**ВІДГУК**

на дисертаційну роботу

Ірини Василівни ФРИЗ

***«Ортогональність багатомісних операцій та алгоритми їх побудови»***

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Теорія ортогональних операцій і, зокрема квазігруп, знаходиться на стику алгебри і комбінаторного аналізу, що відображається у формулюваннях загальних проблем цієї області. Методи теорії квазігруп сприяють ефективному розв'язку цих проблем, забезпечуючи зручний математичний апарат. Історично, теорія ортогональних операцій виникла у процесі розв'язування відомої гіпотези Ейлера про те, що не існує ортогональних латинських квадратів порядку $n \equiv 2(mod\ 4)$. Повний розв'язок (негативний для $n \neq 2,6$) цієї гіпотези призвів до природних узагальнень поняття ортогональності, і тим самим, до нових проблема і напрямків в даній області.

Перші роботи, в яких вивчається ортогональність операцій арності більше двох (гіперкубів), з'явилися в 70-і роки минулого століття в роботах Т. Івенса, В. Білоусова, А. Бектєнова, Я. Ушана, Т. Якубова, С. Муратхуджаєва та ін. Зазначимо, що під час вивчення ортогональності операцій арності $n > 2$ з'являються нові аспекти, що не мають аналогів у бінарному випадку, такі як ортогональність ретрактів операцій, які розглядаються. Наразі до проблеми дослідження ортогональних операцій відноситься знаходження критеріїв ортогональності, нових методів (алгоритмів) побудови ортогональних систем $n$ -арних операцій (квазігруп, гіперкубів), описання спектру ортогональних $n$ -квазігруп і максимальної кількості гіперкубів в ортогональній системі, дослідження ортогональності ретрактів $n$ -арних операцій та ін.

Зазначимо, що, враховуючи її комбінаторний аспект, ортогональність операцій має численні застосування у різних областях математики: в комбінаторному аналізі, в теорії алгебричних сіток, в теорії кодування і шифрування інформації та ін. Зокрема, з допомогою сильно ортогональних систем квазігруп можна побудувати коди з максимальною відстанню Хеммінга (МДР коди).

Ортогональність систем операцій визначається через розв'язність деяких систем рівнянь, де важливу роль відіграє оборотність цих операцій і їх композиції. У зв'язку із цим виникає проблема дослідження оборотності композиції операцій. Відомо, що безповторна композиція квазігруп є квазігрупою, проте це неправильно у випадку, коли деякі змінні повторюються. Для композиції двох бінарних квазігруп з повтореннями змінних проблему оборотності розв'язав В. Білоусов в кінці 60х років минулого століття, оборотність повторної композиції двох $n$-операцій досліджена Ф. Сохацьким, О. Юревич та ін., проте проблема оборотності довільної повторної композиції операцій наразі залишається відкритою.

Питання існування ортогональної пари для даної операції (квазігрупи) з'явилося в бінарному випадку природним чином, зокрема в процесі розв'язування гіпотези Ейлера, і розглядалося Манном, Стейном, Білоусовим та ін. Узагальнення даної проблеми на $n$-арний випадок розглядали Т. Якубов, С. Муратхуджаєв, Г.Б. Білявська, Г.Л. Муллен та ін. Зокрема, Г.Б. Білявська і Г.Л. Муллен довели існування ортогонального доповнення для кожної ортогональної системи із $k$ $n$-арних операцій до ортогональної системи із $n$ $n$-арних операцій ($k < n$). Проте на даний час залишається актуальною проблема знаходження методів побудови ортогональних доповнень до деякої ортогональної системи $n$-арних операцій, яка містить менше ніж $n$ $n$-арних операцій.

В дисертаційній роботі І. В. Фриз вивчаються проблеми побудови ортогональних систем $n$-арних операцій (квазігруп), зокрема, використовуючи ретрактно ортогональні операції, можливість доповнення ортогональних систем, а також зв'язки між різними типами ортогональності.

Значення і актуальність вказаних проблем підтверджено численними працями в даній області, починаючи із середини 20-го століття. Глибокі і важливі дослідження із зазначенням цікавих застосувань і формулюванням нових конкретних задач, були проведені в роботах К. Стейна, В. Білоусова, Е. Івенса, А. Сада, Д.Кідуела, Ф. Денеша, Е. Паркера, Н. Мендельсона, Р. Боуза, Г. Білявської, Г. Муллена та ін.

Дисертація І. В. Фриз складається із вступу, п'яти розділів, висновків і бібліографії із 98 літературних джерел, а її загальний об'єм – 144 сторінки.

У вступі сформульовані цілі задачі роботи, обґрунтована актуальність теми, наукова новизна і значення отриманих результатів, надані відомості про публікації, особистий внесок здобувача і апробацію результатів дисертації.

В першому розділі «$n$-Арні квазігрупи та ортогональні операції» автор наводить необхідні означення і факти із теорії квазігруп і теорії ортогональних операцій (бінарних і $n$-арних квазігруп, латинських квадратів), різних узагальнень поняття ортогональності операцій.

В другому розділі «Оборотність композиції двох багатомісних операцій» вивчається оборотність композиції двох операцій довільної скінченної арності. Для описання оборотності вводиться поняття перпендикулярності (деякого типу) двох багатомісних операцій довільних скінченних арностей, яке є одним із узагальнень ортогональності бінарних операцій. Основним результатом цього розділу є Теорема 2.1 і її наслідок, де сформульовані і доведені критерії $i$-оборотності, відповідно оборотності, композиції двох операцій довільних скінченних арностей.

В третьому і четвертому розділах викладені основні результати дисертації. В третьому розділі «Алгоритми побудови ортогональних операцій» вводиться поняття δ-ретрактної ортогональності (для деякого $\delta \subset \{1,2,\dots,n\}$) і π-блочної ретрактної ортогональності (де π є деяким розбиттям множини $\{1,2,\dots,n\}$), описані алгоритми побудови ортогональних систем $n$-арних операцій. В цьому розділі І.В. Фриз наводить:

a) композиційний алгоритм для побудови δ-ретрактно ортогональних операцій (Алгоритм 3.1),

b) π-блочний рекурсивний алгоритм для побудови ортогональних $n$-арних операцій (Алгоритм 3.2), який узагальнює відомий рекурсивний метод Г. Білявської і Г. Муллена,

c) π-блочний композиційний алгоритм (Алгоритм 3.4) для побудови ортогональних $n$-арних операцій за допомогою ортогональних операцій меншої арності.

В Теоремах 3.2, 3.4 і 3.5 доведена $\delta$-ретрактна ортогональність, відповідно ортогональність систем операцій, отриманих за допомогою кожного із трьох розроблених алгоритмів.

В четвертому розділі «Доповнення ортогональних операцій» досліджується можливість доповнення ортогональних систем операцій до ортогональних систем, де кількість операцій збігається з їх арністю, наведені алгоритми доповнення і подані деякі оцінки кількості можливих доповнень. Зазначимо наступні два алгоритми, які автор наводить в цьому розділі:

a) блочний рекурсивний алгоритм (Алгоритм 4.1), який будує доповнення ретрактно ортогональної системи із $k$ $n$-арних операцій до ортогональної системи із $n$ $n$-арних операцій,

b) алгоритм, який будує доповнення довільної ортогональної системи із $k$ $k$-арних операцій до ортогональної системи із $n$ $n$-арних операцій, де $k < n$ (Алгоритм 4.3).

В Теоремі 4.3 доведено, що система із $n - k$ $n$-арних операцій, які будуються за допомогою Алгоритму 4.1, є доповненням даної $\delta$-ретрактно ортогональної системи із $k$ $n$-арних операцій, а в Теоремі 4.5 наведено відповідне обґрунтування Алгоритму 4.3. В Теоремі 4.4 подані оцінки кількості доповнень у випадку, коли на кожному кроці Алгоритму 4.1 додається точно одна операція.

Останній розділ «Деякі застосування отриманих результатів» присвячений деяким питанням ортогональності бінарних і тернарних операцій. Подані в другому розділі алгоритми уточнені для побудови ортогональних тернарних операцій і доповнень ортогональних систем тернарних операцій (кубів). Рекурсивні Алгоритми 5.1, 5.2 і 5.3 будують ортогональні системи тернарних операцій для різних розбиттів множини $\{1,2,3\}$, використовуючи тернарні операції з частковою оборотністю або тернарні операції із заданими ортогональними бінарними ретрактами. Обґрунтування даних алгоритмів наводиться в Теоремах 5.3, 5.4 і 5.5.

Зазначимо також, що в цьому розділі автор знаходить і умови коли $n$-арна квазігрупа, яка є композицією певного виду бінарних квазігруп має допустимі, відповідно цілком допустимі, $\{i, j\}$-ретракти (Наслідок 5.3)

Таким чином, приходимо до висновку, що в даній дисертаційній роботі автором запропонований зручний математичний апарат, включаючи ретрактну ортогональність операцій, умови оборотності композиції операцій, деякі види узагальненої допустимості та ін., за допомогою якого розроблені алгоритми побудови ортогональних систем $n$ -арних операцій і їх доповнень. Зазначимо, що при цьому розглядаються різні означення ортогональності.

До дисертації є деякі зауваження:

1. На сторінці 103, стрічки 3-4 знизу сторінки, розрив формули в терміні при перенесенні на наступну стрічку.

2. На сторінках 110, 111 у формулюваннях Леми 5.1, Теореми 5.1 і Наслідку 5.1 використовується термін лівий ізотоп. З доведень очевидно, що малося на увазі ліве кручення, визначення якого наведено в роботі.

3. В параграфі 5.1.2. використовується поняття перпендикулярного доповнення (перпендикулярної пари), зокрема у Твердженні 5.2, але не наведено його строге означення. Хоча воно є частковим випадком ортогонального доповнення, означення якого наведено у четвертому розділі, для більшої зрозумілості читача варто було б конкретизувати його для перпендикулярного доповнення.

Зазначимо, що зауваження, висловлені до роботи, мають редакційний характер і не зменшують її наукову цінність.

Все вище зазначене дозволяє зробити висновки, що дисертаційна робота І.В. Фриз написана на актуальну тему, містить глибокі математичні результати в області теорії ортогональних операцій, є завершеним дослідженням і представляє її автора як дослідника, який здатний проводити самостійні наукові дослідження, розв'язувати важливі математичні проблеми.

Дисертаційна робота має теоретичний характер, робить важливий внесок в теорію неасоціативних алгебраїчних структур, зокрема в загальну теорію $n$-арних операцій і квазігруп, в теорію функційних рівнянь, а також її результати можуть бути застосовані в комбінаториці, теорії кодування і шифрування інформації та в інших суміжних областях.

Результати дисертації пройшли високу апробацію, доповідалися на 6 міжнародних конференціях і 2 алгебраїчних семінарах: Денвер (США), Берлін (Німеччина), Трешт (Чехія), Охрід (Північна Македонія), Бєльці (Молдова), Київ, Львів (Україна).

Результати дисертації опубліковані у 12 наукових роботах, в том числі 6 статей в рецензованих журналах за спеціальністю, із яких 4 журнали включені в базу SCOPUS, і 6 тез конференцій. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Виходячи із вище викладеного вважаю, що за актуальністю тематики, обсягом виконаної роботи, новизною і науковою цінністю отриманих результатів дисертаційна робота «Ортогональність багатомісних операцій та алгоритми їх побудови» задовольняє вимоги пп. 9, 11, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор, Фриз Ірина Василівна, цілком заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

10 червня 2019

**Офіційний опонент**
Кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики P. Sirbu П.М. Сирбу
Молдавського державного університету,
м. Кишинів, Республіка Молдова

Підпис Сирбу П.М. засвідую

Проректор з наукової роботи
Молдавського державного університету
м Кишинів, Республіка Молдова
Професор, доктор наук Ф. Паладі