod}2)$ ”. Це та сама умова, записана по-різному. Аналогічно на початку підрозділу 3.2 є умова „числа  $d_1$  і  $d_2$  мають однакову парність”, а в теоремі 3.2.1 умова „при  $d_2 - d_1 = 0(\text{mod}2)$ ”. Це також рівносильні умови, записані по-різному. Такий виклад ускладнює сприйняття отриманих результатів;
- на сторінці 75 в підрозділі 3.3 функції  $\tilde{A}_k(z)$  та  $\tilde{B}_k(z)$  введено з використанням функції  $f_{d,d}(tz^d, z)$ , стосовно якої немає пояснень ні в цьому підрозділі, ні у списку умовних позначень та термінів. Формули для функцій  $\tilde{A}_k(z)$  та  $\tilde{B}_k(z)$  слід було подати без використання згаданої функції, оскільки вона не потрібна авторці для подальших обчислень;
- формули для обчислення степенів алгебр спільних інваріантів та коваріантів двох бінарних форм досить громіздкі;
- фразу „Комбінаторні тотожності, отримані в лемі 4.1.4” на сторінці 88 варто було б замінити на „Комбінаторні тотожності, отримані в підрозділі 4.1”, оскільки леми 4.1.4 в дисертації немає, натомість на

сторінках 88–89 використовуються комбінаторні тотожності з підрозділу 4.1;

- недоцільно було наводити лему 4.2.1 та доводити лему 4.3.1, оскільки вони є окремими випадками відомого результату, наведеного в підрозділі 1.2;
- наявні граматичні помилки (пропущені букви або розділові знаки), а також речення, що потребують редагування (наприклад, стор. 64, 76, 77, 79, 103, 105).

Проте, всі ці недоліки не мають принципового характеру. Вони не зменшують наукову та практичну цінність проведеного дослідження.

На основі сказаного вище вважаю, що дисертація „Асимптотична поведінка рядів Пуанкаре алгебр  $SL_2$ -інваріантів” відповідає вимогам пп. 9, 11–14 “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її авторка, Ілаш Надія Борисівна, заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент,

доцент кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем

Національного університету „Львівська політехніка”

доктор фізико-математичних наук, доцент  Р. Б. Попович

Підпис Поповича Р.Б. засвідчую  
Вчений секретар Національного університету  
„Львівська політехніка”



 Р. Б. Брилинський

