

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БУРТНЯК ІВАН ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 519.86:336.76

**СПЕКТРАЛЬНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ
ВОЛАТИЛЬНОСТІ ФОНДОВИХ РИНКІВ**

Спеціальність 08.00.11 – математичні методи, моделі та
інформаційні технології в економіці

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора економічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і
текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ І.В.

Буртняк

Науковий консультант

Благунов Іван Семенович,

доктор економічних наук, професор

Івано-Франківськ – 2019

АНОТАЦІЯ

Буртняк І.В. Спектральні методи дослідження поведінки волатильності фондових ринків. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора економічних наук за спеціальністю 08.00.11 – математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці. – ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника». – Івано-Франківськ, 2019.

Дисертацію присвячено встановленню та обґрунтуванню теоретико-методологічних положень розробки та реалізації комплексу економіко-математичних моделей аналізу і прогнозування волатильності фінансових інструментів спрямованих на досягнення макроекономічної стабілізації та динамічного розвитку фондового ринку.

Сформульовані в дослідженні гіпотези, отримані на їх основі концептуальні положення, а також розроблена методологія моделювання ціноутворення опціонів, дає можливість передбачати результати цілеспрямованих дій учасників фондового ринку, та робити корекцію поведінки на основі впливу різноманітних чинників, які присутні на ринку.

В роботі встановлено, що оцінка впливу похідних фінансових інструментів як на мікро- так макро рівнях є амбівалентною, а її застосування значно збільшує можливості управління ризиками для учасників фондового ринку, а відтак може визначати обсяги і різноманіття реалізованих ними фінансових операцій з екстраполяцією на економічне зростання та добробут окремих країн. Втім їхнє складне, багаторівневе і ризиковане використання, за відсутності відповідних правил та контролю з боку регуляторів на національному та міжнародному рівнях веде до зростання турбулентності фінансових ринків.

Доведено, що динамічний розвиток фінансових інструментів, має складний характер, який визначається як зовнішніми чинниками, які виникають внаслідок недосконалості фондових ринків, та турбулентності

макроекономічного оточення, так і внутрішніми – джерелом яких є потреба учасників фондового ринку у створенні інструментів, котрі пом'якшують ризики, збільшують прибутки та підвищують його конкурентоспроможність. Тому складовим елементом фондового ринку є ринок деривативів, головним завданням яких є хеджування ризиків, що супроводжують операції з базовими фінансовими інструментами. При цьому одним із основних параметрів, що характеризують операції з деривативами є волатильність.

Розроблено адитивну модель прогнозування індексу ПФТС з використанням розподілу Пуассона, яка дозволяє досліджувати динаміку фінансових потоків і фондових показників та удосконалено методику дослідження поведінки фондового ринку, показники якого мають розподіл Лапласа-Пуассона, застосовуючи швидку середню зміну волатильності, запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки основних параметрів фондового ринку.

Досліджено динаміку волатильності індикаторів фондового ринку, які характеризують прибутковість або ціну ринкового портфеля та індексу ПФТС із застосуванням методів ARCH моделювання, що дозволило встановити рівень системного ризику, а також знайти невизначеність, пов'язану з прогнозуванням динаміки індикаторів фондового ринку.

Запропоновано використовувати модель Гобсона-Роджерса для дослідження динаміки індексу ПФТС та знаходження волатильності вартості фінансових інструментів, що дозволило запропонувати ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів.

Доведено, що шляхозалежна волатильність володіє минулою інформацією та дозволяє моделювати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, а також відображає позитивні або негативні тенденції використання фінансового інструменту. На відміну від стандартних

локальних або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку, шляхозалежна модель волатильності може бути використана для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою гармонізації динаміки фондового ринку.

В роботі за допомогою моделей ARCH встановлено існування залежностей причинно-наслідкового характеру між індексом ПФТС та світовими індексами DJIA, NASDAQ Composite, DAX та PTC, що безпосередньо використовується для моделювання і прогнозування курсів окремих фінансових інструментів.

Досліджено динаміку волатильності індикаторів фондового ринку, які характеризують прибутковість або ціну ринкового портфеля та індексу ПФТС із застосуванням методів ARCH моделювання. За допомогою даної методики встановлено рівень системного ризику, та знайдено невизначеність, пов'язану з прогнозуванням динаміки індикаторів фондового ринку.

Сформовано теоретико-методологічне підґрунтя та практичний інструментарій дослідження тенденцій розвитку фондового ринку на основі дослідження динаміки волатильності основних його показників.

Розроблено модель знаходження ціни опціонів породжених дифузією, яка степеневно зростає для знаходження величини ринкового портфеля акцій та визначення величини внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, а також досліджувати динаміку фондового ринку і здійснювати моніторинг фінансових потоків, за допомогою розкладу по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію фінансового потоку та швидкості його зміни за різними чинниками.

Доведено, що спектральні методи, є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення деривативів. Ефективне знаходження швидкості зміни росту портфеля акцій, величину фінансового потоку, а

також дослідження темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, реалізується за допомогою розв'язання задачі Штурма-Ліувілля для дифузії Бесселя з крайовими умовами в яких похідна фінансового потоку по ціновій змінній в комбінації з величиною потоку перетворюється в нуль.

Удосконалено методику знаходження вартості подвійного бар'єрного опціону, який відповідає дифузійному процесу. Знайдено ціни двобар'єрних опціонів методами спектрального аналізу та розкладу функції Гріна в ряди Фур'є Бесселя для крайових задач сингулярних параболічних рівнянь. Ця методика, дозволяє з великою точністю обчислювати значення цін деривативів та проводити моніторинг зміни швидкості фінансових потоків.

Встановлено, що поведінка похідних фінансових інструментів, зокрема опціонів, яка описується стохастичними процесами допускає явне представлення їх функцій щільності розподілів, це значно полегшує статистичну оцінку їхніх параметрів в процесі моніторингу ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності та прийняття стратегічних управлінських рішень щодо здійснення операцій на фондовому ринку.

Розширено методику знаходження орієнтовної ціни для широкого класу похідних фінансових інструментів. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделями з стохастичною волатильністю залежною від l -швидко змінних та n -повільно змінних чинників, $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$ і локальної змінної.

Удосконалено методику знаходження наближеної ціни для широкого класу деривативів, чия волатильність залежить від двох груп змінних чинників, за допомогою спектральної теорії та хвильової теорії сингулярних і регулярних збурень, встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю (*constant elasticity of variance model*) CEV з стохастичною волатильністю.

Розроблено методи обчислення наближеної ціни опціонів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії у випадку впливу швидко та повільно діючих чинників. Комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну похідних фінансових інструментів, як розклад за власними функціями.

Здійснено прогнозування цін опціонів, які породжуються дифузійними процесами, де дифузія залежить від двох груп змінних чинників. Розроблено алгоритм обчислення наближеної ціни деривативів і точності оцінок, що дозволяє проводити аналіз та зробити запобіжні висновки і пропозиції, щоб мінімізувати ризики щодо ціноутворення деривативів, які виникають на фондовому ринку.

Розроблено модель знаходження величин фондових індексів, що відповідають динаміці фондового ринку та величини фінансових потоків, які описуються процесами Колмогорова. Така модель дозволяє знаходити ціни деривативів та їхню волатильність, а також звести до мінімуму спекулятивні зміни в ціноутворенні, здійснювати аналіз проходження процесів на фондовому ринку та робити конкретні кроки для покращення ситуації щодо оптимізації фінансових стратегій.

Використана методика ціноутворення європейських опціонів на основі дослідження поведінки волатильності та аналізу дохідності фінансових інструментів дозволяє збільшити точність прогнозу та

приймати обґрунтовані управлінські стратегічні рішення учасниками фондового ринку.

Дисертаційна робота є самостійним дослідженням, в якому розроблено нові теоретичні положення, методологічні підходи та практичні рекомендації щодо ціноутворення і прогнозування волатильності інструментів фондового ринку. З наукових праць, опублікованих у співавторстві, у дисертації використано лише ті ідеї та положення, які є особистим здобутком автора.

Практичне значення одержаних результатів полягає у розробці науково-прикладних положень щодо реалізації завдань в частині макроекономічної стабілізації та динамічного розвитку фінансового ринку. Вони можуть бути застосовані у законотворчій діяльності Комітету Верховної Ради з питань бюджету при опрацюванні законопроектів та підготовці відповідних пропозицій до законодавчих документів у сфері регулюванні операцій та інструментів фінансового ринку, крім того результати дисертаційного дослідження можна використати у банківській сфері для визначення ціни похідних цінних паперів. Впровадження результатів дисертаційного дослідження підтверджується відповідними довідками.

Ключові слова: фондовий ринок, індекс ПФТС, фінансовий потік, фінансовий інструмент, двобар'єрний опціон, стохастична волатильність, імплікована волатильність, дифузійний процес.

ANNOTATION

Burtnyak I.V. Spectral methods of studying the behavior of stock market volatility. - The manuscript.

The thesis for a Doctor of Economics degree by specialty 08.00.11 - Mathematical Methods, Models and Information Technologies in Economics. –

Public Higher Education Institution «Vasyl Stefanyk Precarpathian National University». - Ivano-Frankivsk, 2019.

The dissertation is devoted to the establishment and substantiation of theoretical and methodological provisions for the development and implementation of a complex of economic and mathematical models for analyzing and forecasting volatility of stock market instruments aimed at achieving macroeconomic stabilization and dynamic stock market development.

Formulated in the research hypotheses, based on them conceptual provisions, and also developed a pricing modeling methodology of options, provides an opportunity to predict the results of targeted actions of stock market participants, and to make behavioral corrections based on the influence of various factors that are present on the market.

The paper finds that the assessment of the impact of derivative financial instruments on both micro and macro levels is ambivalent, and its application significantly increases the risk management opportunities for stock market participants, and therefore can determine the volumes and variety of financial operations they carry out with extrapolation to economic growth and welfare of individual countries. However, their complex, multilevel and risky use, in the absence of appropriate rules and control by regulators at the national and international levels, leads to an increase in the turbulence of financial markets.

It is proved that the dynamic development of financial instruments has a complex nature, which is defined as external factors that arise due to imperfect stock markets, and the turbulence of the macroeconomic environment, as well as internal ones - the source of which is the need for stock market participants to create instruments that mitigate risks, increase profits and increase its competitiveness. Therefore, an integral part of the stock market is the derivatives market whose main task is to hedge the risks accompanying transactions with the underlying financial instruments. At the same time, one of the main parameters characterizing derivative operations is volatility.

An additive model for forecasting the PFTS index using Poisson distribution is developed, which allows us to investigate the dynamics of financial resources and stock indices and to improve the methodology of stock market behavior, which indicators have a Laplace-Poisson distribution, using a rapid average change in volatility, an effective method for modeling, analysis and stable assessment of the basic parameters of the stock market.

The dynamics of volatility of stock market indicators that characterize the profitability or price of a market portfolio and the PFTS index using ARCH modeling methods has been investigated, which has allowed to determine the level of system risk, as well as to find uncertainty associated with forecasting the dynamics of stock market indicators.

It is suggested to use the Hobson-Rogers model to study the dynamics of the PFTS index and to find the volatility of the value of financial instruments, which has enabled to propose an effective method for modeling, analysis and sustainable evaluation of important market parameters.

It is proved that free-flow volatility has past information and allows modeling the behavior of investors in different market conditions, and also reflects the positive or negative tendencies of a financial instrument. Unlike standard local or stochastic volatility models, in the event of a sudden market downturn, a volatile volatility model can be used to automatically increase the level of volatility in order to harmonize stock market dynamics.

Using ARCH models, the existence of causal relationships between the PFTS index and the world indices of DJIA, NASDAQ Composite, DAX and RTS is directly used to simulate and forecast the rates of certain financial instruments.

The dynamics of volatility of stock market indicators, which characterize the profitability or price of the market portfolio and PFTS index using ARCH modeling methods, is investigated. With the help of this methodology, a

systemic risk level was established, and uncertainty associated with forecasting the dynamics of stock market indicators was found.

Formed theoretical and methodological background and practical tool for studying trends of stock market development on the basis of research of the dynamics of volatility of its main indicators.

A model for finding the price of options created by diffusion is developed, which increases powerfully to find the size of a market stock portfolio and to determine the value of internal volatility in the market at any given time, as well as to investigate the dynamics of the stock market and to monitor financial flows through the expansion of the system of Bessel functions the first kind, provided that it takes into account the linear combination of financial flow and the rate of its change according to various factors.

It is proved that spectral methods are a powerful tool for the analytical pricing of derivatives. The effective finding of the rate of change in stock portfolio growth, the size of the financial flow, as well as the study of the growth rates of the market portfolio provides measurement of the internal volatility in the market at any time, is realized by solving the Sturm-Liouville problem for Bessel diffusion with the boundary conditions in which the derivative of the financial flow at the price variable in combination with the magnitude of the flow is converted to zero.

The method of finding the value of the double barrier option, which corresponds to the diffusion process, is improved. The two-bar option options prices are found by the methods of spectral analysis and the decomposition of the Green's function in the Fourier series of Bessel for boundary value problems of singular parabolic equations. This technique allows you to accurately calculate the value of derivative prices and monitor the change in the rate of financial flows.

It is established that the behavior of derivative financial instruments, in particular options, which is described by stochastic processes, allows for the

explicit representation of their distribution density functions, greatly facilitates the statistical estimation of their parameters in the process of monitoring the pricing of derivatives and the study of the behavior of volatility for the analysis of profitability and the adoption of strategic management decisions regarding the conduct of operations in the stock market.

The method of finding approximate prices for a wide class of derivative financial instruments is expanded. Using the spectral theory of self-directed operators in Hilbert space and the wave theory of singular and regular disturbances, an analytic formula for the approximate price of assets is described, which are described by models with stochastic volatility dependent on l -fast variables and n -slow variable variables, $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$ and the local variable.

The method of finding approximate prices for a broad class of derivatives whose volatility depends on two groups of variables, with the aid of spectral theory and the wave theory of singular and regular perturbations is improved, and the analytical formula of the approximate price of assets described by the CEV model with stochastic volatility is established.

The methods of calculating the approximate price of options with the help of instruments of spectral analysis, singular and regular wave theory in the case of the influence of rapidly and slowly operating factors are developed. By combining methods from the spectral theory of singular and regular perturbations, one can approximate the price of derivative financial instruments, as a schedule by its eigen functions.

The forecast of options prices, which are generated by diffusion processes, where diffusion depends on two groups of variables, is carried out. An algorithm for calculating the approximate price of derivatives and the accuracy of estimates is developed, which allows for analysis and making preventive conclusions and proposals in order to minimize the risks associated with the pricing of derivatives that arise in the stock market.

A model for finding stock indexes corresponding to the dynamics of the stock market and the size of financial flows, which are described by Kolmogorov's processes, is developed. Such a model allows to find the prices of derivatives and their volatility, as well as minimize speculative changes in pricing, analyze the processes of the stock market and take concrete steps to improve the situation with regard to optimizing financial strategies.

The method of pricing European options based on the study of the behavior of volatility and the analysis of the profitability of financial instruments is used to increase the accuracy of the forecast and make informed strategic decisions by stock market participants.

The dissertation is an independent study in which new theoretical positions, methodological approaches and practical recommendations for pricing and forecasting volatility of stock market instruments are developed. From the scientific works published in co-authorship, in the dissertation only those ideas and positions which are the personal achievements of the author are used.

The practical significance of the results is to develop scientific and applied provisions on the implementation of tasks in the part of macroeconomic stabilization and the dynamic development of the financial market. They can be applied to the legislative work of the Verkhovna Rada Budget Committee when drafting laws and preparing relevant proposals for legislative acts in the field of regulating transactions and instruments of the financial market, in addition, the results of the dissertation research can be used in the banking sphere to determine the price of derivative securities. Implementation of the results of the dissertation research is confirmed by the relevant certificates.

Key words: stock market, PFTS index, financial flow, financial instrument, double barrier option, stochastic volatility, implied volatility, diffusion process.

Список публікацій за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях:

1. Буртняк И.В. Моделирование динамики развития фондового рынка с помощью моделей ARCH / И. В. Буртняк // Бизнес Информ, 2009. – №12. – С. 131–135.
2. Буртняк И.В. Моделирование динамики индекса ПФТС/ И. В. Буртняк, А.П. Малицкая // Бизнес Информ. – 2010. – №1. – С. 60–65.
3. Буртняк І.В. Дослідження динаміки фінансових ресурсів на базі мультиплікативної стохастичної моделі / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бізнес Інформ, 2010. – №(4)1. – С. 11–14.
4. Буртняк І.В. Дослідження волатильності за допомогою модифікації моделі Блека–Шоулза / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ, 2011. – №(5)1. – С. 72–75.
5. Буртняк І.В. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ. – 2012. – №3. – С. 48–50.
6. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ, 2013. – №4. – С. 152–158.
7. Буртняк І.В. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Проблеми економіки, 2014. – №2. – С. 349–356.
8. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів за допомогою моделі CEV з багатовимірною стохастичною волатильністю / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька// Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2015. – №1. – С. 509–519.

9. Буртняк І.В. Моделювання волатильності для індексу ПФТС за допомогою узагальненої моделі Гобсона-Роджерса / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька// Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2015. – №2. – С. 446–452.
- 10.Буртняк І.В. Системний підхід до оцінювання опціонів на базі моделі CEV/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ, 2016. – №10. – С. 152–158.
- 11.Буртняк І.В. Дослідження поведінки фондового ринку на основі моделей ARCH / І. В. Буртняк // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону – Івано-Франківськ, 2016. –Т2. №14. – С. 63–80.
- 12.Буртняк І.В. Моделювання ціноутворення двобар'єрних опціонів з багатофакторною волатильністю / І. В. Буртняк// Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2017. – №1(29). – С. 437–449.
- 13.Буртняк І.В. Оцінювання деривативів двобар'єрних опціонів Беселівських процесів методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2017. – №2 (30). – С. 14–23.
- 14.Burtnyak, I.V., Malytska, H.P. Calculating the price for derivative financial assets of Bessel processes using the Sturm-Liouville theory, Problems of Economics, 2017. 2, pp. 310–316.
- 15.Burtnyak, I.V. , Malytska, A. Evaluating the financial flows of Bessel processes by using spectral analysis, Business Inform, 2017, 7, pp. 120–124.
- 16.Burtnyak, I.V., Malytska, A. The Evaluation of Derivatives of Double Barrier Options of the Bessel Processes by Methods of Spectral Analysis, Investment Management and Financial Innovations, 2017, Vol. 14, Issue 3, pp. 126–134.

17. Burtnyak, I.V., Malytska, A. The Investigation of Securities Cost Using Methods of Spectral Analysis. *International Journal of Economic Research*, 2017. Vol. 14, Issue 15, pp. 705–715.
18. Burtnyak, I.V., Malytska, A. Spectral study of options based on CEV model with multidimensional volatility. *Investment Management and Financial Innovations*, 2018, 15(1), 18-25.
19. Burtnyak, I.V., Malytska, A. Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions. *Problems and Perspectives in Management*, 2018, 16(1), 224-231.
20. Burtnyak, I.V. Malytska A. Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein-Uhlenbesck processes. *Carpathian Math. Publ.* 2018, 10 (2), 273–287. doi:10.15330/cmp.10.2.273-287.

Матеріали наукових конференцій:

1. Буртняк І.В. Застосування шляхозалежної моделі для дослідження волатильності індексу ПФТС/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали IV міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 9–10 квітня 2012). – Харків, 2012, С. 84–87.
2. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів, які задовольняють процес Орнштейна-Уленбека, методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали VI міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 3–12 квітня 2014). – Харків-Бердянськ, 2014. – С. 91–95.
3. Буртняк І.В. Знаходження ціни опціону з мультиплікативною волатильністю за допомогою рівняння Колмогорова / І. В. Буртняк,

Г.П. Малицька // Матеріали XXIII міжнародної науково-практичної конференція Транскордонне співробітництво: ключові ідеї та перспективи (20-22 травня 2016) Сучавський університет Штефан чел Маре, 2016. – С. 167-169

4. Буртняк І.В. Регуляція фінансових потоків за допомогою методів спектрального аналізу /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Міжнародної наукової конференції «Трансформація фінансових ринків в умовах глобальної нестабільності: реалії сьогодення та погляд у майбутнє», 30 жовтня 2017 – Ірпінь, 2017. – С. 66-67.
5. Буртняк І.В. Оцінювання деривативів двобар'єрних опціонів Беселівських процесів методами спектрального аналізу /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали міжнародної науково-практичної конференції "Стратегія і практика інноваційного розвитку фінансового сектору України", 20-22 березня 2018– Ірпінь, 2018. – С. 21-24.

ЗМІСТ

ВСТУП	19
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ФОНДОВОГО РИНКУ	33
1.1 Фондовий ринок як складна динамічна система	33
1.2. Детермінанти динамічного розвитку фінансових інструментів	63
1.3. Еволюція теоретичних поглядів на розвиток фінансових інструментів, як критерію розвитку фондового ринку	81
РОЗДІЛ 2. РЕТРОСПЕКТИВНІ ПРИЧИННО-НАСЛІДКОВІ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ ФОНДОВОГО РИНКУ	100
2.1. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС	100
2.2. Моделювання залежностей причинно–наслідкового характеру між індексом ПФТС та світовими індексами	114
2.3. Адитивна модель прогнозування індексу ПФТС	131
РОЗДІЛ 3. СПЕКТРАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ЦІНОУТВОРЕННЯ	148
3.1. Оцінювання двобар’єрних опціонів з локальною волатильністю	148
3.2. Оцінка фінансових потоків методами спектрального аналізу	161
3.3. Моделювання ціни похідних фінансових активів на фондовому ринку	170
РОЗДІЛ 4. РОЗРОБКА ТА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ БАГАТОФАКТОРНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЕРИВАТИВІВ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ	182
4.1. Багатофакторні моделі ціноутворення деривативів	182
4.2. Моделі двобар’єрних опціонів з багатофакторною волатильністю	220

4.3. Моделі визначення цін деривативів методами спектрального аналізу	233
4.4. Спектральне дослідження деривативів на базі моделі CEV з багатовимірною волатильністю	241
РОЗДІЛ 5 МОДЕЛІ ЦІНОУТВОРЕННЯ ДЕРИВАТИВІВ ТА ВОЛАТИЛЬНОСТІ ВИРОДЖЕНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ	280
5.1. Методологія ціноутворення деривативів з врахуванням вироджених дифузійних процесів	280
5.2. Моделі знаходження імплікованої волатильності вироджених дифузійних процесів	314
5.3. Моделі знаходження наближень ціни деривативів та їхньої волатильності	346
ВИСНОВКИ	369
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	373
ДОДАТКИ	401

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний фондовий ринок характеризується високим рівнем динамічності процесів та операцій з фінансовими інструментами та значною волатильністю їх цін. Вітчизняний фондовий ринок, будучи незначним за розмірами, є частиною глобального фінансового ринку і знаходиться під його прямим впливом. Особливо це стосується сегменту фінансових деривативів, який з-поміж інших сегментів є найбільш волатильним, оскільки вбирає в себе по суті ризики всього фінансового ринку. Враховуючи суттєві коливання цін на похідні фінансові інструменти, значні рівні ризиків, що їх супроводжують, процеси ціноутворення потребують глибокого наукового дослідження, що має не лише теоретичне але і вагоме практичне значення, оскільки є необхідним при прийнятті рішення як стратегічного, так і оперативного характеру, особливо для трейдерів при ціноутворенні декількох різних серій опціонів з різними цінами виконання і термінами погашення. Швидкість прийняття оптимального рішення щодо купівлі-продажу похідних фінансових інструментів є доволі високою та вимагає обробки значного масиву інформації з метою моделювання поведінки цін та супровідних ризиків як для продавців, так і для інвесторів. Така функція реалізується за допомогою різноманітних методів регулювання і стабілізації цін на окремі види цінних паперів. Разом з тим, удосконалення інструментарію ціноутворення похідних цінних паперів дозволить покращити якість прогнозування динаміки фондових ринків та сприятиме активізації діяльності його учасників.

Фундаментальні основи дослідження функціонування фондового ринку знайшли своє відображення в роботах зарубіжних та вітчизняних вчених, серед яких варто виокремити: Ф. Блека, М. Шоулса, Р. Мертона, Д. Кокса, І.С. Благуна, Л.І. Дмитришин, Н.Л. Іващук, Б.Ю. Кишакевича, Т.С. Клебанової, О.І. Ляшенко, С.І. Левицького, Л.О. Примостки, О. М. Сохацької та інших. Наразі вітчизняний фондовий ринок суттєво відстає від більшості європейських країн в своєму розвитку, а сегмент похідних фінансових інструментів є незначним, що обумовлено низьким рівнем прозорості операцій, недосконалістю законодавчої бази, низьким рівнем довіри з боку населення та захисту прав інвесторів. Крім того, на даний час розроблено багато підходів для обчислення локальної та стохастичної волатильності, які описують спільну динаміку ціни базового активу. За допомогою моделей це відображено в працях таких вчених, як: Л. Андерсен, Ф. Блек, Д. Бонес, О. Васічек, Д. Гобсон, Р. Гольштейн, В. Горовий, Д. Давидов, М. Ж. Інгресол, Жебланк, К. Золна, М. Йор, П. Карр, Ж. Кетерал, К. Кокс, Ф. Кореллі, В. Лінецький, А. Ліндслей, М. Лоріг, Д. Мадан, Г. Маккін, Р. Мендоза-Аріага, Р. Мертон, Ж. Папаніколау, А. Паскучі, А. Пельсер, Ю. Рен, С. Рос, П. Самуельсон, Р. Сіркар, Д. Трейнор, Е. Торп, Ж. Фуке, С. Хестон, Н. Шваген, М. Шоулз та ін.

Ситуація на фондовому ринку України постійно змінюється під впливом глобалізаційних процесів, що відбуваються на зовнішніх фінансових ринках, внутрішньої перманентної фінансової та політичної кризи, нестабільної економічної ситуації, тощо. Тому, незважаючи на значний вклад у розроблення проблематики функціонування фондового

ринку, такі зміни зумовлюють об'єктивну необхідність постійного пошуку нових підходів до прогнозування цінової динаміки фондового ринку. Таким чином, незавершеність формування цілісної методології ціноутворення фінансових інструментів загалом та фінансових деривативів, зокрема, обумовила актуальність дослідження, його мету, завдання, об'єкт та предмет.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано відповідно до планів науково-дослідних робіт ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» Міністерства освіти і науки України. В рамках виконання тем: «Моделювання процесів управління в соціально-економічних системах» (номер державної реєстрації 0113U005083) автором, застосовуючи швидку середню зміну волатильності, запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів; «Розробка організаційно-економічного механізму удосконалення виробничо-господарських структур регіону» (номер державної реєстрації 0111U000875) автором встановлено рівень системного ризику та знайдено невизначеність, пов'язану з прогнозуванням динаміки індикаторів фондового ринку.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є обґрунтування теоретико-методологічних положень розробки та реалізації комплексу економіко-математичних моделей аналізу і прогнозування волатильності інструментів фондового ринку, спрямованих на досягнення макроекономічної стабілізації та динамічного розвитку фінансового ринку.

Для досягнення поставленої мети дослідження в роботі поставлено такі задачі:

розробити концептуальну модель ціноутворення похідних фінансових інструментів на фондовому ринку;

провести аналіз світового і вітчизняного досвіду щодо розв'язання проблеми ціноутворення на фондовому ринку;

розробити адитивну модель прогнозування динаміки індексу Першої Фондової Торгівельної Системи (ПФТС);

розробити методичний підхід до дослідження динаміки фондового ринку за допомогою моделі шляхозалежної волатильності;

розробити модель ціноутворення опціонів, породжених процесами дифузії;

розробити методичний підхід щодо застосування спектрального аналізу для обчислення значення подвійного бар'єрного опціону, породженого дифузійними процесами;

розробити метод розкладу ціни опціону та його волатильності в ряд Тейлора для обчислення величин фондових індексів, що відповідають динаміці фондового ринку;

визначити аналітичну формулу наближеної ціни активів з стохастичною волатильністю, залежною від ендогенних та екзогенних чинників;

удосконалити методичний підхід дослідження динаміки індексу ПФТС за допомогою моделі Гобсона-Роджерса для знаходження волатильності вартості фінансових інструментів фондового ринку;

удосконалити математичний інструментарій знаходження значення імплікованої волатильності та послідовних наближень ціни для дослідження процесів на фондовому ринку;

розробити модель динаміки волатильності індикаторів фондового ринку, які характеризують прибутковість або ціну ринкового портфеля та індексу ПФТС;

розробити модель знаходження орієнтовної ціни для широкого класу похідних активів.

Об'єктом дослідження є процеси розвитку фондового ринку.

Предметом дослідження є теоретичні і методологічні положення та відповідний інструментарій економіко-математичного моделювання волатильності інструментів фондового ринку.

Методологія і методи дослідження. Методологічною основою дисертаційної роботи є сукупність методів і принципів наукового пізнання, загальна теорія економіко-математичного моделювання, наукові праці вітчизняних і зарубіжних науковців у сфері досліджень процесів розвитку фондового ринку.

У процесі дослідження використано загальнонаукові та спеціальні методи дослідження: *системного аналізу* – для дослідження теоретичних основ розвитку фондового ринку; *динамічного, компаративного та статистичного аналізу* – для аналізу поведінки фінансових потоків, зміни їх швидкості тощо; *динамічних рядів, візуалізації, метод порівняння* – для проведення аналізу тенденцій зміни впливу різних чинників на фінансові потоки; *симуляційного і ймовірісно-статистичного аналізу, методу*

Монте Карло – для порівняння прогнозів ціноутворення деривативів; *кореляційного аналізу* – для встановлення співвідношення між цінами опціонів та їхньою волатильністю; *спектрального аналізу* – для моделювання стохастичних процесів на фондовому ринку; *методів сингулярної та регулярної теорії збурень* – для визначення розкладу по різних факторних шкалах ціни деривативів; *теорія звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних* – для дослідження вінерівських, марківських стохастичних процесів, що проходять на фондовому ринку; *методи розкладу в ряди Тейлора* – операторів, їхніх розв’язків (ціни) та волатильності для наближеного знаходження їх значень, встановлення зв’язку між волатильністю та функцією Блека-Шоулса; *графічного аналізу* – для ілюстрації висновків в ході досліджень.

Правове поле дослідження склали чинні законодавчі й нормативно-правові документи, Закони України, Постанови Верховної Ради України, Постанови Кабінету Міністрів України щодо регулювання діяльності учасників фондового ринку. Інформаційною базою дослідження є статистичні дані Першої Фондової Торгівельної Системи, аналітичні матеріали міжнародних рейтингових агентств, матеріали періодичних видань та засобів масової інформації, ресурси мережі Інтернет, результати досліджень автора.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у формуванні теоретико-методологічного підґрунтя та практичного інструментарію дослідження тенденцій розвитку фондового ринку, зокрема:

вперше:

розроблено концепцію дослідження ціноутворення похідних фінансових інструментів на фондовому ринку. Побудована і реалізована система моделей дає можливість знайти наближену ціну деривативів, а в результаті передбачити стан та динаміку фондового ринку;

розроблено адитивну модель прогнозування індексу ПФТС з використання розподілу Пуассона, яка дозволяє досліджувати динаміку фінансових ресурсів і фондових показників у випадку, коли відсутній нормальний розподіл. Встановлено достатні умови, при яких результати досліджень наближаються до результатів з нормальним розподілом;

розроблено модель ціноутворення опціонів, породжених Бесселівськими процесами, яка дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, дозволяє дослідити динаміку фондового ринку та здійснити моніторинг фінансових потоків, за допомогою розкладу по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та швидкості його зміни за різними чинниками;

розроблено методичний підхід для знаходження подвійного бар'єрного опціону, який відповідає дифузійному процесу. Знайдено ціни двобар'єрних опціонів методами спектрального аналізу та розкладу функції Гріна в ряди Фур'є Бесселя для крайових задач сингулярних параболічних рівнянь. Такий підхід дозволяє з великою точністю обчислювати значення цін деривативів та проводити моніторинг зміни швидкості фінансових потоків;

знайдено аналітичну формулу для визначення наближеної ціни деривативів з стохастичною волатильністю залежною від l -швидко змінних та n -повільно змінних чинників, $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$ і локальної змінної за допомогою спектральної теорії самоспряжених операторів у Гільбертовому просторі та хвильової теорії сингулярних і регулярних збурень;

розроблено модель знаходження величин фондових індексів, що відповідають динаміці фондового ринку та величини фінансових потоків, які описуються процесами Колмогорова. Така модель дозволяє знаходити ціни деривативів та їхню волатильність, а також звести до мінімуму спекулятивні зміни в ціноутворенні;

методику знаходження значення імплікованої волатильності та послідовних наближень ціни деривативів для проведення аналізу проходження процесів на фондовому ринку, що дозволяє здійснювати корекцію і конкретні кроки для покращення ситуації щодо оптимізації фінансових стратегій;

удосконалено:

методичний підхід дослідження поведінки фондового ринку, показники якого мають розподіл Лапласа-Пуассона, застосовуючи швидко середню зміну волатильності, запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки основних параметрів фондового ринку;

методичний підхід оцінювання опціонів, які породжуються дифузійними процесами, де дифузія залежить від двох груп змінних чинників, та алгоритм обчислення наближеної ціни деривативів і точності

оцінок, що дозволяє проводити аналіз та зробити запобіжні висновки і пропозиції, щоб мінімізувати ризики щодо ціноутворення деривативів, які виникають на фондовому ринку;

дістали подальшого розвитку:

моделі динаміки волатильності індикаторів фондового ринку, які характеризують прибутковість або ціну ринкового портфеля та індексу ПФТС із застосуванням методів ARCH (*розшифрувати*) моделювання, що дозволило встановити рівень системного ризику, а також знайти невизначеність, пов'язану з прогнозуванням динаміки індикаторів фондового ринку;

методи знаходження наближеної ціни для широкого класу деривативів, волатильність яких залежить від двох груп змінних чинників, за допомогою спектральної теорії та хвильової теорії сингулярних і регулярних збурень, встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю CEV (*constant elasticity of variance model*) з стохастичною волатильністю;

модель Гобсона-Роджерса для дослідження динаміки індексу ПФТС та знаходження волатильності вартості фінансових інструментів, що дозволило запропонувати ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів;

методи ціноутворення європейських та азійських опціонів на основі дослідження поведінки волатильності та аналізу дохідності, що дозволяє збільшити точність прогнозу та приймати обґрунтовані управлінські стратегічні рішення.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані результати та практичні рекомендації становлять методичну основу дослідження тенденцій розвитку фондового ринку.

Результати наукових досліджень були використані в роботі Верховної Ради України (довідка № 025-12/07 від 19.12.2018 р.) для реалізації завдань в частині макроекономічної стабілізації та динамічного розвитку фінансового ринку, які застосовані у законотворчій діяльності Комітету з питань бюджету при опрацюванні законопроектів та підготовці відповідних пропозицій до законодавчих документів у сфері регулюванні операцій та інструментів фінансового ринку.

Теоретико-методологічні та практичні результати дисертаційної роботи були враховані при прийнятті інвестиційних рішень в діяльності страхової компанії «Приватне акціонерне товариство Страхова компанія «Євроінс Україна» (довідка № 01-12 від 18.12.18 р.). Зокрема, при прогнозуванні поведінки динаміки фондового ринку України шляхом реалізації моделі шляхозалежної волатильності, яка володіє минулою інформацією та дозволяє моделювати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, в тому числі, у випадку раптового падіння ринку, а також відображає позитивні або негативні тенденції активу.

Науковий результат дисертаційного дослідження використано фахівцями АБ «УКРГАЗБАНК» для визначення ціни похідних цінних паперів за допомогою моделі Гобсона-Роджерса з метою вибору оптимального варіанту стратегії для підвищення продуктивності хеджування, а також визначення волатильності вартості становить

практичний інтерес з точки зору диверсифікації ризиків операцій з фінансовими деривативами, моделювання, аналізу і оцінювання важливих ринкових параметрів (довідка №17121/3771/2019 від 11.02.2019 р.).

Основні положення дисертаційної роботи впроваджено в навчальний процес ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» при викладанні курсів «Аналіз фондових ринків та інвестиційних проектів», «Моделювання макроекономічних процесів» та «Моделі економічної динаміки» (довідка №01-15/03/2106 від 13.12.2018 р.).

Особистий внесок здобувача полягає у формуванні теоретико-методологічних основ та практичного інструментарію спектральних методів дослідження поведінки волатильності фондових ринків. Дисертаційна робота є завершеною самостійно виконаною науковою працею, у якій всі положення і пропозиції, винесені на захист, розроблені автором особисто. Внесок автора в роботи, виконані у співавторстві, відображено в переліку опублікованих праць за темою дисертації. В даній роботі не використовувались матеріали та висновки кандидатської дисертації автора.

Апробація результатів дисертації. Основні теоретичні положення та практичні результати дисертаційної роботи оприлюднено на 34 міжнародних науково-практичних конференціях: « Infinite dimensional analysis and topology » (м. Івано-Франківськ, 24-27 лютого 2009 р.); «Сучасні проблеми математики та її застосування » (м. Чернівці, 8–13 червня 2009 р.); « Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем» (м. Харків, 8–9 квітня 2010 р.); «Міжнародна наукова конференція

ім. М. Кравчука» (м. Київ, 13–15 травня 2010 р.); «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 25–28 березня 2010 р.); « Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробагатька» (м. Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.); « Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем» (м. Харків, 7–9 квітня 2011 р.); « Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 20–26 лютого 2012 р.); « Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем» (м. Харків, 9–10 квітня 2012 р.); « Міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука» (м. Київ, 19–21 квітня 2012 р.); « АТАС-2012» (м. Микуличин, 20–23 вересня 2012 р.); « Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 25 лютого–3 березня 2013 р.); « Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем» (м. Харків, 11–12 квітня 2013 р.); «Боголюбівські читання DIF-2013» (м. Севастополь, 23–30 червня 2013 р.); « Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 24 лютого–2 березня 2014 р.); « Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем» (м. Харків, 3–12 квітня 2014 р.); « Міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука » (м. Київ, 15–17 травня 2014 р.); «Міжнародна наукова конференція ім. Г. Гана » (м. Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 р.); « Матеріали всеукраїнської наукової конференції» (м. Поляниця, 7–18 липня 2014 р.); «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 25 лютого–1 березня 2015 р.); «Економічний і соціальний розвиток України в XXI столітті » (м. Тернопіль, 2–6 березня 2015 р.); «Міжнародна наукова конференція ім. Г. Гана » (м. Чернівці, 1–4 липня 2015 р.); « Сучасні проблеми теорії

ймовірностей та математичного аналізу» (м. Ворохта, 24-27 лютого 2016 р.); « Транскордонне співробітництво: ключові ідеї та перспективи » (м. Сучава, 20-22 травня 2016 р.); «Міжнародна наукова конференція ім. В.І. Фодчука» (м. Чернівці, 28-30 вересня 2016 р.); «Прикладні задачі математики » (м. Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016 р.); «Моделювання економіки: проблеми, тенденції, досвід » (м. Тернопіль, 20–21 жовтня 2016 р.); «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу » (м. Ворохта, 24-27 лютого 2017 р.); « Трансформація фінансових ринків в умовах глобальної нестабільності: реалії сьогодення та погляд у майбутнє» (м. Ірпінь, 30 жовтня 2017 р.); « Економічна кібернетика: перспективи розвитку інформаційної економіки » (м. Дніпро, 1-2 березня 2018 р.); «Стратегія і практика інноваційного розвитку фінансового сектору України» (м. Ірпінь, 20-22 березня 2018 р.); « Сучасні проблеми математики та її застосування» (м. Чернівці, 17-19 вересня 2018р.); «Нелінійні проблеми аналізу» (м. Івано-Франківськ-Микуличин, 26-28 вересня 2018 р.).

Публікації. Основні положення дисертації опубліковано в 65 наукових працях, зокрема: 1 одноосібна монографія; 28 наукових статей у фахових наукових виданнях України, з них 16 - у виданнях, що внесені до міжнародних наукометричних баз даних; 1 - у періодичних наукових виданнях інших держав; 34 тез доповідей на міжнародних та всеукраїнських науково-практичних конференціях. Загальний обсяг публікацій становить 49,13 ум. друк. арк., особисто здобувачу належить 45,01 ум. друк. арк.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел (278 найменувань на 27 сторінках), 2 додатків (на 14 сторінках), містить 13 таблиць та 33 рисунки, з яких повну сторінку займає 2 таблиці та 1 рисунок. Основний текст розміщено на 370 сторінках.

РОЗДІЛ 1.

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ФОНДОВОГО РИНКУ

1.1. Фондовий ринок як складна динамічна система

Фондовий ринок визначають як «сферу потенційних обмінів», «інститут або механізм, що зводить разом покупців (пред'явників попиту) і продавців (постачальників) окремих товарів і послуг [70]. Особливість його полягає в тому, що він «має справу» з цінними паперами (ЦП), обіг яких визначає структуру ринку, його розміщення, правила функціонування.

У монографії Загорського В.С. [46] зазначено, що ринок грошей і цінних паперів становлять єдиний фінансовий ринок у його широкому розумінні. Розділення цих ринків можливе лише умовно для здійснення теоретичного аналізу кожного з них зокрема. Ринок цінних паперів вміщений у фінансовому контурі управління економікою і залучений до процесів розподілу і перерозподілу фінансових ресурсів і грошей.

Згідно з Постановою ВРУ «Про Концепцію функціонування та розвитку фондового ринку України», поняття фондового ринку ототожнюється з поняттям цінних паперів [65], проте деякі вітчизняні науковці схильні розділяти ці дві категорії. Зокрема, в роботі [59] її автор вказує на те, що фондовий ринок (ринок капіталів) представляється довготерміновими цінними паперами, а ринок цінних паперів включає, окрім довготермінових, ще й короткотермінові (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Узгодження понять «грошовий ринок», «фондовий ринок» і «ринок цінних паперів»

В роботі [53] поняття фондового ринку та ринку цінних паперів ототожнюються (рис. 1.2). Однак зауважує автор, ринок цінних паперів є сегментом як грошового ринку, так і ринку капіталів, які також включають рух прямих банківських кредитів, перерозподіл грошових ресурсів через галузь страхування, внутрішньофірмові кредити, тощо.

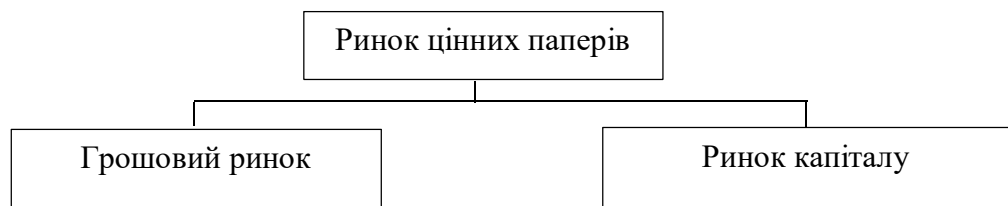


Рис. 1.2. Узгодження понять «ринок капіталу», «грошовий ринок» і «ринок цінних паперів»

Економічна енциклопедія за редакцією Мочерного С.В. дає наступне визначення: «Фондовий ринок – це частина фінансового ринку як система економічних відносин з приводу випуску, розміщення, купівлі-продажу акцій, інших приватизаційних і похідних цінних паперів. На сучасному етапі розвитку структура фінансових інститутів ринку змінюється на користь реального сектору – корпоративних цінних паперів та їх похідних, тобто фондовий ринок охоплює дедалі більшу частку фінансового ринку»

[43]. Деякі автори, фондовий ринок, як і ринок цінних паперів, поділяють на первинний і вторинний, чим об'єднують обидва поняття.

В підручнику Загороднього А.Г., Вознюка Г.Л. категорії «фондовий ринок» та «ринок цінних паперів» є ідентичними і представлені як «частина ринку позикових капіталів, де здійснюють емісію та купівлю-продаж цінних паперів» [45].

Фінансово-економічний словник [44] також дає спільне визначення для понять фондового ринку та ринку цінних паперів і за рухом фінансових потоків на фінансовому ринку відображає місце фондового ринку серед валютного, кредитного ринків, а також ринку коштовних металів (рис. 1.3).

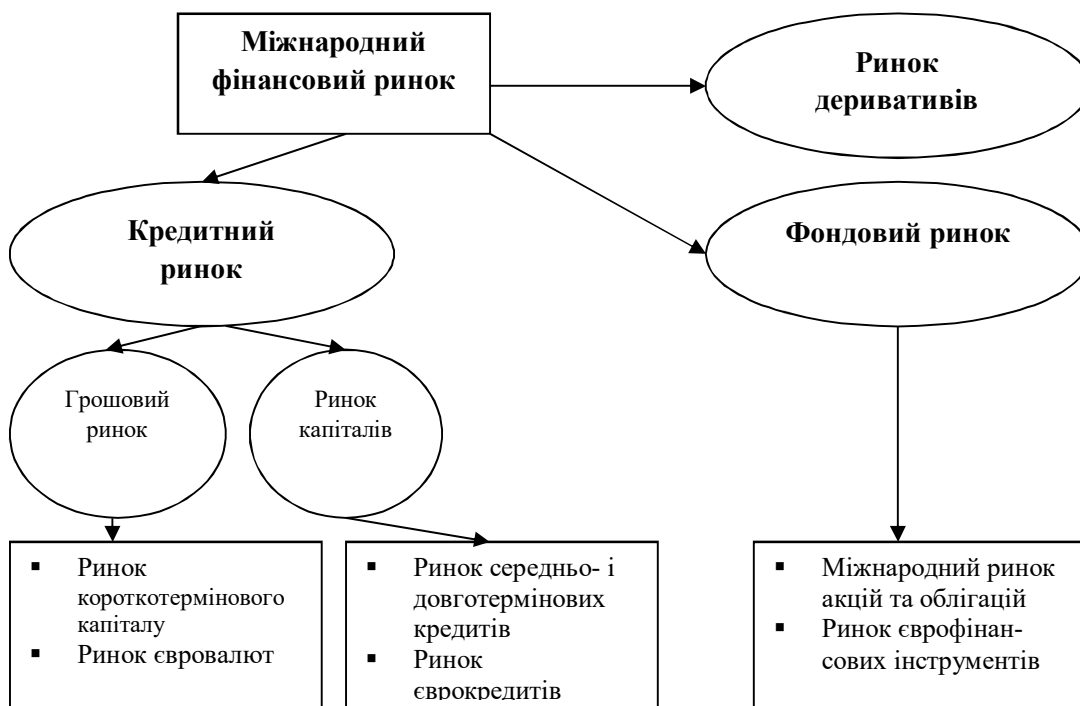


Рис. 1.3. Місце фондового ринку в класифікації міжнародних ринків за рухом фінансових потоків [44]

Таким чином, проблема узгодження термінології таких фінансових інституцій як «фондовий ринок», «ринок цінних паперів», «ринок капіталів», «грошовий ринок» на сьогодні залишається актуальною. Тому, слід користуватись термінологією, на основі якої сформовані та діють основні нормативно-законодавчі документи, що регулюють діяльність фондового ринку в Україні. Тобто в даній роботі будемо відштовхуватись від поняття «фондовий ринок», яке за змістом співпадає з поняттям «ринку цінних паперів».

Дослідженням основних засад функціонування фондового ринку займалися наступні вчені: Ф. Блек, М. Шоулс [103], Р. Мертон [237], Д. Кокс [134-135], І.С. Благун [105], Л.І. Дмитришин [143], Н. Л. Іващук [48], Б.Ю. Кишакевич [206], Т.С. Клебанова [52], О.І. Ляшенко [54, 212], С.І. Левицький [57], Л.О. Примостка [66], О. М. Сохацька [75] та низка інших. На жаль розвиток вітчизняного фондового ринку відстає від більшості європейських країн, Основними причинами насамперед є економічні умови формування ринку та недосконалість законодавства, щодо фондового ринку.

Основними показниками фондового ринку є найбільш агреговані змінні, які характеризують дохідність або рівень цін ринкового портфеля, але не окремих активів, що складають портфель. Головним індикатором фондового ринку України є індекс Першої Фондової Торгової Системи (ПФТС).

Як видно з окремих визначень, фондовий ринок розглядається як частина фінансового ринку і є системою економічних та правових

відносин, пов'язаних із випуском та обігом фінансових інструментів.

Рух фінансових активів на ринку відбувається за посередництвом різноманітних фінансових інститутів [84]. Саме фінансові посередники забезпечують інвесторам оперативне вкладення коштів у фінансові активи та вчасне вилучення коштів з процесу інвестування.

На фондовому ринку, на відміну від грошового ринку, сума купівельних і платіжних засобів перетворюється на реальний капітал.

Доволі численну групу учасників фондового ринку становлять фінансові посередники, представниками яких є фінансові інститути: банки, інвестиційні фонди та інвестиційні компанії, страхові організації, пенсійні фонди, торговці цінними паперами та ін. [58]. Фінансові посередники здійснюють розподіл вільних ресурсів, диверсифікують ризики, забезпечують рівновагу на ринку капіталів, забезпечують існування ліквідних ринків фінансових ресурсів тощо [59].

Як правило, допоміжні функції здійснюють суб'єкти інфраструктури: біржі, депозитарії, реєстратори, розрахунково-клірингові центри та консалтингові агентства [59].

Обіг фінансових ресурсів на фондовому ринку здійснюється за допомогою цінних паперів, які поділяють на пайові, боргові і похідні. Будучи інструментами фондового ринку вони дають можливість інвесторам управляти інвестиційним ризиком і одержувати прибуток шляхом здійснення купівлі-продажу.

Серед «похідних» інструментів виділяють наступні:

- опціони, що дають право власнику купувати або продавати цінні

папери за фіксованою ціною до вказаного терміну;

- ф'ючерси – контракти на купівлю або продаж стандартної кількості цінних паперів у вказаний термін і за певною ціною;

- варанти – сертифікати, які дають право його власникам зробити підписку на певну кількість цінних паперів за наперед визначеною ціною і за певний період.

Основними причинами змін на фондових ринках стали такі макроекономічні тенденції: глобалізація економіки, нестабільність відсоткових ставок і валютних курсів, значний рівень інфляції, тощо. За таких умов вагоме місце займають похідні фінансові інструменти (деривативи), які дають можливість застрахуватися від небажаних наслідків.

Ринок деривативів є доволі молодим сегментом фондового ринку. Поява таких похідних фінансових інструментів зумовлена фінансовими змінами, які відбувалися на американському ринку у 1971 – 1973 роках. Крім того, 70-ті роки були періодом значних коливань цін на ринку нафти, що також стало поштовхом до пошуку способів запобігання їхнім наслідкам [6]. На жаль, цілком позбутись ризику не можливо. Його можна лише обмежити або перенести на інший суб'єкт, або для зменшення ризику було створено новий тип фінансових інструментів, а саме, похідні інструменти, які ще називаються деривативами [59]. Переломним у їхньому розвитку був 1973 рік, коли офіційно була опублікована модель ціноутворення опціонів, які дають можливість страхувати фінансові

інвестиції від змін цін тих активів, на які ці інструменти виставляються [103].

Примостка Л.О дає таке означення деривативів: «Похідні фінансові інструменти – це контракти, які укладаються з метою перерозподілу фінансових ризиків і передбачають попередню фіксацію всіх умов проведення в майбутньому певної операції (купівлі, продажу, обміну, емісії) з інструментом, який є предметом угоди» [66, с. 7]. Шелудько В.М. вважає, що похідні фінансові інструменти, або деривативи, - це інструменти механізм випуску й обігу яких пов'язаний з купівлею-продажу певних фінансових чи матеріальних активів [80, с.89]. Тоді як Голуб Г.Г., Кушнер Л.В. під категорією “деривативів” розуміють стандартний документ, що засвідчує право та/або зобов'язання придбати або продати базовий актив (цінні папери, матеріальні або нематеріальні активи, а також кошти) на визначених ним умовах у майбутньому [41, с.380].

Іващук Н. Л. дає наступне означення. Похідний інструмент (дериватив) – це такий фінансовий інструмент, вартість якого залежить від ціни (значення) іншого (первинного, базового) інструменту (активу), на який цей похідний інструмент було виставлено [48, с.30].

Згідно закону України про цінні папери та фондовий ринок [47], під деривативами розуміють фінансовий контракт, або фінансовий інструмент, вартість якого ґрунтується на ціні іншого інструменту (активу), на який цей похідний інструмент було виставлено. Основою такого фінансового інструменту можуть бути активи (наприклад, сировинні матеріали, акції, житлові застави, нерухоме майно, облігації,

позики), індекси (наприклад, відсоткові ставки, валютні курси, фондові індекси, індекси споживчих цін), або інші (такі як погодні умови) [47].

Дослідженням ринку деривативів займалися низка українських науковців такі як: К. Абасова [1], Г. Азаренкова [2], С. Антонов [3], О. Квактун [49], О. Колодізев [51], Парандій [63], Л. Примостка [67], О. Сохацька [74], та інші.

Деривативи використовуються для хеджування, можливих збитків та додаткових втрат під час проведення зовнішньоторговельних валютних чи інших операцій у зв'язку зі зміною курсу валюти. За їхньою допомогою проводять арбітражні операції, тобто купівлю чи продаж валюти з метою отримання прибутку. Похідні інструменти забезпечують інформаційну функцію, згідно з якою інвестор отримує важливу інформацію про майбутній стан ринку а також стимулюючу функцію, бо деривативи характеризуються високою дохідністю, а також вони допомагають інвесторам здійснювати управління фінансовими, грошовими та товарними ризиками, та сприяють розвитку фінансових інновацій. Активізація ринку деривативів прискорює розвиток економіки та фондового ринку, а також а також зменшує ризики інвесторів. Деривативи дають можливість ефективно управляти ризиком, а також можливість відшкодувати, хоч би частково збитки внаслідок несприятливих для інвестора дій.

На сьогодні існує понад 1200 різних видів похідних фінансових інструментів, які дають можливість банкам, інвестиційним фондам та інвесторам контролювати ризик або як кажуть провести хеджування. Це

означає, що фондовий ринок став незамінним елементом підприємницької діяльності, що дозволяє не тільки попередити ризик але і збільшити оборотність фінансових ресурсів. Зараз на фондовому ринку використовується значна кількість деривативів, асортимент яких постійно розширюється, але основними є опціони, які можуть бути предметом обігу як біржового так і позабіржового ринку.

Н.Л. Івашук при дослідженні ціноутворення нестандартних опціонів розглядає Вінерівські процеси, що описують поведінку опціонів різного типу з Пуассонівським та логонормальним розподілами цін виплат [48].

У класичній теорії інвестицій на фондових ринках існує твердження, що найкращою мірою визначення інвестиційного ризику є стандартне відхилення норм прибутковості. Прийнято вважати, що чим більша волатильність прибутковості, тим більш ризикованим є фінансовий продукт.

Під час прогнозування основних фінансових показників фондового ринку волатильність використовують як один із основних параметрів для оцінювання можливих ризиків.

Слово волатильність походить від французького *volatile*, яке в свою чергу походить від латинського *volatilis*, що означає «летючий», «швидкий». Крім того французькою «волатильність» має значення «із завищеною ціною».

У фінансових аналітиків волатильність асоціюється зі ступенем зміни ціни. Високо волатильні активи коливаються в більш широкому діапазоні, ніж низькі. Однак, з економічної точки зору, давати строге

кількісне визначення волатильності можна по-різному. Такі вчені, як П.І. Бідюк [4], А.А. Гриценко [42], А.Є. Кулаков [52], О.І. Ляшенко [56], В.С. Романов [69], В.В. Соловійова [73], В. Твардовський [76], М. Чекулаєв [71] користуються поняттям волатильності як випадкового відхилення певних величин від їхнього тренду. В найпростішому випадку це коливання випадкової компоненти часового ряду.

В роботі [71] наведено таке визначення волатильності. Волатильність є мірою ризику ринкового фінансового інструмента та випадковою складовою зміни ціни фінансового інструмента, що розглядається $r = m + v$, де r – зміна ціни за певний проміжок часу; m – середня зміна ціни (тренд); v – волатильність, випадкова величина (часовий ряд) з нульовим математичним сподіванням.

Кузнєцов [71], під поняттям волатильності, розуміє мінливість значень параметрів ринку, таких, як відсоткові ставки або курси валют, ціни акцій або товарів. А. Лаубш [76]. розуміє волатильність як характеристику, що визначає мінливість фінансових результатів використаного інструмента. М.А. Роговий [71] волатильність визначає як статистичний показник, що характеризує тенденцію ринкової ціни або доходу із зміною часу. Тобто вона є одним з найважливіших фінансових показників в управлінні фінансовими ризиками, і є мірою ризику використання фінансового інструмента на заданому проміжку часу. Найчастіше вираховується середня волатильність. Виражається волатильність в абсолютному або у відносному від початкової вартості значенні.

Розмах коливань будь-якого біржового активу піддається єдиному закону, після періодів з високою волатильністю йдуть періоди згасання, ринок заспокоюється і настає мало волатильний період. Через якийсь час фаза низької волатильності знову змінюється стадією високо волатильного ринку. Таким чином, постійно відбувається перехід з одного стану в інший

Чим довше триває період значної волатильності, тим більш ймовірно, що швидко почнеться період низької волатильності. І чим довше на ринку переважає низька волатильність, тим більш ймовірно, що швидко настане період з високою волатильністю. Вузькі діапазони змінюються широкими, а широкі – вузькими.

Зміна ціни за деякий інтервал розглядається як випадкове відхилення від тренду зумовлене волатильністю, яка є випадковою величиною часового ряду. Моделювання даної випадкової величини є основою в більшості випадків для оцінки ринкових ризиків.

У найпростішому випадку волатильність розглядається, як нормально розподілена випадкова величина ("білий шум") з дисперсією що дорівнює дисперсії зміни ціни за проміжок часу.

Щоб розрахувати волатильність в такий спосіб потрібно розглянути значну кількість інтервалів зміни цін. Наприклад, для розрахунку одноденної волатильності потрібно використати тримісячну вибірку одноденної зміни ціни активу.

Волатильність змін ціни акцій характеризує як ринок схильний до флуктуацій, тобто, відхилень цін від попередніх значень. Чим більше відхилення ціни активу від середнього значення, тим ризикованішим є

актив При проведенні аналізу волатильність часто розглядають як локальне середнє значення модуля зміни ціни. Згідно з [71] волатильність – це величина змін ціни фінансового інструменту відповідно від змін на фондовому ринку.

Специфікація волатильності як стохастичного процесу є природною, що можна пояснити на значній кількості емпіричних даних, які обґрунтовують властивості розподілів, які виступають при трансформації витрат. Наприклад, спостережуване співвідношення між величиною волатильності і активом може бути пояснене рівнем залежності волатильності згідно з моделлю (CEV) варіації сталої еластичності, чи моделлю Кокса і Росса [135]. Стохастична волатильність може також виникнути ендогенно за допомогою рівноваги, яка моделює поведінку учасників ринку.

Більш загальні стохастичні моделі волатильності запропоновані Хулом і Вайтом [195], побудовані на ідеї, що коректна специфікація волатильності може мати загальне і аналітичне трактування. Дуже часто використання правдоподібних параметрів, аналогічно, як при від’ємній кореляції між волатильністю і ціною, на практиці не відповідає фактичним цінам опціонів. При емпіричній верифікації відбувається пошук структурних параметрів за допомогою відбору істотно різних часових рядів для проведення оцінки.

Моделювання та прогнозування динаміки цін фінансових інструментів є важливим елементом інвестиційної діяльності. Оскільки вони володіють високим рівнем фінансового важелю і виконання

зобов'язань за ними здійснюється у майбутньому [5]. Ціни на деривативи мають тенденцію до змін і передбачити їх поведінку стає все складніше. За допомогою похідних фінансових інструментів здійснюються різноманітні операції з фінансовими продуктами, придатними для купівлі-продажу [126, 132]. Ефективність прийняття інвестиційних рішень під час діяльності на фондовому ринку України є головним чинником зацікавленості в ньому інвесторів. Для успішних фінансових результатів діяльності учасникам ринку цінних паперів необхідно добре орієнтуватися в процесах ціноутворення деривативів. Операції з похідними цінними паперами займають важливе місце у фінансовій діяльності фондового ринку бо кожному учаснику потрібно хеджувати ризики, що отримати додатковий прибуток на основі спекуляцій на фондовому ринку [161]. Тому деривативи є одним із основних інструментів ринку цінних паперів. Важливим завданням є дослідження стану і динаміки вітчизняного фондового ринку в тісному взаємозв'язку з фондовими ринками інших країн, аналіз волатильності фінансових інструментів з метою підвищення ефективності інвестиційних операцій. В даний час розроблено багато інших підходів до обчислення локальної та стохастичної волатильності, які описують спільну динаміку ціни базового активу, за допомогою моделей CEV [213], JDCEV [174], Heston [189], але застосування цих моделей вимагає використання спеціальних функцій та чисельного інтегрування складних функцій. Це означає що можуть бути великі значні в обчисленнях, але при розгляді часових залежностей значна частина

моделей стає нестійкою. Для безпосереднього обчислення потрібні інші методи знаходження ціни деривативів [234].

Таким чином аналіз фондового ринку методами нелінійної динаміки, ґрунтується на побудові адекватних моделей його розвитку, з врахуванням внутрішніх структурних та динамічних властивостей. Саме нелінійні методи дослідження фондового ринку дозволяють інтерпретувати спектр його поведінки, який є надзвичайно чутливим до зміни економічних трендів, а дані фондових індексів можна використовувати для побудови індикаторів. Якщо окремі змінні корелюють між собою, стандартне відхилення втрачає своє значення у визначенні розмірності ризику. У випадку коли розподіл ставок прибутковості фінансових інструментів не описується нормальним розподілом, суттєво зменшується ефективність стандартного відхилення як розмірності ризику. Тоді теорія хаосу пропонує рішення, а саме, фрактальну розмірність часових рядів. Прийняття гіпотези, яка стверджує, що рух курсів біржових акцій описується законами теорії хаосу, виключає застосування технічного аналізу для прогнозування майбутніх цін на акції, оскільки між двома даними концепціями підходу до аналізу часових рядів існує досить вагома суперечність. Це пояснюється тим, що теорія хаосу виключає повторюваність, всупереч наявності у ній поняття циклу, а технічний аналіз зосереджений на засадах повторюваності, і це дає можливість технічним аналітикам ідентифікувати різного роду формації.

Неповторність властива також теорії ефективності фінансових ринків, проте ця теорія обтяжена значною кількістю припущень, які не

працюють на практиці. Тому, доречним буде дослідити можливості, які теорія хаосу пропонує для опису явищ на фінансових ринках.

Теорія хаосу має перевагу над теорією ефективності фінансових ринків – вона не вимагає виконання жодних умов. Єдиним обмеженням стає довжина часових рядів, але відповідна довжина часових рядів також є необхідною для повноцінного застосування методів технічного аналізу і методів перевірки ефективності [212].

Розраховуючи локальний коефіцієнт Херста і волатильність, можна прослідкувати схильність часового ряду фінансових показників до флуктуацій (змін) та визначати передбачуваність ряду [54].

Використовуючи теорію ефективного ринку, яку започаткував Ю. Фама. Можна легко довести, що фондовий ринок є цілком ефективним і вся інформація відносно емітентів цінних паперів та ризиків щодо них, повністю відображається на їхній вартості. Тобто найбільше приділяється уваги інформаційній ефективності, а не операційній (можливості оперативно проводити купівлю чи продаж) цінних паперів.

Вітчизняні науковці проводять наукові дослідження щодо раціональної поведінки інвесторів на фондовому ринку при виконанні гіпотези ефективного ринку щоб прийняті рішення інвесторами на фондовому ринку ґрунтувалися на прогнозах щодо ціноутворення на фінансові активи. При цьому прикладні розробки вітчизняних науковців щодо прогнозування ціноутворення на фондовому ринку є недостатньо вивченими і стосуються тільки аналітичного супроводу прийняття рішень інвесторами загалом. О. Ляшенко було досліджено динаміку фондових

індексів України за допомогою мультифрактального аналізу, виявлено що фондові індекси мають фрактальні властивості, та служать своєрідним барометром стану фінансового ринку та і економіки загалом, розроблено алгоритм прийняття рішень інвестором на фондовому ринку з використанням теорії асиметричної інформації і низки сучасних підходів до моделювання поведінки цін (кореляційного й факторного аналізу, вейвлет-аналізу, когерентного аналізу,) [54]. Г.Шуклін розробив алгоритм прийняття рішень щодо інвестування ринку цінних паперів, які досліджуються на основі фундаментального і технічного аналізів із використанням диференціальних рівнянь із часовим лагом і методами нечіткої логіки [82].

Згідно з теорією випадкового руху, яку розробив Л. Башельє поточна ринкова вартість та дохідність цінних паперів є статистично незалежними [96]. Згідно з цією теорією прогнозувати ціноутворення показника фондового ринку на основі даних про його динаміку за попередній період неможливо, тому, що цінний папір має внутрішню вартість, його ринкова ціна змінюється випадковим чином і відображає інформацію про його емітентів.

Р.Еліот розробив теорію хвиль, згідно з якою динаміка ціноутворення на фондовому ринку різного роду фінансових активів, ґрунтується на певних моделях, а інвестори їх можуть розпізнати та використовувати для прогнозування цін у майбутньому [129].

Згідно з теорією ширини ринку, розробником якої є Р. Расел, можна аналізувати протилежно спрямовані тренди ціноутворення на різні групи

цінних паперів, коли курс одних на ринку зростає, а інших знижується. Перевагою цієї теорії є порівняння кількості цінних паперів, ринкова вартість яких знижується, та кількості тих паперів, ринкова вартість яких зростає, а потім проводити висновки щодо інвестиційних рішень [59].

Відносно технічного аналізу, то основним є твердження, що ціни рухаються в певному напрямку, і цей рух ґрунтується на попередніх значеннях цін. Однак на курс, крім тиску його минулих значень і поточних тенденцій, впливає також чимало інших чинників фундаментального характеру. На значних за тривалістю проміжках часу вплив більш-менш незначних чинників може перетворюватися в “шум”, тобто чим менший є проміжок часу, тим значніший їхній вплив на ціноутворення. Тобто на незначних за тривалістю проміжках часу коливання та інші фінансові змінні можна вважати випадковими величинами.

На сьогодні поширена думка, що на фондовому ринку зручно проводити аналіз в двох напрямках: фундаментальному і технічному. Технічний аналіз, використовує історію закономірностей, а фундаментальний аналіз, базується на знаннях економічних законів, різних чинників ціноутворення, а також попиту і пропозиції на цінні папери.

Постає проблема в тому що технічні індикатори для розрахунку своїх значень використовують процеси багаторазового усереднення, зважування та інше. На фондовому ринку коливання цін мають випадковий характер, бо учасники ринку не можуть один з одним домовитися, тому застосування сучасних технічних індикаторів і середніх

величин, таких як, наприклад ковзне середнє, не завжди приводить до точного результату.

Новий напрям технічного аналізу відкриває спектральний аналіз фінансових та фондових ринків, який є прикладним апаратом теорії сигналів, яка широко використовується в цифрових системах. Основною його перевагою є те, що для кожного сигналу можна застосувати перетворення Фур'є і розвинути в частотній області. За допомогою цього перетворення можна дізнатись «частоту» ринку, тобто проаналізувавши спектр, зрозуміти наскільки часто відбуваються короткострокові або довгострокові коливання цін і які вони за тривалістю. Після цього знаходять ймовірність того, до якого циклу відносяться коливання, і відповідно, знаючи, коли вони закінчуться, можна прийняти відповідне рішення про купівлю або продаж цінного паперу.

Ясно що передбачений за допомогою цього методу момент, ніколи не співпаде з реальним на сто відсотків внаслідок не детермінованості ринку, але чіткий момент закінчення тенденції буде однозначно визначено. Якщо досліджувати точніше і глибше, то можна з високою точністю визначити фазу ринкового циклу, тому що, як відомо, частота і фаза пов'язані між собою диференціальним рівнянням, і воно має місце для сигналів в цифрових системах в загальному випадку, так і при аналізі фондових ринків в зокрема.

Процеси ціноутворення на фондовому ринку на основі класичних методів аналізу фондового ринку є не повністю ефективними тому зручно використати нові підходи та методи. Використавши спектральний аналіз,

а саме регулярні та сингулярні збурення для прогнозування часових рядів фінансових показників. Можна розкласти часовий ряд на складові, які легко інтерпретувати. При цьому метод не вимагає стаціонарності ряду, знання моделі тренду, а також відомостей про наявність у ряді періодичних складових та їх періодів. Дана методика дозволяє розв'язувати багато задач.

В роботі застосовано методичні та теоретичні основи економіко-математичних методів аналізу часових рядів для прогнозування динаміки фондових індикаторів, за допомогою спектрального аналізу, з метою оптимізації ефективності діяльності учасників фондового ринку.

Спектральний аналіз поєднує в собі елементи класичного аналізу часових рядів, багатовимірної статистики, динамічних систем та обробки сигналів.

Методи спектрального аналізу застосовуються для дослідження закономірностей динаміки часових рядів показників фондового ринку і дозволяють ефективно визначати кількісні сторони закономірностей, та відслідковувати динаміку процесів, що протікають на фондового ринку.

Однією з поширених методик є знаходження оцінок Тюкі-Хеннінга і Парзена для виявлення і вивчення закономірностей часових рядів значень фінансових ресурсів з використанням методів теорії системного моделювання на основі спектрального аналізу. Спектральний аналіз дає можливість побудувати оцінки спектральної щільності які дозволяють проводити аналіз періодичних залежностей фінансових показників у стохастичній динаміці [5].

Використовуючи крос-спектральний аналіз проводять дослідження залежності між часовими рядами значень фінансових ресурсів, на основі яких будують моделі виявлення закономірностей, що визначають динаміку процесів, які протікають в рамках фондового ринку, знаходять емпіричні значення когерентності, фазового зсуву і коефіцієнта підсилення [11]. Діаграми когерентності і фазові діаграми можуть бути потужним інструментом для дослідження залежності між рядами значень фінансових показників, та дозволяють ефективно визначати кількісні сторони закономірностей, які визначають динаміку процесів, що протікають на фондовому ринку [5]. Інформація яку одержують в процесі застосування крос-спектрального аналізу у випадку дослідження зв'язків між деякими показниками стає ефективним інструментом локалізації першопричин таких зв'язків [5].

Спектральний аналіз (англ. Spectrum analysis) - скорочена і узагальнена назва для SSA і MSSA [5]. MSSA (Multi-Channel Singular Spectrum Analysis) багатовимірний сингулярний спектральний аналіз - сукупність математичних методів, для аналізу рядів динаміки і часових рядів. За допомогою MSSA досліджують стан та динаміку цінних паперів на біржі. Багатовимірний сингулярний спектральний аналіз дає можливість визначити майбутню поведінку ціноутворення на фондовому ринку, а також дослідити динаміку різних біржових індексів. Потрібно проаналізувати сукупність хвильових, трендових і шумових показників. Метод, за допомогою якого проводиться дослідження та обробка часових

рядів, носить назву «гусениця». За його допомогою трейдери прогнозують динаміку ціни.

SSA (Singular spectrum analysis) сингулярний спектральний аналіз є математичним методом аналізу часових рядів [5]. Динаміку ціноутворення розглядають як сукупність хвильових, шумових і трендових складових. Сингулярний спектральний аналіз використовується для визначення найбільш ймовірної поведінки цін в найближчому майбутньому. SSA є частинним випадком MSSA.

Метод сингулярного спектрального аналізу застосовується в багатьох галузях науки, а найчастіше в економіці, метеорології, астрономії. SSA використовують для згладжування початкових даних та прогнозування цін на ринку, а також для забезпечення знаходження максимально повної інформації про динаміку процесу на основі серії часових рядів [6]. У випадку часових рядів, які описують стохастичні процеси, моделювання яких зводиться до стохастичних диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь дифузії, виродженої дифузії, розклад спектральної функції зводиться до розкладу фундаментального розв'язку за власними функціями оператора, що відповідає цій змодельованій задачі. Це відповідає тому, що в нескінченно вимірному Гільбертовому просторі інтегровних з квадратом функцій, є розклад функції по базису з власних функцій. В ролі функції, яку розкладають береться ціна, а фундаментальний розв'язок, або щільність розподілу при наближенні до початкових чи крайових точок, веде себе як білий шум [20].

В роботі розроблено підхід для здійснення моніторингу фінансових потоків, що продукуються двобар'єрними Бесселівськими процесами. Тобто, потрібно подати щільність у вигляді розклад через функції Бесселя першого і другого роду, а також їхні похідні. Оскільки ряди Бесселя добре досліджені, а власні значення поставленої крайової задачі затабульовані то розклад щільності в ряди за функціями Бесселя є дуже зручним для використання на практиці при знаходженні цін опціонів з потрібною точністю.

Проблема такого типу розглядається вперше. Для таких задач є нерозв'язаною задача коли дифузія Бесселя має нелокальну волатильність залежну від різних чинників, але така проблема є лише частково розв'язана для звичайних дифузійних процесів породжених Броунівським рухом. Тому потрібні нові підходи і аналіз вже відомих для розв'язання задач такого типу.

В роботі розглянуто фінансові потоки породжені процесами Бесселівської дифузії представивши їх по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та його просторової похідної. Таке представлення дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

Розклад функції Гріна по системі Бесселивих функцій дається аналітичною формулою за допомогою якої зручно обчислювати величину фінансових потоків.

У [277] описано застосування процесів Бесселя на фінансових ринках та співвідношення з інтегралом від геометричного броунівського руху. В [139] зроблено огляд ціноутворення азійських опціонів за допомогою процесів Бесселя.

У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для зображення розв'язку тому потрібно припустити що процеси марківські.

В роботі дифузійний процес використано для знаходження величини фінансових потоків, які представлені через функції Бесселя першого роду, зокрема розглянуто задачу Штурма-Ліувілля де граничні умови використовують функції Бесселя та їх похідні.

Спектральний метод застосовано до похідних фінансових інструментів, ціноутворення через представлення ціни похідного активу нейтральною до ризику очікування деякої функції від майбутньої вартості основного процесу.

Досліджено Бесселівські процеси, які є узагальненням процесу Орнштейна-Уленбека для бар'єрних опціонів [162]. При певних характеристиках дифузійний процес з оператором Бесселя ніколи не перетворюється в нуль цим випадкам присвячено ряд робіт [173, 227], розглянемо ті випадки коли похідна фінансового потоку Бесселівського процесу може перетворитися в нуль. При таких умовах визначають надлишкову швидкість росту портфеля акцій, а також пояснюють як

перевищення темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу [163].

Спектральне подання для щільності загальної одновимірної дифузії було отримано в роботі [259]. З того часу, спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу фінансових моделей дифузії, а саме в дослідженні розвинень по власних функціях лінійних операторів багато задач, пов'язаних з оцінкою деривативів розв'язуються за допомогою методів спектральної теорії, тому вона широко застосовується у фінансовій математиці. Спектральні методи, є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення, пов'язаного з оцінкою цінних паперів.

Спектральну теорію використовували багато науковців, а саме для прогнозування цін опціонів [227], знаходження відсоткової ставки на цінні папери [271], моделювання волатильності фінансових активів [163]. Як спектральна теорія так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці, це пов'язано з тим, що ціни двобар'єрного опціону підпорядковуються броунівському руху і корелюють з волатильністю [259]. Дослідження стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузією [154].

Моделі динаміки короткострокових відсоткових ставок розглядались в роботі Васічека [271] для ціноутворення деривативів. Значний внесок у теорію відсоткових ставок зроблено в роботах [140, 162, 224] а саме: знаходження кредитного спреда інструментів кредитного ринку, визначення цін опціонів на відсоткову ставку, визначення ризику і

доходності похідних фінансових інструментів фондового ринку. Розроблені цими вченими моделі мають свої переваги та недоліки, але кожна з них застосовується для підвищення ліквідності фінансових ринків. Використання складніших моделей, незважаючи на свою теоретичну обґрунтованість, зумовлює отримання складних багатопараметричних функцій кривої прибутковості, а це спричиняє значні похибки в обчисленнях.

Використовуючи спектральний аналіз В. Лінецький [217] застосував спектральну теорію самоспряжених операторів до різних моделей, а зокрема до моделі Васічека. В роботі М. Лоріга [224] розглядалися короткострокові відсоткові ставки, описані моделлю Васічека з стохастичною волатильністю, залежною від двох чинників, один з яких швидко, а другий повільно мінливий. спектральна теорія та теорія сингулярних і регулярних збурень застосована до самоспряжених операторів у гільбертових просторах, які описують процеси з багатовимірною стохастичною волатильністю, що має l -швидко мінливих, n -повільно мінливих чинників. Зокрема дана теорія застосована до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, отримано явні формули для наближень цін облігацій та дохідності.

Модель CEV (constant elasticity of variance model) є узагальненням моделей геометричного броунівського руху. Вперше ця модель

запропонована для дослідження ціни європейського опціону [259]. Модель *CEV* ґрунтується на припущенні, що ризик-нейтральний процес, який описує ціну акції S має вигляд

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma S^\alpha dz,$$

де r -безризикова відсоткова ставка, q -дивідендна дохідність, σ -параметр волатильності, α -додатня константа, dz -вінерівський процес. При $\alpha = 1$ модель *CEV* співпадає з моделлю геометричного броунівського руху, якщо $\alpha < 1$ то при зменшенні вартості активу його волатильність збільшується, якщо $\alpha > 1$ то при зростанні вартості активу його волатильність також зростає. Це відповідає усміщці волатильності і означає, що волатильність є зростаючою функцією залежною від ціни активу.

Порівнюючи з моделями геометричного броунівського руху переваги моделі *CEV* полягають у тому, що коефіцієнт нестабільності співвідноситься з ціною ризикованих активів і може пояснити емпіричні упередження, такі як нестабільність посмішки волатильності [121]. Модель *CEV* зазвичай застосовується для розрахунку теоретичної ціни, чутливості та передбачуваної волатильності опціонів [193, 195]. Протягом останніх років проблема інвестицій для пенсійного фонду є дуже важливою, виявилось що модель *CEV* успішно застосовується для вивчення оптимальної інвестиційної стратегії [169].

В кінці минулого століття увагу вчених фінансистів привернула проблема зв'язку між ціною активу та його волатильністю [217]. Було встановлено, що ціна активу веде себе як волатильність. У відомій моделі Блека-Шоулза волатильність є сталою [103]. Це зумовило низку праць для

уточнення цієї моделі. Емпіричними дослідженнями встановлено, що волатильність є випадковою величиною залежною від часу [244]. В [245] запропоновано аналітичні моделі, що мають стохастичну волатильність. В. Лінецький [217] та досліджували модель стохастичної волатильності зі стрибками. Модель CEV є узагальненням моделей динамічної волатильності. Зокрема вона дає можливість дослідити ціну активів, які змінюються неперервно в часі. Цьому присвячені ряд робіт [226, 252]. У роботі [259] розглядається модель CEV з багатовимірною стохастичною волатильністю. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю CEV з багатовимірною стохастичною волатильністю.

Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну двобар'єрних опціонів ОрнштейнаУленбека з багатофакторною волатильністю, як розклад за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори $(l+n+1)$ вимірної дифузії, тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної, l -вимірного швидкозмінного чинника і n -вимірного повільно змінного чинника. Дана робота є розширенням робіт [226-227], в [227] $l=1$ та $n=1$.

Процес X може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів. Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний короткий

відсоток і т.д. Ще ширше, X це зовнішній чинник, який характеризує вартість будь-яких із згаданих вище процесів.

Спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу дифузії, а саме в дослідженні розвинень за власними функціями лінійних операторів. Для фінансових моделей дифузії є основним процесом, тому не дивно, що методи спектральної теорії внесли свій вклад у фінансову математику. Зокрема, багато проблем, пов'язаних з оцінкою похідних активів були вирішені аналітично за допомогою методів спектральної теорії. Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну деривативів як розклад за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори $(l+n+1)$ вимірної дифузії, при $l=1$ та $n=1$ отримаємо методику роботи [227], тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної, одновимірного швидкозмінного чинника і одновимірного повільно змінного чинника.

У роботі розглянуто моделі без дефолту процесу дифузії з інерцією, коефіцієнти яких залежать від змінних (t, x, y) і для знаходження цін деривативів використовуємо розклад у ряди Тейлора для вироджених дифузійних процесів. Зокрема в працях [226-227] кореляційні матриці є невивроджені, а в нашій роботі є виродженими, тому застосування цієї ідеї вимагає нових підходів викликаних труднощами виродження.

Випадкові процеси, які описуються рівнянням дифузії з інерцією широко використовуються в теорії масового обслуговування, зокрема в теорії черг. Найчастіше такі процеси відбуваються на фондових ринках

при ціноутворенні європейських та азійських опціонів. Теорія ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності є необхідними для гнучкості в прийнятті управлінських стратегічних рішень менеджерами. Обґрунтованість стратегічних рішень дозволяє менеджерам здійснювати покрокові додаткових інвестицій з метою збереження стратегічних позицій компанії на фондовому ринку. Як правило, високий рівень волатильності дає менеджеру більше можливостей для зміни своїх рішень у майбутньому. Волатильність має важливе значення для інвесторів при ціноутворенні декількох різних серій опціонів з різними цінами виконання і термінами погашення. Оскільки в моделі Блека-Шоулса [103] вона є сталою то в цих випадках можуть виникнути спекулятивні зміни в ціні які неможливо перевірити без наявності певного роду спеціалізованих знань. Це один із прикладів того, як волатильність ціноутворення опціонів, пов'язана з принципами моделювання та управління ризиками на фінансовому ринку. Тому потрібно використовувати моделі із змінною волатильністю.

Для зручності обчислень, використано припущення що ринок є без арбітражу, нульових відсоткових ставок і без дивідендів. Усі отримані результати можна легко поширити на детерміністичні відсоткові ставки. Крім того, результати цієї роботи можна розширити на моделі з n не локальними чинниками волатильності. Хоча для простоти проводимо аналіз для одного не локального чинника з виродженням.

Для побудови наближеного розв'язку задачі Коші розвинуто ідеї з [226], які засновані на розширенні застосування інтегро-диференціальних

операторів ціноутворення типу Леві. Метою роботи є впровадження єдиного підходу до ціноутворення та імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора.

Розглянуто вироджений дифузійний процес, що описує динаміку ціни та імплікованої волатильності, в залежності від часу, індексів базових активів, акцій, опціонів величин фінансових потоків [122]. Побудовано щільність розподілу ймовірностей проходження цього процесу. Маючи щільності розподілу можна знайти ціну в будь-який момент часу.. За знайденими наближеннями використовуючи як початкове наближення функцію ціни Блека-Шоулса одержано явні формули для знаходження початкових наближень імплікованої волатильності. Наближення ціни отримується за допомогою розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією. Якщо виплата опціонів є функцією лише від x , тоді розклад в ряд Тейлора коефіцієнтів не залежить від t і значно спрощується аналітичний вираз фундаментального розв'язку щільності розподілу випадкового процесу.

Різні випадкові чинники, що впливають на зміну процесу моделюються як розв'язки деяких генераторів, що розглядаються в певних шкалах і їхній вплив, тобто збурення можна порівнювати за різними рівнями шкали. Такий підхід до вивчення економічних процесів взятий з дослідження фізичних процесів, але він дає добрі результати при дослідження процесів фондового ринку. Теоретичне існування розв'язку при збуреннях приводить до розв'язання скінченої кількості рівнянь Пуассона, це на основі альтернатив Фредгольма зводиться до доведення

того, що певні інтеграли рівні нулю, а для цього можна використати різні програмні продукти. Розроблена методологія розкладу за власними функціями і власними значеннями певних операторів дифузії з інерцією в яких волатильність залежить від системи швидкозмінних і повільнозмінних чинників. Застосування цієї методики до процесів Орнштейна-Уленбека, Васічека та CEV дає можливість одержати наближене значення фінансового показника через складові в шкалі кожного чинника. Це дає можливість аналізувати вплив кожного чинника, якщо чинники розглядати як координати то по координатно, але не всі дифузійні процеси можна розкласти за власними значеннями. Вироджені дифузійні процеси, які моделюються рівняннями Колмогорова не можна представити через власні значення та власні функції, тому тут доцільне застосування розкладу в ряди Фур'є коефіцієнтів рівняння тоді щільність цього стохастичного процесу має представлення через ряд послідовних наближень щільностей, що відповідають коефіцієнтам розкладу а ряд Тейлора. Такий підхід дає можливість обчислювати ціни фінансових показників, щільність розподілу, в різні часові моменти з великою точністю. За допомогою цієї методики можна проаналізувати можливий перебіг процесу, зробити запобіжні висновки та пропозиції, щоб мінімізувати ризики.

1.2. Детермінанти динамічного розвитку фінансових інструментів

Враховуючи систематизацію чинників щодо економічного зростання, можна виокремити історичний та модельний підходи, перший

із яких стосується аналізу основних чинників економічного зростання, зокрема, капіталу, землі, праці, тощо. Модельний підхід веде до аналізу безпосередніх чинників (таких, як працевлаштування і ефективність праці) та посередніх (зокрема, виробничий капітал, інвестиції та їх ефективність). Крім того, в економічній теорії, аналіз економічного зростання відокремлений від аналізу економічних коливань. В рамках теорії економічного зростання в цьому випадку розглядаються два питання: джерела коливань і чинники, переважно екзогенні, що можуть призвести до пом'якшення будь-яких коливань. Виходячи з цього, розрізняють стійке економічне зростання або економічне зростання, пов'язане з балансом економічного зростання за межами рівноваги.

У центрі дискусій уже багато років залишається вплив технічного (технологічного) прогресу на функціонування економіки. Якщо технічний прогрес є результатом діяльності економічних чинників, переважно через призму цін, то природньою позицією економіки є рівновага і навпаки, технічний прогрес впливає на економіку через імпульси (потрясіння), то можуть з'явитися суттєві коливання, які переважно віддаляють економіку від рівноваги. В епоху глобалізації технічний прогрес, зокрема у слабо розвинених економіках, є похідною від отримуваного економікою іноземного капіталу, а також від освічення людських ресурсів, зокрема, в межах адаптованих систем управління чи трудової міграції кваліфікованих ІТ-фахівців у галузі високих технологій [7].

Не менш важливими є міркування пов'язані з питанням впливу монетарної політики, на економічне зростання, в тому числі через

функціонування грошового ринку та ринку капіталів, а предметом особливої уваги є недосконалість функціонування фінансових ринків, які є джерелом виникнення фінансових криз та як наслідок суттєвих економічних коливань. Тому в цьому випадку важливим є дослідження взаємозв'язків між макроекономічними показниками та показниками монетарної політики, в тому числі, рівнем інфляції, валютним курсом, обліковою ставкою, тощо.

Фінансова глобалізація та розвиток похідних інструментів часто розглядають як джерела основних причин фінансових криз за рахунок збільшення інтенсивності фінансових зв'язків між установами, корпораціями та країнами у глобальному масштабі [64].

Інноваційні фінансові інструменти як одні із найважливіших і водночас найбільш суперечливих чинників розвитку фінансової глобалізації є двигуном розвитку зв'язків і взаємозалежностей фінансового характеру на макро- та мікроекономічному рівнях у глобальному масштабі [84].

З одного боку спостерігається їх беззаперечний позитивний вплив на розвиток світової фінансiалiзацiї, з iншого – негативний вплив переважно на стабiльнiсть фiнансових ринкiв i, як наслiдок, виникнення криз.

Фiнансовi iнновацiї визначаються як сучаснi рiшення щодо продуктiв, процесiв та фiнансового ризику. Iнше визначення характеризує їх як шляхи модернiзацiї елементiв фiнансової системи, тобто введення нових рiшень стосовно його регулювання, ринкiв, установ та iнструментiв (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Складові елементи фінансової системи

Прийняті в окремих країнах закони, які лібералізують і дерегулюють функціонування фінансових ринків, сприяють розвитку міжнародних потоків, які є основним джерелом динамічного розвитку фінансової глобалізації, а окремі правила у окремих країнах визначають можливості й масштаби фінансових інструментів на своїх ринках.

Зокрема, після глобальної фінансової кризи, причинами якої став суттєвий розрив між капіталізацією ринків базових фінансових інструментів та похідних цінних паперів, які не мають за собою підтвердження реальними активами, були вжиті законодавчі заходи, що мають на меті обмеження спекулятивного використання деяких похідних

інструментів, діяльності хедж-фондів і офшорних зон як чинників дестабілізації світової фінансової системи.

Якщо розглянути фінансові ринки, то інноваціями будуть їх нові сегменти, зокрема: надзвичайно важливий ринок євродоларів, ринок похідних фінансових інструментів, ринок кредитних та дебетових карт, ринок послуг, пов'язаних з банкоматами (automated teller maschine, ATM).

До нових форм і типів фінансових установ належать, зокрема: фонди приватного капіталу, хедж-фонди, фінансові конгломерати та компанії спеціального призначення.

Як зауважено в роботі [66], інноваційні фінансові інструменти охоплюватимуть:

- нові або традиційні інструменти, в яких деякі елементи були змінені, з метою збільшення їх ліквідності та діапазону застосування;
- інструменти, які є комбінацією кількох інших фінансових інструментів;
- інструменти, які є заміниками традиційних фінансових інструментів;
- інструменти захисту від змін параметрів фінансового ринку наприклад, процентних ставок, валютних витрат, ціни на товари, а також ризиків.

Тобто інноваційними фінансовими інструментами, можуть бути деривативи та похідні інструменти, значення яких залежить від значення іншого інструменту, котрий називається базовим. Базовим інструментом

можуть бути акції, облігації, процентні ставки, валюти, фондові індекси, товари, тощо. До найбільш поширених видів деривативів належать:

- класичні (традиційні);
- гібридні (структуровані, синтетичні);
- створені на основі інших елементів;
- екзотичні опціони.

Перша група включає в себе форвардні і ф'ючерсні транзакції, свопи та опціони, які іноді називають ванільними операціями (*vanilla transaction*).

Форвардні транзакції є найпростішим фінансовим інструментом є угодою на купівлю або продаж базового інструменту за заздалегідь визначеною ціною і майбутньою датою реалізації.

Механізм функціонування ф'ючерсної транзакції такий же, як і у форвардної транзакції за винятком того, що ф'ючерсні операції носять стандартний характер і вводяться на фондовій біржі тоді, коли форвардна транзакція виключно діє на позабіржовій торгівлі. Порівняно з форвардним та ф'ючерсним варіантами опціони є більш гнучким інструментом, оскільки вони означають право, але не зобов'язання купувати (*call option*) або продавати (*put option*) або вибрати той чи інший тип операції (*double option*) стосовно базового інструменту за заздалегідь визначеною ціною та оплатою відповідної премії. Опціони можуть функціонувати як на біржі, так і в позабіржовій торгівлі.

Свопи, натомість, є контрактами, укладеними за межами фондової біржі, власники яких зобов'язуються обмінюватися визначеними базовими

інструментами на певний період, після чого повертаються до початкових умов.

Перелічені інструменти можна поділити, зокрема, на симетричні (лінійні) й асиметричні (нелінійні). До перших належать форвардні транзакції, ф'ючерси та свопи. Вони означають, що з обох сторін транзакції є наявним зобов'язання реалізації на узгоджених умовах. В випадку асиметричного інструменту, яким є опціон, з одного боку виступає закон, а з іншого – зобов'язання щодо здійснення транзакції.

Другу групу, тобто гібридні інструменти утворюють різні комбінації інших фінансових інструментів – акцій, облігацій, валют, біржових індексів з похідними інструментами. Можна поєднати, зокрема, банківський депозит, страховий поліс, інвестиційний сертифікат з опціоном високого ризику. Наприклад, дана інвестиція ділиться на дві частини, перша із яких вкладена у перераховані вище безпечні інструменти таким чином, щоб разом із процентною ставкою забезпечити повернення всього інвестованого капіталу або його значної частини. Натомість, та частина, що залишилася, вкладена у ризикований похідний інструмент, який може принести значний прибуток. Серед похідних інструментів, що входять до третьої групи, базовим інструментом котрих є інші види похідних інструментів, тобто деривативи, найчастіше виступають опціони на ф'ючерсні контракти, опціони на транзакції своп (або свопціони), а також складні опціони. Суть перших полягає у придбанні або продажу права на купівлю чи продаж ф'ючерсного контракту на певний фінансовий інструмент або товар. Другі так само дають право на купівлю чи продаж

свопу. Натомість, треті є опціонами купівлі для інших опціонів (наприклад, опціон купівлі для опціону продажу, опціон продажу для опціону купівлі) [9].

Екзотичні опціони включають в себе опціони, основні параметри яких (наприклад, термін дії, термін виконання, вибір типу опціону, дата оплати, премії тощо), носять відмінний від класичного опціону характер, наприклад бермудські опціони, опціони вибору, опціони „плати пізніше” (pay later). Наступним різновидом є опціони ліміту, дохід якого залежить від ціни базового активу на протязі терміну його дії, наприклад, азійські опціони, опціон “з оглядом назад” (lookback option), сходовий опціон (ladder option), бар’єрний опціон. Ще одним видом опціонів є багатofакторні, тобто такі, у яких виступають хоча б два базові активи, наприклад, веселкові опціони, кошикові, діапазонні опціони, тощо.

Стандартно фінансові інновації включають в себе нові фінансові технології, нові фінансові інструменти, нові фінансові процеси, поява яких є взаємообумовленою та взаємодоповнюючою. Більшу частину серед нових фінансових інструментів становлять саме похідні фінансові інструменти, хоча останнім часом з’явилися і нові базові фінансові інструменти під впливом сталого розвитку такі як «зелені» облігації, «зелені» кредити, тощо.

Поява нових фінансових інструментів, в тому числі деривативів обумовлена такими детермінантами як зростання конкуренції на фінансовому ринку, фінансовою глобалізацією, змінами у фінансовому

регулюванні, фінансовими ризиками, рівнем економічного розвитку та політичним тиском (рис. 1.5).

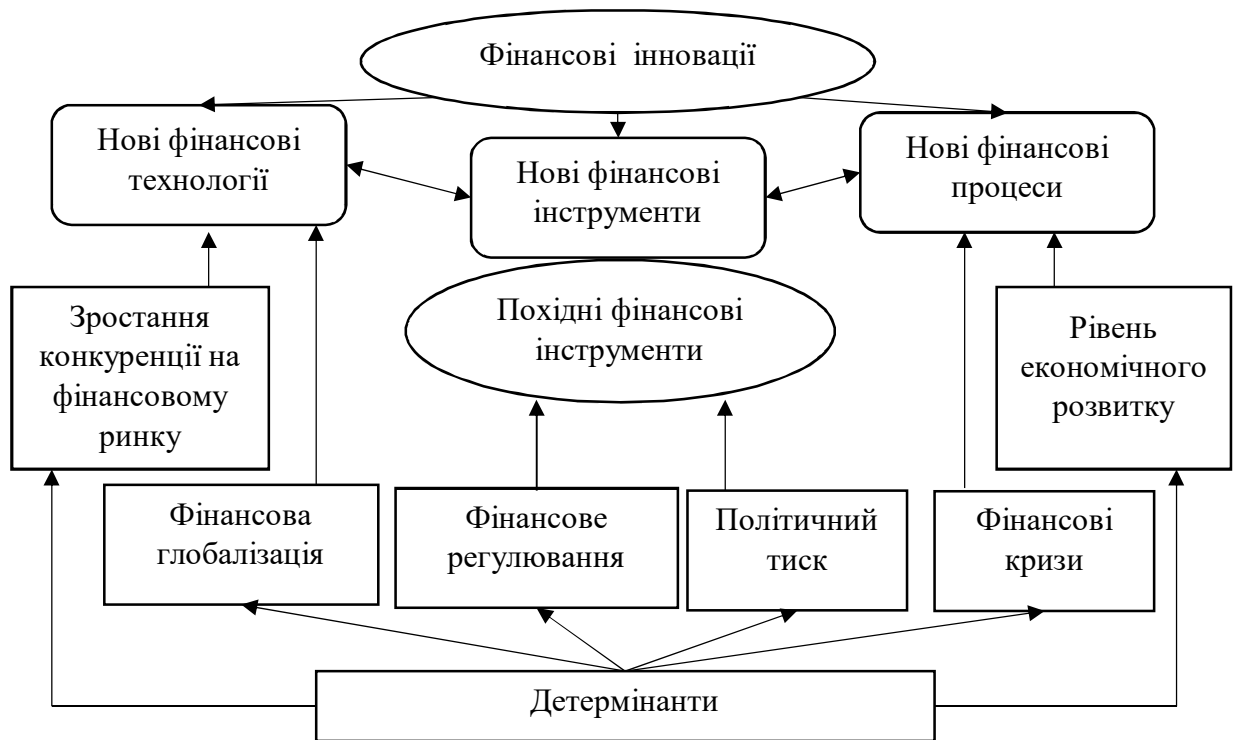


Рис. 1.5. Детермінанти поширення похідних фінансових інструментів

Фінансова глобалізація є найважливішим чинником розширення похідних інструментів, оскільки містить усі інші, між ними та глобалізацією існує зворотній зв'язок збільшення глобалізації і навпаки, вона ще визначає інтенсифікацію розмірів і видів економічних активів, зокрема фінансових, між суб'єктами, які знаходяться у різних країнах та всередині них. Це зумовлює збільшення ризику, пов'язаного з різноманітністю діючих у них умов (курси валют, процентні ставки, ціни та біржові індекси).

Ускладнення ефективних способів глобального управління фінансами, фінансовими установами та транснаціональними корпораціями спричиняє необхідність застосування щоразу більш удосконалених інноваційних інструментів та їх запозиченням з однієї країни до іншої. Значну роль у даному процесі відграють функціонуючі на глобальному рівні нові види інституційних інвесторів, зокрема, хедж-фонди, компанії спеціального призначення та фонди прямих інвестицій. Створенню нових ризикованих похідних фінансових інструментів сприяють складність регулювання їх застосування органами влади окремих країн через наявність євrorинку та офшорних фінансових центрів.

Нестабільність макроекономічного оточення є черговим чинником, який стимулює появу нових фінансових інструментів. Циклічність розвитку економіки – від кризи до кризи, означає тривалу зміну кон'юнктури. Після періоду зростання та стабільності, спостерігається неминучий спад і раптова (більшою або меншою мірою) економічна криза в регіоні чи світі.

Змінам у реальній економіці зазвичай передують сильні коливання на фінансових ринках. Падають у ціні базові цінні папери – акції, корпоративні та державні облігації, змінюються валютні курси, зростають процентні ставки за кредитами та інфляція. Значне збільшення обсягів оборотів і зростання швидкості проведення транзакцій призводить до того, що розміри турбулентності на фінансових ринках стають все більшими, і разом з фінансовими потоками перетікають досить швидко між

національними фінансовими ринками. Очевидно, що як емітенти так і інвестори намагаються захистити себе від цього, шукаючи засоби і у сфері фінансових інструментів.

Фінансова лібералізація та відкриття фінансових ринків окремих країн призвели до того, що банки та небанківські фінансові установи перестали бути захищені своїми урядами від міжнародної конкуренції, і водночас самі розпочали агресивну діяльність на ринках. Конкуренція всередині країни набула глобальних масштабів. Новий вимір конкуренції і її загострення, які, до речі, спричинені появою конкуренції з ринками, які розвиваються, призвели до того, що вони намагаються отримати перевагу над конкурентами, застосовуючи все більш сучасні, більш складні, а часом і більш ризиковані фінансові інструменти.

Діяльність фінансових інституцій у сфері пошуку інноваційних фінансових інструментів також залишається під тиском попиту на них з боку різних учасників фінансових ринків, які прагнуть диверсифікувати ризики своєї діяльності та збільшити доходність. Їх поглинання у цій сфері зростає разом з величиною та якісною й географічною диверсифікацією їх діяльності. Створення нових, удосконалених фінансових інструментів також є елементом маркетингової стратегії фінансових інституцій, котрі у такий спосіб демонструють свою компетентність [11].

Регуляторна та наглядова політика в сфері дериватів є процесом доволі складним. З одного боку, як уже було зазначено, лібералізація та дерегуляція, запроваджені урядами окремих країн, були одним з найважливіших чинників, що визначали фінансовий розвиток глобалізації,

включаючи вибух фінансових інновацій. Натомість, з іншого боку, державні рестрикції можуть обмежувати розвиток ринку деривативів. На практиці часто трапляється так, що ці обмеження спричиняють розвиток нових фінансових інновацій, які є спробою їх обійти. Прикладом цього є сфера фіскальної політики, яка за умови нарощення податкового тиску сприяє появі інноваційних інструментів, які мають на меті як мінімум податкову оптимізацію, як максимум уникнення від сплати податків взагалі.

Одним із найбільш важливих сучасних мультиплікаторів розвитку деривативів став розвиток комп'ютерних технологій та засобів телекомунікації. Сучасні комп'ютерні технології та відповідне програмне забезпечення дали змогу формувати та обробляти потужні бази даних (Big Data) і дозволили здійснювати моделювання, зокрема, щодо оцінки ризиків та ймовірності отримання бажаних результатів запланованих інвестицій, а також обсягу існуючих загроз. Вони революціонізували біржову торгівлю – торгівля на торговому майданчику була майже повністю замінена електронною торгівлею, яка ведеться через “електронні платформи”. Вагому і зростаючу частку тут займає алгоритмічна торгівля, заснована на високій частоті розміщення замовлень високопродуктивних комп'ютерів та потужних серверів. Алгоритмічна торгівля означає розміщення замовлень між комп'ютерами на основі введених до них алгоритмів, тобто програм, що містять тип активу, його ціну, розмір, термін дії замовлення тощо, і навіть розміщення замовлення без втручання інвестора.

Поєднання комп'ютерної техніки і технологій та телебачення призвело до того, що “мозковий штурм”, а також засідання правління і наглядових рад різних установ можуть відбуватися “на відстані”, тобто шляхом відео-конференції. Інтернет спричинив “смерть часу” (death of time) і “смерть відстані” (death of distance), а це означає, що передача інформації, управління, прийняття рішення, моніторинг та контроль фінансових операцій стали можливими в реальному часі між партнерами, які знаходяться у різних частинах світу. Водночас, витрати на ці заходи значно знизилися, порівняно з витратами на передачу інформації через інші засоби. Здебільшого, були усунені фінансові посередники. Інвестори можуть розміщувати замовлення на придбання акцій або інших цінних паперів похідних інструментів, не виходячи з дому, за допомогою персональних компютерів та інших подібних пристроїв.

Інноваційні фінансові інструменти спричинили значні зміни на фінансових ринках, стимулюючи їх розвиток. Їхні розміри, які вимірюються вартістю та кількістю транзакцій, різко зросли, і їх ліквідність також збільшилася. Вони надали ринковим суб'єктам доступ до фінансування за допомогою боргових та пайових інструментів, зробили більш гнучким та диверсифікованим процес формування структури капіталу, у тому числі, застосовуючи боргові свопи до власного капіталу, у чому надзвичайно корисною була сек'юритизація. Інноваційні фінансові інструменти стимулювали інституційний розвиток фінансових ринків. Зокрема, з'явилися нові установи, що спеціалізуються на транзакціях із застосуванням похідних фінансових інструментів (таких як, наприклад,

хедж-фонди, компанії спеціального призначення), та традиційні – інвестиційні, пенсійні та страхові фонди значно збільшили діапазон своєї фінансової діяльності. Завдяки арбітражним стратегіям та впливу активів на ціни валютні курси і процентні ставки сприяють більшій прозорості на ринках і прогнозуванню змін. Основною функцією деривативів є захист від ризиків (цінового, валютного, ризику процентних ставок та кредитного), що значно сприяє суб'єктам у фінансовій діяльності та виході на міжнародні ринки. Завдяки цьому, результати діяльності суб'єктів ринку є більш передбачуваними, а їх конкретний рівень, встановлений у бюджетах, є забезпеченим. Суб'єкти, які проявляють меншу схильність до ризику, здатні за їх допомогою (сек'юритизація) екстраполювати ризик на тих, що мають на нього більший апетит. Похідні фінансові інструменти також дозволяють знизити податковий тиск або уникнути його.

Негативною стороною застосування деривативів у більш широкому масштабі є загроза стабільності ринків та фінансових систем на державному та світовому рівнях [63]. Потoki капіталів, що йдуть через них, значною мірою є спекулятивними, що означає відокремлення фінансових операцій від реальної економіки. Застосування фінансових інструментів з врахуванням ефекту фінансового важеля дозволяє з відносно невеликим обсягом капіталу здійснити транзакції з номінальною вартістю, у багато разів вищою. Ризик таких операцій надзвичайно високий, і на практиці часто зустрічаються пов'язані з ними великі збитки та банкрутства суб'єктів, котрі у них задіяні. Невнормовані принципи їх оцінки та обліку зумовлюють завищення банками та фінансовими

установами їхньої реальної вартості, що веде до створення кумулятивної “спекулятивної бульбашки” в економіці, вибух якої означатиме фінансову кризу. Відтак, збільшується диспропорція між балансовою вартістю активів цих установ та їх фактичною вартістю. Якщо є необхідність збільшити виплату коштів, наприклад через занепокоєння інвесторів, може виявитись, що ці кошти відсутні, і за відсутності фінансової підтримки з боку держави, вони змушені оголосити про банкрутство. Неконтрольовані значні потоки капіталу створюють загрозу хаотичного розвитку обмінних курсів і значно підвищують ризик як фінансових, так і товарних операцій.

Можливості вибору деривативів для ефективного захисту від ризиків є обмеженими. Відомий фондовий інвестор Уоррен Баффет назвав їх “фінансовою бомбою масового знищення” [79]. Зокрема, саме з ними пов’язують вибух світової фінансової кризи 2008-2009 років. Проте, насправді, кризу спричинили помилки в економічній політиці Сполучених Штатів, відсутності належного фінансового регулювання та нагляду за діяльністю фінансових установ, які у гонитві за прибутком здійснювали безвідповідальну та дуже ризиковану політику кредитування. Потім шляхом сек’юритизації кредитів та їх спеціального страхування у формі свопних транзакцій вони перекидали ризик на покупців деривативів, випущених на їх основі [91]. Покупцями були інвестиційні, страхові, пенсійні фонди, інвестиційні банки та хедж-фонди, а також інші інституційні учасники фінансових ринків по всьому світу. Базовий механізм сек’юритизації показаний на рисунку 1.6

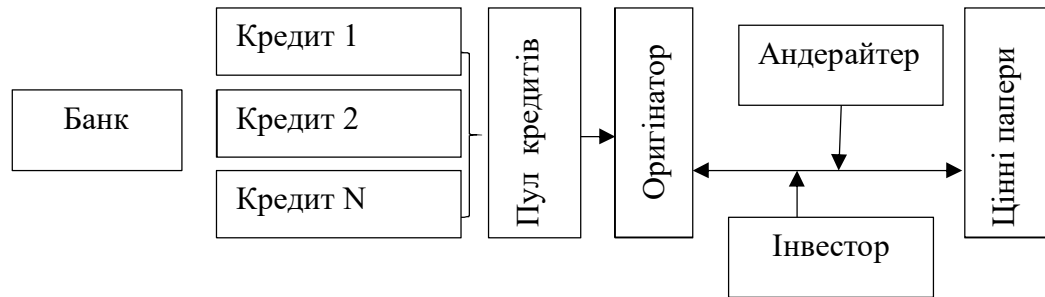


Рис. 1.6. Механізм сек'юритизації

Можна виділити наступні етапи процесу сек'юритизації:

- виокремлення пулу активів з балансу банку;
- страхування банком;
- платне переведення відокремлених активів на дочірню компанію, як правило спеціалізовану фінансову компанію (суб'єкт спеціального призначення) (*special purpose vehicle, SPV*);
- випуск спеціалізованою фінансовою компанією цінних паперів на їх основі, тобто дериватів, та їх розміщення андерайтером на фондовому ринку;
- погашення відсоткових ставок та позик в банку ініціатора сек'юритизації та після вирахування плати за послугу переказу їх дочірній компанії;
- перерахування фіксованих або плаваючих процентних ставок покупцям похідних фінансових інструментів та викуп деривативів, відповідно до терміну їх погашення.

Основними видами деривативів, випущеними СПВ, є:

- *цінні папери, забезпечені активами (asset-backed securities (ABS)*, тобто на основі різних кредитних вимог, наприклад, інвестиційних позик, студентських позик, автокредитів, платежів за кредитними картками;
- *цінні папери забезпечені іпотекою (mortgage backed securities (MBS)*, тобто пов'язані з іпотечними кредитами;
- *облігації забезпечені борговими зобов'язаннями (collateralised debt obligations (CDO)*, тобто забезпечені облігаціями;
- *комерційні папери, забезпечені активами (asset backed commercial papers (ABCP)*, базовим інструментом котрих були короткострокові цінні папери.

З іншого боку, кредитні операції, на підставі яких були випущені похідні інструменти – кредитні деривативи або кредитні дефолтні свопи (*credit default swaps (CDS)*), полягають у купівлі банком застави існуючих кредитних активів в іншій фінансовій установі, в обмін на сплату премії [50]. У випадку, якщо кредити не були погашені, продавець страхування мав перераховувати еквівалент власнику CDS (рис. 1.7).

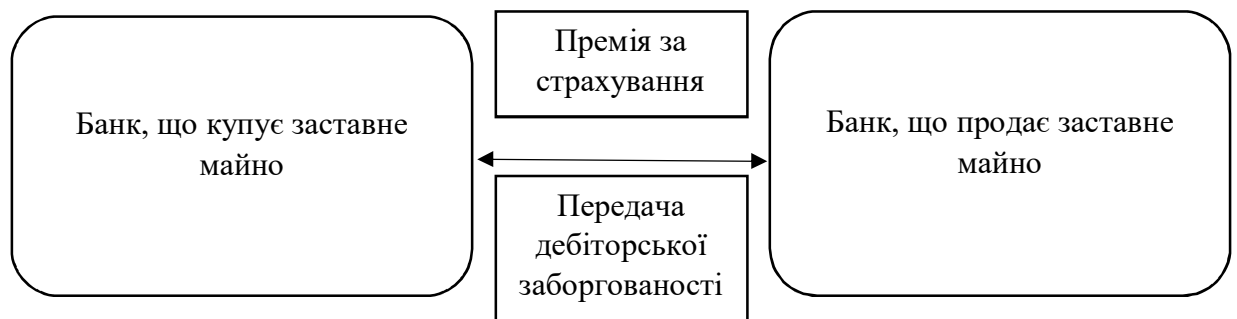


Рис. 1.7. Механізм кредитного дефолтного свопу

Розширення інноваційних інструментів на міжнародному ринку з початку 1990-х років, перерване лише світовою фінансовою кризою, тісно пов'язане з процесами фінансової глобалізації. Вони є одним з найважливіших чинників її стимуляції, і в той же час, на основі зворотного зв'язку, вони обумовлені її розвитком.

Відтак, чинники, що вплинули на динаміку фінансової глобалізації, водночас мали вплив на надзвичайно інтенсивне якісне та кількісне зростання. Оцінка інноваційних фінансових інструментів, а точніше кажучи, їх застосування, показує, що вони, безумовно, носять амбівалентний характер. Їх позитивна сторона полягає насамперед у створенні можливості набагато кращого, ніж у минулому захисту від цінового ризику, ризику курсу обміну та процентного ризику. Завдяки цьому фінансові та інші ринкові суб'єкти мали змогу значно розширити розміри операцій, диверсифікувати їх, зокрема, з точки зору супутнього ризику. Могли також ці ризики перекинути на інших, у кого більший апетит до них. Однак слід зазначити, що деякі їх використання можуть трактуватися по-різному, залежно від мети, для якої вони використовуються. Наприклад, їхнє використання для уникнення оподаткування чи інших обмежувальних правил буде позитивно оцінюватися транснаціональними корпораціями, але негативно – як макроекономічний ефект для державних фінансів тієї чи іншої країни.

Однак широкомасштабне застосування все більш складних фінансових інструментів (структурованих, синтетичних) з їх багаторівневою системою означає, що фінансові ринки стають все менш

прозорими. Ризик вибору деривативів, які є неадекватними для даного типу транзакції, стає все більшим. Крім того, „жадібність банкірів” або тиск на отримання прибутку за будь-яку ціну викликає їх ризиковане використання. А якщо до цього додати ще й відсутність належних нормативно-правових актів, моніторинг та контроль за діяльністю великих фінансових корпорацій, то отримаємо результат „заведеної часової бомби”, яка вибухнула з великою силою, у формі світової фінансової кризи, а також попередніх розладів та турбулентності на ринках, що розвиваються. Проте, загалом слід вважати, що позитивні наслідки поширення деривативів значно перевищують негативні. Без них фінансова глобалізація була б неможливою, або була б набагато біднішою. І відтак, її вплив на реальну сферу світової економіки та добробут окремих країн був би значно меншим. Звичайно, її переваги розподілені нерівномірно. Максимум отримують ті країни, які найбільшою мірою є фінансово глобалізованими.

1.3. Еволюція теоретичних поглядів на розвиток фінансових інструментів, як критерію розвитку фондового ринку

При дослідженні фондових ринків важливою проблемою як теоретичного, так і практичного характеру, є ціноутворення. Воно ґрунтується на знаходженні закономірностей, які виникають при формуванні цін на фінансові активи. На даний момент існує декілька теорій, присвячених розв’язанню цієї проблеми, які ґрунтуються на

можливості передбачення цінової динаміки фондових активів (прогнозованості ринку) та на раціональній поведінці інвестора, а також на тому, що часові ряди значень ціни деривативів, мають приховані закономірності, а отже є хоча б частково передбачуваними.

Багато методів прогнозування ціноутворення на фондових ринках базуються на припущенні про нормальний закон розподілу, де показники динаміки є незалежними величинами та розподілені в межах заданого сталого стандартного відхилення, але це припущення не дозволяє адекватно описувати економічні реалії [114, 127].

Під час становлення і розвитку фондових ринків, проводилася значна кількість наукових досліджень щодо ціноутворення на біржах з використанням різного типу контрактів. Перші результати щодо опціонної теорії отримані Л. Башельє і В. Бронзіним, які робили з повністю протилежні припущення про ціноутворення похідних фінансових інструментів [96, 114]. Пізніше А. Н. Колмогоров створив потужний базис теорії ймовірностей, що дозволило за допомогою ймовірнісних моделей досліджувати ціноутворення на фондовому ринку. Після другої світової війни настали сприятливі умови для застосування деривативів і їхнє ціноутворення почало базуватися на дослідженні операцій у економічному плануванні завдяки лінійному програмуванню Л. Канторовича і Дж. Данцига, портфельній теорії Г. Марковиця, порівняльному статичному й економічному аналізу економічних систем П. Самуельсона, теорії ігор Дж. фон Неймана і О. Моргенштерна [60, 231, 258].

Ціноутворення опціонів до створення відомої моделі Блека-Шоулса ґрунтувалося на паритеті опціонів CALL і PUT. Поняття паритету опціонів є зрозумілішим, ніж ідеї опціонної теорії, та використовувалося значно раніше ніж його формалізація. Теорема паритету опціонів уперше визначена Х. Столлом [266], згідно його теореми, маючи три із чотирьох фінансових інструментів, а саме: облігацію з нульовим купоном, акцію, CALL опціон на акцію і PUT опціон на акцію, будь-який четвертий фінансовий інструмент можна створити шляхом реплікації його функції дохідності [236]. Значний внесок у розвиток фондових ринків було зроблено за допомогою першої і другої фундаментальної теореми фінансової економіки, авторами яких були К. Ерроу, Ж. Дебре. Наукові результати цих вчених при відсутності арбітражу для фондових ринках удосконалили Дж. Хіршляйфер, за допомогою встановлення закону єдиної ринкової ціни, С. Росс доведенням теореми про відсутність арбітражу та М. Рубінштейн уточненням формулювання фундаментальних теорем [95, 192, 236, 256]. Зауважимо, що формулювання фундаментальної теореми фінансової економіки також було зроблено С. Россом, який дав визначення відсутності арбітражу як ситуації, де ніхто із учасників ринку не може сформувати портфель з наявних ринкових інструментів із додатною функцією дохідності портфеля для всіх станів на ринку, або з додатною функцією дохідності портфеля хоча б для одного стану за умови нульових чи від'ємних витрат та довів, що відсутність арбітражу еквівалентна існуванню додатно визначеного лінійного цінового оператора [254].

Пізніше наукові результати С. Росса узагальнив Х. Варіану [270]. Першу фундаментальну теорему, формулювання якої використовується і тепер дав М. Рубінштейн. Він стверджував, що ризик-нейтральні ймовірності існують тоді і тільки тоді, коли не існує безризикових арбітражних можливостей [256]. За другою фундаментальною теоремою можна стверджувати, що ризик-нейтральні ймовірності є єдиними тоді і тільки тоді, коли ринок є повним [256]. Третя фундаментальна теорема, формулювання якої належить К. Ерроу, часто зазнає критики від прихильників теорії ціноутворення опціонів, стверджує, при певних умовах існує можливість сформувати реверсивний портфель за допомогою відсутніх у ньому акцій, за умови ефективного і повного ринку [256]. Точніше формулювання другої фундаментальної теореми, яке є незалежним від поняття арбітражу й еквівалентної мартингальної міри у припущенні щодо існування арбітражних можливостей на повному ринку дали Р. Баттінг і Р. Ярров [99]. Принцип ризик-нейтрального ціноутворення на фондових ринках, удосконалили Дж. Харрісон, Д. Крепс і С. Плїска [203], ціноутворення деривативів було побудовано цими вченими на основі мартингалів та розроблено універсальний теоретичний апарат для визначення ціноутворення похідних фінансових інструментів. Наукові та практичні результати перерахованих вище вчених внесли значні успіхи для здійснення аналізу й оцінки умовних фінансових зобов'язань. Такі вчені як Р. Ярров, Р. Ліпцер, А. Н. Ширяєв, Д. Даффі, С. Шріва, Ю. С. Мішура активно використовували теореми для ціноутворення фінансових інструментів різного типу за умов ускладненої

динаміки [81, 239]. За допомогою першої фундаментальної теореми, можна стверджувати, що безарбітражний ринок ґрунтується на ризик-нейтральній (мартингальній) мірі, згідно з якою ціни деривативів формують мартингал [81]. На основі другої фундаментальної теореми, на повних ринках, існує можливість створення портфеля цінних паперів, капітал якого в через певний період відновлює потрібне умовне фінансове зобов'язання [232]. Це означає, що на безарбітражному ринку повнота присутня лише тоді, коли задана тільки одна мартингальна міра.

Будь-яке вкладення коштів в деривативів є більш ризикованим, ніж інвестування безпосередньо у фінансовий інструмент, пов'язаний із цим вкладенням, оскільки його ціна змінюється кожного разу, коли змінюється ціна фінансового інструменту, що лежить у його основі. Тому ціноутворення деривативів за допомогою стандартних формул дуже складно обчислювалося, а точна його оцінка протягом значної кількості років була економістам невідомою. В 1900 році Л. Башельє використав броунівський рух для розрахунку цін опціонів, він перший застосував складну математичну техніку в теорії фінансів [96]. С. Шпренкл узагальнив наукові результати Л. Башельє ввівши застосування логнормального розподілу цін деривативів. Завдяки цьому результату, при визначенні ціни похідних фінансових інструментів було відсутнє дисконтування [264]. Дж. Боннес застосував логнормальний розподіл ціноутворення для визначення вартості європейського опціону.

Багато спроб визначення вартості похідних цінних паперів були невдалими внаслідок неможливості правильно обчислити премію за ризик.

М. Шоулс та Ф. Блек здійснили прорив за допомогою розробки методу визначення ціни опціону, що не потребує використання конкретної величини премії за ризик, тобто премія за ризик існує, але включена до базисної ціни фінансового інструмента [103].

Основою теорії ціноутворення опціонів є біноміальна модель та модель Блека-Шоулса. Біноміальна модель була вперше запропонована Д. Коксом, С. Россом та М. Рубінштейном [135] у 1979 році. Вона є моделлю зміни ціни базового активу чи інструменту протягом часового інтервалу. Отримала назву біноміальної тому, що в кожному періоді в ній передбачається існування тільки двох можливих альтернатив поточної ринкової вартості акції [135]. сформувавши біноміальне дерево, можна проілюструвати процес визначення вартості опціону. Формула моделі оцінки опціонів уперше була виведена Б. Фішером і М. Шоулзом у 1973 році в статті «Оцінка опціонів та комерційних облигацій» (The Pricing of Options and Corporate Liabilities). Їх дослідження базувалися на роботах Д. Трейнора, П. Самуельсона, Д. Бонеса та Е. Торпа і розроблялися в період швидкого зростання опціонної торгівлі. Модель Блека-Шоулза припускає, що ціни на акції підлягають випадковому блуканню. Це означає, що в короткостроковий період розподіл змін цін на акції є нормальним. Звідси випливає, що для будь-якої точки, прогнознi ціни на акції матимуть логарифмічно-нормальний розподіл і їх можна моделювати випадковим (стохастичним) процесом Іто. Дисперсія базових активів зростає лінійно в часі. Формула Блека-Шоулса широко використовується трейдерами для встановлення ціни звичайних опціонів при мінімальних ризиках.

У випадку броунівського руху з нормальним розподілом де виплата підпорядковується пуассонівському закону розподілу, ціну опціонів встановила Н. Іващук [48].

Учасники фондового ринку, які проводять торгівлю деривативами, повинні мати широкий спектр можливостей щодо вибору позиції на ринку. Вибір позиції можна здійснити за допомогою динамічного хеджування, тобто врахування моментів розподілу ціноутворення деривативів, а для цього потрібна значна кількість фінансових інструментів [267].

Першими роботами по хеджуванню позицій були праці Л. Хіггинса і С. Нельсона у 1902 і 1904 роках [241]. Основні принципи динамічного хеджування були розроблені В. Ганном 1937 року. Він вивчав ризик-нейтральне хеджування для опціонів та запропонував деякі форми динамічного хеджування [172]. Ф. Міллс ще до розробки сучасної портфельної теорії стверджував, що стрибки цін впливають на цінову поведінку та функції розподілу ціноутворення деривативів можуть відрізнятися від нормального розподілу тому, що вони залежать від екстремальних економічних змін [111].

Е. Торп досліджував статичне ризик-нейтральне хеджування і довів, що воно використовується не як інструмент динамічного дельта-хеджування, а як інструмент для ризик-менеджменту. Х. Філер звертав увагу на хеджування опціонів, але на динамічне і без обчислення дельти [159]. А. Бернхард у своїх роботах дослідив ризик-нейтральне статичне дельта-хеджування та знайшов величину хеджування для деривативів з довільним страйком [102]. Мертон стверджував «Якщо хеджування

здійснюється неперервно, тоді дохідність хеджованих позицій стає незалежною від зміни ціни акцій. Фактично дохідність хеджованих позицій стає визначеною.» [237].

Такі вчені як А. Рейнах, Л. Хіггинс, С. Нельсон і Ф. Міллс зробили значний внесок у дослідження фондового ринку вивчаючи паритет між PUT і CALL опціонами, статичне та динамічне хеджування опціонів, а також умови стрибків у ціноутворенні деривативів [251].

Методологія ціноутворення деривативів ґрунтується на гіпотезах Ф. Блека, М. Шоулса і Р. Мертона щодо волатильності [103]. Учасники та дослідники фондового ринку використовують термін «усмішка» волатильності, та імплікована волатильність, що відповідає ринковим цінам на опціони згідно з формулою Блека-Шоулса. Сучасні наукові дослідження спрямовані на пошук точніших функцій розподілу деривативів та розробку альтернативних моделей оцінки процесів ціноутворення, щоб усунути недоліки моделі Блека-Шоулса. Альтернативними моделями що дозволяють знайти ціну похідних фінансових інструментів, є стохастичні моделі опціонів на відсоткову ставку, дифузійні моделі зі стрибком, моделі з сталою еластичністю варіації (CEV), моделі з стохастичною волатильністю, модель Хестона; моделі з стохастичною волатильністю і стохастичною відсотковою ставкою, дифузійні моделі з стохастичною волатильністю та стрибком.

Моделі ціноутворення опціонів дозволяють детальніше зрозуміти процеси які відбуваються на фондовому ринку.

Хронологію появи моделей ціноутворення деривативів від часу знаходження розв'язання проблеми ціноутворення опціонів Ф. Блеком, М. Шоулсом і Р. Мертоном у 1973 році проаналізовано в джерелах [72, 79]. Завдяки стрімкому розвитку фондових ринків кількість моделей ціноутворення деривативів починаючи з вісімдесятих років минулого століття значно зростає. За останні десять років дослідження щодо ціноутворення деривативів були спрямовані на розв'язання конкретних проблем для різних фінансових інструментів, тобто для акцій, банківських депозитів, відсоткових ставок, інвестицій тощо [129-146].

На даний момент ціноутворення деривативів зазнало змін щодо класичних припущень на основі теорії Ф. Блека та М. Шоулса тобто на фондовому ринку присутнє мультидисконтування майбутніх грошових потоків, якщо безризикова відсоткова ставка не є основним складником моделей визначення ціни. Та крім того існує багато проблем щодо визначення цін деривативів при умах арбітражу, а також прийняття законодавства щодо регулювання фондового ринку.

Ціноутворення деривативів також тісно пов'язане з новими типами забезпечених і незабезпечених фінансових інструментів, різними торгівельними платформами, способами і методами розподілу цінних паперів тощо [202, 275].

На фондовому ринку використовують багато різноманітних теорій ціноутворення, а саме технократична, фундаменталістська, теорія «ходіння навмання» тощо.

Теорія ринкового аналізу або технократичної теорії ґрунтується на тому, що значення ціни цінного папера, визначається ринковою кон'юктурою, а це означає що відома вся інформація про фінансовий актив і ціноутворення можна спрогнозувати результатами трендового аналізу динаміки цін. Інвестори згідно цієї теорії використовують ретроспективну динаміку цін, вивчають тренди та проводять екстраполяцію. Експерти-технократи в одному й тому самому динамічному ряді цін можуть визначити різні тенденції, часто навіть протилежні, але такий підхід до прогнозування ціноутворення має велику ймовірність доброго результату. Технократи досліджують фондовий ринок в цілому не беручи до уваги зовнішні чинники, вони вважають, що суб'єкти, які формують ринки, мало відрізняються за мотивацією і поведінкою, і за аналітичних умов діятимуть однаково. Це дає можливість ефективного прогнозування напрямку руху цін.

Наступною є фундаменталістська теорія, на основі якої справжню ціну деривативу можна визначити на основі обчислень враховуючи багато чинників як ринкових, так і неринкових, а також інформацію про зміну ринкової ціни і обсяги торгів на фондовому ринку. Також враховують узагальнені чинники коливань цін. Такі чинники генеруються самим фондовим ринком.

Наступна теорія носить назву «теорія ходіння навмання», основною ідеєю якої, є те, що курси акцій змінюються безсистемно незалежно від історичних змін, тому їх не можна передбачити на підставі ретроспективних даних. Теорія ходіння навмання використовує

положення, що ціни швидко і достатньо поглинають всю можливу інформацію стосовно будь-яких чинників фондового ринку і не залежать від попередньої динаміки. Коливання цін має випадковий характер, тому арбітражний прибуток можна отримати прогнозним шляхом. розглянута теорія використовує гіпотезу ефективного ринку. Вона дозволяє стверджувати, що фондовий ринок, на якому фактична ринкова ціна повністю віддзеркалює актив і дорівнює вартості фінансового активу оскільки включає всю інформацію про нього. Інвестори, визначаючи доцільність здійснення фінансових вкладень, спираються на особисті уявлення й мету стосовно ризику й дохідності, а також на власну оцінку справжньої вартості цінних паперів [59]. Наскільки правильно інвестор визначає справжню вартість цінного папера, залежить від повноти його поінформованості щодо всіх умов і чинників, які впливатимуть на майбутні доходи від фінансового активу. Якщо дериватив вільно обертається на ринку, то його ціноутворення формується на основі попиту і пропозиції. Це означає, якщо учасники фондового ринку поведуться раціонально то ціна деривативу наблизатиметься його реальної вартості [5].

Основними чинниками ефективного ринку є значна кількість покупців і продавців; а ринкові ціни повністю відображають всю інформацію про фінансовий актив; існує вся інформація у вільному доступі.

Гіпотеза ефективного ринку, стверджує, що ціни змінюються, лише реагуючи на надходження на ринок нової інформації, а щоденні коливання

ринкових цін деривативів на мають точно визначеної тенденції. Теорія «ходіння навмання» впливає з гіпотези ефективного ринку в слабкій формі.

Більшість фондових ринків не відповідає вимогам інформаційної ефективності, це означає що прогнозування ціноутворення є важливим елементом.

На даний момент при дослідженні ціноутворення на українському фондовому ринку недоцільно застосувати методи моделювання, які базуються на припущеннях про нормальний закон розподілу та стаціонарність часових рядів, але можна зробити висновок про високу точність прогнозування за допомогою GARCH-моделі [30]. Ефективність прогнозування за допомогою GARCH-моделі зростає, якщо її поєднати з методом Монте-Карло [104]. Сучасні аналітики при дослідженні ціноутворення деривативів поєднують економіко-математичні моделі прогнозування з фундаментальним аналізом шляхом створення критеріїв розподілу на основі економічних чинників. Також, експерти можуть визначити ймовірності різних наслідків впливу фундаментальних чинників на ціноутворення. Ці ймовірності використовуються для побудови функції щільності розподілу ймовірності цін на прогнозовану дату [57]. Часто проводять побудову ймовірнісних сценаріїв за допомогою комбінації цих підходів. Щоб збільшити точність використовують зовнішні чинники, що зумовлюють значні збурення волатильності. Прогнозування динаміки ціноутворення деривативів на основі зовнішніх чинників є складним процесом тому, що зв'язок між динамікою

макроекономічних показників не є сталим, а залежить від конкретної ситуації на фондовому ринку [143]. Збільшення кількості зовнішніх чинників в моделі збільшує волатильність прогнозного ряду цін, а також може поглинати вплив кожного окремого чинника на залежну змінну [78].

Аналіз ціноутворення різноманітних фінансових інструментів зручно проводити за допомогою методів стохастичного аналізу. Л. Башельє довів, що ціна фінансового активу зазнає випадкових змін згідно з броунівським рухом. Під час удосконалення його теорії більш точною виявилася модель геометричного броунівського руху. На початку розвитку досліджень стохастичних процесів на фондовому ринку, модель Блека-Шоулса, а пізніше моделі Васічека (зі сталою відсотковою ставкою) та Орштейна-Уленбека встановлені зі сталою волатильністю (дисперсією, з сталим коефіцієнтом дифузії). Розвиток застосування цих моделей ґрунтувався на ускладненні накладених умов на волатильність; залежність від часового чинника, від зміни ціноутворення (місцевого і локального чинника), від впливу різного роду чинників, їх стохастичного характеру, що мають різну динаміку руху з відповідною до їх розвитку шкалою представлення.

На ефективних ринках при деякій стабільності умов розвитку, розподіл цін виражається через функцію Гріна від розв'язку системи диференціальних рівнянь, якщо є різні зміни (порушення стабільності) то додається стрибок цін. Оскільки, прості та зручні для застосування розв'язки рівнянь та систем диференціальних рівнянь ціноутворення не завжди можна знайти то використовують різного роду наближення, а саме

спектральні розклади, розклади в ряд Тейлора. Розклад функції волатильності в ряд Тейлора дає можливість враховувати різні умови проходження процесу і на кожному кроці обчислювати наближене значення процесу. Правильність і точність підходу перевіряється за допомогою методу Монте-Карло. Зауважимо, що в сучасних умовах азійські опціони описуються виродженими дифузійними процесами Колмогорова. В ролі функції, яку розкладають береться ціна, а фундаментальний розв'язок, або щільність розподілу при наближенні до початкових чи крайових точок, веде себе як білий шум.

Зауважимо, що коректну постановку крайових задач, що відповідають стохастичним економічним процесам, було розроблено У. Феллером [129].

Випадкові чинники, що впливають на зміну процесу моделюються як розв'язки деяких генераторів, що розглядаються в певних шкалах і їхній вплив, тобто збурення можна порівнювати за різними рівнями шкали. Такий підхід дає добрі результати при дослідження процесів фондового ринку. Вироджені дифузійні процеси, які моделюються рівняннями Колмогорова не можна представити через власні значення та власні функції, тому тут доцільне застосування розкладу в ряди Фур'є коефіцієнтів рівняння тоді щільність цього стохастичного процесу має представлення через ряд послідовних наближень щільностей, що відповідають коефіцієнтам розкладу в ряд Тейлора. Розглянутий підхід дозволяє проводити ціноутворення деривативів в різні часові моменти з наперед заданою точністю, а розвинута методика дає можливість

проаналізувати можливий перебіг процесу та зробити висновки і пропозиції, щоб мінімізувати ризики.

Згідно розвинутої методології можна розглянути модель ціноутворення опціонів, які описуються процесами на основі рівнянь дифузії з інерцією. Найчастіше такі процеси відбуваються на фондових ринках при ціноутворенні європейських та азійських опціонів. Теорія ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності є необхідними для гнучкості в прийнятті управлінських стратегічних рішень інвесторами на фондовому ринку. Слід зазначити, що ціноутворення деривативів на фондовому ринку може бути спрогнозованим тоді, якщо що він розвивається еволюційним шляхом, у випадку різного роду революційних змін, які проходять в державі слід застосовувати спеціальні алгоритми.

Здійснення побудови економіко-математичних моделей для прогнозування ціноутворення на різних стадіях розвитку та для різних горизонтів прогнозування дозволяє формалізувати процес ціноутворення фінансових активів та знизити використання інтуїтивних методів [68]. Реалізацію такого підходу потрібно здійснювати при умові використання різних інструментів прогнозування, об'єднуючи елементи технічного та фундаментального аналізу, нейронних мереж та сучасних досягнень в сфері моделювання економічних процесів.

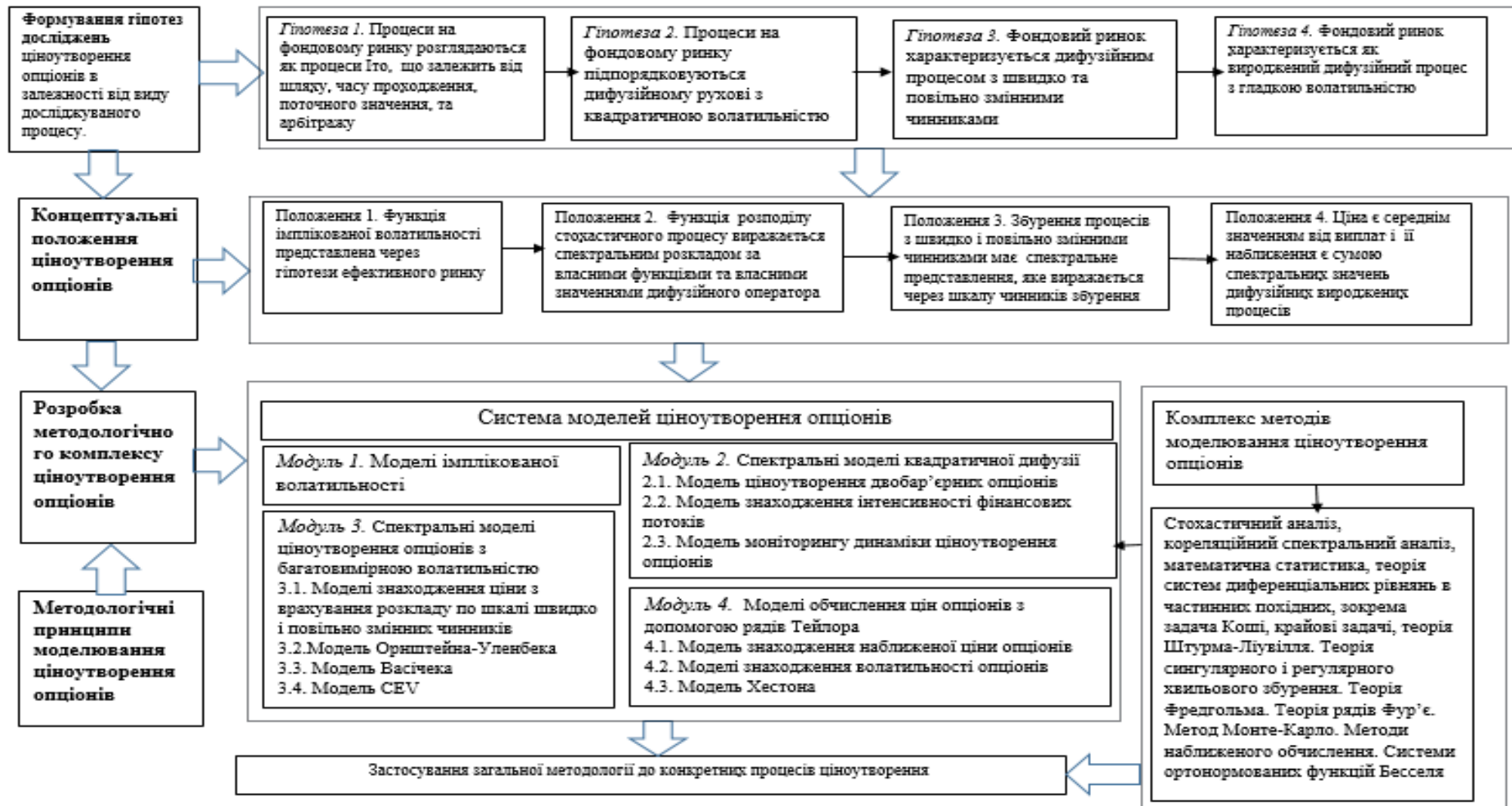


Рис. 1.8. Концептуальна схема дослідження ціноутворення на фондовому ринку

Розглянуті теоретичні концепції дозволяють знайти методи, які забезпечують можливість передбачати результати цілеспрямованих дій інвесторів, що відбуваються під впливом різноманітних чинників на фондовому ринку.

Побудовано концептуальну модель, яка забезпечує можливість передбачати результати цілеспрямованих дій інвесторів, що відбуваються під впливом різноманітних чинників на фондовому ринку.

На основі проведеного дослідження існуючих теоретичних концепцій ціноутворення можна зробити висновок, що вони базуються на конкретних припущеннях, які з протягом певного проміжку часу та з виникненням нових обставин змінюються і не точно відображають ситуацію на фондовому ринку. Тому, наведені теоретичні концепції потрібно використовувати в комплексі для прогнозування динаміки ціни опціонів в кожному конкретному випадку.

У результаті дослідження теоретико-методологічних засад динаміки фондового ринку зроблено наступні висновки.

1. Фондовий ринок України є складною динамічною системою, який має за мету перерозподіл фінансових ресурсів в як в межах економічної системи країни, так і поза ними, будучи невід'ємною складовою світового фінансового ринку. Враховуючи останнє, операції з фінансовими інструментами, що здійснюються на фондовому ринку України знаходяться під впливом глобалізаційних процесів та характеризуються значною волатильністю цін та фінансових ризиків. В роботі фондовий

ринок ототожнюється з ринком цінних паперів (короткострокових та довгострокових) і розглядається як частина фінансового ринку.

2. Встановлено, що динамічний розвиток інноваційних фінансових інструментів, має складний характер, який визначається як зовнішніми чинниками, які виникають внаслідок недосконалості фінансових ринків, та турбулентності макроекономічного оточення, так і внутрішніми – джерелом яких є потреба учасників фінансового ринку у створенні інструментів, котрі пом'якшують ризики, збільшують прибутки та підвищують його конкурентоспроможність. Тому складовим елементом фондового ринку є ринок деривативів, головним завданням яких є хеджування ризиків, що супроводжують операції з базовими фінансовими інструментами. При цьому одним із основних параметрів, що характеризують операції з деривативами є волатильність.

3. Доведено, що високий ступінь складності деяких похідних інструментів та поява багатьох прошарків посередників під час сек'юритизаційних транзакцій ведуть до того, що фінансові ринки перестають бути прозорими. Наразі можливості раціонального вибору типових деривативів для ефективного захисту як продавців так і інвесторів від ризиків є обмежені. Усе це дає підстави вважати, що вони є однією з основних причин періодичних розладів на фінансових ринках та виникнення криз не лише локального і регіонального, але й глобального масштабу, з огляду на легкість їхнього поширення.

4. В роботі встановлено, що оцінка впливу похідних фінансових інструментів як на мікро- так макро рівнях є амбівалентною, а її

застосування значно збільшує можливості управління ризиками для учасників фондового ринку, а відтак може визначати обсяги і різноманіття реалізованих ними фінансових операцій з екстраполяцією на економічне зростання та добробут окремих країн. Втім їхнє складне, багаторівневе і ризиковане використання, за відсутності відповідних правил та контролю з боку регуляторів на національному та міжнародному рівнях веде до зростання турбулентності фінансових ринків.

5. Встановлено, що широкомасштабне застосування все більш складних фінансових інструментів (структурованих, синтетичних) з їх багаторівневою системою означає, що фінансові ринки стають все менш прозорими. Ризик вибору деривативів, які є неадекватними для даного типу транзакції, стає все більшим.

Основні результати наукового дослідження, що отримані в даному розділі опубліковані автором у наукових працях [5; 6; 7; 9; 11].

РОЗДІЛ 2.

РЕТРОСПЕКТИВНІ ПРИЧИННО-НАСЛІДКОВІ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ ФОНДОВОГО РИНКУ

2.1. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС

Природу волатильності як стохастичного процесу можна пояснити на значній кількості емпіричних даних, які обґрунтовують властивості розподілів, що виступають при трансформації витрат [103]. Наприклад, спостережуване співвідношення між величиною волатильності і активом може бути пояснене рівнем залежності волатильності згідно з моделлю (CEV) варіації сталої еластичності [126, 134, 256, 259], або моделлю Кокса і Росса [135]. Стохастична волатильність може також виникнути ендогенно за допомогою рівноваги, яка моделює поведінку учасників ринку.

Більш загальні стохастичні моделі волатильності запропоновані Хулом і Вайтом [195], побудовані на ідеї, що коректна специфікація волатильності може мати загальне і аналітичне трактування. Дуже часто використання правдоподібних параметрів, аналогічно, як при від'ємній кореляції між волатильністю і ціною, на практиці не відповідає фактичним цінам опціонів. При емпіричній верифікації відбувається пошук структурних параметрів за допомогою відбору істотно різних часових рядів для проведення оцінки.

В цьому сенсі фактично, в науковій літературі [242] постає проблема щодо складу моделі. Будемо встановлювати структуру моделі волатильності перед дослідженням значень цін опціонів.

Узагальнені процеси з умовною гетероскедастичністю (GARCH) використовують граничні дискретні проміжки часу для моделювання

стохастичної волатильності [148-149]. Припустимо, що враховуючи інтереси інвестора, ми отримуємо ціни опціонів, на основі інформації про близькі часові проміжки, тобто без неперервної часової структури неможливо визначити точну стратегію повторення.

При виборі моделі встановлення цін потрібно врахувати теоретичну загальність і склад структури волатильності та здатність ефективно і точно оцінювати параметри. Для першого твердження наукова література досягла певних результатів, піднімаючи нові важливі проблеми і розробляючи різні підходи [13]. Застосовуючи швидку середню зміну волатильності, було запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів. Основною їхньої ідеєю – є удосконалення моделі Блека-Шоулза, яка відображає вплив стохастичної волатильності на ціну.

В 1998 році Гобсон і Роджерс [194], (надалі HR) конкретизували локальну волатильність за допомогою моментів минулих повернень. Позначимо $Z_t = \ln(e^{-rt} P_t)$ логарифм від дисконтованої зміни ціни та визначимо розгалужену функцію порядку m

$$S_t^{(m)} = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} (Z_t - Z_{t-u})^m du, \quad (2.1)$$

де параметр λ описує вагу ретроспективних спостережень. Ціни акцій задовольняють стохастичне диференціальне рівняння

$$dZ_t = \sigma(t, Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}) dB_t + \mu(t, Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)}) dt$$

для деяких гладких функцій $\sigma(\cdot) > 0$ і $\mu(\cdot)$.

Оскільки $\sigma(\cdot)$ може також залежати від P_t , то модель включає частинний випадок, коли волатильність є детермінованою функцією ціни. Ці гіпотези зберігають повноту та дозволяють визначити незалежну ціну опціону. Розглянута особливість має перевагу над повністю

стохастичними процесами волатильності, де розгляд арбітражу не достатній, щоб визначити ризикову премію тобто різницю між ціною виконання та ринковою ціною базового інструменту [27]. Надалі, припустимо, що миттєва волатильність - це функція першого порядкового відгалуження $S_t = S_T^{(1)}$. Таке припущення дає можливість одержати коректну постановку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова і розв'язати її з максимальною точністю це і є модель Гобсона-Роджерса[14].

Використовуючи рівняння (2.1), розкладено S_t як відхилення поточної ціни від експоненціально зваженої середньої величини минулих цін.

$$S_t = Z_t - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} Z_{t-u} du \quad (2.2)$$

Параметр λ визначає часовий горизонт «рухомих часових вікон» інтегралу справа. Для більших значень параметра λ , S_t залежні від недавнього минулого, тоді як для менших значень – S_t співпадають з приростами зміни цін. В цьому випадку рівень залежності волатильності більш узгоджений.

Щоб побудувати основну модель, яка використовується для обчислювальних процедур, розглянемо нейтральну міру ризику $\bar{P}$ і $\bar{P}$ -броунівський рух B_t . Нехай $e^{-rt} P_t$ буде $\bar{P}$ -мартингал, який є розв'язком стохастичного рівняння $d\bar{P}_t = \sigma \bar{P}_t d\bar{B}_t$, за формулою Іто [14]

$$dZ_t = \sigma d\bar{B}_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt. \quad (2.3)$$

Після заміни $u = t - s$ рівняння (2.2) має вигляд

$$S_t = Z_t - \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda s} Z_s ds,$$

диференціал якого дорівнює

$$dS_t = dZ_t - \lambda S_t dt. \quad (2.4)$$

Гобсон і Роджерс знайшли загальну формулу для диференціала функцій вищих порядкових відгалужень і довели, що $(Z_t, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)})$ утворюють Марківський процес.

Зробивши заміну $U = Z - S$ і позначивши $f(t, U_t, Z_t)$ ціну в момент $t < T$, одержимо що, вартість можливої премії має вигляд

$$f(t, U_T, Z_T) = q(Z_T), \quad (2.5)$$

у час T . Використовуючи стандартні аргументи, одержуємо диференціальне рівняння в частинних похідних

$$f_t + \lambda(Z - U)f_U - \frac{1}{2}\sigma(Z - U)^2(f_{ZZ} - f_Z) = 0, \quad (2.6)$$

з граничною умовою (2.5). Рівняння (2.6) є ультрапараболічним стохастичним рівнянням типу Колмогорова.

Тепер припустимо, що волатильність змінюється через певний час. Природа цього процесу є важливою проблемою в теорії фінансів, в літературі запропоновані різні спроби моделювання цього процесу [269].

Залежність між волатильністю та минулими змінами є інтуїтивною. У роботах [147, 237] запропоновано пов'язати поверхню волатильності з минулими змінами в порядкувому рівні, тоді як, на практиці, як правило, фахівці, використовують експоненціальне зваження, щоб передбачати волатильність. Крім того, ця гіпотеза вводить ефект скупчення волатильності. Залежно від значень λ , значні зміни в ціні змушують відгалуження (2.6) істотно змінюватися протягом певного періоду.

Особливості динаміки волатильності, такі як локальна сталість і залежність волатильності від нещодавно спостережуваної волатильності, пояснюються її природою [161, 248].

Провівши аналіз, використовуючи значення величини індексу ПФТС, за період з січня 2013 р. по грудень 2017 р. [62] Обчислимо значення функції S

$$\bar{S}_t = \sum_{i=0}^M \frac{v_i}{\Xi} (Z_t - Z_{t-i}), \quad (2.7)$$

де $v_i = e^{-\lambda i \Delta t}$ вагові коефіцієнти, а Ξ – їхня сума. Як відповідну оцінку волатильності візьмемо

$$\bar{\sigma}_t = \sqrt{k \sum_{i=1}^M \frac{v_i}{\Xi} (Z_{t-i+1} - Z_{t-i} - \bar{\mu}_t)^2}, \quad (2.8)$$

де $\bar{\mu}_t = \ln \frac{M-t}{t}$ – ваговий коефіцієнт, $k = \Xi^2 / \sum \left(\frac{\Xi^2}{M} - v_i^2 \right)$ це

коректувальний коефіцієнт для неупередженої оцінки σ^2 . Для обчислення щоденних оцінок, розглянуто 122 операційних дні та одиницю часу $\Delta t = 1/122$.

Взявши $M = 1224$, послідовно обчислюємо оцінку, засновану на 1224 спостереженнях за кожним з операційних днів. Завдяки формулам (2.7) і (2.8), заснованих, обчислення успішно виконуються.

На рис. 2.1 видно взаємовідношення між оцінкою (2.7) та волатильністю (2.8) для різних значень λ . Кожен випадок ілюструє криву, одержану, наближенням волатильності $\bar{\sigma}_t$ за допомогою полінома другого порядку $a\bar{S}^2 + b\bar{S} + c$.

На рис. 2.2 наведено зв'язок між оцінкою (2.7) та волатильністю $\bar{\sigma}_t$ обчисленої допомогою частки квадратних тричленів $\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}$.

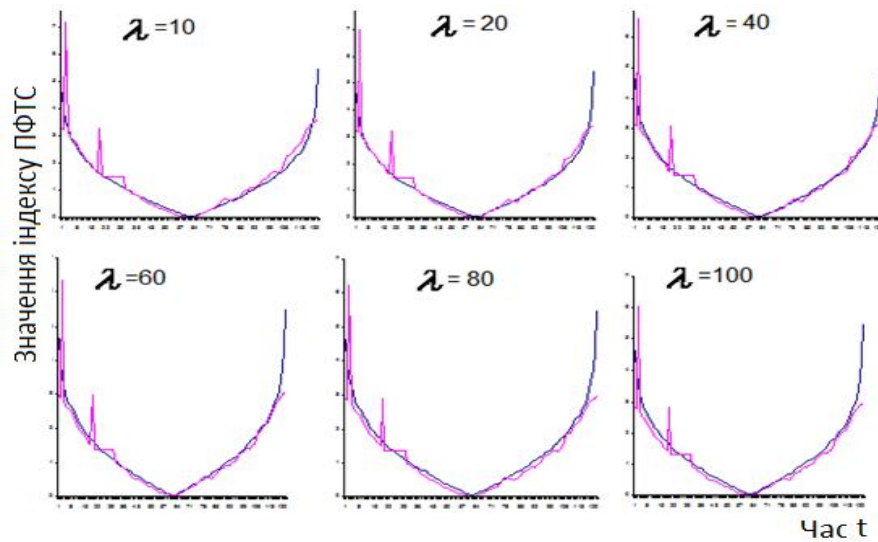


Рис.2.1. Реальне та прогнозне значення волатильності індексу ПФТС при різних значеннях параметра λ .

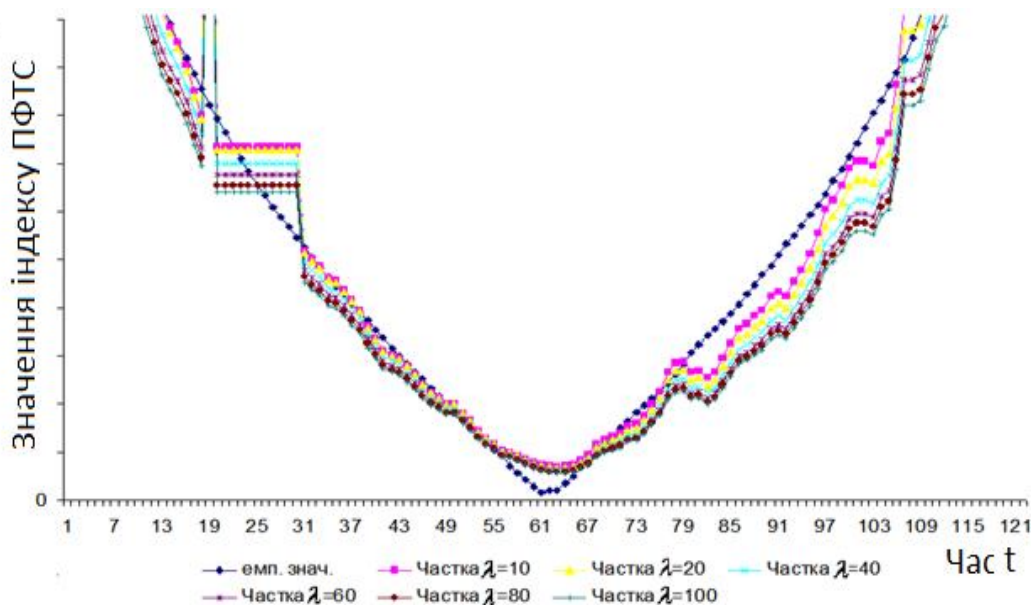


Рис.2.2. Тренд волатильності індексу ПФТС, знайдений як частка двох многочленів при різних значеннях параметра λ .

В таблиці 2.1 наведені параметри для різних видів моделей, при відповідних значеннях λ , обчислені за допомогою методу найменших квадратів.

Таблиця 2.1.

Параметри для різних видів моделей

λ	10	20	40	60	80	100
Коеф.	$\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}$					
c	0,278	0,282	0,295	0,306	0,315	0,323
d	-0,035	-0,035	-0,036	-0,038	-0,039	-0,040
e	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003
a	0,241	0,240	0,239	0,238	0,238	0,238
b	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
	$\sigma(S) = aS + b$					
a	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,005	-0,005
b	1,268	1,227	1,165	1,118	1,083	1,056
	$\sigma(S) = aS^2 + bS + c$					
c	3,298	3,233	3,090	2,974	2,894	2,813
b	0,881	0,857	0,816	0,774	0,760	0,740
a	0,059	0,057	0,054	0,051	0,050	0,049
	$\sigma(S) = \sqrt{a + bS^2}$					
a	268,370	263,143	251,614	242,365	235,146	229,463
b	-1,772	-1,727	-1,646	-1,584	-1,536	-1,499

Обширні дослідження доводять, що найефективнішою специфікацією для функції волатильності є $\sigma(S) = \frac{1 + aS + bS^2}{c + dS + eS^2}$ та $\sigma(S) = aS^2 + bS + c$, це в значній мірі скорочує зусилля, пов'язані з проблемою оптимізації [27].

Проведені дослідження підтверджують емпіричну очевидність наших припущень і допомагають визначити відповідну функцію волатильності. Доведено залежність волатильності від розгалужених функцій S першого порядку на прикладі індексу ПФТС. Встановлено на основі емпіричних даних, що найкраще функцію волатильності наближає квадратична регресія, а особливо – частка квадратних тричленів.

У теорії ціноутворення опціонів [103], базовий актив моделюється як геометричний броунівський рух, чия динаміка під нейтральною межею ризику задається як

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (2.9)$$

де r – локальна безризикова відсоткова ставка, а σ – волатильність. Якщо припустити, що обидва параметри є константами, то модель (2.9) описує прості опціони.

В даний час формула Блека-Шоулза [103] широко використовується на практиці, у випадку, коли ціни на купівлю та продаж опціонів задані в термінах так званої умовної змінної. Проте ціни, за якими продаються деривативи, неузгоджені з припущенням про сталу волатильність, значні емпіричні доведення стохастичної волатильності стимулюють розвиток більш реалістичних моделей. Основна мета моделей зі змінною волатильністю полягає в наступному: з одного боку, можна отримати ціну звичайного опціону, яка узгоджена з розглянутими параметрами змінної, а з іншого, обрати правильний варіант стратегії для підвищення

продуктивності хеджування [27]. З теоретичної точки зору, це не важко досягти, бо будь-яка модель, яка залежить від значної кількості параметрів може бути відкалібрована, щоб відповідати ринковим цінам. Слід підкреслити, що процедура калібрування залежить від кількості та інформативності наявних даних [128, 156].

У моделі локальної волатильності, змінна є детермінованою функцією часу та поточної ціни базового активу [194]. Переваги такого підходу в тому, що в принципі появляється можливість точно визначити функцію від змінної таким чином, щоб ціни опціонів узгоджувалися з ринковими цінами.

Перші результати в цьому напрямку були отримані Гобсоном і Роджерсом [194], які запропонували визначити модель змінної як різницю між поточною ціною і середнім зваженим показником минулих цін. Якщо для броунівського руху W позначити через S_t біржову ціну, а через M_t і D_t відповідно тенденції і відхилення процесів, то можна записати

$$M_t = \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda s} Z_s ds, \quad \lambda > 0, \quad D_t = Z_t - M_t, \quad (2.10)$$

де $Z_t = \ln(e^{-rt} S_t)$ є логарифмом дисконтної ціни процесу. Функції $e^{\lambda s}$ в (2.10) є ваговими коефіцієнтами, а параметр λ описує ставку, за якою знижуються ціни.

В умовах процесу Іто S_t є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dS_t = \mu(D_t) S_t dt + \sigma(D_t) S_t dW_t, \quad (2.11)$$

де μ і $\sigma > 0$ є обмеженими функціями, які задовольняють сформульовані гіпотези, з тим щоб гарантувати, що система (2.10)–(2.11) має розв'язок. Ключовою особливістю моделі є те, що процес (S_t, D_t) є марківський [14]. Таким чином, ціна U опціону з терміном погашення T , має вигляд [13]

$$U(S_t, t) = e^{-r(T-t)} K w(r(T-t) + \ln(S_t / K), M_t - \ln K, T-t),$$

де K – початкова ціна опціону, $w = w(x, y, t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\sigma^2(x-y)}{2}(\partial_{xx}w - \partial_xw) + (x-y)\lambda\partial_yw - \partial_tw = 0, \quad \text{в } R^2 \times [0, T], \quad (2.12)$$

$$w(x, y, 0) = (e^x - 1)^+ \quad \text{при } (x, y) \in R^2. \quad (2.13)$$

Таким чином шляхо-залежні моделі ґрунтуються на емпіричному доведенні залежності волатильності по відношенню до відхилення. На рис. 2.3 наведено імпліковану змінність проти скоригованої логарифмічної грошової поверхні для опціонів значень індексу ПФТС протягом 2017 року. Зауважимо, що середня вага $\lambda e^{-\lambda t}$ в (2.13) не може бути достатньо гнучкою, щоб врахувати абсолютно всі особливості процесу, що можуть виникнути, наприклад через злиття акцій чи зміни капіталізації. Рис. 2.4 репрезентує еволюцію значень імплікованої волатильності для індексу ПФТС [13]. Досліджувані змінні згруповані по областях значень D_t , значення яких зростає при зменшенні D_t . Це добре висвітлює співвідношення між змінною та ринковими цінами [94].

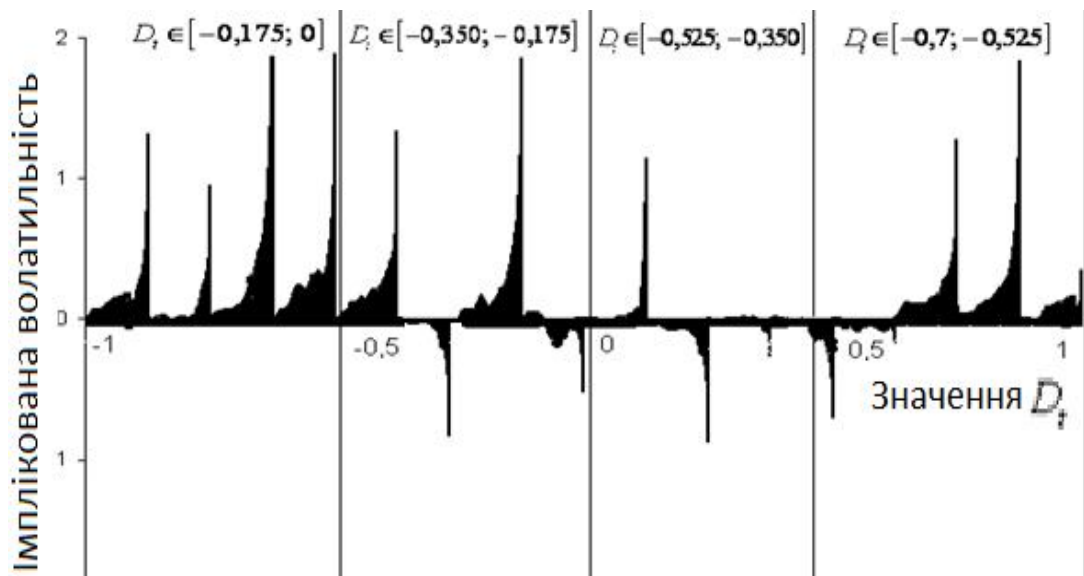


Рис. 2.3. Еволюція значень імплікованої волатильності побудованої

за значеннями логарифмічної грошової поверхні $\frac{\ln(e^{r(T-t)}S_t/K)}{\sqrt{T-t}}$ за згрупованими значеннями тренду відхилень D_t для індексу ПФТС в 2017 році.

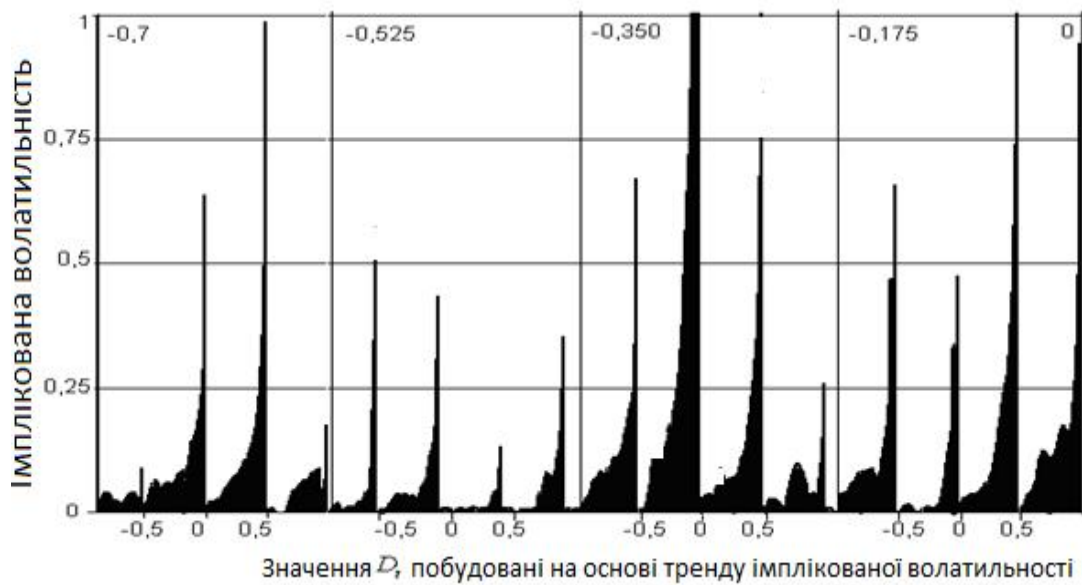


Рис. 2.4. Еволюція значень імплікованої волатильності побудована

за значеннями логарифмічної грошової поверхні $\frac{\ln(e^{r(T-t)}S_t/K)}{\sqrt{T-t}}$ за згрупованими значеннями тренду відхилень D_t для індексу ПФТС в 2017 році.

Слабкою стороною моделі Гобсона-Роджерса є те, що багато проблем математичного і економічного характеру виникають з визначення відхилення процесу D_t , який включає в себе шлях базового активу в минулому, тобто на проміжку $(-\infty, T]$. Вимога необмеженого періоду часу в минулому, очевидно ставить практичні проблеми, оскільки тільки

скінчені проміжки часу є наявними, що приводить до відсутності даних в моделі. Щоб подолати цю проблему запропоновано узагальнення моделі Гобсона-Роджерса, тобто введена до розгляду нова модель для цін активів зі змінною залежною від минулого. Розглянемо середню вагу φ , яка є невід'ємною, кусково-неперервною і інтегрованою функцією на $(-\infty, T]$ і строго додатною на $[0, T]$, тоді отримаємо [16]

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(s) ds. \quad (2.14)$$

Відзначимо, що якщо φ має компактний носій (замикання підмножини області визначення функції φ , де функція φ набуває ненульових значень), то в цьому випадку область інтегрування в (2.14) обмежена. Позначимо через r безризикову ставку і $B_t = e^{rt}$. Визначимо процес

$$M_t = \frac{1}{\Phi(t)} \int_{-\infty}^t \varphi(s) Z_s ds, \text{ або еквівалентно } dM_t = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)} (Z_t - M_t) dt, \quad (2.15)$$

де Z_t є розв'язком диференціального рівняння

$$dZ_t = \mu(Z_t - M_t) dt + \sigma(Z_t - M_t) dW_t, \quad (2.16)$$

а μ і σ обмежені неперервні за Гельдером функції та σ є строго додатною функцією. Основна ідея полягає в розгляді більш гнучкого відхилення процесу визначеного в термінах загальної середньої ваги, що можливо співвідноситься зі скінченим періодом часу. При цих припущеннях відомо, що диференціальне рівняння (2.16), з урахуванням (2.15), має єдиний слабкий розв'язок і при цьому $(Z, M), (Z, D)$ є процесами Маркова. Типові характеристики середньої ваги даються на таких прикладах:

1) $\varphi(t) = e^{P(t)} \max\{Q(t), 0\}$ де $P(t)$, $Q(t)$ є поліноміальними функціями, зокрема $P(t) = \lambda t$ і $Q(t) = 1$;

2) $\varphi(t) = 1$ для $t \in [0, T]$ і $\varphi(t) = 0$ для $t \notin [0, T]$, це відповідає середньому геометричному азійського опціону;

3) $\varphi(t)$ – кусково-лінійна функція – найбільш загальний випадок.

На рис. 2.5 наведено величину імплікованої волатильності для індексу ПФТС. Досліджувані змінні згруповані по областях значень відхилення D_t [13]. Проаналізувавши рис. 2.5, можемо зробити висновок, що значення імплікованої волатильності зростає при зменшенні D_t . Це означає, що існує тісний взаємозв'язок між змінною та ринковими цінами.

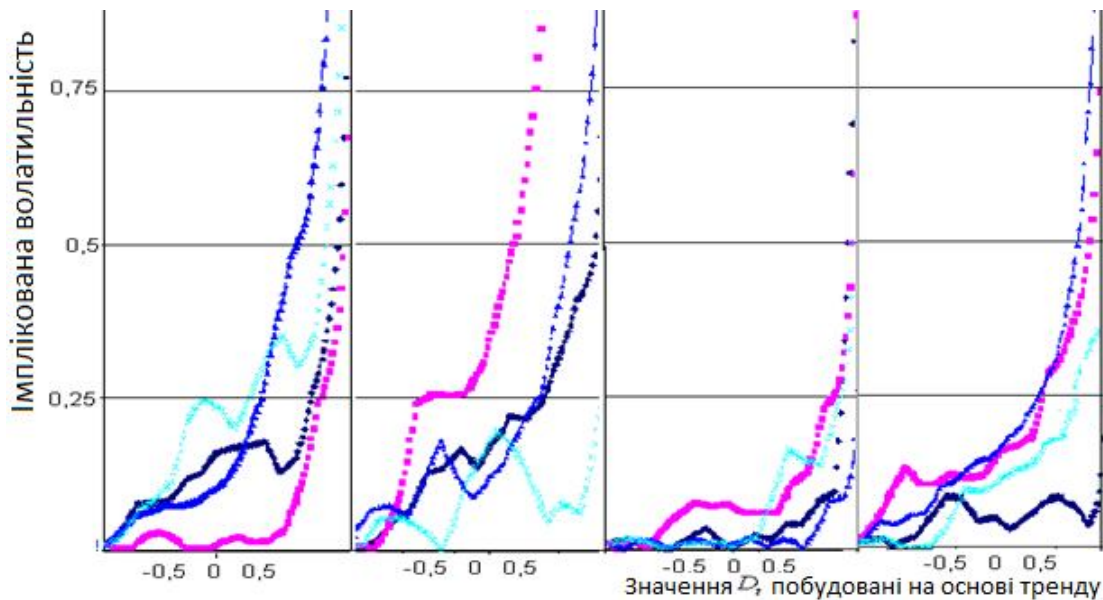


Рис.2.5. Імплікована волатильність за згрупованими значеннями тренду відхилення D_t для індексу ПФТС в 2017 році.

Використовуючи модель шляхо-залежної волатильності побудовано тренд D_t і за його значеннями, використовуючи метод найменших квадратів (МНК), знайдено волатильність індексу ПФТС, результати розрахунку наведено на рис. 2.6. Найкраще репрезентує даний процес квадратична модель $\sigma = a + bD_t + cD_t^2$ де $\lambda = 10$, $\tau = 0,5$, $N = 2000$, оцінки одержані з точністю до 0,94.

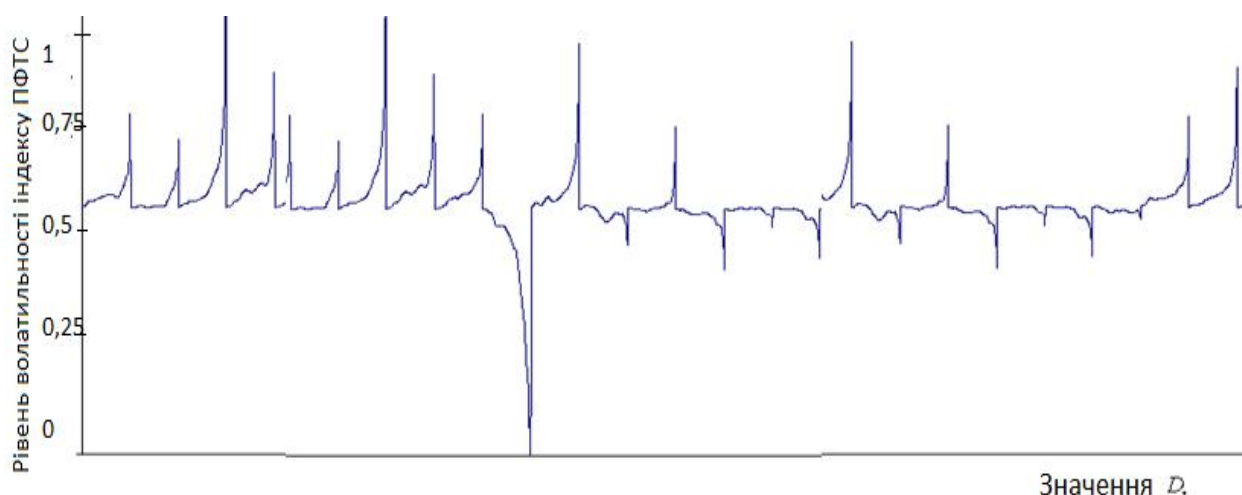


Рис. 2.6. Тренд волатильності індексу ПФТС в 2017 році знайдений за МНК.

Зауважимо також, що шляхозалежність волатильності яка включає інформацію про минуле, і дає змогу в умовах стабільного ринку, спрогнозувати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, а також відобразити позитивні або негативні тенденції активу. Наприклад, на відміну від стандартних локальних, або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку, шляхозалежна модель волатильності призначена для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою дослідження динаміки ринку в більш природний спосіб. Тобто в цій моделі волатильність не потрібно постійно калібрувати

(що є відомим недоліком локальних моделей волатильності). Завдяки цьому, модель користується значною увагою серед вчених і практиків.

2.2. Моделювання залежностей причинно–наслідкового характеру між індексом ПФТС та світовими індексами

Власлива ринку невизначеність, що вимірюється варіаціями або коваріаціями, змінюється в часі. Вивчення цих змін набули систематичного характеру і стало можливим лише з появою моделей авторегресійної умовної гетероскедастичності (AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic, ARCH). Основна ідея яких полягає у відмінності між умовними і безумовними моментами другого порядку. Тоді як безумовні варіації і коваріації стали, умовні моменти нетривіально залежать від минулих станів світу і розвиваються в часі [92, 93, 109].

Першим об'єктом моделювання стала інфляційна невизначеність. Згодом ARCH моделі знайшли застосування в аналізі волатильності цін і прибутковості спекулятивних активів. Застосуванням ARCH моделей встановлено, що динаміка волатильності багатьох фінансових змінних підпорядкована стійким закономірностям. Традиційна модель ціноутворення для капітальних активів і її динамічна модифікація указують на пропорційну залежність між очікуваною надмірною віддачею ринкового портфеля і його умовним стандартним відхиленням. ARCH модель є природним інструментом для вивчення цієї проблеми в динамічному контексті, коли умовна дисперсія змінюється в часі. Умовні

кореляції між сегментами фінансового ринку дозволяють оцінити ефективність диверсифікації засобів як спосіб страхування ризиків. Низька кореляція вказує на ефективність диверсифікації, тоді як висока кореляція свідчить про протилежне.

Стратегія моделювання курсів фінансових інструментів у випадку моделі класу ARCH зводиться на практиці до двох напрямів перевірки удосконалення специфікації основного рівняння регресії

$$r_t = x_{(k)t} \alpha_{(k)} + \xi_t,$$

де $x_{(k)t} = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Kt})_{(1 \times K)}$ вектор K пояснювальних змінних,

$$\alpha_{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix}_{(K \times 1)} \quad \text{вектор відповідних параметрів,} \quad \xi_t = v_t \sqrt{h_t}, \quad \text{а}$$

$v_t : IID(0,1), \xi_t : IID(0, \sigma_\xi^2)$ та

$$h_t = \gamma_0 + \sum_{s=1}^S \gamma_s \xi_{t-s}^2, \quad \gamma_0 > 0, \gamma_s \geq 0 \quad (2.17)$$

Ефективність прогнозу сформульованого на підставі моделі ARCH часто зумовлена врахуванням у рівнянні (2.17) існуючих на ринку залежностей, які мають причинно–наслідковий характер. Висока правдивість прогнозу існує завдяки специфікації детермінуючої частини моделі. Найважче відшукати причинно–наслідкові залежності на рівні даних високої частоти, які обмежені кількома видами змінних, що реєструються з тією ж самою частотою як курси більшості фінансових інструментів. Такі перевірки найчастіше охоплюють аналіз взаємного впливу інструментів, які походять з різних сегментів фінансового ринку,

наприклад грошового, валютного, капітанового, та різних географічних ринків, цілі аналізу впливу індексів великих бірж цінних паперів на індекси або курси акцій окремих компаній на інших, менших біржах у світі [97, 98, 108].

На противагу більшості економічних явищ, специфіка функціонування фінансових ринків дозволяє реєстрування біржових курсів та цін інших фінансових інструментів з незвично високою частотою. Найвищий її рівень стосується даних денних, годинних, хвилинних і навіть поточних даних, які появляються в інформаційних системах. Наприклад кількість котирувань індексу Dow Jones Industrial Average (DJIA) на протязі одного дня перевищує 10000, а кількість даних, які реєструються на валютному ринку в агентстві Рейтер 3000. На ринку цінних паперів України, наприклад на ПФТС, кількість спостережень в системі постійних записів до індексу становить близько 400–500 протягом одного дня.

У випадку даних з такою високою частотою їх не можна безпосередньо використати для моделювання і прогнозування курсів окремих фінансових інструментів більшості доступних макроекономічних категорій. Вони звичайно реєструються з набагато нижчою частотою, тобто річною, квартальною або місячною. В той же час можливе єдине довершення агрегації біржових даних з нижчою частотою, що відповідає доступним макроекономічним даним і проведення аналізу на рівні такого спостереження, тобто виникає необхідність відшукування реляції в причинно–наслідковому характері даних на рівні високої частоти, яка

стосується обмеженої кількості фінансових інструментів. Однією з можливостей є використання даних біржового обороту. Його найважливіша риса, об'єм обороту тобто кількість трансакцій, як і їх поточна вартість є детально реєстрована на відповідних біржах і може бути доступна для всіх. Як правило ці дані збираються не тільки в формі з агрегованих для всього ринку, але і для окремих акцій чи сегментів. Для цього часто використовується оборот.

Зазначимо, що величини курсу–обороту завжди використовується на фінансових ринках в технічному аналізі, де служить для конструкції так званих технічних показників. Варто підкреслити, що крім існування сильних емпіричних підстав весь час необхідне теоретичне обґрунтування для існування залежності курсу–обороту [7,8 107].

По–перше вважаємо, що щоденний біржовий оборот може бути порівнюваний з денною зміною курсів, а також залежить від числа трансакцій, завірених на протязі одного дня, які в свою чергу залежать від варіанції денних змін самих курсів. По–друге, залежність курсу–обороту може виступати з приводу розбіжності в передбаченнях учасників ринку, що є додатно скорельована з величиною самого біржового обороту. По–третє, денна зміна курсу і денний оборот залежать від середнього темпу напливу інформації на ринок, розбіжності думок учасників ринку на тему нової інформації та глибини ринку репрезентованої через кількість активних учасників в даний момент на ринку. Якщо зафіксувати в часі два перші чинники, то залежність курсу–

обороту може бути виявлена зміною ринкової активності, яка генерується через учасників ринку.

Рівносіллями є сформульовані теоретичні постулати до спостережень, що залишилися є наступні. По–перше існує залежність між оборотами і автокореляцією ставки обороту курсів відповідних фінансових інструментів, хоч все одно величини, як і сам напрям того зв'язку можуть бути різними для окремих ринків, інструментів та околіїв. По–друге, впровадження обороту до функції умовної варіації моделі ARCH правило, приводить до зменшення чи навіть повного виключення ефекту ARCH. Це означає, що згідно з теорією моделей ARCH у випадку часових рядів, які породжені фінансовими ринками, явище групування біржового обороту може бути безпосередньою причиною групування курсової варіації, появою ефекту ARCH та самої гетероскедастичності випадкового складника в класичних моделях. По–третє, на валютному ринку трансакції укладені при низьких оборотах є більш “інформативні” ніж ті, котрі мають місце коли обороти на біржі є потужними. Варто підкреслити, що згідно з теорією ефективності ринків капіталу існування всяких залежностей причинно–наслідкового характеру повинні бути автоматично виключені з ринків з коротким часовим горизонтом. Їхнє поява можлива на ринках країн, що розвиваються, відповідно менш ефективних в сенсі класичної теорії ефективності.

На біржі ПФТС залежність між величинами індексу ПФТС та відповідним йому біржовим оборотом є тісною. Це доводять результати аналізу кореляції які наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2.

Кореляція індексу ПФТС

Роки	$cor(PFTS_t, VOL_t)$	$cor(RLPFTS_t, RLVOL_t)$
98-17	0,356279	0,008473
2010	0,204266	0,04678
2011	0,231298	-0,02326
2012	0,011885	-0,00338
2013	-0,32458	-0,00971
2014	-0,07635	0,062312
2015	0,036034	0,007611
2016	0,212256	-0,02709
2017	0,274939	0,013417

де $PFTS_t$ – величина індексу ПФТС в дні t , VOL_t – величина обороту в дні t , $RLPFTS_t = \ln(PFTS_t) - \ln(PFTS_{t-1})$, $RLVOL_t = \ln(VOL_t) - \ln(VOL_{t-1})$.

Зауважимо що сила зв'язку між величинами індексу ПФТС та відповідним йому біржовим оборотом не є сталою, а змінюється в часі.

Важливий результат вийшов у випадку порівняння динаміки коефіцієнтів кореляції обчислених для темпів і рівнів зросту. В більшості виокремлених околів можна зауважити, що величина коефіцієнтів кореляції зростає то спадає для темпів зросту.

Вступний аналіз кореляції між індексом і оборотами на ПФТС дозволяє вважати, що біржовий оборот може становити добру пояснюючу змінну в основному рівнянні регресії моделі ARCH. Ця залежність використана при конструкції відповідних рівнянь моделі класу ARCH для

індексу ПФТС. Використані в емпіричному дослідженні статистичні дані взяті з ПФТС в Україні та з сайтів (<http://finance.yahoo.com/> і <http://djindexes.com/>). База даних з денною частотою охоплює проміжок вісімнадцять років від 12.01.98 р. до 30.12.17 р.

Статистична інформація використана для конструкції змінних у відповідних моделях ARCH стосується індексу і оборотів на ПФТС, двох основних американських індексів Dow Jones Industrial Average (DJIA) і NASDAQ Composite, а також німецького індексу – DAX та індексу Російської Торгівельної Системи (РТС). База даних спеціально створена так, щоб врахувати всі ті дні, коли біржі закриті і сесії не відбувалися (вихідні та святкові дні). Індекс ПФТС є показником зваженої ринкової величини акцій, до його складу входять всі компанії основного ринку ПФТС. Якщо ж появляються нові емісії акцій, то щокварталу наступає так звана ревізія індексу ПФТС і включення нових учасників. Індекс тоді враховує всі котування на основному ринку ПФТС на кінець попереднього кварталу. Індекс ПФТС відслідковує середні зміни курсів акцій на ринку. Звичайно на біржі є близько 200 компаній з різною величиною обороту їх акцій, постає потреба такого добору, щоб можна найбільш результативно репрезентувати весь ринок. Критерієм є величина капіталізації ринку [30, 272]. Біржовий оборот для всього ринку отримується як сума величини оборотів всіма акціями протягом даної сесії. Величина обороту та його темп зросту наведені на рисунках 2.7.-2.8.

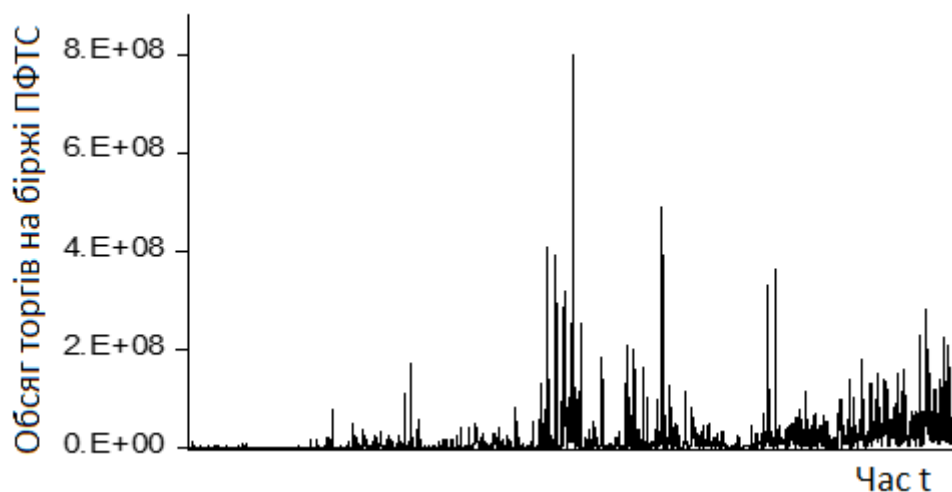


Рис. 2.7. Оборот ПФТС від 12.01.98 р. до 30.12.17 р.

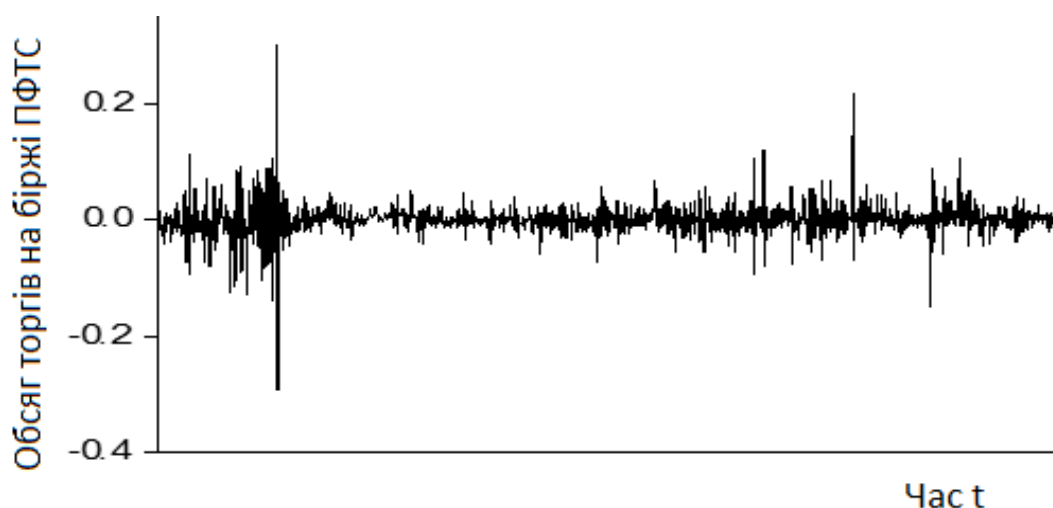


Рис. 2.8. Оборот ПФТС, темп зростання від 12.01.98 р. до 30.12.17 р.

Індекси DJIA і NASDAQ Composite взяті як головні характеристики двох найбільших біржових ринків у США, а DAX як найголовніший європейський та РТС як найосновніший в Росії.

Ефект ARCH досліджувався для денних даних 1998–2017 рр. Проведено оцінку параметрів моделей: ARCH(1), GARCH(1,1) і ARCH–M(1) основного рівняння регресії, авторегресійним, в трьох прийнятих варіантах специфікації (варіант А).

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \xi_t \quad (2.18)$$

де $\xi_t = v_t \sqrt{h_t}$ (у всіх трьох варіантах), у варіанті який використовує біржовий оборот як пояснюючу змінну (варіант Б)

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 v_{t-1} + \xi_t \quad (2.19)$$

де v_t темп зросту біржового обороту, а варіанті В без детермінуючої частини

$$r_t = \alpha_0 + \xi_t \quad (2.20)$$

де темп зросту індексів курсів залежить виключно від формування функції умовної варіації і відслідковує одну і ту ж “механіку” аналізованого явища. У випадку ARCH–М рівняння (2.19) і (2.20) доповнені згідно умовної варіації (2.17) та $r_t = x_{(k)t} \alpha_{(k)} + \psi \sqrt{h_t} + \xi_t$.

Аналіз результатів приводить до висновку, що найкраще показала себе модель GARCH(1,1) в якій використаний біржовий оборот, як пояснююча змінна.

В наступному кроці зроблено подальшу модифікацію моделі з використанням у основному рівнянні регресії пояснюючих змінних взятих з міжнародного фінансового ринку згідно з гіпотезою про існування зв’язків причинно–наслідкового характеру між ПФТС та іншими біржами у світі. Специфікація моделі розширилася завдяки світовим індексам: DJIA, NASDAQ Composite, DAX та PTC. Тим самим постає зверифікована гіпотеза про вплив індексів американських бірж та європейського ринку на формування індексу ПФТС.

Вибір ступеня моделі зумовлений існуванням найсильнішого ефекту ARCH для запізнення в один проміжок, підчас селекції вибиралися найкращі ступені моделі. В таблиці 2.3 репрезентовано результати оцінки параметрів функцій індексу ПФТС для моделей: ARCH(1), GARCH(1,1) і ARCH–M(1) у всіх трьох прийнятих варіантах специфікації основного рівняння регресії [175, 190, 191, 204].

Таблиця 2.3.

Оцінка параметрів функції індексу ПФТС

Модель	α_0	α_1	γ_0	γ_1	ϕ_1	ψ
варіант А						
ARCH(1)	0,0013 (2,8793)	-0,1654 (-9,4604)	0,0003 (76,7711)	0,4986 (22,2132)	—	—
GARCH(1,1)	0,0011 (3,3291)	-0,1356 (-5,4090)	0,00004 (20,4759)	0,2694 (19,0734)	0,6880 (56,9749)	—
ARCH-M(1)	0,0106 (9,6921)	-0,0768 (-4,8146)	0,0003 (77,4728)	0,5418 (21,4793)	—	-0,4720 (-12,3959)
варіант Б						
ARCH(1)	0,0011 (2,7637)	0,00001 (0,4147)	0,0003 (80,2325)	0,5017 (22,3319)	—	—
GARCH(1,1)	0,0011 (2,9697)	0,0001 (0,6337)	0,0002 (17,0363)	0,1681 (23,1719)	0,8168 (142,0202)	—
ARCH-M(1)	0,0106 (8,9696)	0,0002 (0,0869)	0,0003 (80,2002)	0,5279 (22,5520)	—	-0,4783 (-10,6526)
варіант В						
ARCH(1)	0,0029 (3,4539)	—	0,0003 (50,7508)	0,3008 (10,4161)	—	—
GARCH(1,1)	0,0023 (3,1441)	—	0,0002 (11,3964)	0,2989 (11,4347)	0,4254 (10,3994)	—
ARCH-M(1)	0,0161 (3,1557)	—	0,0003 (49,4747)	0,2834 (8,9754)	—	-0,6635 (-2,6536)

(в дужках наведено величину t-статистики)

Аналіз результатів приводить до висновку, що найкраще показала себе модель GARCH(1,1) в якій використаний біржовий оборот, як пояснююча змінна.

В наступному кроці зроблено подальшу модифікацію моделі з використанням у основному рівнянні регресії пояснюючих змінних взятих з міжнародного фінансового ринку згідно з гіпотезою про існування зв'язків причинно–наслідкового характеру між ПФТС та іншими біржами у світі. Специфікація моделі розширилася завдяки світовим індексам: DJIA, NASDAQ Composite, DAX та РТС. Тим самим постає зверифікована гіпотеза про вплив індексів американських бірж та європейського ринку на формування індексу ПФТС.

Аналіз проведено на підставі вище згаданих даних. Спочатку впроваджена одночасна авторегресія пояснюючої змінної та біржового обороту:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \xi_t, \quad (2.21)$$

Наступна специфікація, це розширення з запізненням в один проміжок величини індексів, які походять з американського ринку – DJIA і NASDAQ Composite:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \xi_t, \quad (2.22)$$

та індексу DAX:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t, \quad (2.23)$$

В подальшому кроці додано запізнюючу змінну v_{t-1}^{PFTS} , що стосується обороту на ПФТС:

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t,$$

Вище наведена специфікація постає остаточно змодифікованою при це розширення з запізненням в один проміжок величини індексу, який походить з російського ринку – РТС.

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \alpha_{61}r_{t-1}^{RTS} + \xi_t \quad (2.24)$$

Отримані результати наведені в таблицях 2.4–2.7.

Таблиця 2.4.

Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \xi_t$$

α_0	α_{11}	α_{20}	α_{21}	α_{31}	α_{41}	α_{51}	γ_0	γ_1	γ_2
Роки: 12.01.1998–30.12.2017									
0,0011 (3,1503)	-0,1362 (-5,4095)	-0,0001 (-0,5354)	—	-0,0178 (-0,5718)	-0,0020 (-0,1039)	—	0,0001 (17,3192)	0,2701 (18,6981)	0,6887 (56,1110)

Таблиця 2.5.

Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t$$

α_0	α_{11}	α_{20}	α_{21}	α_{31}	α_{41}	α_{51}	γ_0	γ_1	γ_2
Роки: 12.01.1998–30.12.2017									
0,0011 (3,1408)	-0,1366 (-5,4327)	-0,0001 (-0,5386)	—	-0,0176 (-0,5657)	-0,0027 (-0,1351)	0,0010 (0,4838)	0,0001 (17,4350)	0,2718 (18,6853)	0,6866 (55,7065)

Таблиця 2.6.

Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \xi_t$$

α_0	α_{11}	α_{20}	α_{21}	α_{31}	α_{41}	α_{51}	γ_0	γ_1	γ_2
Роки: 12.01.1998–30.12.2017									
0,0011	-0,1365	-0,0002	0,0002	-0,0183	-0,0019	0,0104	0,0004	0,2720	0,6857
(3,1290)	(-5,1477)	(-0,1162)	(0,8274)	(-0,5897)	(-0,0968)	(0,4965)	(17,4793)	(18,2414)	(55,1614)

Таблиця 2.7.

Оцінка параметрів моделі GARCH(1,1)

$$r_t^{PFTS} = \alpha_0 + \alpha_{11}r_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{20}v_t^{PFTS} + \alpha_{21}v_{t-1}^{PFTS} + \alpha_{31}r_{t-1}^{DJIA} + \alpha_{41}r_{t-1}^{NASDAQ} + \alpha_{51}r_{t-1}^{DAX} + \alpha_{61}r_{t-1}^{RTS} + \xi_t$$

α_0	α_{11}	α_{20}	α_{21}	α_{31}	α_{41}	α_{51}	α_{61}	γ_0	γ_1	γ_2
Роки: 12.01.1998–30.12.2017										
0,0010	-0,1446	0,0001	0,0001	-0,0106	-0,0053	0,0052	0,0580	0,00004	0,2688	0,6957
(2,7391)	(-5,240)	(-0,3298)	(0,7227)	(-0,3292)	(-0,2605)	(0,2344)	(6,2877)	(17,1858)	(18,5217)	(58,9587)

Сформулюємо наступні висновки: По–перше сила залежності між курсом і оборотом зменшується з плином часу. По–друге стверджується істотний вплив всіх чотирьох міжнародних індексів, з поміж яких

найбільшим видається РТС. Варто звернути увагу, що сконструйоване рівняння підтверджує динамічні зв'язки і всі пояснюючі змінні запізнюються на один проміжок. Це означає, що модель може бути безпосередньо використана як прогностичне знаряддя [145, 249, 255].

На основі отриманих результатів для решти моделей, можемо зробити висновок, що моделі GARCH(1,1) зазвичай в систематичний спосіб краща від моделей ARCH(1), ARCH–M(1).

Міра, яка описує кількість зразкових напрямів змін відповідно до реальних, що набуває окремого значення у випадку тривалих часових рядів з високою частотою спостереження. Поведінка інвестиційних стратегій природно залежить від уміння передбачення напрямку змін курсів акцій і кінцеву величину самих курсів. В зв'язку з тим, можна запропонувати такі міри, які дозволяють оцінити продуктивне значення моделі [30]:

$$Q_1 = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0\})}{N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0\})} \quad (2.25)$$

де $\hat{r}_t$ теоретична величина пояснюючої змінної,

$N(\{r_t \hat{r}_t > 0\})$, $N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0\})$ кількість спостережень для яких $r_t \hat{r}_t > 0$, $r_t \hat{r}_t \neq 0$.

В контексті короткотермінових інвестиційних стратегій, предметом особливої уваги може бути здатність прогнозування зворотних пунктів (перехід від спадання до зростання курсів і навпаки) якому відповідає міра:

$$Q_2 = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_{t-1} r_t < 0\})}{N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0 | r_{t-1} r_t < 0\})} \quad (2.26)$$

де $N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_{t-1} r_t < 0\})$ кількість спостережень для яких $r_t \hat{r}_t > 0$ за умови $r_{t-1} r_t < 0$.

На фінансовому ринку існують кошти у вигляді комісійних від трансакцій, які приводять до того, що міри записані вище повинні бути скорегованими відповідно до приросту курсу, що відповідає тим оплатам (як правило 0,5–1% від кожної трансакції). При конструкції мір узгодження напрямку змін повинні бути відповідно “фільтровані” для 1% чи 0,5% фільтру. Q_1 і Q_2 набувають вигляду:

$$Q_{1(1\%)} = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_t > 1\%\})}{N(\{r_t \hat{r}_t \neq 0 | r_t > 1\%\})} \quad (2.27)$$

$$Q_{2(1\%)} = \frac{N(\{r_t \hat{r}_t > 0 | r_{t-1} r_t < 0 \cap r_t > 1\%\})}{N(\{r_t \hat{r}_t < 0 | |r_t| > 1\%\})} \quad (2.28)$$

Міри узгодження напрямку змін щораз частіше використовуються, як підстава для оцінки економетричних моделей, які базуються на даних з високою частотою, де предметом моделювання є темп зростання біржових курсів [42]. Аналіз величини мір узгодження зроблений для моделей (2.24), як для найкращого варіанту, який враховує залежності причинно наслідкового характеру, біржові обороти і міжнародні індекси. Отримані результати наведені в табл. 2.8.

Таблиця 2.8.

Міра узгодження індексу ПФТС

	Вибірка
	12.01.1998–30.12.2017
Q_1	0.5519
Q_2	0.5095
Кількість зворотних пунктів	512
$Q_{1(1\%)}$	0.8107
$Q_{2(1\%)}$	0.4152
Кількість зворотних пунктів (для $>1\%$)	142
$Q_{1(0.5\%)}$	0.8973
$Q_{2(0.5\%)}$	0.3934
Кількість зворотних пунктів (для $>0.5\%$)	225

В усіх вибірках ця модель правдиво пояснює в близько 51% випадках напрямок змін змінність індексу ПФТС, причому міра Q_1 найвищою є в цілій вибірці. Добрий результат отриманий з погляду пояснення зворотних пунктів у всьому проміжку 1998–2017 рр. на 512 зворотних пунктів модель спостережень виправдала 317, близько 55%. Високого рівня досягнули величини для зворотних пунктів в яких враховані 1%, 0,5% фільтри. Досить добрі результати були одержані в першій під пробі де $Q_{1(1\%)}$ і $Q_{1(0.5\%)}$ – в межах 81%. Корисні результати додає одночасний аналіз Q_3 Q_4 , він доводить, що для моделі індексу ПФТС сума безумовних ставок для спостережень в яких модель правильно відображає напрям змін, є майже в три рази більшою ніж для спостережень в яких цей висновок не є правильним. Аналогічно близько в півтора рази вища середня ставка обороту для наведених вище випадків. Необхідно пояснити, що отримано значно гірші результати для моделей з менш розбудованою специфікацією

основного рівняння регресії. Це означає, що на ПФТС виступає дуже сильна залежність між курсами, оборотами та міжнародними індексами і може бути корисною при поясненні курсових змін та в аналізі і прогнозуванні зворотних пунктів [255].

Варто звернути увагу на факт, що правильно сконструйовані моделі класу ARCH характеризуються нормальністю розкладу залишків скорегованих як квадратний корінь функції умовної варіації моделі ARCH:

$$v_t = \frac{\xi_t}{\sqrt{h_t}} \quad (2.29)$$

які беруться з відповідних моделей того класу. Застосування тесту Шапіро–Вілکا не дає підстав до відкидання гіпотези H_0 про нормальність розкладу v_t . Розклад v_t для цього випадку ілюструє рисунок 2.9.

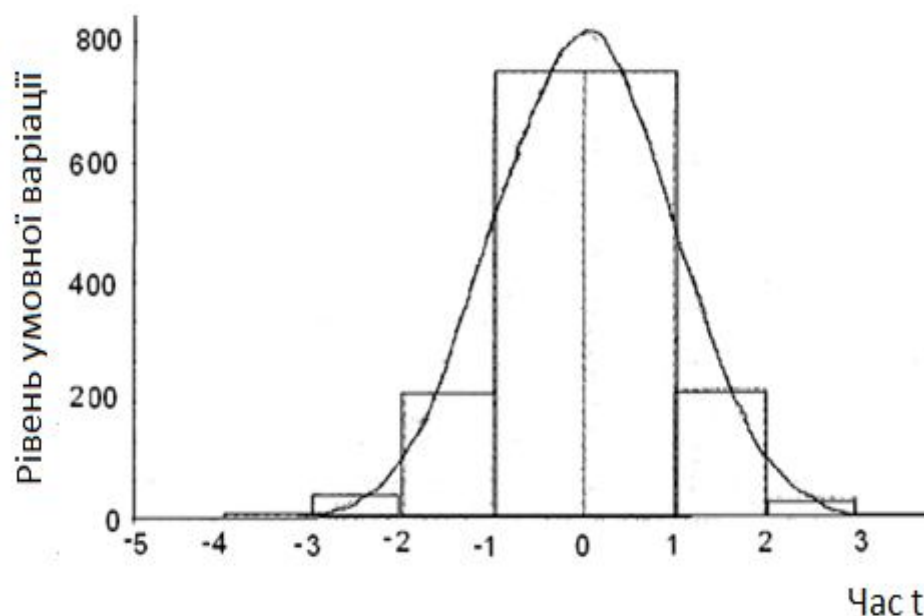


Рис. 2.9. Розклад v_t моделі GARCH(1,1) індексу ПФТС.

Подібні результати отримані для решти спостережуваних моделей. Отримані результати оцінок параметрів, представлених моделлю, приводять до таких висновків.

З поміж аналізованих трьох основних видів моделей ARCH найкращою виявилася модель GARCH(1,1). Варто додати, що перевірка, яка стосується біржових компаній вказує, що для курсів окремих акцій часто найбільш відповідною була модель ARCH(1). Це може свідчити про створення механізму між ризиком і ставкою обороту для акцій окремих фірм. Модель класу ARCH не знаходить правильного застосування для малих компаній. Міри узгодження керування є властивим знаряддям оцінки моделі з точки зору реалізацій інвестиційних стратегій.

2.3. Адитивна модель прогнозування індексу ПФТС

У сучасній світовій фінансовій системі саме фондовий ринок може слугувати незалежним індикатором сталості та визначеності перерозподілу фінансових та грошових ресурсів. Тобто фондовий ринок розглядається у якості одного з найбільш ефективних механізмів регулювання перетоку фінансових ресурсів за допомогою різних інструментів [10].

Дослідження розвитку фондового ринку є тією основою, яка сприяє визначенню напрямків у розбудові економіки. Збалансованість та взаємопов'язаність різноманітних індикаторів фондового ринку є запорукою стійкості руху фінансових ресурсів між різним економічними

агентами як в межах, так і поза межами країни. Найбільш відомим серед вітчизняних фондових індексів є індекс ПФТС, який розраховується на основі простих акцій підприємств, що пройшли лістинг в ПФТС [6].

Стан розвитку фондового ринку, умови та ефективність перерозподілу фінансових ресурсів багато в чому відображаються у відповідних фондових індексах, які являють собою агрегований показник змін у певних економічних подіях на цьому сегменті ринку. До того ж, щоб прогнозувати динаміку фондових ринків, потрібно чітко, на кількісному рівні знати відповідні тенденції. Це знов-таки знаходить певне відображення у динаміці фондових індексів та визначає їх множинність [9].

Втім слід зауважити, що саме у коливаннях фондових індексів проявляється невизначеність фондових ринків, яка є наслідком різних причин. Так, в основі невизначеності фондового ринку США, що спостерігається на цей час, знаходиться накопичений розрив між споживанням та заощадженням, переоцінка акцій деяких компаній [5].

Розглянемо індекс ПФТС, який відображає понад 90% загального обсягу торгів організованого фондового ринку в Україні. Неупереджений аналіз його динаміки дає неабияку підставу говорити про невизначеність фондового ринку [17].

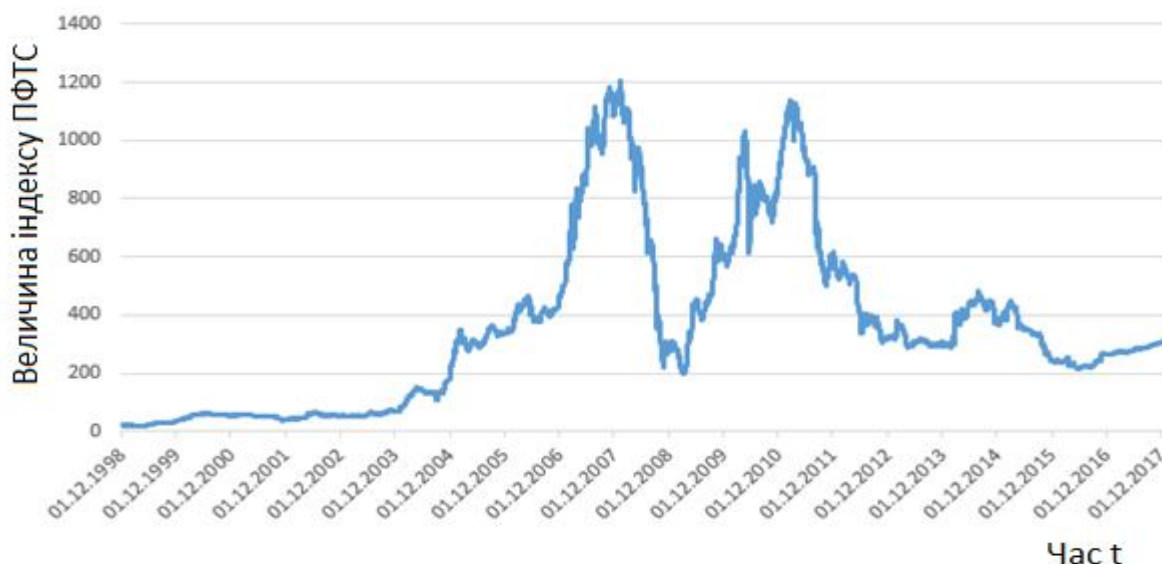


Рис. 2.10. Динаміка індексу ПФТС з 03.10.97 по 30.12.17.

Існуюча динаміка часових інтервалів значень фондового індексу ПФТС не дає можливості побудувати єдину модель відповідних прогностичних оцінок. Більш того, застосування вінеровської моделі опису такого процесу, як найбільш розповсюдженої серед брокерів та інвесторів, є також малоприсадатною, що обумовлює іншу сторону невизначеності – побудову адекватної прогностичної моделі.

Таблиця 2.10.

Основні статистичні характеристики індексу ПФТС в 2017 р.

Статистичні характеристики				
Середнє	Стандартне відхилення	Медіана	Ексцес	Асиметрія
285	12,38	284	3,21	0,32

Так середнє значення, яке характеризує розсіювання середньої дохідності є досить значним. Це, у свою чергу, ускладнює не лише вибір інвестора, а й свідчить про неоднозначність руху фінансових потоків на різних сегментах ринку [6].

Стандартне відхилення, що характеризує ступінь відповідного ризику вкладання в цінні папери підтверджує не однотайність у русі відповідних фінансових ресурсів та потоків. Підґрунтям останнього є значне розсіювання стандартного відхилення дохідностей за різними фондовими індексами [6].

Медіана, яка вказує на значення дохідності і ділить розподіл на рівні частини, показує, що індекс за досліджуваний період має переважне зростання в динаміці дохідностей [9].

Ексцес та асиметрія, які вказують на можливу відмінність, від нормального закону розподілу (який, до речі, покладено в основу класичних методів оцінки та управління фінансовими потоками на ринках розвинених країн) показують, що додатний ексцес визначає гостровершинність розподілу (чим він більший, тим гострішою є вершина розподілу, а додатна асиметрія свідчить про скошеність розподілу в бік додатних значень дохідностей [6].

В роботі [9] розроблено теорію адитивної та мультиплікативної моделей для нормально розподілених приростів і логонормально розподілених коефіцієнтів переходу.

Розроблено методи прогнозування і моніторингу, для розглянутої вибірки приростів щоденних та середньотижневих значень індексу ПФТС, підтверджено подвійний експоненціальний розподіл, або розподіл Пуассона.

На різних проміжках індекс може мати різні розподіли, зокрема вибірка з 08.01.2017 по 13.11.2017 не підтверджує нормальний, а підтверджує показниковий розподіл.

Таблиця 2.11

**Перевірка гіпотези про показниковий розподіл індексу ПФТС
за період з 08.01.2017 по 13.11.2017**

Інтервал	Верхня межа інтервалу	Частота ν_k	Відносна часто- та ν_k / n	Імовірність попадання на k -й інтервал p_k	χ_k^2
(199.1; 234.64)	234.64	30	0.122	0.050	1.443
(234.64; 270.18)	270.18	16	0.065	0.046	0.415
(270.18; 305.72)	304.72	26	0.106	0.042	1.498
(305.72; 376.8)	376.8	15	0.061	0.075	-0.185
(376.8; 412.34)	412.34	34	0.138	0.033	3.185
(412.34; 447.88)	447.88	53	0.215	0.030	6.086
(447.88; 483.42)	483.42	29	0.118	0.028	3.211
(483.42; 554.5)	554.5	11	0.045	0.050	-0.097
(554.5; 590.04)	590.04	7	0.028	0.022	0.302
(590.04; 625.58)	624.58	12	0.049	0.020	1.425
(625.58; 661.12)	661.12	13	0.053	0.019	1.853

Просумувавши значення χ_k^2 (див. стовпець табл.2.11) одержуємо $\chi^2 = 19.136$. Таким чином, вибіркова статистика не перевищує критичного табличного значення $\chi_{kr}^2 = 21.1$, що відповідає $\beta = 0,01$ і $l - 3 = 8$ степеням свободи. Враховуючи це, можна прийняти гіпотезу щодо показникового розподілу індексу ПФТС.

Таблиця 2.12

Перевірка гіпотези про розподіл Пуассона приростів, які відповідають щоденним значенням індексу ПФТС за період з 08.01.2017 р. по 13.11.2017 р.

Інтервал	Верхня межа інтервалу	Частота v_k	Відносна частота v_k / n	Імовірність попадання на k -й інтервал P_k	χ_k^2
$(-\infty, \bar{m} - 3\bar{s})$	-24.05	2	0.009	0.007	0.163
$(\bar{m} - 3\bar{s}, \bar{m} - 2\bar{s})$	-14.51	2	0.009	0.022	1.576
$(\bar{m} - 2\bar{s}, \bar{m} - \bar{s})$	-6.98	25	0.116	0.092	1.378
$(\bar{m} - \bar{s}, \bar{m})$	1.56	86	0.400	0.378	0.275
$(\bar{m}, \bar{m} + \bar{s})$	10.10	73	0.340	0.378	0.842
$(\bar{m} + \bar{s}, \bar{m} + 2\bar{s})$	18.63	18	0.084	0.094	0.242
$(\bar{m} + 2\bar{s}, \bar{m} + 3\bar{s})$	27.17	7	0.033	0.022	1.089
$(\bar{m} + 3\bar{s}, +\infty)$		2	0.009	0.007	0.163

Просумувавши значення χ_k^2 (див. стовпець табл. 2.12) одержуємо $\chi^2 = 5.727$, вибіркова статистика не перевищує критичного табличного значення $\chi_{kr}^2 = 12.6$, що відповідає $\beta = 0,05$ і $l - 3 = 5$ степеням свободи. Отже, можна прийняти гіпотезу, щодо експоненціального розподілу, або розподілу Лапласа.

Проте дисперсія вибірки не співпадає з дисперсією генеральної сукупності, що підтверджує невизначеність фондового ринку.

Розподіл Пуассона приростів, що відповідають середньотижневим значенням індексу ПФТС за період з 08.01.2017 р. по 13.11.2017 р. теж підтверджується.

Враховуючи розподіл Пуассона, розглянемо адитивну стохастичну модель [10], а на її базі прогнозування індексу ПФТС

В загальному адитивна стохастична модель (АСМ) динаміки фінансового ресурсу може бути записана у вигляді рекурентного співвідношення

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_{t-1} + \tilde{\alpha}_t, \quad (2.30)$$

де $\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}$ – обсяг фінансового ресурсу на момент часу t і $t-1$ ($t \in 0:T$)

$\tilde{\alpha}_t$ – абсолютний приріст величини ресурсу за момент часу $[t-1, t]$.

Значення, які приймає $\tilde{\alpha}_t$, розглядаємо як реалізацію деякої випадкової величини. $\tilde{\alpha}_t$ – називаються приростами. На основі (2.30) можна визначити стан ресурсу в будь-який момент часу через його стан у початковий момент часу x_0 .

$$\tilde{x}_t = x_0 + \sum_{i=1}^t \tilde{\alpha}_i. \quad (2.31)$$

При цьому зв'язок між початковим моментом $t=0$ і деяким довільним моментом t , абсолютного приросту величини ресурсу $\tilde{\alpha}_{1,t} = \sum_{i=1}^t \tilde{\alpha}_i$. Подальший розвиток АСМ пов'язаний з прийняттям передумов, що стосуються характеру розподілу випадкових величин $\tilde{\alpha}_i$. Достатньо природнім є припущення про те, що $\tilde{\alpha}_i$, розподілені за подвійним показниковим розподілом, так званий розподіл Лапласа з деякими параметрами m_i, s_i , щільність цього розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}, x \in R^1, \quad \lambda > 0 \quad (2.32)$$

де m_i – математичне сподівання має вигляд

$$M[\alpha] = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda|x-m|} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^m x e^{\lambda(x-m)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_m^{+\infty} x e^{-\lambda(x-m)} dx = m. \quad (2.33)$$

дисперсія буде мати такий вигляд

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x-m|} dx - m^2,$$

$$M[X^2] = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x-m|} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^m x^2 e^{\lambda(x-m)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_m^{+\infty} x^2 e^{-\lambda(x-m)} dx = m^2 + \frac{2}{\lambda^2}, \quad (2.34)$$

$$D(X) = m^2 + \frac{2}{\lambda^2} - m^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Також вважатимемо, що випадкові величини $\tilde{\alpha}_t$, є взаємно незалежними. Тоді для випадкової величини $\tilde{\alpha}_{1,t}$, математичне сподівання і

$$\text{дисперсія матимуть вигляд } m_{1,t} = \sum_{i=1}^t m_i, \quad s_{1,t}^2 = \sum_{i=1}^t s_i^2.$$

Як правило, для нетривалих часових періодів, що характеризуються відносною стабільністю умов, може бути прийнята гіпотеза про те, що для будь-яких моментів $t \in 0:T$ випадкові величини $\tilde{\alpha}_t$, мають однаковий розподіл і можуть розглядатись як серія реалізацій випадкової величини $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_t$,

де $\tilde{\alpha} \in L(m, \lambda)$. Математичне сподівання випадкового приросту $\tilde{\alpha}_{1,t}$, може бути виражене як: $M[\tilde{\alpha}_{1,t}] = m_{1,t} = tm$, а дисперсія: $D[\tilde{\alpha}_{1,t}] = s_{1,t}^2 = ts^2 = \frac{2t}{\lambda^2}$

Значення $M[\tilde{\alpha}_{1,t}]$ може бути використане при побудові прогнозу очікуваної величини ресурсу на момент t при відомому значенні x_0 :

$$x_t = x_0 + M[\tilde{\alpha}_{1,t}] = x_0 + m_{1,t} = x_0 + tm \quad (2.35)$$

Відповідно, точність такого прогнозу може бути оцінена за допомогою стандартного відхилення

$$s_t = \sqrt{D[\tilde{x}_t]} = \sqrt{D[\tilde{\alpha}_{1,t}]} = \sqrt{2t} \lambda^{-1} \quad (2.36)$$

s_t може бути використано при побудові довірчого інтервалу $[x_t - \gamma s_t, x_t + \gamma s_t]$, в який можливі значення спостережуваного ресурсу (у момент часу t) потрапляють із заданою ймовірністю.

Вибір коефіцієнта $\gamma > 0$ дозволяє забезпечити бажану ймовірність попадання значень випадкової величини ресурсу $\tilde{x}_t$, у вказаний інтервал.

При практичному використанні АСМ в наведених вище формулах відбувається заміна математичного сподівання і дисперсії на їх оцінки, побудованих по серіях емпіричних значень фінансового ресурсу, що аналізуємо.

Для розподіленої за Лапласом випадкової величини $\tilde{\alpha}$, як конзистентна, незміщена і ефективна оцінка параметра m , може

використовуватися вибіркове середнє $\bar{m} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k$

емпіричні (що спостерігалися протягом деякого проміжку часу) значення приростів ресурсу. В той же час, конзистентною і незміщеною оцінкою для

параметра s^2 служить виправлена вибіркова дисперсія

$\bar{s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k [\alpha_i - \bar{m}]^2$, якій відповідає виправлене вибіркове стандартне

відхилення. Підставивши оцінки параметрів m і s^2 , одержуємо емпіричні формули як для прогнозу величини ресурсу на момент часу t , $x_t = x_0 + tm$, так

і для його точності (стандартного відхилення) $\bar{s}_t = \sqrt{t} \cdot \bar{s}$. На базі

сформульованої вище адитивної стохастичної моделі може бути побудований наступний алгоритм процедури прогнозування очікуваних значень фінансового ресурсу (щодо моменту часу t_0 на n подальших періодів).

1. Визначення величини k – обсягу базової вибірки, по якій надалі здійснюється розрахунок вибіркового середнього ($\bar{m}$) і вибіркового

стандартного відхилення ($\bar{s}$). Ясно, що k обмежене зверху фактичною довжиною ряду даних, який маємо до моменту t_0 . Відзначимо також, що вибором k фактично задається ступінь обліку тенденцій, що мали місце раніше і, як очікується, що зберігаються в майбутньому (щонайменше протягом n наступних періодів).

2. Розрахунок серії з k приростів: $\alpha_i = x_{t_0-k+i-1} - x_{t_0-k+i}$, $i = 1, \dots, k$.

3. Розрахунок вибіркового середнього $\bar{m}$, що використовується як оцінка математичного сподівання (m) стохастичного приросту $\tilde{\alpha}$:

$$\bar{m} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i,$$

4. Розрахунок виправленого стандартного відхилення $\bar{s}$:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k [\alpha_i - \bar{m}]^2}$$

5. Розрахунок прогнозних значень величини фінансового ресурсу (показника) на моменти часу $t_0 + 1, \dots, t_0 + n$: $x_t = x_0 + tm$, $t = 1 : n$, де x_0 – обсяг ресурсу у момент часу t_0 .

6. Розрахунок оцінки стандартного відхилення випадкової величини $\tilde{x}_t$: $\bar{s}_t = \sqrt{t} \cdot \bar{s}$, $t = 1 : n$.

7. Побудова нижньої $(x_t - \gamma s_t)$ і верхньої $(x_t + \gamma s_t)$ інтервальних оцінок можливих відхилень фактичних значень ресурсу від тих, що передбачаються (із заданою імовірністю, визначеною параметром γ).

Запропонована схема прогнозування може бути проілюстрована на прикладі порівняння прогнозних значень індексу ПФТС з фактичними значеннями на основі ряду його щоденних чи середньо тижневих значень.

Таблиця 2.13.

**Прогнозні і реальні значення індексу ПФТС за період з 01.09.2017 р.
по 06.10.2017 р.**

№	Дата	Значення x_t	Прогноз $\bar{x}_t$	Нижня межа- 1 $\bar{x}_t - \bar{s}_t$	Верхня межа- 1 $\bar{x}_t + \bar{s}_t$	Нижня межа- 2 $\bar{x}_t - 2 \cdot \bar{s}_t$	Верхня межа- 2 $\bar{x}_t + 2 \cdot \bar{s}_t$
0	01.09.2017	287,07	287,07	287,07	287,07	287,07	287,07
1	04.09.2017	287,62	287,63	279,1	296,16	270,57	304,69
2	05.09.2017	291,23	288,19	279,66	296,72	271,13	305,25
3	06.09.2017	291,3	288,75	280,22	297,28	271,69	305,81
4	07.09.2017	291,39	289,31	280,78	297,84	272,25	306,37
5	08.09.2017	291,4	289,87	281,34	298,4	272,81	306,93
6	11.09.2017	291,26	290,43	281,9	298,96	273,37	307,49
7	12.09.2017	291,36	290,99	282,46	299,52	273,93	308,05
8	13.09.2017	291,12	291,55	283,02	300,08	274,49	308,61
9	14.09.2017	290,54	292,11	283,58	300,64	275,05	309,17
10	15.09.2017	290,26	292,67	284,14	301,2	275,61	309,73
11	18.09.2017	290,07	293,23	284,7	301,76	276,17	310,29
12	19.09.2017	290,16	293,79	285,26	302,32	276,73	310,85
13	20.09.2017	290,86	294,35	285,82	302,88	277,29	311,41
14	21.09.2017	291,23	294,91	286,38	303,44	277,85	311,97
15	22.09.2017	290,8	295,47	286,94	304	278,41	312,53
16	25.09.2017	291,84	296,03	287,5	304,56	278,97	313,09
17	26.09.2017	292,03	296,59	288,06	305,12	279,53	313,65
18	27.09.2017	292,29	297,15	288,62	305,68	280,09	314,21
19	28.09.2017	292,76	297,71	289,18	306,24	280,65	314,77
20	29.09.2017	293,56	298,27	289,74	306,8	281,21	315,33
21	02.10.2017	294,16	298,83	290,3	307,36	281,77	315,89
22	03.10.2017	295,83	299,39	290,86	307,92	282,33	316,45
23	04.10.2017	296,37	299,95	291,42	308,48	282,89	317,01
24	05.10.2017	297,59	300,51	291,98	309,04	283,45	317,57
25	06.10.2017	298,43	301,07	292,54	309,6	284,01	318,13

У табл. 2.13 наведено фактичні і прогнозні значення індексу, побудованими з 01.09.2017 р. на 25 днів наперед. При цьому як базова вибірка для визначення $\bar{m}$ і $\bar{s}$ використовувалися попередні значення на рік назад. В нас $\bar{m} = 0.56$, $\bar{s} = 8.53$.

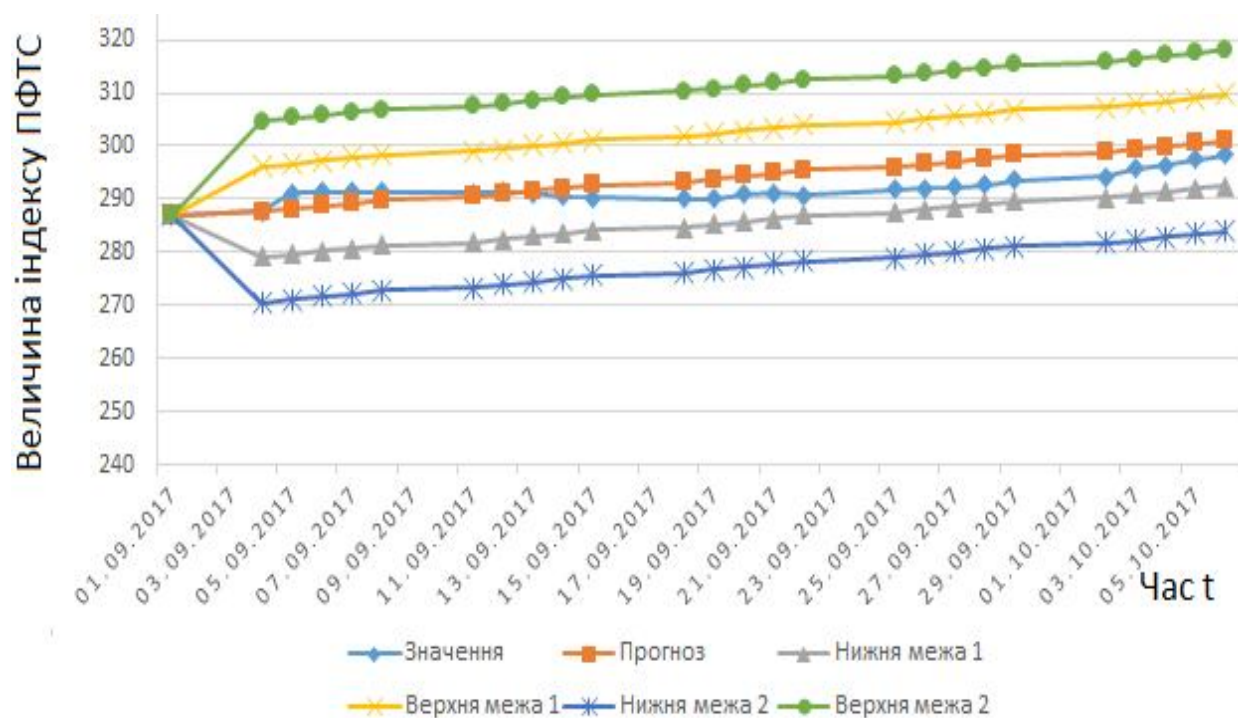


Рис. 2.11. Прогнозні і фактичні щоденні значення індексу ПФТС за період з 01.09.2017 р. по 06.10.2017 р.

На рис. 2.11 показані графіки, що відображають співвідношення між прогнозними і фактичними значеннями індексу ПФТС. На основі рис. 2.11 можна зробити висновок про те, що істотних відхилень прогнозних від фактичних величин, а також щодо коридору, що задається виразами $\bar{x}_t \pm \bar{s}_t$ не спостерігається.

Зауважимо, що закон розподілу суми незалежних однаково розподілених приростів $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ має вигляд

$$F(z) = \underbrace{\int \int}_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq z}} \exp \left\{ -\lambda \sum_{j=1}^n x_j - m \right\} dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{z-x_1} dx_2 \int_{-\infty}^{z-x_1-x_2} dx_3 \dots \int_{-\infty}^{z-\sum_{j=1}^n x_j} \exp \left\{ -\lambda \sum_{j=1}^n x_j - m \right\} dx_n$$

що використовуються для підбору γ .

Сформулюємо теорему Ляпунова [39. С 303]. Якщо $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – незалежні випадкові величини, що мають однаковий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією s^2 то при необмеженому збільшенню n закон розподілу суми $y_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ необмежено наближаються до нормального розподілу.

На підставі цієї теореми, якщо для обчислення m і s^2 використовується достатньо велике число однаково розподілених приростів, то прогнозні значення мають нормальний розподіл і можна застосувати методику робіт [5,6,16] для моніторингу математичного сподівання і дисперсії.

Оскільки результати, одержані в ході застосування прогнозних методик, в переважній більшості випадків стають основою для ухвалення подальших управлінських рішень, вибір конкретної методики визначається технологіями управління, що склалися. Так, якщо управлінські рішення ухвалюються в моменти часу, які істотно відрізняються між собою тобто, по суті, мова йде про разові акти управлінських дій, то викладена вище схема є цілком ефективною і реалістичною.

Набір показників оцінки ефективності прогнозів є достатньо різноманітний. Серед них, наприклад, можуть бути. названі величина максимального відхилення між фактичними значеннями і прогнозними

значеннями, відносна частка випадків перевищення величинами відхилень деякого заданого рівня тощо. Коефіцієнт відносного відхилення розраховується за формулою

$$\zeta_t = \frac{|x_t - \bar{x}_t|}{x_t} \cdot 100,$$

де ζ_t – коефіцієнт відносного відхилення фактичного значення від прогнозного в момент часу t (у відсотках); x_t – фактичне відхилення ресурсу (показника) в момент часу t ; $\bar{x}_t$ – прогнозне значення фінансового ресурсу в момент часу t .

Серед переваг відносного відхилення є незалежність від розмірності і масштабів досліджуваного фінансового ресурсу, тому часовий ряд, як правило, дає об'єктивну картину точності і надійності використаної прогностичної методики.

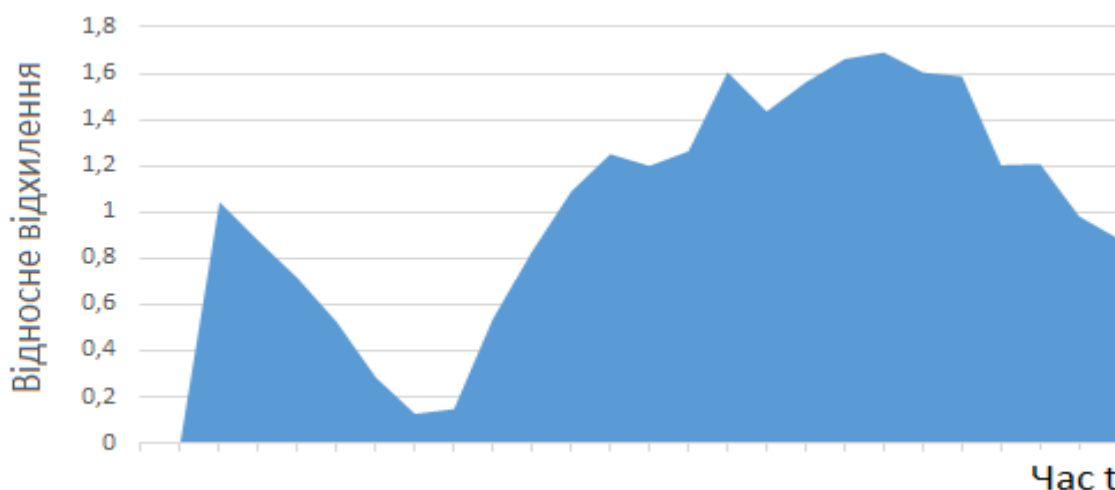


Рис. 2.12. Відносні відхилення фактичних щоденних значень індексу ПФТС від прогнозних за вересень 2017 р.

На рис. 2.12 наведена гістограма відносних відхилень фактичних значень індексу ПФТС від прогнозів. На основі даної ілюстрації

стверджуємо, що для більшості днів даного періоду значення відносного відхилення не перевищує рівень 3%; що свідчить про точність прогнозу.

Розроблена адитивна модель з розподілом Пуассона для прогнозування індексу ПФТС має універсальний характер, що в свою чергу зумовлює можливості для ефективного і плідного використання при роботі з широким спектром фінансових ресурсів і показників [10].

Проведений в роботі аналіз розвитку фондового ринку на основі ретроспективних причинно-наслідкових моделей дає підстави зробити такі висновки.

1. На основі застосування моделі Гобсона-Роджерса досліджено динаміку індексу ПФТС та знайдено волатильність вартості фінансових інструментів, операції з якими відбуваються на фондовій площадці. Застосовуючи швидку середню зміну волатильності, запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів.

2. Встановлено ціни опціонів за допомогою моделі Гобсона-Роджерса яка дозволяє обрати найкращий варіант стратегії для підвищення продуктивності хеджування. Використано гнучку схему зважування, що відповідає скінченому горизонту часу в минулому. Запропонована модель має унікальну перевагу над іншими при встановленні цін на похідні фінансові інструменти.

3. Доведено, що шляхозалежна волатильність володіє минулою інформацією та дозволяє моделювати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, а також відображає позитивні або негативні тенденції фінансового інструменту. На відміну від стандартних локальних або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку, шляхозалежна модель волатильності використана для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою гармонізації динаміки фондового ринку.

4. Розроблено адитивну модель з розподілом Пуассона для прогнозування індексу ПФТС, яка дозволяє досліджувати динаміку основних параметрів фінансових інструментів і фондових показників у випадку коли відсутній нормальний розподіл. Встановлено достатні умови, при яких результати досліджень наближаються до результатів з нормальним розподілом.

5. Враховуючи, що вітчизняна економіка є малою та відкритою, а фінансовий ринок України та його фондовий сегмент є незначним за розміром, та визнається таким, що може бути віднесеним до граничних ринків, він має значну залежність від стану світових фінансових ринків. В зв'язку з цим в роботі за допомогою моделей ARCH встановлено існування залежностей причинно–наслідкового характеру між індексом ПФТС та світовими індексами DJIA, NASDAQ Composite, DAX та PTC, що безпосередньо використовується для моделювання і прогнозування курсів окремих фінансових інструментів.

6. Досліджено динаміку волатильності індикаторів фондового ринку, які характеризують прибутковість або ціну ринкового портфеля та індексу ПФТС із застосуванням методів ARCH моделювання. За допомогою даної методики встановлено рівень системного ризику, та знайдено невизначеність, пов'язану з прогнозуванням динаміки індикаторів фондового ринку.

Основні результати наукового дослідження, що отримані в даному розділі опубліковані автором у наукових працях [8; 10; 13; 14; 16; 17; 27; 30].

РОЗДІЛ 3.

СПЕКТРАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ЦІНОУТВОРЕННЯ

3.1. Оцінювання двобар'єрних опціонів з локальною волатильністю

Процеси Бесселя мають застосування в теорії масового обслуговування, зокрема в теорії черг. Вони є різного типу по відношенню до задач на знаходження власних значень та власних функцій, коли спектр оператора Бесселя є неперервним, або має скінчену кількість значень і неперервну частину то представлення щільності через функції Віттакера та поліноми Лагерра розглянуто в багатьох роботах, а найдетальніше в [103], де розв'язана крайова задача на проміжку $x \in (0, \infty)$ з крайовими умовами накладеними на першу похідну функції щільності при $x \rightarrow \infty$.

Процеси Бесселя мають значне застосування у фінансовій математиці, вони допускають явне представлення для функцій щільності деривативів, зокрема цін облігацій та опціонів це значно полегшує статистичну оцінку параметрів [136]. При накладених умовах дифузійний процес з оператором Бесселя ніколи не перетворюється в нуль [124], в роботі розглянуто ті випадки коли похідна фінансового потоку Бесселівського процесу може перетворитись в нуль. При таких умовах визначають надлишкову швидкість росту портфеля акцій, а також пояснюють як перевищення темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу [126].

Практичне значення процесів Бесселя на фінансових ринках та співвідношення з інтегралом від геометричного броунівського руху розглянуто в [131], а в [140] зроблено огляд ціноутворення азійських опціонів за допомогою процесів Бесселя.

Дифузія з оператором Бесселя досліджувалася в роботі [278] але при інших крайових умовах, та ортогональних системах функцій.

Метою даного розділу роботи є розробка зручного підходу моніторингу фінансових потоків, що продукуються двобар'єрними Бесселівськими процесами. Розклад щільності в ряди за функціями Бесселя є дуже зручним для використання на практиці при знаходженні цін опціонів з потрібною точністю.

Проблема такого типу розглядається вперше. До теперішнього часу була нерозв'язаною задача коли дифузія Бесселя має нелокальну волатильність залежну від різних чинників, але така проблема є лише частково розв'язана для звичайних дифузійних процесів породжених Броунівським рухом. Тому потрібні нові підходи і аналіз вже відомих для розв'язання задач такого типу.

Розроблений підхід можна застосувати для дослідження ціноутворення азійських опціонів породжених Бесселівськими процесами. Для цього потрібно розглянути фінансові потоки породжені процесами Бесселівської дифузії розклавши їх по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію фінансового потоку та його просторової похідної. Цей розклад дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, що дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для відображення розв'язку. Тому потрібно зробити припущення, що процеси марківські.

Розглянемо одновимірну дифузію з процесом Бесселя з дрифтом (страховий внесок для кожного активу), який рівний нулю (є низка процесів цього типу де дрифт не рівний нулю, але їх дослідження можна звести до процесів з нульовим дрифтом). Такі процеси мають застосування при розв'язуванні економічних задач на знаходження короткострокових відсоткових ставок, кредитних спредів та стохастичної волатильності деривативів [176].

Спектральний метод застосовано до похідних фінансових інструментів, ціноутворення через представлення ціни деривативу $w(t, x)$ функцією нейтральною до ризику від майбутньої вартості основного процесу X , тобто як

$$w(t, x) = \tilde{E}_x [H(X_t)] = \int H(y) p(t, x, y) dy.$$

де $p(t, x, y)$ – щільність переходу X за ймовірністю P . Якщо інфінітезимальний генератор $\mathcal{L}$ базового процесу самоспряжений на гільбертовому просторі з приростом міри $m(x)dx$, і спектр $\mathcal{L}$ є дискретним, то щільність переходу X можна записати [9]:

$$p(t, x, y) = m(y) \sum_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(y) \varphi_n(x),$$

де $\{\lambda_n\}$ – власні значення $\mathcal{L}$ і $\{\varphi_n\}$ – власні функції: тобто $\mathcal{L}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$.

Розглянемо процес для якого оператор $\mathcal{L}$ має вигляд

$$\mathcal{L} = \partial_{xx}^2 + x^{-1} \partial_x - x^{-2} p^2, \quad (3.1)$$

де p стала, яку називають індексом, $x > 0$.

Зауважимо, що $\mathcal{L}$ – сингулярний параболічний оператор, інфінітіземальний, самоспрямований, до якого зводяться низка операторів де $\sigma^2 = 2x^2$, $\mathcal{L}$ є оператором Бесселя.

Дифузія з оператором Бесселя досліджувалась роботах [195, 246] але при інших ніж розглянутих в роботі крайових умовах, та ортогональних системах функцій.

Для дослідження $\mathcal{L}$ на власні значення та власні функції, при певних крайових умовах, застосуємо рівняння Бесселя.

$$x^2 w'' + x w' + (x^2 - p^2) w = 0. \quad (3.2)$$

Розв'язок рівняння (3.2), за винятком частинних значень p , не можна виразити через елементарні функції (в скінченному вигляді). Оскільки рівняння Ейлера-Бесселя є лінійним, то його загальний інтеграл можна записати у вигляді

$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2$$

де w_1, w_2 два будь-які лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння Ейлера-Бесселя, а C_1, C_2 довільні сталі.

У випадку $p \geq 0$ робимо підстановку $w = x^p \omega$ отримаємо для функції ω рівняння

$$\omega'' + \frac{2p+1}{x} \omega' + \omega = 0.$$

Розв'язок отриманого рівняння є степеневим рядом, який є абсолютно збіжним для всіх $x \in (-\infty; \infty)$ і має вигляд

$$w = x^p \omega = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{1 \cdot 2 \dots m(p+1) \dots (p+m) \Gamma(p+1)}, \quad (3.3)$$

Перетворивши (3.3) на основі властивостей гамма функції, отримаємо Бесселеву функцію першого роду, порядку p .

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)},$$

Оскільки в рівняння (3.2) входить p^2 то заміна p на $-p$ не впливає на розв'язок рівняння, тому для будь-якого p існує розв'язок.

Якщо p не є цілим то функції Бесселя не можуть бути лінійно залежними і загальний інтеграл рівняння (3.2) має вигляд [110, 207]

$$J = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x),$$

при цілому p знаходимо ще один частинний розв'язок

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi + J_{-p}(x)}{\sin p\pi},$$

який є бесселевою функцією другого роду, яка є невизначеною при $x = 0$.

Користуючись правилом Лопітала, знайдемо границю при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} Y_p(x) &= Y_0 = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right), \end{aligned}$$

Для будь якого p мають місце формули

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^p J_p(x)) &= x^p J_{p-1}(x), \\ \frac{d}{dx} (x^{-p} J_p(x)) &= -x^{-p} J_{p+1}(x). \end{aligned}$$

Функції Бесселя $J_p(\lambda x)$, $J_p(\mu x)$ де λ і μ корені рівняння $J_p(x) = 0$, є ортогональними на відрізку $[0, 1]$ з вагою x тобто

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = 0, \quad \lambda \neq \mu, \quad \text{а при } \lambda = \mu \text{ можливі два випадки}$$

$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} J_p'^2(\lambda), & J_p(\lambda) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2} \right) J_p^2(\lambda), & J_p'(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Для всіх $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ існує зліченна множина додатних коренів

$$\alpha w'_k(\mu) + \beta \mu w_k(\mu) = 0,$$

гранична точка яких знаходиться на нескінченості.

Нехай $w(x)$ розв'язок (3.2) то функція $w(\lambda x)$ теж буде розв'язком рівняння такого виду

$$x^2 w'' + x w' + (\lambda^2 x^2 - p^2) w = 0 \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) є рівнянням Бесселя з параметром λ .

Будь який розв'язок рівняння (3.2), який є функцією Бесселя, має нескінчену множину додатних коренів, які близькі до коренів функції $\sin(x + \omega)$, вигляду $k_n = n\pi - \omega$, $\omega = \text{const}$, n — ціле (аналогічно для від'ємних коренів, бо вони знаходяться симетрично відносно початку координат), якщо $k_n \neq 0$ то вони є прості корені і утворюють злічену множину.

Бесселеві функції це знакочергуючі ряди, тому обчислення значення можна здійснювати використовуючи лему Лейбніца, за якою можна визначити точність наближення.

Для знаходження власних функцій та власних значень розглянемо таку крайову задачу

$$x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \quad (3.5)$$

$$|w_k|_{x=0} < +\infty, \quad (3.6)$$

$$\alpha w_k'(x_0) + \beta w_k(x_0) = 0. \quad (3.7)$$

Тобто розглядаємо задачу Штурма-Ліувілля. Дана задача має єдиний розв'язок. Умова (3.6) має місце, коли $x = 0$ і є особливою точкою рівняння (3.5) та оператора $\mathcal{L}$. x_0 регулярна точка рівняння (3.5). Ті значення λ_k при яких крайова задача (3.5)-(3.7) має нетривіальний

розв'язок w_k називаються власними значеннями, а w_k власними функціями задачі. Відомо, що при умовах (3.6) оператор $\mathcal{L}$ має злічену кількість власних значень, вони прості та невід'ємні [77, 207, 218, 273]. Множення $\mathcal{L}$ на x^2 не змінює ні власних значень, ні власних функцій, ні їхньої кількості.

Розглянемо таку задачу

$$\begin{cases} x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \\ |w_k|_{x=0} < +\infty, \\ w_k(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

З (3.6) випливає, що $p \geq 0$, розглянемо випадок $p > 0$. Легко перевірити, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі (3.8).

Оскільки (3.2) має своїм інтегралом $w = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$ то виходячи із властивостей функції Бесселя задача (3.8) має розв'язок

$$w = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$$

Врахувавши крайові умови матимемо

$$C_2 = 0 \text{ і } C_1 J_p(\lambda_k x_0) = 0 \text{ тобто } J_p(\lambda_k x_0) = 0, \text{ отже } \lambda_k x_0 = \mu_k,$$

де

$$J_p(\mu_k) = 0, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots,$$

тому

$$w_k(x) = J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Знайдемо норму функції $w_k(x)$

$$\begin{aligned} \|w_k(x)\|^2 &= \int_0^{x_0} x J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \left(J_p'\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right) \right)^2 + \left(x^2 - \frac{p^2}{\mu_k^2} \right) \left(J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right) \right)^2 \right] = \frac{x_0^2}{2} \left(J_p'(\mu_k) \right)^2. \end{aligned}$$

Використовуючи властивості функцій Бесселя отримаємо

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} (J_{p+1}(\mu_k))^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо випадок $p = 0$ маємо таку задачу

$$\begin{cases} (xw')' + \lambda^2 xw = 0, \\ |w|_{x=0} < +\infty, \\ w(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

При $\lambda = 0$ маємо $(xw')' = 0$ звідси випливає, що $xw' = C_1$ або $\frac{dw}{dx} = \frac{C_1}{x}$ тому загальний інтеграл має вигляд $w = C_1 \ln x + C_2$. З умови обмеженості маємо, що $w_0 = C_2$, з крайової умови робимо висновок про те що $w \equiv 0$, отже $\lambda = 0$ не є власним значенням [220].

Нехай $\lambda > 0$ то загальний розв'язок має вигляд

$$w = C_1 J_0(\lambda x) + C_2 Y_0(\lambda x)$$

Оскільки функція Бесселя другого роду $Y_0(\lambda x)$ необмежена в нулі то $C_2 = 0$, тому $w(x) = C_1 J_0(\lambda x)$, задовольняючи крайову умову одержимо $J_0(\lambda x_0) = 0$. Одержимо корені цього рівняння

$\mu_k, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}, w_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right), k = 1, 2, \dots$ при цьому норма $v_k(x)$ дорівнюватиме

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} (J_1(\mu_k))^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зауважимо, що функції $\left(1, J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right)\right), k = 1, 2, \dots$ ортогональні між собою на $[0, x_0]$ з вагою x [227].

Розглянемо бesselівський процес, який описується

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} w(t, x),$$

$$0 < x < x_0, \quad (3.10)$$

і крайовою умовою

$$w(0, x) = K(e^x - 1)^+, \quad w(t, x_0) = 0, \quad (3.11)$$

де K – страйк (Згідно економічної енциклопедії. Страйк або ціна виконання – це наперед фіксована ціна основного активу чи товару, за якою власник опціону може купити (у випадку опціону *call*)) або продати (у випадку опціону *put*) даний актив. Це ціна, за якою може бути продано або куплено актив коли опціон погашається [59]). Процес є однорідним тому $w(t, x) = \varphi(t)w(x)$.

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{np} e^{-\frac{\mu_n^2 t}{x_0^2}} J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right), \quad p \geq 0,$$

де μ_n додатні корені рівняння $J_p(\mu_n x_0) = 0$,

$$c_{np} = \frac{K \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx},$$

Фінансові потоки мають вигляд

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_{np} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K}\right)^2 (T-t)} J_p\left(\mu_n \ln \frac{x}{K}\right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу T , коли $X_T = K$

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{R}{L}}\right)^2 (T-t)} J_p\left(\frac{\mu_n (K - \ln \frac{x}{L})}{\ln \frac{R}{L}}\right),$$

де $L < x < R$, L, R – бар'єри, K – страйк, а c_{np} обчислюються наступним чином

$$c_{np} = 2K \frac{\int_0^1 t(e^{Kt} - 1) J_p(\mu_n t) dt}{J_{p+1}^2(\mu_n)},$$

Обчислено розклад фінансового потоку по системі функцій Бесселя J_p першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна

по системі Бесселя. Розглянутому процесу відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2} + f(t, x), \quad x > 0, \quad (3.12)$$

де $f(t, x)$ двічі неперервно диференційовна по x , неперервно диференційовна по t , абсолютно інтегровна разом із похідними, $(t, x) \in [0, +\infty)$ і має вигляд

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right), \quad 0 < x < x_0 < +\infty, \quad 0 < t < T,$$

μ_n корені рівняння $J_p(\mu_n) = 0$.

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right),$$

підставивши в (3.12) одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\left(J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right)'' \right]_{x^2} + \frac{\left(J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right)'_x}{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)}{x^2} + \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \right] - \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \} T_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right), \end{aligned}$$

тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)] J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \equiv 0,$$

звідки

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{x_0}, \quad n \in N$$

з початковою умовою $T_n(0) = 0$.

Неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку розв'яжемо методом варіації сталої. Оскільки

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0,$$

має перший інтеграл $T_n(t) = C e^{-\lambda_n^2 t}$ (розв'язок однорідного рівняння) то

$$T_n(t) = C(t) e^{-\lambda_n^2 t}$$

тому

$$C'(t) = f_n(t) e^{\lambda_n^2 t}, \quad C(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta + C_1.$$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta e^{-\lambda_n^2 t} + C_1 e^{-\lambda_n^2 t},$$

при $t = 0, C_1 = 0$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta,$$

тому

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right).$$

Враховуючи, що

$$f_n(t) = \int_0^{x_0} \xi f_n(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\xi \left(\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) dx \right)^{-1}$$

маємо

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \int_0^{x_0} \xi f(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\beta d\xi \\ J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \left(\int_0^{x_0} y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-1} &= \int_0^{x_0} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-2} \\ &\quad e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) f(\xi, t) d\xi d\beta, \end{aligned}$$

тобто

$$G(t - \beta, x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi J_p \left(\frac{\mu_n \xi}{x_0} \right) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0}(t-\beta)} \left(\frac{x_0^2}{2} J_{p+1}^2(\mu_n) \right)^{-1},$$

$$w(t, x) = \int_0^t G(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Тому проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі [12, 15, 25, 28, 29]

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2}, \quad x \in [L, H],$$

$$t \in [0, T], \quad w(t, L) = 0, \quad w(t, H) = 0,$$

$$w(T, x) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Ця задача зводиться до розв'язання наступної крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + y^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p^2 w(t, x)}{y^2},$$

$$y = \ln x, \quad y \in [A, B], \quad t \in [0, T], \quad A = \ln L, \quad B = \ln H,$$

$$w(t, A) = 0, \quad w(t, B) = 0,$$

$$w(0, y) = \psi(e^{y(T)}) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора L , маємо

$$w(T, x) = \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} G(x, \xi) d\xi$$

$$= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{H}{L}}\right)^2 t} J_p \left(\frac{\mu_n \xi}{\ln \frac{H}{L}} \right) J_p \left(\frac{\mu_n \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{H}{L}} \right) \left(\ln \frac{H}{L} \right)^{-2} \left(J_{p+1}^2(\mu_n) \right)^{-1},$$

де $\mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$ ступінчаста функція Хевісайда [19].

Оскільки корені Бесселивих функцій першого роду близькі до коренів функції $\sin(x + \omega)$, вигляду $k_n = n\pi - \omega$, $\omega = \text{const}$, n – ціле, то при великих n , μ_n^2 можна замінити через n^2 , звідси випливає, що ряди для функції Гріна та її першої та другої похідної рівномірно збігаються та мають вигляд

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^{2n+1} x}{(2n+1)!} < +\infty, \quad x \in [L, H], \quad C > 0,$$

тому при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно значної кількості коефіцієнтів ряду.

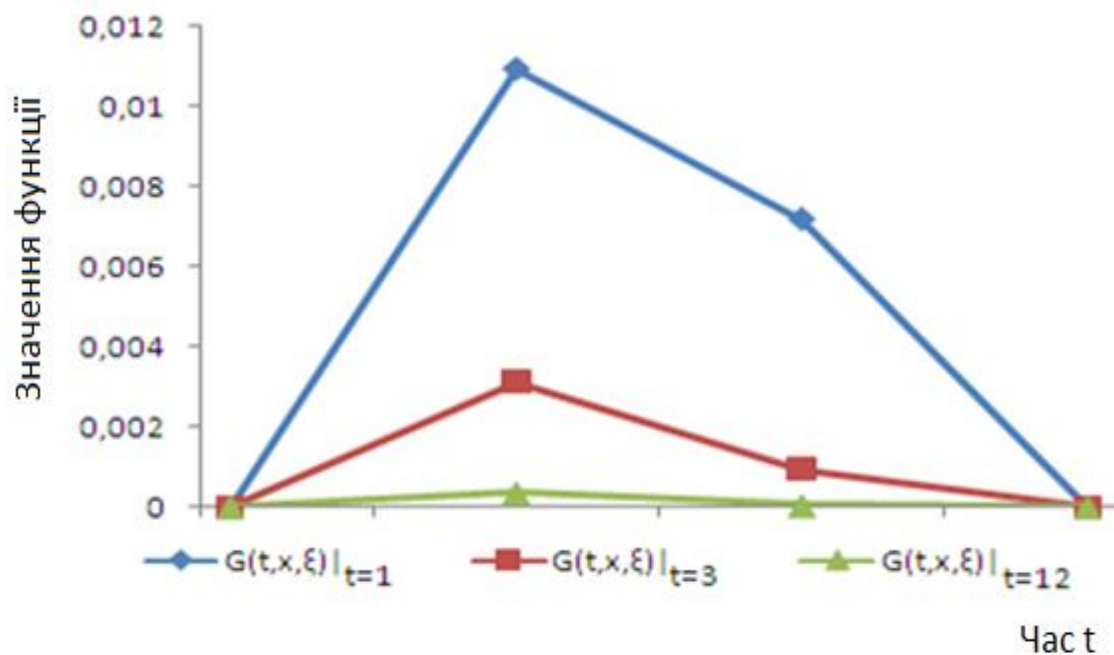


Рис. 3.1. Графік функції Гріна, як щільності розподілу при $L = 90$, $H = 120$, $\xi = 0,4$.

Одновимірна дифузія використовується для опису основної динаміки фондового ринку, а спектральний метод служить потужним інструментом для аналітичного ціноутворення [38, 119].

Побудована функція Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя. Записана аналітично і її представлення зручне та не завдає труднощів при обчисленні цін деривативів

Використовуючи дану методику, можна обчислити ціну опціону у вигляді ряду Фур'є Бесселя з відповідними коефіцієнтами. Запропоновано простий метод оцінювання опціонів використовуючи розклад функції Гріна для крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння, точність оцінювання збігається з точністю збіжності рядів Фур'є Бесселя.

3.2. Оцінка фінансових потоків методами спектрального аналізу

Розглянемо Бесселівські процеси, які є узагальненням процесу Орнштейна-Уленбека для бар'єрних опціонів [20, 24]. При певних характеристиках дифузійний процес з оператором Бесселя ніколи не перетворюється в нуль. Цим випадкам присвячено ряд робіт [235, 260], будемо розглядати тільки випадки коли похідна фінансового потоку Бесселівського процесу може перетворитись в нуль. При таких умовах визначають надлишкову швидкість росту портфеля акцій, а також пояснюють як перевищення темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу [277]. В роботі [183] доведено, що дифузія Бесселя $\{Z_t, t \geq 0\}$ зі сталим від'ємним дрефтом c та інфінітіземальним генератором має вигляд

$$(Gf)(z) = \frac{1}{2}\sigma^2 f''(z) + \left(\frac{d}{z} + c\right) f'(z).$$

Розглянемо процес для якого оператор L має вигляд (3.1).

Зауважимо, що L сингулярний параболічний оператор, інфінітіземальний, до нього зводяться ряд операторів де $\sigma^2 = 2x^2$, L є оператором Бесселя.

Функції Бесселя $J_p(\lambda x)$, $J_p(\mu x)$ де λ і μ корені рівняння $J_p(x) = 0$, є ортогональними на відрізку $[0, 1]$ з вагою x тобто

$$\int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x) dx = 0, \quad \lambda \neq \mu, \text{ а при } \lambda = \mu \text{ можливі два випадки}$$

$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} J_p'^2(\lambda), & J_p(\lambda) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda), & J_p'(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Для всіх $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ існує зліченна множина додатних коренів

$$\alpha w'_k(\mu) + \beta \mu w_k(\mu) = 0,$$

гранична точка яких знаходиться на нескінченості.

Нехай $w(x)$ розв'язок (3.2) то функція $w(\lambda x)$ теж буде розв'язком рівняння такого виду

$$x^2 w'' + x w' + (\lambda^2 x^2 - p^2) w = 0 \quad (3.13)$$

Рівняння (3.13) є рівнянням Бесселя з параметром λ . Будь який розв'язок рівняння (3.2), який є функцією Бесселя, має нескінчену множину додатних коренів, які близькі до коренів функції $\sin(x + \omega)$, вигляду $k_n = n\pi - \omega$, $\omega = \text{const}$, n — ціле (аналогічно для від'ємних коренів, бо вони знаходяться симетрично відносно початку координат), якщо $k_n \neq 0$ то вони є прості корені і утворюють злічену множину [77].

Бесселеві функції це знакочергуючі ряди, тому обчислення значення можна здійснювати використовуючи лему Лейбніца, за якою можна визначити точність наближення [83].

Для знаходження власних функцій та власних значень розглянемо таку крайову задачу

$$x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \quad (3.14)$$

$$|w_k|_{x=0} < +\infty, \quad (3.15)$$

$$\alpha w_k'(x_0) + \beta w_k(x_0) = 0. \quad (3.16)$$

Тобто розглядаємо задачу Штурма-Ліувілля. Дана задача має єдиний розв'язок. Умову (3.15) накладемо коли $x = 0$ є особливою точкою рівняння (3.14) і оператора L , а x_0 регулярна точка рівняння (3.14). Ті значення λ_k при яких крайова задача (3.14)-(3.16) має нетривіальний розв'язок w_k називаються власними значеннями, а w_k власними функціями задачі. Відомо, що при умовах (3.15) оператор L має злічену кількість власних значень, вони прості та невід'ємні [118, 151, 201]. Домноження L на x^2 не змінює ні власних значень, ні власних функцій, ні їхньої кількості.

Розглянемо таку задачу

$$\begin{cases} x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \\ |w_k|_{x=0} < +\infty, \\ w_k'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

З (3.15) випливає, що $p \geq 0$, розглянемо випадок $p > 0$, оскільки рівняння Бесселя має своїм інтегралом

$$w = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$$

то виходячи із властивостей функції Бесселя задача (3.17) має розв'язок

$$w = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x)$$

Врахувавши крайові умови матимемо $C_2 = 0$ і $C_1 J_p(\lambda_k x_0) = 0$.

Тобто

$J_p(\lambda_k x_0) = 0$, отже $\lambda_k x_0 = \mu_k$, де $\lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}$, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots$,

де μ_k корені $J'_p(\mu_k) = 0$.

Норма $w_k(x)$ матиме вигляд

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{1}{2} \left(x_0^2 - \frac{w^2}{\mu_k^2} \right) \left(J_p(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо випадок $p = 0$ маємо задачу

$$\begin{cases} (xw')' + \lambda^2 xw = 0, \\ |w|_{x=0} < +\infty, \\ w'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

При $\lambda = 0$ $w(x) \equiv 1$ є розв'язком, тому $\lambda = 0$ є власним значенням $w_0(x) \equiv 1$ власна функція.

Розглянемо $\lambda > 0$ аналогічно як в попередньому випадку знайдемо

$$w_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k}{x_0}x\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0},$$

де μ_k додатні корені рівняння $J'_p(\mu) = 0$, при цьому норма $w_k(x)$ дорівнюватиме

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left(J_0(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Розглянемо бesselівський процес, який описується

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} w(t, x), \quad 0 < x < x_0, \quad (3.19)$$

і крайовою умовою

$$w(0, x) = K(e^x - 1)^+, \quad w'_x(t, x_0) = 0; \quad (3.20)$$

де K страйк. Процес є однорідним тому $w(t, x) = \varphi(t)w(x)$.

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n p e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0^2} t} J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0}x\right) + c_0, \quad p > 0, \quad \mu_n > 0,$$

де μ_n додатні корені рівняння $J'_p(\mu_n) = 0$, c_n , $n \in N$ обчислюються наступним чином, при $p > 0$, $c_{0p} = 0$, якщо $p = 0$ то

$$\begin{aligned} c_{0p} &= \frac{K_1 \int_0^{x_0} x(e^x - 1) dx}{\int_0^{x_0} x dx} = \frac{K_1 \left(x_0 e^{x_0} - e^{x_0} + 1 - \frac{x_0}{2} \right)}{\frac{x_0^2}{2}} \\ &= K_1 (2x_0^{-1} e^{x_0} - 2x_0^{-2} e^{x_0} + 2x_0^{-2} - 1), \quad K_1 = e^{-\lambda^2 T}, \\ c_{np} &= \frac{K \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p \left(\frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2 \left(\frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx}. \end{aligned}$$

Фінансові потоки мають вигляд

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_{np} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K}\right)^2 (T-t)} J_p \left(\mu_n \ln \frac{x}{K} \right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу T , коли $X_T = K$

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{R}{L}}\right)^2 (T-t)} J_p \left(\frac{\mu_n (\ln \frac{x}{L})}{\ln \frac{R}{L}} \right),$$

де $L < x < R$, L, R – бар'єри, K – страйк, а c_{np} обчислюються наступним чином

$$c_{np} = 2K \frac{\int_0^1 t(e^{Kt} - 1) J_p(\mu_n t) dt}{J_{p+1}^2(\mu_n)}.$$

Знайдено розклад в ряд фінансового потоку по системі функцій Бесселя J_p першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна по системі Бесселя. Розглянутому процесу відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2} + f(t, x), \quad x > 0, \quad (3.21)$$

де $f(t, x)$ двічі неперервно диференційовна по x неперервно диференційовна по t , абсолютно інтегровна разом із похідними, $(t, x) \in [0, +\infty)$ і має представлення

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right), \quad 0 < x < x_0 < +\infty, \quad 0 < t < T,$$

μ_n корені рівняння $J'_p(\mu_n) = 0$.

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right),$$

підставивши в (3.21) одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(t) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\left(J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right)'' + \frac{\left(J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right)'}{x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p^2 J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right)}{x^2} + \lambda_n^2 J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right] - \lambda_n^2 J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right\} T_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right), \end{aligned}$$

тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)] J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) \equiv 0.$$

Звідки

$$T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{x_0}, \quad n \in N$$

з початковою умовою $T_n(0) = 0$.

Неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

розв'яжемо методом варіації сталої. Оскільки $T'_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0$ має

перший інтеграл $T_n(t) = C e^{-\lambda_n^2 t}$ (розв'язок однорідного рівняння) то

$T_n(t) = C(t) e^{-\lambda_n^2 t}$ тому $C'(t) = f_n(t) e^{\lambda_n^2 t}$, $C(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta + C_1$.

$$T_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta e^{-\lambda_n^2 t} + C_1 e^{-\lambda_n^2 t}$$

при $t = 0$, $C_1 = 0$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta$$

тому

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right).$$

Враховуючи, що

$$f_n(t) = \int_0^{x_0} \xi f_n(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\xi \left(\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) dx \right)^{-1}.$$

Маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \int_0^{x_0} \xi f(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\beta d\xi J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)$$

$$\left(\int_0^{x_0} y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-1} = \int_0^{x_0} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-2}$$

$$e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) f(\xi, t) d\xi d\beta,$$

тобто

$$G(t - \beta, x, \xi)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0}(t-\beta)} \left(\frac{1}{2} \left(x_0^2 - \frac{p^2}{\mu_k^2} \right) \left(J_p(\mu_k) \right)^2 \right)^{-1},$$

$$w(t, x) = \int_0^t G(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Тоді проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі [38]

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2}, x \in [L, H],$$

$$w'_x(t, L) = 0, \quad w'_x(t, H) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$w'_x(T, x) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Ця задача зводиться до розв'язання крайової задачі для сингулярного параболического рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + y^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p^2 w(t, x)}{y^2},$$

$$y = \ln x, y \in [A, B], t \in [0, T], A = \ln L, B = \ln H,$$

$$w'_x(t, A) = 0, \quad w'_x(t, B) = 0,$$

$$w'_x(0, y) = \psi(e^{y(T)}) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболического оператора L , маємо що

$$\begin{aligned} w(T, x) &= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} G(x, \xi) d\xi \\ &= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} \end{aligned}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{H}{L}}\right)^2 t} J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{\ln \frac{H}{L}}\right) J_p\left(\frac{\mu_n \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{H}{L}}\right) \left(\left(\left(\ln \frac{H}{L}\right)^2 - \frac{p^2}{\mu_k^2}\right) (J_p(\mu_k))^2\right)^{-1},$$

де $\mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$ ступінчаста функція Хевісайда.

Оскільки корені Бесселевих функцій першого роду прості, то між двома сусідніми коренями Бесселевих функцій міститься корінь похідної. Тоді можна вважати що корені похідної розподіляються аналогічно до

коренів функцій. Тому для функції Гріна та її першої та другої похідної оцінка має наступний вигляд

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^{2n+1} x}{(2n+1)!} < +\infty, \quad x \in [L, H], \quad C > 0,$$

при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно значної кількості коефіцієнтів ряду.

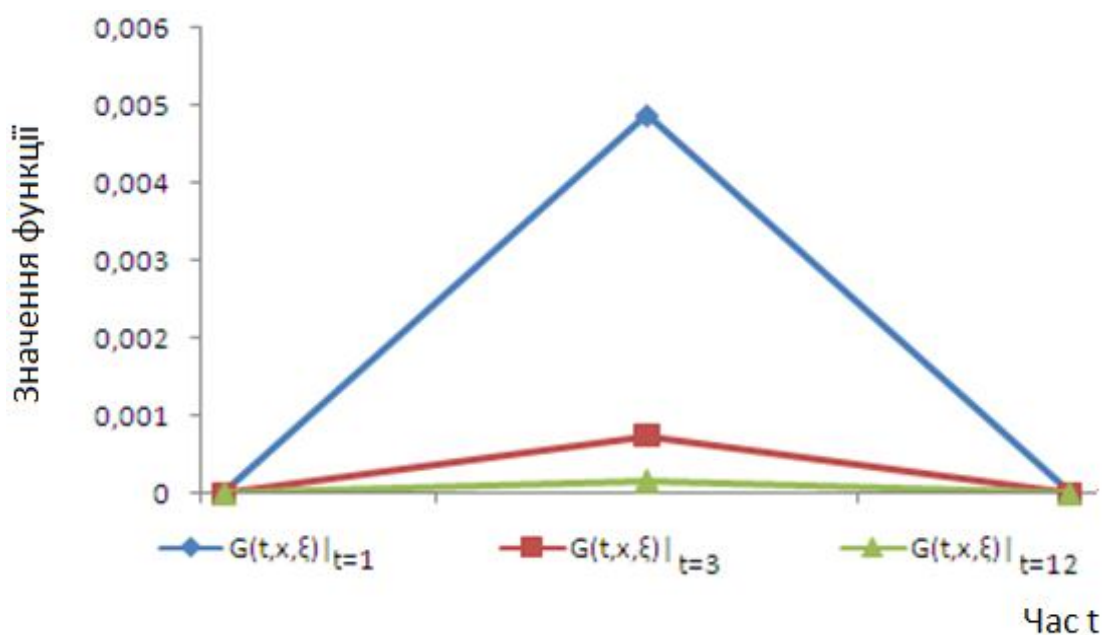


Рис.3.2. Графік функції Гріна, як щільності розподілу при $L = 90$, $H = 120$, $\xi = 0,4$.

Таким чином побудована функція Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя першого роду. Бар'єри підібрані як точки в яких похідна фінансового потоку по ціні рівна нулю, тобто в точках де потік може приймати екстремальні значення. За допомогою функції Гріна обчислено величину цін деривативів. Бар'єри такого виду зручні для проведення моніторингу фондового ринку.

Розв'язано двопараметричну задачу оцінювання інтенсивності Беселівських дифузійних процесів методами спектральної теорії. Зокрема розглянуто бар'єри для вартості опціонів, в яких похідна фінансових потоків перетворюється в нуль, розв'язано задачу для двобар'єрного опціону, що відповідає процесу Бесселя.

Здійснено побудову функції Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя першого роду. Бар'єри взяті таким чином, щоб в них похідна фінансового потоку за ціною перетворювалася в нуль, тобто це точки де потік може набувати екстремальних значень. На основі функції Гріна проведено обчислення вартості похідних цінних паперів. Для проведення моніторингу фондового ринку зручно використовувати саме такі бар'єри. Функцію Гріна цієї задачі, яка репрезентує ймовірність поширення ціни опціону, представлено через ряди Фур'є Бесселя. Це дає можливість оцінити інтенсивність фінансових потоків фондових ринків.

3.3. Моделювання ціни похідних фінансових активів на фондовому ринку

Стохастичні процеси Бесселя є різного типу по відношенню до задач на власні значення та власні функції. У випадку, коли спектр оператора Бесселя є неперервним, або має скінчену кількість значень і неперервну частину то представлення щільності через функції Віттака та поліноми Лагерра розглянуто в багатьох роботах, а найдетальніше в [85].

Процеси дифузії Бесселя використовуються при дослідженні азійських опціонів. Розглянуто фінансові потоки породжені процесами Беселівської дифузії представивши їх по системі функцій Бесселя

першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та його просторової похідної. Таке представлення дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу та дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

Розклад функції Гріна по системі Бесселивих функцій задається аналітичною формулою за допомогою якої зручно обчислювати величину фінансових потоків.

У роботі [91], описано застосування процесів Бесселя на фінансових ринках за допомогою співвідношення з геометричним броунівським рухом. В [132] зроблено огляд ціноутворення азіатських опціонів за допомогою процесів Бесселя.

Розроблений підхід можна застосувати для дослідження ціноутворення азійських опціонів, породжених Бесселівськими процесами. Для цього потрібно розглянути фінансові потоки породжені процесами Бесселівської дифузії розклавши їх по системі функцій Бесселя першого роду. Цей розклад дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, а також дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для запису розв'язку.

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля де граничні умови використовують функції Бесселя та їх похідні.

Для знаходження власних функцій та власних значень розглянемо таку крайову задачу

$$x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \quad (3.22)$$

$$|w_k|_{x=0} < +\infty, \quad (3.23)$$

$$\alpha w_k'(x_0) + \beta w_k(x_0) = 0. \quad (3.24)$$

Дана задача має єдиний розв'язок. Умову (3.23) накладемо тому, що $x = 0$ є особливою точкою рівняння (3.22) і оператора L , а x_0 регулярна точка рівняння (3.22). Ті значення λ_k при яких крайова задача (3.22)-(3.24) має нетривіальний розв'язок w_k називаються власними значеннями, а w_k власними функціями задачі. Відомо, що при умовах (3.23) оператор L має злічену кількість власних значень, вони прості та невід'ємні [273]. Домноження L на x^2 не змінює ні власних значень, ні власних функцій, ні їхньої кількості.

Розглянемо (3.22) при умові $\alpha = 1$, $\beta = h > 0$. Тоді маємо крайову задачу

$$\begin{cases} x^2 w_k'' + x w_k' + (\lambda_k^2 x^2 - p^2) w_k = 0, \\ |w_k|_{x=0} \leq +\infty, \\ w_k'(x_0) + h w_k(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Легко бачити, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі (3.25).

Загальний інтеграл має вигляд

$$w = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x),$$

підставивши в крайові умови (3.23)-(3.24) одержимо [124, 183]

$$\lambda J_p'(\lambda x_0) + h J_p(\lambda x_0) = 0,$$

зробимо заміну змінних $\lambda x_0 = \mu$ отримаємо

$$\mu J_p'(\mu) + h x_0 J_p(\mu) = 0. \quad (3.26)$$

Рівняння (3.26) має злічену множину додатних коренів

$$\mu_k, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad \text{Тому } \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0},$$

де μ_k корінь (3.26), а $w_k(x) = J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0} x\right)$, $k = 1, 2, \dots$

Знайдемо норму $w_k(x)$

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{1}{2} \left(x_0^2 \left(J'_p(\mu_k) \right)^2 + \left(x_0^2 - \frac{v^2}{\mu_k^2} \right) \left(J_p(\mu_k) \right)^2 \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Оскільки з (3.26) при $\mu = \mu_k$ маємо

$$J'_p(\mu_k) = -\frac{hx_0}{\mu_k} J_p(\mu_k)$$

то норма дорівнює

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left(1 + \frac{hx_0^4 - v^2}{\mu_k^2 x_0^2} \right) \left(J_p(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

У випадку коли $p = 0$ маємо задачу

$$\begin{cases} (xw')' + \lambda^2 xw = 0, \\ |w|_{x=0} < +\infty, \\ w'_k(x_0) + hw_k(x_0) = 0, \quad h > 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Легко перевірити, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі. При $\lambda > 0$ з умови обмеженості випливає $w = C_1 J_0(\lambda x)$, $C_2 = 0$,

$$C_1 (\lambda J'_0(\lambda x_0) + h J_0(\lambda x_0)) = 0,$$

при $C_1 = 1$ маємо рівняння

$$\mu J'_0(\mu) + hx_0 J_0(\mu) = 0.$$

Як у випадку (3.26) всі корені є додатними та утворюють злічену множину

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{x_0}, \quad w_k(x) = J_0\left(\frac{\mu_k}{x_0}x\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

при цьому норма $w_k(x)$ дорівнюватиме

$$\|w_k(x)\|^2 = \frac{x_0^2}{2} \left(1 + \frac{h^2 x_0^2}{\mu_k^2} \right) \left(J_0(\mu_k) \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зауважимо, що функції $1, J_p\left(\frac{\mu_k}{x_0}x\right), \quad k = 1, 2, \dots$ ортогональні між собою на $[0, x_0]$ з вагою x [262].

Розглянемо бesselівський процес, який описується

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} w(t, x),$$

$$0 < x < x_0, \quad (3.28)$$

і крайовою умовою

$$w(0, x) = K(e^x - 1)^+, \quad |w(t, 0)| < +\infty,$$

$$w'_x(t, x_0) + h w(t, x_0) = 0, \quad h > 0, \quad (3.29)$$

де K — страйк. Процес є однорідним тому $w(t, x) = \varphi(t)w(x)$.

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n p e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0^2} t} J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right), \quad p \geq 0,$$

де μ_n $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$, додатні корені рівняння

$$J'_p(\mu_k) \mu_k + h J_p(\mu_k) = 0,$$

$$c_n p = \frac{K \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx},$$

Для обчислення

$$\int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) dx$$

використаємо зображення $J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right)$ та e^x через степеневі ряди

$$x(e^x - 1) = x \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!},$$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0} x\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+p+1)\Gamma(l+1)} \left(\frac{\mu_n}{2x_0} x\right)^{2l+p}.$$

Оскільки ці ряди збігаються абсолютно $\forall x \in R^1$ то добуток цих рядів абсолютно збіжний $\forall x \in R^1$ і його можна визначати за будь-яким із правил або за Коші, або за Діріхле [234, 262]

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} a_n \sum_{l=0}^{\infty} b_n &= \sum_{l=0}^{\infty} b_n \sum_{l=0}^{\infty} a_n = \sum_{l=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + a_n b_{n-2} + \dots + a_n b_0), \end{aligned}$$

тому c_n обчислюються за формулою з відповідним μ_n .

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{K_1 \int_0^{x_0} x(e^x - 1) J_p \left(\frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx}{\int_0^{x_0} x J_p^2 \left(\frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx} \\ &= K_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x_0^{n+3}}{(n+1)! \Gamma(p+1) \Gamma(1) (p+1)} \left(\frac{\mu_n}{2} \right)^p \right. \\ &\quad - \frac{x_0^{n+2}}{n! \Gamma(p+2) \Gamma(2) (p+3)} \left(\frac{\mu_n}{2} \right)^{p+2} \\ &\quad + \frac{x_0^{n+1}}{(n-1)! \Gamma(p+3) \Gamma(3) (p+5)} \left(\frac{\mu_n}{2} \right)^{p+4} + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^k x_0^{n-k+1}}{(n-k-1)! \Gamma(k+p+1) \Gamma(p+1) (2k+p+1)} \left(\frac{\mu_n}{2} \right)^{2k+p} \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n x_0^3}{\Gamma(2n+p+1) \Gamma(p+1) (2n+p+1)} \left(\frac{\mu_n}{2} \right)^{2n+p} \right] \bigg/ \int_0^{x_0} x J_p^2 \left(\frac{\mu_n}{x_0} x \right) dx. \end{aligned}$$

Фінансові потоки мають вигляд

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} K c_n p e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln K} \right)^2 (T-t)} J_p \left(\mu_n \ln \frac{x}{K} \right),$$

у випадку, якщо процес закінчується в момент часу T , коли $X_T = K$

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} K c_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{R}{L}}\right)^2 (T-t)} J_p \left(\frac{\mu_n (\ln \frac{x}{L})}{\ln \frac{R}{L}} \right),$$

де $L < x < R$, L, R – бар'єри, K – страйк, а c_n обчислюються наступним чином

$$c_n = 2K \frac{\int_0^1 t(e^{Kt} - 1) J_p(\mu_n t) dt}{\frac{x_0^2}{2} \left(1 + \frac{hx_0^4 - v^2}{\mu_n^2 x_0^2}\right) (J_p(\mu_n))^2}.$$

Знайдено розклад фінансового потоку по системі функцій Бесселя J_p першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі [150, 188, 257]. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна по системі Бесселя. Цьому процесу відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2} + f(t, x), \quad x > 0, \quad (3.30)$$

де $f(t, x)$ двічі неперервно диференційовна по x та неперервно диференційовна по t , абсолютно інтегровна разом із похідними, $(t, x) \in [0, +\infty)$ і має представлення [151]

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right), \quad 0 < x < x_0 < +\infty, \quad 0 < t < T,$$

μ_n корені рівняння $J_p(\mu_n) = 0$.

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right),$$

підставивши в (3.28) одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} T'_n(t) J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\left(J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right)'' \right]_{x^2} + \frac{\left(J_p \left(\frac{\mu_n x}{x_0} \right) \right)'_x}{x} \right\}$$

$$-\frac{p^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)}{x^2} + \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) - \lambda_n^2 J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right)\} T_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right),$$

тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)] J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \equiv 0,$$

звідки

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{x_0}, \quad n \in N$$

з початковою умовою $T_n(0) = 0$.

Неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку розв'яжемо методом варіації сталої. Оскільки $T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0$ має перший інтеграл $T_n(t) = C e^{-\lambda_n^2 t}$ (розв'язок однорідного рівняння) то $T_n(t) = C(t) e^{-\lambda_n^2 t}$ тому

$$C'(t) = f_n(t) e^{\lambda_n^2 t}, \quad C(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta + C_1,$$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n^2 \beta} f_n(\beta) d\beta e^{-\lambda_n^2 t} + C_1 e^{-\lambda_n^2 t}$$

при $t = 0$, $C_1 = 0$

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta$$

тому

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} f_n(\beta) d\beta J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right).$$

Враховуючи, що

$$f_n(t) = \int_0^{x_0} \xi f_n(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\xi \left(\int_0^{x_0} x J_p^2\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) dx \right)^{-1},$$

маємо

$$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \int_0^{x_0} \xi f(\xi, t) J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) d\beta d\xi J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) \\ \left(\int_0^{x_0} y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-1} = \int_0^{x_0} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(y J_p^2\left(\frac{\mu_n y}{x_0}\right) dy \right)^{-2} \\ e^{-\lambda_n^2(t-\beta)} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) f(\xi, t) d\xi d\beta,$$

тобто

$$G(t - \beta, x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi J_p\left(\frac{\mu_n \xi}{x_0}\right) J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right) e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0}(t-\beta)} \\ \left(\frac{x_0^2}{2} \left(1 + \frac{hx_0^4 - v^2}{\mu_k^2 x_0^2} \right) \left(J_p(\mu_k) \right)^2 \right)^{-1}. \\ w(t, x) = \int_0^t G(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Таким чином проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі [115, 115, 197]

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + x^{-1} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} - \frac{p^2 w(t, x)}{x^2}, \quad x \in [L, H], \\ w'_x(t, L) + hw(t, L) = 0, \quad w'_x(t, H) + hw(t, H) = 0, \quad h > 0, \quad t \in [0, T], \\ w(T, x) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Ця задача зводиться до розв'язання такої крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + y^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p^2 w(t, x)}{y^2}, \\ y = \ln x, \quad y \in [A, B], \quad t \in [0, T], \quad A = \ln L, \quad B = \ln H,$$

$$w'_x(t, A) + hw(t, A) = 0, \quad w'_x(t, B) + hw(t, B) = 0, \quad h > 0,$$

$$w(0, y) = \psi(e^{y(T)}) = \max(\pm(x(T) - K), 0) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора L , маємо що

$$w(T, x) = \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} G(x, \xi) d\xi$$

$$= \int_0^{\ln \frac{H}{L}} (e^\xi L - K) \mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])} \left(\left(1 + \frac{h \left(\ln \frac{H}{L} \right)^4 - v^2}{\mu_k^2 \left(\ln \frac{H}{L} \right)^2} \right) \left(J_p(\mu_k) \right)^2 \right)^{-1}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln \frac{H}{L}} \right)^2 t} J_p \left(\frac{\mu_n \xi}{\ln \frac{H}{L}} \right) J_p \left(\frac{\mu_n \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{H}{L}} \right) \left(\ln \frac{H}{L} \right)^{-2}$$

де $\mathbb{I}_{(L < x(t) < H; t \in [0, T])}$ ступінчаста функція Хевісайда.

Оскільки корені Бесселевої функції першого роду і її похідної є прості то існує зв'язок між похідною та Бесселевими функціями сусідніх порядків, то звідси випливає, що рівняння $J'_p(x) + h J_p(x) = 0$ має злічену множину додатних коренів. Тому при великих n , квадрати цих коренів ведуть себе як n^2 . Тому для функції Гріна та її першої та другої існує оцінка

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^{2n+1} x}{(2n+1)!} < +\infty, \quad \forall x \in [L, H], \quad C > 0,$$

а при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно значної кількості коефіцієнтів ряду [117].

Таким чином побудовано функцію Гріна для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій

Бесселя першого роду. Бар'єри підібрані як точки в яких похідна фінансового потоку по ціні рівна нулю, тобто в точках де потік може приймати екстремальні значення. За допомогою функції Гріна обчислено величину цін деривативів. Бар'єри такого виду зручні для проведення моніторингу фондового ринку.

Запропоновано застосування спектральних методів для обчислення значення подвійного бар'єрного опціону породженого дифузійним процесом Бесселя. Використовуючи дану методику, можна обчислити ціну опціону у вигляді ряду Фур'є Бесселя з відповідними коефіцієнтами. Запропоновано метод оцінювання опціонів використовуючи розклад функції Гріна для крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння, точність оцінювання збігається з точністю збіжності рядів Фур'є Бесселя.

На основі спектрального моделювання дифузійних процесів ціноутворення деривативів зроблено наступні висновки.

1. Запропоновано для обчислення цін деривативів використовувати функцію Гріна (функцію розподілу) для дифузійного процесу Бесселя двобар'єрного опціону, яка розкладена по системі функцій Бесселя. Така методика, на відміну від існуючих методів дозволяє визначати ціну опціонів на відсоткову ставку, визначити ризик і дохідність похідних фінансових інструментів фондового ринку.

2. Встановлено, що поведінка похідних фінансових інструментів, зокрема опціонів, яка описується стохастичними процесами допускає явне представлення їх функцій щільності розподілів, це значно полегшує статистичну оцінку їхніх параметрів в процесі моніторингу ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності та прийняття стратегічних управлінських рішень щодо здійснення операцій на фондовому ринку.

3. Доведено, що спектральні методи, є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення деривативів. Ефективне знаходження швидкості зміни росту портфеля акцій, величину фінансового потоку, а також дослідження темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, реалізується за допомогою розв'язання задачі Штурма-Ліувілля для дифузії Бесселя з крайовими умовами в яких похідна фінансового потоку по ціновій змінній в комбінації з величиною потоку перетворюється в нуль.

4. Встановлено, що обґрунтованість стратегічних рішень для здійснення інвестицій з метою збереження стратегічних позицій компанії на фондовому ринку реалізовується за допомогою оцінювання інтенсивності Беселівських дифузійних процесів методами спектральної теорії. Зокрема розглянуто бар'єри для ціни опціонів, в яких похідна фінансових потоків перетворюється в нуль. Функцію Гріна цієї задачі, яка репрезентує ймовірну ціну опціону, представлено через ряди Фур'є Бесселя. Це дає можливість оцінити інтенсивність фінансових потоків фондових ринків.

5. В роботі розроблено підхід до дослідження ціноутворення європейських опціонів породжених Беселівськими процесами. Для цього розглянуто фінансові потоки породжені процесами Беселівської дифузії, які розкладено по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та його просторової похідної. Цей розклад дозволяє обчислити величину ринкового портфеля акцій, визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку, а також дає можливість дослідити динаміку фондового ринку.

Основні результати наукового дослідження, що отримані в даному розділі опубліковані автором у наукових працях [12; 15; 34; 38; 116; 117; 118; 119].

РОЗДІЛ 4

РОЗРОБКА ТА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ БАГАТОФАКТОРНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЕРИВАТИВІВ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

4.1. Багатофакторні моделі ціноутворення деривативів

Нехай (Q, F, P) є простором ймовірностей, який підтримує корельований броунівський рух $(W^x, W^{y_1}, \dots, W^{y_l}, W^{z_1}, \dots, W^{z_n})$ і експоненціальна випадкова змінна $\varepsilon \sim \text{Exp}(1)$, яка є незалежною від $(W^x, W^{y_1}, \dots, W^{y_l}, W^{z_1}, \dots, W^{z_n})$. Будемо вважати, що економіка з $l+n$ чинниками, описана неперервним часом та неперервним Марківським процесом $\chi = (X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$, який визначений в деякому просторі станів $E = I \times R^l \times R^n$, де $(Y_1, \dots, Y_l) \in R^l$, $(Z_1, \dots, Z_n) \in R^n$, I - інтервал в R з точками e_1 та e_2 , такими, що $-\infty \leq e_1 < e_2 \leq \infty$. Припускаємо, що χ має початок в E і миттєво зникає як тільки X виходить за межі I . Зокрема, динаміка χ з фізичною мірою P , є наступною [121]:

$$\chi_t = \begin{cases} (X_t, Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}), & \tau_I > t, \\ \Delta, & \tau_I \leq t, \end{cases} \quad \tau_I = \inf(t > 0: X_t \notin I),$$

де $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$, задаються

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})dW_t^x, \\ dY_{jt} = \frac{1}{\epsilon_j} \alpha_j(Y_{jt})dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt})dW_t^{y_j}, \quad j = \overline{1, l}. \\ dZ_{it} = \delta_i c_i(Z_{it})dt + \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it})dW_t^{z_i}, \quad i = \overline{1, n}. \\ d(W^x, W^{y_j})_t = \rho_{xy_j} dt, \quad j = \overline{1, l}. \\ d(W^x, W^{z_i})_t = \rho_{xz_i} dt, \quad i = \overline{1, n}. \\ d(W^{y_j}, W^{z_i})_t = \rho_{y_j z_i} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n}. \\ d(W^{y_j}, W^{y_r})_t = \rho_{y_j y_r} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, l}. \\ d(W^{z_i}, W^{z_k})_t = \rho_{z_i z_k} dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}. \\ (X_0, Y_{10}, \dots, Y_{l0}, Z_{10}, \dots, Z_{n0}) = (x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

де $\rho_{xy_j}, \rho_{xz_i}, \rho_{y_j z_i}, \rho_{y_j y_r}, \rho_{y_j y_r}$ задовольняють умову

$|\rho_{xy_j}|, |\rho_{xz_i}|, |\rho_{y_j z_i}|, |\rho_{y_j y_r}|, |\rho_{y_j y_r}| \leq 1$, а кореляційні матриці виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy_j} & \rho_{xz_i} \\ \rho_{y_j x} & 1 & \rho_{y_j z_i} \\ \rho_{z_i x} & \rho_{z_i y_j} & 1 \end{pmatrix}$$

напівдодатно визначені, тобто

$$1 + 2\rho_{xy_j}\rho_{xz_i}\rho_{y_j z_i} - \rho_{xy_j}^2 - \rho_{xz_i}^2 - \rho_{y_j z_i}^2 \geq 0.$$

Процес X може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів. Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний короткий відсоток, тощо. Більш ширше, X це зовнішній чинник, який характеризує кількісні значення згаданих вище процесів. Під фізичною мірою $\mathbb{P}$ процесу X , розуміють процес X , який має миттєвий дрейф $v(X_t)$ і стохастичну волатильність $a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) > 0$, який містить обидві компоненти: локальну $a(X_t)$ і нелокальну $f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})$. Нескінченно малі генератори (інфінітіземальні) Y_j та Z_i мають вигляд [153]

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j} &= \frac{1}{\epsilon_j} \left(\frac{1}{2} \beta_j^2(y_j) \partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j(y_j) \partial_{y_j} \right), \\ \mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i} &= \delta_i \left(\frac{1}{2} g_i^2(z_i) \partial_{z_i z_i}^2 + c_i(z_i) \partial_{z_i} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

характеризуються відповідно величинами $\frac{1}{\epsilon_j}$ та δ_i . Таким чином, $Y_1, \dots, Y_l$ та

$Z_1, \dots, Z_n$ мають внутрішню шкалу часу $\epsilon_j > 0$ і $\frac{1}{\delta_i} > 0$ причому

$$0 < \epsilon_l < \epsilon_{l-1} < \dots < \epsilon_1 < 1.$$

Для того, щоб внутрішня шкала часу Y_j була малою, а внутрішня шкала часу Z_i великою. Будемо вважати $\epsilon \ll 1$ і $\delta \ll 1$, Y_j це швидко змінний чинник, а Z_i повільно змінний чинник. Зауважимо, що $\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j}$ та $\mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i}$ задані як

$$L = \frac{1}{2}a^2(x)\partial_{xx}^2 + b(x)\partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2),$$

з $k(x) = 0$ для всіх $x \in I$, є завжди самоспряженим в гільбертовому просторі $H = L^2(I, m)$, де $I \in R$ інтервал з кінцями e_1 і e_2 та m – швидкість щільності дифузії.

$\text{Dom}(\mathfrak{L})\{f \in L^2(I, m): f, \partial_x f \in AC_{\text{loc}}(I), \mathfrak{L}f \in L^2(I, m), BCs \text{ на } e_1 \text{ та } e_2\}$
де $AC_{\text{loc}}(I)$ є простором функцій, абсолютно неперервних на кожному компактному підінтервалі I [3]. Крайові умови на e_1 та e_2 накладаються для натуральних, вихідних, вхідних і регулярних меж.

Оцінимо похідний актив, з виплатою в час $t > 0$, яка може залежати від траєкторії X . Зокрема, розглянемо форми виплати (отримання доходу у вигляді відсотків власником цінного паперу):

$$\text{Виплата} = H(X_t)\mathbb{I}_{(\tau > t)}. \quad (4.3)$$

де τ – випадковий момент часу, протягом якого є невикладається премія за похідний актив. Оскільки нас цікавлять оцінки деривативів то потрібно визначити динаміку $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ під оцінкою міри при нейтральному ризику, який позначимо, як $\tilde{\mathbb{P}}$. Маємо таку динаміку:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = (b(X_t) - a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})\Omega(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}))dt \\ \quad + a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})d\tilde{W}_t^x, \\ dY_{jt} = \left(\frac{1}{\epsilon_j} \alpha_j(Y_{jt}) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt})\Lambda_j(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt})d\tilde{W}_t^{y_j}, \\ dZ_{it} = \left(\delta_i c_i(Z_{it}) - \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it})\Gamma_i(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right) dt + \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it})d\tilde{W}_t^{z_i}, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^{y_j} \rangle_t = \rho_{xy_j} dt, \quad j = \overline{1, l}. \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^{z_i} \rangle_t = \rho_{xz_i} dt, \quad i = \overline{1, n}. \\ d\langle \tilde{W}^{y_j}, \tilde{W}^{z_i} \rangle_t = \rho_{y_j z_i} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n}. \\ d\langle \tilde{W}^{y_j}, \tilde{W}^{y_r} \rangle_t = \rho_{y_j y_r} dt, \quad j = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, l}. \\ d\langle \tilde{W}^{z_i}, \tilde{W}^{z_k} \rangle_t = \rho_{z_i z_k} dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}. \\ (X_0, Y_{10}, \dots, Y_{l0}, Z_{10}, \dots, Z_{n0}) = (x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

де

$$d\tilde{W}_t^x := dW_t^x +$$

$$\left(\frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})} + \Omega(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right) dt,$$

$$d\tilde{W}_t^{y_j} := dW_t^{y_j} + \Lambda_j(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})dt,$$

$$d\tilde{W}_t^{z_i} := dW_t^{z_i} + \Gamma_i(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})dt,$$

Потрібно накласти такі умови щоб система (4.4) мала єдиний сильний розв'язок.

Як згадано вище, випадковий час τ є часом функціонування похідного фінансового інструменту. У цьому випадку, дефолт може відбутися одним із двох способів:

- 1) коли X виходить за інтервал I ,
- 2) у випадковий час τ_h , яким керує рівень ризику $h(X_t) \geq 0$.

Це можна виразити наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = \inf\{t \geq 0: X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t h(X_s)ds \geq \varepsilon(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)\right\}, \\ \varepsilon \sim \text{Exp}(1) \text{ ш.} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Зауважимо, що по випадкова змінна ε незалежна від $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$.

Щоб відстежувати τ_h , використаємо індикатор процесу: $D_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}}$. де $\mathbb{D} = \{\mathcal{D}_t, t \geq 0\}$, – фільтр породжений D та $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ – фільтр генератора $(W^x, W^{y_1}, \dots, W^{y_l}, W^{z_1}, \dots, W^{z_n})$. Використаємо фільтрацію $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$, де $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$. Зауважимо, що $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ застосовується до $\mathbb{G}$ і τ – час зупинки ($\{\{\tau \leq t\}\} \in \mathcal{G}_t$ для всіх $t \geq 0$) [61].

Вважатимемо, що наша економіка включає надійний актив, який росте миттєво на величину $r(X_t) \geq 0$. Таким чином, якщо економіка включає, момент наприклад, "не платити дивіденди" чи продаж

неплатіжного активу S , ціновий процес якого описується як $S_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}} X_t$, де простір станів X ,

$I = (0, \infty)$, то тоді ціна активу обчислюється за допомогою формули $\{e^{-\int_0^t r(X_s) ds} S_t, t \geq 0\}$, процес $(\tilde{\mathbb{P}}, \mathbb{G})$ – є мартингальним. Величину мартингала знаходимо, підставляючи

$b(X_t) = [r(X_t) + h(X_t)]X_t$ і $\Omega(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n) = 0$ у (4.4). Рівень ризику $h(X_t)$ у відсотковій ставці $r(X_t)$ та в дрейфі X повинна дати компенсацію за можливість неплатежу [170]. З іншого боку, якщо X тільки описує надійний відсоток через $r(X_t)$, то при переході від фізичної міри $\mathbb{P}$ до оцінки виміру $\tilde{\mathbb{P}}$, немає потреби змінювати дрейф від X до $v(X_t)$ або до $b(X_t)$ [61]. Однак, можна розглянути, ефект включення ринкової ціни ризику. У цьому випадку можна підставити в (4.4) $b(X_t) = v(X_t)$, та $\Omega(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n) \neq 0$.

Розглядаємо економіку з фізичним нейтральним ризиком. Нехай маємо зазначений вид похідного активу, який можна оцінити за таких припущень:

1. Існує єдиний розв'язок $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$ систем (4.1) та (4.4).
2. Існують додатні константи $C_{\Lambda_j} < \infty$ і $C_{\Gamma_i} < \infty$, такі, що $\|\Lambda_j\|_\infty < C_{\Lambda_j}$ і $\|\Gamma_i\|_\infty < C_{\Gamma_i} \cdot j = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, n}$.
3. Процес $Y_j^{(1)}$ має нескінченно малий генератор $\mathfrak{L}_{0j}$ $j = \overline{1, l}$.
 - 3.1. Процес $Y_j^{(1)}$ ергодичний і має єдиний інваріантний розподіл Π з щільністю π .
 - 3.2. Оператор $\mathfrak{L}_{0j}$ має додатний спектральний розклад - тобто найменше ненульове власне значення λ_{min} оператора $(-\mathfrak{L}_{0j})$ є додатним, а також $\mathfrak{L}_{0j}$ є самоспряженим і визначеним в $L^2(\mathbb{R}, \pi)$.

3.3. В (див. [170, ст. 93]) доведено експоненціальну збіжність $Y_j^{(1)}$ до його інваріантного розподілу

$$\left| \mathbb{E} \left[g(Y_{jt}^{(1)}) \right] - \langle g \rangle \right| \leq C \exp(-\lambda_{\min} t), \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}, \pi).$$

а також для всіх $k \in \mathbb{N}$ існує $C(k) < \infty$ таке, що $\sup_t \mathbb{E} \left[\left| Y_{jt}^{(1)} \right|^k \right] \leq C(k)$.

4. Процес $Z_i^{(1)}$ має інфінітезимальний генератор $\mathcal{M}_2$. З мірою $\mathbb{P}$ процес $Z_i^{(1)}$ складається з моментів, які рівномірно обмежені в $s < t$. Тобто, для всіх $k \in \mathbb{N}$ існує $C(t, k) < \infty$ таке, що

$$\sup_{s \leq t} \mathbb{E} \left[\left| Z_s^{(1)} \right|^k \right] \leq C(t, k).$$

4. Функції $f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ і $\Omega(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ задовольняють

$$\bar{\sigma}^2(z) = \int_{R^l} f^2(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l < \infty,$$

$$\begin{aligned} \overline{f\Omega}(z) &= \int_{R^l} f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \Omega(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \\ &\quad \pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l < \infty \end{aligned}$$

і розв'язки $\phi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ і $\eta_i(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ системи рівнянь Пуассона зростають поліноміальним чином.

6. Функції $a(x), b(x), r(x)$ та $h(x)$ задовольняють умови

$$a > 0, a \in C^2(I), b \in C^1(I), r \geq 0, r \in C(I), h \geq 0 \text{ і } h \in C(I).$$

7. Спектр оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, визначений за допомогою формули

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 a^2(x) \partial_{xx}^2 + (b(x) - \overline{f\Omega} a(x)) \partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2),$$

простий і дискретний [220].

Нехай потрібно оцінити похідний актив деякого виграшу (виплати), який має вигляд:

$$\text{Виплата} = H(X_t) \mathbb{I}_{(\tau > t)},$$

де час дефолту виражається формулою

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = \inf\{t \geq 0: X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t h(X_s) ds \geq \varepsilon(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)\right\}, \\ \varepsilon \sim \text{Exp}(1) \text{ ш.} \end{array} \right.$$

Використовуючи нейтральний ризик ціноутворення і Марківський ланцюг X , ціна $w^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ деяких похідних активів в початковий момент часу має вигляд:

$$w^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) =, \\ \mathbb{E}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n} \left[\exp\left(-\int_0^t r(X_s) ds\right) H(X_t \mathbb{I}_{\{t > \tau\}}) \right],$$

де $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$, $\bar{\delta}' = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, а $(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E$ є початкова точка процесу $(X, Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$. за допомогою формули Фейнмана-Каца, [110] можна показати, що $w^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ задовольняє наступній задачі Коші [19]:

$$\left(-\partial_t + \mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}\right) w^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'} = 0, \quad (y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \in E, t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.6)$$

$$w^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = H(x), \quad (4.7)$$

де оператор $\mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}$ має вигляд:

$$\mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'} = \sum_{j=1}^l \left(\frac{1}{\varepsilon_j} \mathfrak{L}_{0j} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_j}} \mathfrak{L}_{1j} \right) + \mathfrak{L}_2 + \sum_{k,j} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k \varepsilon_j}} \mathfrak{L}_{3kj} + \sum_{i,j} \sqrt{\frac{\delta_i}{\varepsilon_j}} \mathfrak{M}_{3ij} + \\ \sum_i \sqrt{\delta_i} \mathfrak{M}_{1i} + \sum_i \delta_i \mathfrak{M}_{2i} + \sum_{i,r} \sqrt{\delta_i \delta_r} \mathfrak{M}_{4ri}, \quad (4.8)$$

$$\mathfrak{L}_{0j} = \frac{1}{2} \beta_j^2(y_j) \partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j(y_j) \partial_{y_j}, \quad j = \overline{1, l}.$$

$$\mathfrak{L}_{1j} = \beta_j(y_j) (\rho_{xy_j} a(x) f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \partial_x -$$

$$\Lambda_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \partial_{y_j}, \quad (4.9)$$

$$\mathfrak{L}_{2j} = \frac{1}{2} a^2(x) f^2(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \partial_{xx}^2$$

$$+ (b(x) - a(x) \Omega(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)) \partial_x - k(x),$$

$$\mathfrak{L}_{3kj} = \rho_{y_k y_j} \beta_j(y_j) \beta_k(y_k) \partial_{y_j y_k}^2,$$

$$\mathfrak{M}_{4ri} = \rho_{z_i z_r} g_i(z_i) g_r(z_r) \partial_{z_i z_r}^2,$$

$$\mathfrak{M}_{3ij} = \rho_{x z_i} \beta_j(y_j) g_i(z_i) \partial_{y_j z_i}^2,$$

$$\mathfrak{M}_{1i} = g_i(z_i) \left(\rho_{x z_i} a(x) f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \partial_x - \Gamma_i(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \right) \partial_{z_i},$$

$$\mathfrak{M}_{2i} = \frac{1}{2} g_i^2(z_i) \partial_{z_i z_i}^2 + c_i(z_i) \partial_{z_i},$$

$$k(x) = r(x) + h(x).$$

Крім початкової умови (4.7) функція $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ повинна задовольняти на кінцях e_1 та e_2 інтервалу I крайові умови. Крайові умови в точках e_1 та e_2 належать області $\mathfrak{Q}^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ і будуть залежати від природи процесу X на кінцях I та класифікуються як: дійсні, вихідні, вхідні або регулярні. Класифікація [163], здійснюється наступним чином. Для загального нескінченно малого генератора $\mathfrak{Q}$ можна знайти щільність виміру

$$\mathfrak{s}(x) := \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2b(y)}{a^2(y)} dy \right),$$

де нижня межа інтегрування $x_0 \in (e_1; e_2)$ може бути вибрана довільно. З $\mathfrak{s}$ можна визначити вигляд функції $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}([x, y]) := \int_x^y \mathfrak{s}(z) dz, \quad x, y \in (e_1; e_2),$$

$$\mathcal{S}((e_1, y]) := \lim_{x \searrow e_1} \mathcal{S}([x, y]), \quad \mathcal{S}([x, e_2)) := \lim_{x \nearrow e_2} \mathcal{S}([x, y]).$$

Зауважимо, що ці обмеження можуть бути нескінченними. Для будь-яких $y \in (e_1; e_2)$ визначаємо [10]

$$I_1 := \int_{e_1}^y \mathcal{S}((e_1, x])(1 + k(x))m(x)dx, I_2 := \int_y^{e_2} \mathcal{S}([x, e_2))(1 + k(x))m(x)dx,$$

$$J_1 := \int_{e_1}^y \mathcal{S}([x, y])(1 + k(x))m(x)dx, J_2 := \int_y^{e_2} \mathcal{S}([y, x])(1 + k(x))m(x)dx .$$

Крайні точки класифікуються як:

- Натуральна, якщо $I_i = \infty$ і $J_i = \infty$. Інтервал I прийнято вважати відкритим.

- Вихідна, якщо $I_i < \infty$ і $J_i = \infty$. Відповідна крайова умова має вигляд:

$$\lim_{x \rightarrow e_i} \psi(x) = 0.$$

- Вхідна, якщо $I_i = \infty$ і $J_i < \infty$. Відповідна крайова умова

$$\lim_{x \rightarrow e_i} \frac{\partial_x \psi(x)}{s(x)} = 0.$$

- Регулярна, якщо $I_i < \infty$ і $J_i < \infty$. Потрібно вказати поведінку дифузії на межі, оскільки розглядаємо тільки кілінг, а також миттєво відображаємо поведінку, тобто крайові умови є такими

$$\lim_{x \rightarrow e_i} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow e_i} \frac{\partial_x \psi(x)}{s(x)} = 0$$

Область визначення оператора має вигляд

$$\text{Dom}(\mathfrak{L})\{f \in L^2(I, m): f, \partial_x f \in AC_{\text{loc}}(I), \mathfrak{L}f \in L^2(I, m), \}$$

де $AC_{\text{loc}}(I)$ є простором функцій, абсолютно неперервних на кожному компактному підінтервалі I [220, 233].

З рівняння (4.2) видно, що $\mathfrak{L}_0 = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{Y_j}^1$. Припустимо, що дифузія генератора $\mathfrak{L}_{Y_0}^1$ має інваріантний розподіл Π з щільністю π . Зауважимо, що оператор $\mathfrak{L}_0$ з $\text{dom}(\mathfrak{L}_0) = L^2(\mathbb{R}, \pi)$ є самоспряженим в Гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R}, \pi)$.

Задача Коші (4.6)(4.7) [86-88] для $(f, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_n, \Lambda_1, \dots, \Lambda_l, c_1, \dots, c_n, g_1, \dots, g_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ не має аналітичного розв'язку. Однак, для фіксованого $\overline{\delta'}$, умови (4.8), які містять $\overline{\epsilon}$ та відхиляються як завгодно мало в $\overline{\epsilon}$ околі, що зумовлює сингулярні збурення. Для фіксованого ϵ_j умови, які містять δ_i є малими для деякого малого $\overline{\delta'}$ околу, що спричиняє регулярні збурення. Таким чином, окіл $\overline{\epsilon}$ та окіл $\overline{\delta'}$ дає початок об'єднаному сингулярно-регулярному збуренню $\mathcal{O}(1)$ оператора $\mathfrak{L}_2$. Для того щоб знайти асимптотичний розв'язок задачі Коші (4.6) (4.7) потрібно розкласти в ряд $w^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}}$ за степенями $\sqrt{\epsilon_j}$ та $\sqrt{\delta_i}$:

$$w^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}} = \sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sum_{j_1 \geq 0} \dots \sum_{j_n \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} \sqrt{\delta_1}^{j_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{j_n} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n},$$

де

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sum_{j_1 \geq 0} \dots \sum_{j_n \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} \sqrt{\delta_1}^{j_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{j_n} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n} = \\ & \lim_{\substack{m_1 \rightarrow \infty, \dots, m_{l+n} \rightarrow \infty}} \sum_{i_1 \geq 0}^{m_1} \dots \sum_{i_l \geq 0}^{m_l} \sum_{j_1 \geq 0}^{m_{l+1}} \dots \sum_{j_n \geq 0}^{m_{l+n}} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} \sqrt{\delta_1}^{j_1} \dots \sqrt{\delta_n}^{j_n} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n}, \\ & m_1 \rightarrow \infty, \dots, m_{l+n} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Наближена ціна обчислюється

$$\begin{aligned} & w_{0, \dots, 0} + \sqrt{\epsilon_1} w_{1, \dots, 0} + \sqrt{\epsilon_2} w_{0, 1, \dots, 0} + \dots + \sqrt{\epsilon_l} w_{0, \dots, 1, 0, \dots, 0} \\ & w^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}} \approx + \sqrt{\delta_1} w_{0, \dots, 0, 1, \dots, 0} + \dots + \sqrt{\delta_n} w_{0, \dots, 1, n}. \end{aligned}$$

Вибір розкладу в напівцілих степенях ϵ_j та δ_i є природнім для $\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}}$.

Оскільки, проведено $l + n$ кратний розклад в ряд по напівцілих степенях ϵ_j та δ_i , то потрібно визначитися, які з цих параметрів розкладати.

Спочатку виконаємо регулярний розклад збурень, які породжуються $\overline{\delta'}$.

Потім розглянемо сингулярні збурення, які стосуються $\overline{\epsilon}$.

Розклад збурень продовжується, шляхом поділу термінів $\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}}$ і $w^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}}$, які стосуються $\sqrt{\delta_i}$.

$$\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}} = \mathfrak{L}^{\overline{\epsilon}} + \sum_{i=1}^n (\sqrt{\delta_i} \mathfrak{M}_i^{\overline{\epsilon}} + \delta_i \mathfrak{M}_{2i}) + \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \sqrt{\delta_r} \mathfrak{M}_{4ri}, \quad (4.10)$$

$$w^{\overline{\epsilon}, \overline{\delta'}} = \sum_{o_1 \geq 0} \dots \sum_{o_n \geq 0} (\sqrt{\delta_1})^{o_1} \dots (\sqrt{\delta_n})^{o_n} w_{o_1, \dots, o_n}^{\overline{\epsilon}},$$

де

$$\mathfrak{L}^{\overline{\epsilon}} = \sum_{j=1}^l \frac{1}{\epsilon_j} \mathfrak{L}_{0j} + \sum_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \mathfrak{L}_{1j} + \mathfrak{L}_2 + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_j}} \mathfrak{L}_{3kj},$$

$$\mathfrak{M}_i^{\overline{\epsilon}} = \sum_{j=1}^l \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_i}} \mathfrak{M}_{3ji} + \mathfrak{M}_{1i} \right). \quad (4.11)$$

$$w_{o_1, \dots, o_n}^{\overline{\epsilon}} = \sum_{i_1 \geq 0} \dots \sum_{i_l \geq 0} \sqrt{\epsilon_1}^{i_1} \dots \sqrt{\epsilon_l}^{i_l} w_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_n}, \quad (4.12)$$

Підставивши розклад (4.10) в диференціальне рівняння (4.6) і збираючи члени з степенями $\sqrt{\delta_i}$ одержуємо низку рівнянь з регулярним розкладом збурень [130]:

$$0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^{\overline{\epsilon}}) u_{\overline{0'}}^{\overline{\epsilon}}, \quad \overline{0} = (0, \dots, 0) \in R^l, \quad \overline{0'} = (0, \dots, 0) \in R^n. \quad (4.13)$$

$$0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^{\overline{\epsilon}}) u_{\overline{1'_i}}^{\overline{\epsilon}} + \mathfrak{M}_i^{\overline{\epsilon}} u_{\overline{0'}}^{\overline{\epsilon}}, \quad i = \overline{1, l}. \quad (4.14)$$

В рівняннях (4.13) і (4.14) зробимо сингулярний розклад збурень по відношенню до параметрів ϵ_j , $j = \overline{1, l}$.

Підставивши (4.11) та (4.12) в (4.13) і зберемо члени зі степенями $\sqrt{\epsilon_j}$. З розгляду еквівалентних величин маємо порядок $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon_j}\right)$ і $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\right)$ рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon_j}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{0}, \overline{0'}}^-, \quad j = \overline{1, l}. \quad (4.15)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_{0j} u_{\overline{1j}, \overline{0'}}^- + \mathfrak{L}_{1j} u_{\overline{0}, \overline{0'}}^-. \quad (4.16)$$

Зауважимо, що всі умови в $\mathfrak{L}_{0j}$ і $\mathfrak{L}_{1j}$ мають похідні відносно змінних y_j , тому, якщо $w_{\overline{0}, \overline{0'}}^-$ і $w_{\overline{1j}, \overline{0'}}^-$ є незалежними від $y_1, \dots, y_l$, то вони будуть розв'язками рівнянь (4.15) і (4.16). Таким чином

$$w_{\overline{0}, \overline{0'}}^- = w_{\overline{0}, \overline{0'}}^-(t, x, z_1, \dots, z_n) \text{ і}$$

$w_{\overline{1j}, \overline{0'}}^- = w_{\overline{1j}, \overline{0'}}^-(t, x, z_1, \dots, z_n)$. Продовжуючи асимптотичний аналіз $\mathcal{O}(1)$ і $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j})$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} u_{\overline{2j}, \overline{0'}}^- + \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{1j}, \overline{0'}}^- + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0}, \overline{0'}}^-, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j}): \quad 0 = \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{3j}, \overline{0'}}^- + \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{2j}, \overline{0'}}^- +$$

$$\sum_{k \neq j} \mathfrak{L}_{1k} w_{\overline{1kj}, \overline{0'}}^- + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{1j}, \overline{0'}}^-, \quad (4.18)$$

використаємо [139-140], що $\mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{1j}, \overline{0'}}^- = 0$ і $w_{\overline{1kj}, \overline{0'}}^-$ не залежать від $y_1, \dots, y_l$ при $k \neq j$.

Тоді (4.17) і (4.18) набудуть вигляду

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j}, \overline{0'}}^- + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0}, \overline{0'}}^- = 0,$$

$$\mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{3j}, \overline{0'}}^- + \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{2j}, \overline{0'}}^- + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{1j}, \overline{0'}}^- = 0,$$

$$\bar{1}_{kj} = \left(\underbrace{0, \dots, 1}_k \underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_j \right), \text{ для } k < j, \text{ або } \bar{1}_{kj} = \left(\underbrace{0, \dots, 1}_j \underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_k \right) \text{ для } k > j.$$

(4.17) і (4.18) є рівняннями Пуассона виду:

$$0 = \mathfrak{L}_{0j}w + \mathcal{X}, \quad j = \overline{1, l}. \quad (4.19)$$

Оскільки $\mathfrak{L}_{0j}$ – самоспряжений оператор, який діє на $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \pi)$ то за альтернативою Фредгольма для рівнянь типу (4.19) для того що існував розв’язок $u \in \text{dom}(\mathfrak{L}_0) = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \pi)$ необхідно виконання умови центрування [38]:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_j := \int_{\mathbb{R}^l} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_j(y_j) dy_j = 0 \quad (4.20)$$

де

$$\pi_j(y_j) = \frac{2}{\beta_j^2(y_j)} \exp \left\{ \int_{y_{j0}}^{y_j} \frac{2\alpha_j(\theta)}{\beta_j^2(\theta)} d\theta \right\}, \quad \forall j = \overline{1, l}.$$

За стохастичними рівняннями

$$\left(-\frac{1}{\epsilon_j} Y_{jt} - \frac{\beta_j}{\sqrt{\epsilon_j}} \text{erf } Y_{jt} \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j d\tilde{W}_t^{y_j}, \quad j = \overline{1, l},$$

запишемо відповідні рівняння в частинних похідних

$$\partial_t w_j = \frac{1}{\epsilon_j} \left(\frac{1}{2} \beta_j^2 \partial_{y_j^2}^2 w - y_j \partial_{y_j} w \right), \quad j = \overline{1, l},$$

тому $\mathfrak{L}_{0j} = \frac{1}{2} \beta_j^2 \partial_{y_j^2}^2 w - y_j \partial_{y_j} w$.

Знайдемо 2l розв’язків з таких рівнянь Пуассона ϕ_j і η_j [19]

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{01}\phi_1 &= f^2 - \bar{\sigma}_1^2, \quad \mathfrak{L}_{02}\phi_2 = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2, \dots, \\ \mathfrak{L}_{0j}\phi_j &= \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-1,j}^2, \dots, \quad \mathfrak{L}_{0l}\phi_l = \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2 - \bar{\sigma}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{01}\eta_1 &= f\Omega - \overline{f\Omega}_1, \mathfrak{L}_{02}\eta_2 = \overline{f\Omega}_1 - \overline{f\Omega}_{12}, \dots, \\ \mathfrak{L}_{0j}\eta_j &= \overline{f\Omega}_{j-2,j-1} - \overline{f\Omega}_{j-1,j} \dots, \mathfrak{L}_{0l}\eta_l = \overline{f\Omega}_{l-2,l-1} - \overline{f\Omega},\end{aligned}$$

де

$$f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r) = \prod_{j=1}^l f_j(y_j) \prod_{i=1}^r F_i(z_i),$$

$$f_j(y_j) = \sigma \exp Y_{jt} \exp \left\{ -\frac{\beta_j^2}{2} \right\}, \quad F_i(z_i) = \sigma \exp Z_{it} \exp \{-z_{0i}\}.$$

Отже

$$f(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r) = \sigma^{l+r} \prod_{j=1}^l e^{y_j + \frac{\beta_j^2}{2}} \prod_{i=1}^r e^{z_i - z_{0i}}.$$

Враховуючи, що:

$$\bar{\sigma}_1^2 := \int_{R^1} f^2 \pi_1(y_1) dy_1,$$

$$\bar{\sigma}_{12}^2 := \int_{R^2} f^2 \pi_1(y_1) \pi_2(y_2) dy_1 dy_2,$$

$$\bar{\sigma}_{23}^2 := \int_{R^3} f^2 \pi_1(y_1) \pi_2(y_2) \pi_3(y_3) dy_1 dy_2 dy_3, \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2$$

$$:= \int_{R^{l-1}} f^2 \pi_1(y_1) \dots \pi_{l-1}(y_{l-1}) dy_1 \dots dy_{l-1}, \dots$$

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}_{l-1,l}^2 := \int_{R^l} f^2 \pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l,$$

де

$$\pi_j(y_j) = \frac{2}{\beta_j^2} \exp \left\{ \int_{y_{j0}}^{y_j} \frac{2y_j}{\beta_j^2} dy_j \right\} = \frac{2}{\beta_j^2} e^{-\frac{y_j^2}{\beta_j^2} + \frac{y_{0j}^2}{\beta_j^2}},$$

Припустимо, що $y_{0j} = 0$, тоді $\pi_j(y_j) = \frac{2}{\beta_j^2} e^{-\frac{y_j^2}{\beta_j^2}}$. [18]

Знайдемо $\bar{\sigma}_1^2$:

$$\bar{\sigma}_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2y_1 - \beta_1^2} \frac{2}{\beta_1^2} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2}} dy_1 \sigma^{l+r} e^{2 \sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right)} e^{2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})},$$

Розглянемо:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\beta_1^2} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2} + 2y_1 - \beta_1^2} dy_1 &= \frac{2}{\beta_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\beta_1^2}(y_1^2 - 2y_1\beta_1^2 + \beta_1^4)} dy_1 \\ &= \frac{2}{\beta_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\beta_1^2}(y_1^2 - \beta_1^2)^2} dy_1 = \frac{\sqrt{2}}{\beta_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1}; \\ \bar{\sigma}_1^2 &= \frac{2\sigma^{2(l+r)}\sqrt{\pi}}{\beta_1} e^{2 \sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюючи, маємо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12}^2 &= \frac{2^2 \sigma^{2(l+r)} \sqrt{\pi}}{\beta_1 \beta_2} e^{2 \sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}, \dots, \\ \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 &= \frac{2^{j-1} \sigma^{2(l+r)} \sqrt{\pi}^{j-1}}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} e^{2 \sum_{k=j}^l \left(y_k - \frac{\beta_k^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}, \dots, \\ \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 &= \frac{\sigma^{2(l+r)} \sqrt{\pi}^{\frac{l}{2}}}{\beta_1 \dots \beta_l} e^{2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})} = \bar{\sigma}^2. \end{aligned}$$

Знайдемо $\phi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r)$ як частинний розв'язок рівняння

Пуассона

$$\mathfrak{L}_{01} \varphi_1 = f^2 - \bar{\sigma}_1^2,$$

Тобто

$$\frac{1}{2} \beta_1^2 \varphi_{1y_1^2}'' - y_1 \varphi_{1y_1}' = \left(e^{2y_1 - \beta_1^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_1} \right) \sigma^{2(l+r)} e^{2 \sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}.$$

Спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{1}{2}\beta_1^2 w_{y^2}'' - y\varphi_y' = 0,$$

$$\frac{w''}{w'} = \frac{2y}{\beta_1^2}, \quad \ln|u'| = \ln c_1 + \frac{y^2}{\beta_1^2}, \quad c_1 > 0.$$

$$w' = c_1 e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}}, \quad w = c_1 \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy_1 + c_2,$$

Фундаментальна система розв'язків

$$w_2 = 1, w_2 = \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy.$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$w_{3.0p} = c_1 w_1 + c_2 w_2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$K(y)w''y_1 + M(y)w' + N(y)w = f(y),$$

$$w_{3H} = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \int_{y_{10}}^{y_1} \frac{w_1(y_1)w_2(t) - w_1(t)w_2(y_1)}{w_1'(t)w_2(y_1) - w_2'(t)w_1(y_1)} \frac{f(t)}{K(t)} dt.$$

Тобто за

$$\varphi_1(y_1 \dots y_l, z_1 \dots z_r) = \int_0^{y_1} \frac{\int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy - \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy}{-e^{\frac{t^2}{\beta_1^2}}} \frac{2}{\beta_1^2} \left(e^{2t-\beta_1^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \right) dt$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2\sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})} = \frac{2\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1^2} e^{2\sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

$$\int_0^{y_1} e^{-\frac{t^2}{\beta_1^2}} \left(\int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy \right) \left(e^{2t-\beta_1^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \right) dt = \frac{\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1^2} e^{2\sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}$$

$$\left[\int_0^{y_1} e^{-\frac{1}{\beta_1^2}(t-\beta_1^2)^2} \left(\int_t^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy \right) dt - \int_0^{y_1} e^{-\frac{t^2}{\beta_1^2}} \int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} dy \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} dt \right],$$

тому

$$\varphi_1 = \frac{\sigma^{2(l+r)}\sqrt{\pi}}{\beta_1} \left[\int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{y - \beta_1^2}{\beta_1} \right) - \operatorname{Erf} \beta_1 \right) dy - \frac{\pi}{2\beta_1^2} \int_0^{y_1} e^{\frac{y^2}{\beta_1^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{y}{\beta_1} \right) dy \right].$$

Знайдемо φ_2

$$\mathfrak{L}_{02}\varphi_2 := \frac{1}{2}\beta_2^2\varphi_2'' - y_1\varphi_2' = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2.$$

Підставивши значення $\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2$ маємо таке рівняння Пуассона

$$\frac{1}{2}\beta_2^2\varphi_2'' - y_1\varphi_2' = \frac{2\sqrt{\pi}\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1} e^{2\sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})} - \frac{2^2\pi\sigma^{2(l+r)}}{\beta_1\beta_2} e^{2\sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) - 2\sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}.$$

Розв'язуючи однорідне рівняння

$$\frac{1}{2}\beta_2^2 w_{y^2}'' - y\varphi_y' = 0,$$

знайдемо фундаментальну систему розв'язків

$$w_1 = \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy, \quad w_2 = 1, \quad y_{20} = 0.$$

Аналогічно як для $\mathfrak{L}_{01} = \chi$ знайдемо частинний розв'язок рівняння

Пуассона

$$\varphi_2 = \int_{y_{02}}^{y_2} \frac{w_1(y_2)w_2(t) - w_1(t)w_2(y_2)}{w_1'(t)w_2(y_1) - w_2'(t)w_1(y_1)} \frac{(\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2)^2}{\beta_2^2} dt.$$

$$\varphi_2 = \int_{y_{02}}^{y_2} \frac{\int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy - \int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy}{\frac{t^2}{e^{\frac{t^2}{\beta_2^2}}}} \frac{2}{\beta_2} \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \left(e^{2t - \beta_2^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_2} \right) dt$$

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \sigma^{2(l+r)} e^{2 \sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})} =$$

$$\left[\frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1 \beta_2^2} \int_0^{y_2} e^{-\frac{(t-\beta_2^2)^2}{\beta_2^2}} \int_t^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy dt - \frac{2^3 \pi}{\beta_2^3 \beta_1} \int_0^{y_2} e^{-\frac{t}{\beta_2^2}} \int_t^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy dt \right]$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2 \sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}.$$

В подвійних інтегралах поміняємо порядки інтегрування

$$\varphi_2 = \left[\frac{2^2 \sqrt{\pi}}{\beta_1 \beta_2^2} \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_0^y e^{-\frac{1}{\beta_2^2} (t-\beta_2^2)^2} dt - \frac{2^3 \pi}{\beta_2^3 \beta_1} \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_0^y e^{-\frac{t}{\beta_2^2}} dt \right]$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2 \sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}.$$

Зробивши заміни

$$\frac{(t - \beta_2^2)}{\beta_2} = \alpha \text{ і } \frac{t}{\beta_2} = d\alpha,$$

одержимо

$$\varphi_2 = \left[\int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_{\beta_2}^{(y-\beta_2^2)/\beta_2} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{2^2 \pi}{\beta_2^2 \beta_1} \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} dy \int_0^{\frac{y}{\beta_2}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right]$$

$$\sigma^{2(l+r)} e^{2 \sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{0i})}.$$

$$\varphi_2 = \left[\int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{y - \beta_2^2}{\beta_2} \right) - \operatorname{Erf} \beta_2 \right) dy \right.$$

$$\left. - \int_0^{y_2} e^{\frac{y^2}{\beta_2^2}} \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{y}{\beta_2} \right) - \beta_2 \right) dy \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_2} \right]$$

$$\frac{4\pi}{\beta_2\beta_1}\sigma^{2(l+r)}e^{2\sum_{j=3}^l\left(y_j-\frac{\beta_j^2}{2}\right)+2\sum_{i=1}^r(z_i-z_{0i})}$$

Крок за кроком одержимо частинний розв'язок φ_j рівняння Пуассона [19].

$$\mathfrak{L}_{0j}\varphi_j = \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-2,j}^2 ,$$

фундаментальна система розв'язків

$$u_1 = \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy, \quad u_2 = 1,$$

$$\varphi_j = \int_0^{y_j} \frac{\int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy - \int_0^t e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy}{\frac{t^2}{e^{\frac{t^2}{\beta_j^2}}}} \frac{2}{\beta_j^2} \sigma^{2(l+r)} \frac{2^{j-1} \pi^{\frac{j-1}{2}}}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} \left(e^{2t-\beta_j^2} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_j} \right) dt$$

$$e^{2\sum_{k=j+1}^l\left(y_k-\frac{\beta_k^2}{2}\right)+2\sum_{i=1}^r(z_i-z_{0i})} = \frac{\sigma^{2(l+r)} 2^j}{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_j^2} e^{2\sum_{k=j+1}^l\left(y_k-\frac{\beta_k^2}{2}\right)+2\sum_{i=1}^r(z_i-z_{0i})}$$

$$\left[\int_0^{y_j} e^{-\frac{t^2}{\beta_j^2}} - e^{2t-\beta_j^2} dt - \int_t^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy - \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_j} \int_0^{y_j} e^{-\frac{t^2}{\beta_j^2}} dt \int_t^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy \right].$$

Змінивши порядок інтегрування і відповідні заміни змінних інтегрування одержимо

$$Erfy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{\alpha^2} d\alpha.$$

$$\phi_j = \left\{ \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} \left[Erf \frac{y - \beta_j^2}{\beta_j} - Erf \beta_j \right] dy - \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} Erf \frac{y}{\beta_j} dy \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_j} \right\} \frac{2^j \pi^{j/2}}{\beta_1 \dots \beta_j}$$

$$= \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} \left[Erf \frac{y - \beta_j^2}{\beta_j} - Erf \beta_j - \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_j} Erf \frac{y}{\beta_j} \right] dy$$

$$\frac{(2\pi^{j/2})^j \sigma^{2(l+r)}}{\beta_1 \dots \beta_j} \exp \left\{ 2 \sum_{k=j+1}^l \left(y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_i z_i - z_{i1} \right\}.$$

По аналогії

$$\phi_l = \int_0^{y_l} e^{\frac{y^2}{\beta_l^2}} \left[\operatorname{Erf} \frac{y - \beta_l^2}{\beta_l} - \operatorname{Erf} \beta_l - \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_l} \operatorname{Erf} \frac{y}{\beta_l} \right] dy$$

$$\frac{2^l (\sqrt{\pi})^l \sigma^{2r(l+r)}}{\beta_1 \dots \beta_l} \exp \left\{ \sum_i z_i - z_{i0} \right\}.$$

Отже,

$$\phi_j = \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} \left[\operatorname{Erf} \frac{y - \beta_j^2}{\beta_j} - \operatorname{Erf} \beta_j \frac{\sqrt{\pi}}{\beta_j} \operatorname{Erf} \frac{y}{\beta_j} - \right] dy \frac{(2\pi^{1/2})^j \sigma^{2(l+r)}}{\beta_1 \dots \beta_j}$$

$$\exp \left\{ 2 \sum_{k=j+1}^l \left(y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r z_i - z_{i0} \right\}, \forall j = \overline{1, l}.$$

Коли $\Omega = 0$, то в якості беремо $\eta_j \equiv 1 \forall j = \overline{1, l}$, або $\eta_j = \int_0^{y_j} e^{\frac{y^2}{\beta_j^2}} dy$,

або $\eta_j \equiv 0$, що підходить для обчислення.

Розглянемо випадок, коли $\Omega \neq 0$ зокрема $\Omega = 0,1 e^{\sum_{j=1}^l \beta_j^2 / 4}$

$$f = \sigma^{l+r} \exp \left\{ \sum_{k=1}^l \left(y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r z_i - z_{i0} \right\},$$

$$f\Omega = \sigma^{l+r} 0,1 \exp \left\{ \sum_{k=1}^l \left(y_k - \frac{\beta_k^2}{4} \right) + 2 \sum_{i=1}^r z_i - z_{i0} \right\},$$

$$\overline{f\Omega_1} = \sigma^{l+r} 0,1 \int_{-\infty}^{\infty} f\Omega \pi_1(y_1) dy,$$

$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_1 \pi_2(y_2) dy_2,$$

$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{23} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_{12} \pi_3(y_3) dy_3,$$

.....

$$\langle \overline{f\Omega} \rangle_{l-1l} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_{l-2,l-1} \pi_l(y_l) dy_l = \overline{f\Omega}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \langle \overline{f\Omega} \rangle_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{l+r} e^{y_1 - \frac{\beta_1^2}{4}} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2}} \frac{2}{\beta_1^2} dy \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \\ &= \sigma^{l+r} 0,1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{y_1 - \frac{\beta_1^2}{4}} e^{-\frac{y_1^2}{\beta_1^2}} dy \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \frac{2}{\beta_1^2} \\ &= \left| -\frac{y_1^2}{\beta_1^2} - y_1 + \frac{\beta_1^2}{4} = \frac{1}{\beta_1^2} \left(y_1^2 - \frac{2y_1\beta_1^2}{2} + \frac{\beta_1^4}{4} \right) \right. \\ &= \frac{1}{\beta_1^2} \left(y_1 - \frac{\beta_1^2}{2} \right)^2, \frac{1}{\beta_1^2} \left(y_1 - \frac{\beta_1^2}{2} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \frac{dy}{\beta_1} = \frac{d\alpha}{\sqrt{2}}, dy \\ &= \frac{\beta_1}{\sqrt{2}} d\alpha \Big| \\ &= \frac{\sqrt{2}\beta_1}{\sqrt{2}\beta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \sigma^{l+r} 0,1 \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_1} \exp \left\{ - \sum_{j=2}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \sigma^{l+r} 0,1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \overline{f\Omega} \rangle_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{y_2 - \frac{\beta_2^2}{4}} e^{-\frac{y_2^2}{\beta_2^2}} \frac{2}{\beta_1^2} dy_2 \sigma^{l+r} \\ 0,1 \exp \left\{ - \sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \beta_1^{-1} (\sqrt{\pi})^2 &= \\ \beta_1^{-1} \beta_2^{-1} 4\pi \sigma^{l+r} 0,1 \exp \left\{ - \sum_{j=3}^l \left(y_j - \frac{\beta_j^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} &.\end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned}\langle \overline{f\Omega} \rangle_{j-1,j} &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \overline{f\Omega} \rangle_{j-2,j-1} dy_j \neq 1, \\ \langle \overline{f\Omega} \rangle_{j-1,j} &= \frac{2^{j-1} \pi^{\frac{j-1}{2}} 0,1}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y_j - \frac{\beta_j^2}{4}} e^{-\frac{y_j^2}{\beta_j^2}} \frac{2}{\beta_j^2} dy_j \sigma^{l+r} \\ &\exp \left\{ - \sum_{k=j+1}^l \left(y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} \\ &= \frac{2^j \pi^{\frac{j-1}{2}} 0,1}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} \frac{2}{\beta_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(y_j - \frac{\beta_j^2}{4} \right)^2} dy_j \sigma^{l+r} \\ \exp \left\{ - \sum_{k=j+1}^l \left(y_k - \frac{\beta_k^2}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^r (z_i - z_{i0}) \right\} &= \frac{2^j \pi^{\frac{j-1}{2}} 0,1}{\beta_1 \dots \beta_{j-1}}.\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{X} \rangle_{1,2} &= \int_{R^2} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) dy_1 \pi_2(y_2) dy_2 = \\ &\int_{R^2} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) \pi_2(y_2) dy_1 dy_2,\end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{l-1,l} = \int_{R^l} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) dy_1 \dots \pi_l(y_l) dy_l$$

$$= \int_{R^l} \mathcal{X}(y_1, \dots, y_l) \pi_1(y_1) \dots \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l,$$

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{l-1,l} = \langle \mathcal{X} \rangle, \quad \langle f\Omega \rangle := \overline{f\Omega}, \quad \langle f^2 \rangle = \bar{\sigma}^2, \quad \bar{\sigma}_{j-1,j}^2 = \langle f^2 \rangle_{j-1,j},$$

f і Ω неперервно диференційовні по $z_1, \dots, z_n$ і абсолютно інтегровні по $y_1, \dots, y_l$ з вагою $\pi_j(y_j)$ по кожному y_j .

У рівняннях (4.17) і (4.18) проведемо умову центрування (4.20) по всіх $y_1, \dots, y_l$ відповідно маємо [158, 168]:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0}, \overline{0'}}, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j}): \quad 0 = \langle \mathfrak{L}_{1j} u_{\overline{2j}, \overline{0'}} \rangle + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{1j}, \overline{0'}}. \quad (4.22)$$

де оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ має вигляд:

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 a^2(x) \partial_{xx}^2 + (b(x) - \overline{f\Omega} a(x)) \partial_x - k(x), \quad (4.23)$$

Зауважимо, $x \in (e_1, e_2)$, що $\bar{\sigma}^2(z_1, \dots, z_n) < \infty$ і $\overline{f\Omega}(z_1, \dots, z_n) < \infty$.

Враховуючи відповідні крайові умови для e_1 та e_2 , знаходимо єдиний розв'язок $w_{\overline{0}, \overline{0'}}$ диференціального рівняння (4.21). Однак, щоб

використовувати (4.22) знайдемо $\langle \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j}, \overline{0'}} \rangle$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j}, \overline{0'}} &= -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0}, \overline{0'}} = -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0}, \overline{0'}} + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0}, \overline{0'}} \\ &= -\left(\frac{1}{2} a^2(f^2 - \bar{\sigma}^2) \partial_{xx}^2 - a(f\Omega - \overline{f\Omega}) \partial_x \right) w_{\overline{0}, \overline{0'}}. \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j}, \overline{0'}} = -\left(\frac{1}{2} a^2(f^2 - \bar{\sigma}^2 \mp \bar{\sigma}_1^2 \mp \bar{\sigma}_{12}^2 \mp \dots \mp \bar{\sigma}_{l-2, l-1}^2) \partial_{xx}^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
& -a(f\Omega - \overline{f\Omega} \mp \overline{f\Omega}_1 \mp \overline{f\Omega}_{12} \mp \dots \mp \overline{f\Omega}_{l-2,l-1})\partial_x), \\
w_{\overline{0},\overline{0'}} &= -\left(\frac{1}{2}a^2[(f^2 - \bar{\sigma}_1^2) + (\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2) + \dots + (\bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2 - \bar{\sigma}^2)]\partial_{xx}^2\right. \\
& \left. - a\left((f\Omega - \overline{f\Omega}_1) + \dots + (\overline{f\Omega}_{l-2,l-1} - \overline{f\Omega})\right)\partial_x\right)w_{\overline{0},\overline{0'}}
\end{aligned}$$

Тепер $\phi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ і $\eta_j(t, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$, як розв'язки рівнянь Пуассона:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{01}\varphi_1 &= f^2 - \bar{\sigma}_1^2, \quad \mathfrak{L}_{02}\varphi_2 = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2, \dots, \\
\mathfrak{L}_{0j}\varphi_j &= \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-1,j}^2, \dots, \quad \mathfrak{L}_{0l}\varphi_l = \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2 - \bar{\sigma}_{l-1,l}^2, \\
\mathfrak{L}_{01}\eta_1 &= f\Omega - \overline{f\Omega}_1, \dots, \mathfrak{L}_{0l}\eta_l = \overline{f\Omega}_{l-2,l-1} - \overline{f\Omega},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

тоді

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j}u_{\overline{2j},\overline{0'}} = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} \left(-\frac{1}{2}a^2\phi_j\partial_{xx}^2 + a\eta_j\partial_x \right) w_{\overline{0},\overline{0'}},$$

тому $w_{\overline{2j},\overline{0'}}$, має вигляд

$$w_{\overline{2j},\overline{0'}} = -\left(\frac{1}{2}a^2\phi_j\partial_{xx}^2 - a\eta_j\partial_x\right)w_{\overline{0},\overline{0'}} + C_j. \tag{4.25}$$

Зауважимо, що C_j – константа незалежна від $y_1, \dots, y_l$ а ϕ_j та η_j не залежать від $y_1, \dots, y_{j-1}$, $\forall j = \overline{1, l}$. [166]. Підставивши (4.9) та (4.25) в $\langle \mathfrak{L}_{1j}w_{\overline{2j},\overline{0'}} \rangle$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{L}_{1j}w_{\overline{2j},\overline{0'}} \rangle &= \langle (\beta_j(\rho_{xy_j}af\partial_x - \Lambda_j)\partial_{y_j}) \left(\frac{a^2\phi_j\partial_{xx}^2}{2} - a\eta_j\partial_x \right) w_{\overline{0},\overline{0'}} \rangle \\
&= -\mathcal{A}_j w_{\overline{0},\overline{0'}}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Оператор $\mathcal{A}_j$ має вигляд $\forall j = \overline{1, l}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_j &= -v_{3j}a(x)\partial_x a^2(x)\partial_{xx}^2 - v_{2j}a^2(x)\partial_{xx}^2 - \mathcal{U}_{2j}a(x)\partial_x a(x)\partial_x \\
&\quad - \mathcal{U}_{1j}a(x)\partial_x,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

де визначено чотири параметри групи $\forall j = \overline{1, l}$.

$$v_{3j} = -\frac{\rho_{xyj}}{2} \langle \beta_j f \partial_{y_j} \phi_j \rangle, \quad v_{2j} = \frac{1}{2} \langle \beta_j \Lambda_j \partial_{y_j} \phi_j \rangle,$$

$$\mathcal{U}_{2j} = \rho_{xyj} \langle \beta_j f \partial_{y_j} \eta_j \rangle, \quad \mathcal{U}_{1j} = -\langle \beta_j \Lambda_j \partial_{y_j} \eta_j \rangle.$$

Підставимо (4.26) в (4.22) отримаємо:

$$\mathcal{A}_j w_{\bar{0}, \bar{0}'} = (-\partial_t + \langle \mathcal{L}_2 \rangle) w_{\bar{1}, \bar{0}'}. \quad (4.28)$$

Враховуючи вираз для $w_{\bar{0}, \bar{0}'}$ і відповідні крайові умови, використавши диференціальне рівняння (4.28) можна знайти вираз для $w_{\bar{1}, \bar{0}'}$. Це залежить від того, який взяти вигляд рівняння (4.13), повернемося до рівняння $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i})$.

Для проведення сингулярного аналізу збурень рівняння (4.14), потрібно підставити (4.11) і (4.12) в (4.14) та згрупувати степенях $\sqrt{\epsilon_j}$. В результаті вибираємо еквівалентні величини $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}/\epsilon_j)$ і $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}/\sqrt{\epsilon_j})$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta_i}}{\epsilon_j}\right): \quad 0 = \mathcal{L}_{0j} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta_i}}{\sqrt{\epsilon_j}}\right): \quad 0 = \mathcal{L}_{0j} u_{\bar{1}j \bar{1}'_i} + \mathcal{L}_{1j} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}, \quad (4.30)$$

де використано, що $\mathfrak{M}_{3ij} u_{\bar{0}, \bar{0}'} = 0$. Зауважимо, якщо $w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}$ і $w_{\bar{1}j \bar{1}'_i}$ не залежать від $y_1, \dots, y_l$, то вони автоматично будуть задовольняти рівняння (4.29) та (4.30). Таким чином, вибираємо

$$w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} = w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}(x, z_1, \dots, z_n) \text{ і } w_{\bar{1}j \bar{1}'_i} = w_{\bar{1}j \bar{1}'_i}(x, z_1, \dots, z_n).$$

Продовжуючи асимптотичний аналіз, переходимо величин $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i})$:

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}): 0 = \sum_{j=1}^l \mathcal{L}_{0j} w_{\bar{2}j \bar{1}'_i} + (-\partial_t + \mathcal{L}_2) w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{0}, \bar{0}'} +$$

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i}. \quad (4.31)$$

Використовуючи, що

$$\mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i} = 0 \text{ та } \sum_{j=1}^l \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} = 0.$$

тому (4.31) має вигляд

$$\sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{2}j, \bar{1}'_i} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{0}, \bar{0}'} = 0$$

і є рівнянням Пуассона для $w_{\bar{2}j, \bar{1}'_i}$ у формі (4.19). За альтернативою

Фредгольма, для (4.31) знайдемо розв'язок $w_{\bar{2}j, \bar{1}'_i} \in L^2(\mathbb{R}, \pi)$, згідно з

умовою центрування (4.19) матимемо

$$0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} + \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\bar{0}, \bar{0}'}. \quad (4.32)$$

Звернемо увагу, що $w_{\bar{0}, \bar{0}'}(t, x, z_1, \dots, z_n)$ залежить від $z_1, \dots, z_n$ тому в (4.32)

$\langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle &= -\mathcal{B}_i \partial_{z_i}, \quad \mathcal{B}_i = -v_{1i} a(x) \partial_x - v_{0i}, \\ v_{1i} &:= g_i \rho_{xz_i} \langle f \rangle, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$v_0 = g_i \langle \Gamma \rangle, \quad \langle \Gamma \rangle = \int_{R^l} \Gamma(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \pi_1(y_1) \pi_l(y_l) dy_1 \dots dy_l,$$

$$\partial_{z_i} = \partial_{z_i} \bar{\sigma} \partial_{\bar{\sigma}} + \bar{f} \bar{\Omega}' \partial_{\bar{f} \bar{\Omega}}, \quad (4.34)$$

маємо введені чотири групи параметрів: $v_{1i}, v_{0i}, \partial_{z_i} \bar{f} \bar{\Omega}, \partial_i \bar{f} \bar{\Omega} \dots [22]$.

Основні результати асимптотичного аналізу наведені за допомогою наступних формул

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1): \quad &(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) u_{\bar{0}, \bar{0}'} = 0, \\ &w_{\bar{0}, \bar{0}'}(0, x, z_1, \dots, z_n) = H(x), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_j}): (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{1_j, 0'}} &= \mathcal{A}_j w_{\overline{0, 0'}}, \\ w_{\overline{1_j, 0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) &= 0, \quad j = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\sqrt{\delta_i}): (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0, 1'_i}} &= \mathcal{B}_i \partial_{z_i} w_{\overline{0, 0'}}, \\ w_{\overline{0, 1'_i}}(0, x, z_1, \dots, z_n) &= 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Оператори $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_i$ та ∂_{z_i} визначені за формулами (4.23), (4.27), (4.33) та (4.34) відповідно.

Знайдемо розв'язки рівнянь (4.35), (4.36) і (4.37) на основі власних функцій $\{\psi_n\}$, власних значень $\{\lambda_n\}$ оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$. Зазначимо, що сингулярний оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, визначений за допомогою (4.23), має вигляд інфінітезимального генератора дифузії з волатильністю $\bar{\sigma}a(x)$, відхиленням $(b(x) - \bar{f}\bar{\Omega}a(x))$ і кіллінгом $k(x)$. Область визначення оператора $dom(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle)$ включає крайові умови, які накладені на кінцях e_1 та e_2 [164, 165, 177-180].

Припустимо, що $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ має дискретний спектр, $\mathcal{H} = \mathfrak{L}^2(I, m)$ Гільбертовий простір, де

$$m(x) = \frac{2}{a^2(x)\bar{\sigma}^4} \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{b(\xi) - \bar{f}\bar{\Omega}a(\xi)}{a^2(\xi)} d\xi \right\},$$

щільність швидкості, яка відповідає $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$. Оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ самоспряжений в $\mathcal{H}$ і його область визначення є щільною підмножиною в $\mathcal{H}$. Таким чином, власні функції $\{\psi_n\}$ оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ формують ортогональну основу в $\mathcal{H}$, а також будь-які оператори діють $\mathcal{A}_j: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\mathcal{B}_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\partial_{z_i}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Також, визначаємо [184, 185, 189]

$$dom(\mathcal{A}_j) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{A}_j\psi \in \mathcal{H}\}, \quad dom(\mathcal{B}_i) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{B}_i\psi \in \mathcal{H}\},$$

$$dom(\partial_{z_i}) := \{\psi \in \mathcal{H}, \partial_{z_i}\psi \in \mathcal{H}\}.$$

Для знаходження розв'язків рівнянь (4.35), (4.36) і (4.37) сформулюємо та доведемо наступні теореми [121].

Теорема 4.1: Припустимо, розв'язане наступне рівняння для знаходження власного значення:

$$-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in \text{dom}(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle), \quad (4.38)$$

а також що $H \in \mathcal{H}$. Тоді розв'язок $w_{\overline{0,0'}}$ має вигляд:

$$w_{\overline{0,0'}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n T_n, \quad c_n = (\psi_n, H), \quad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

Доведення. Так як $w_{\overline{0,0'}}$ задовольняє диференціальне рівняння (4.35), то припустимо, що має місце (4.38). крайові умови виконано

$$w_{\overline{0,0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = H(z_1, \dots, z_n),$$

бо $T_n(0, z_1, \dots, z_n) = 1$ і $\phi(\lambda) = \text{Id}$ (id тотожне відображення) це означає

$$\text{Id}f = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, f) \psi_n, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

це еквівалентно тому, що власні функції $\{\psi_n\}$ щільних самосопряжених операторів в $\mathcal{H}$ утворюють базис Шаудера. Фактично, базис може бути вибраний ортонормований

$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{n,m}$. Також зауважимо, що $\phi(\lambda) = R_\lambda$ дає власне представлення резольвенти оператора [31]

$$R_\lambda f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\psi_n, f)}{\lambda_n - \lambda} \psi_n, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \lambda \in \rho(\mathfrak{L}),$$

до функції виплати H :

$$\text{Id } H = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, H) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n.$$

Теорема 4.2: Нехай c_n, ψ_n, T_n описуються за допомогою Теорема 4.1. визначимо

$$\mathcal{A}_{jk,n} := (\psi_k, \mathcal{A}_j \psi_n), \quad U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad k \neq n.$$

Тоді розв'язок $u_{\overline{1j}, \overline{0'}}$ рівняння (4.36) має вигляд:

$$w_{\overline{1j}, \overline{0'}} = \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{A}_{jk,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{jn,n} \psi_n t T_n, \quad (4.39)$$

Доведення. Покажемо що $w_{\overline{1j}, \overline{0'}}$, який задається за допомогою (4.39) задовольняє диференціальне рівняння і крайові умови (4.36). Видно, що крайові умови для $w_{\overline{1j}, \overline{0'}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0$ виконуються. Щоб показати, що $w_{\overline{1j}, \overline{0'}}$ задовольняє диференціальне рівняння (4.36) зауважимо, що

$$\mathcal{A}_j w_{\overline{0}, \overline{0'}} = \sum_n c_n (\mathcal{A}_j \psi_n) T_n = \sum_n \sum_k c_n \mathcal{A}_{jk,n} \psi_k T_n,$$

згідно з доведенням теореми 4.1. Тепер, використовуючи (4.38) і наступні рівності

$$(-\partial_t - \lambda_k) U_{k,n} = T_n, \quad (-\partial_t - \lambda_n) t T_n = -T_n,$$

легко бачити, що

$$(-\partial_t + \langle \mathcal{Q}_2 \rangle) w_{\overline{1j}, \overline{0'}} = \mathcal{A}_j w_{\overline{0}, \overline{0'}} = \sum_n c_n (\mathcal{A}_j \psi_n) T_n = \sum_n \sum_k c_n \mathcal{A}_{jk,n} \psi_k T_n.$$

Зауважимо, що $u_{\overline{1j}, \overline{0'}}$ є лінійним у групі параметрів $(v_{3j}, v_{2j}, u_{2j}, u_{1j})$ $j = \overline{1, l}$.

Теорема 4.3: Нехай c_n, ψ_n і T_n визначені з теореми 4.1, а $U_{k,n}$ з теореми 4.2 то матимемо

$$\tilde{B}_{ik,n} := (\psi_k, B_i \partial_{Z_i} \psi_n), \quad B_{ik,n} := (\psi_k, B_i \psi_n),$$

$$V_{ik,n} := \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{tT_n}{\lambda_k - \lambda_n}, k \neq n.$$

Тоді розв'язок $u_{\overline{0,1'_i}}$ рівняння (4.36) має вигляд:

$$\begin{aligned} w_{\overline{0,1'_i}} &= \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} \psi_k U_{ik,n} - \sum_n c_n \tilde{\mathcal{B}}_{in,n} \psi_n tT_n + \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} (\partial_{z_i} c_n) \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k U_{ik,n} - \sum_n (\partial_{z_i} c_n) \mathcal{B}_{in,n} \psi_n tT_n \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k (\partial_{z_i} \lambda_n) V_{ik,n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{in,n} \psi_n (\partial_{z_i} \lambda_n) \frac{1}{2} t^2 T_n. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Доведення. Потрібно показати, що $w_{\overline{0,1'_i}}$, задається (4.40)

задовольняє диференціальне рівняння та крайові умови (4.37). Бачимо, що крайова умова $w_{\overline{0,1'_i}}(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0$ виконується. Щоб показати, що

$w_{\overline{0,1'_i}}$ задовольняє диференціальне рівняння (4.37) зауважимо, що

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i \partial_{z_i} w_{\overline{0,0'}} &= \sum_n c_n (\mathcal{B}_i \partial_{z_i} \psi_n) T_n + \sum_n (\partial_{z_i} c_n) (\mathcal{B}_i \psi_n) T_n \\ &+ \sum_n c_n (\mathcal{B}_i \psi_n) (\partial_{z_i} T_n) = \sum_n \sum_k c_n \tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} \psi_k T_n \\ &+ \sum_n \sum_k \partial_{z_i} c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k T_n - \sum_n \sum_k c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k (\partial_{z_i} \lambda_n) tT_n, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

де використали [33]

$$\text{Id } H = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, f) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n,$$

у другій рівності, використовуючи (4.38) та рівності

$$(-\partial_t - \lambda_k) U_{k,n} = T_n, \quad (-\partial_t - \lambda_n) tT_n = -T_n,$$

$$(-\partial_t - \lambda_k) V_{k,n} = -tT_n, \quad (-\partial_t - \lambda_k) \frac{1}{2} t^2 T_n = -tT_n,$$

легко бачити, що

$$\begin{aligned}
(-\partial_t + \langle \Omega_2 \rangle) w_{\overline{0}, \overline{1}_i} &= \mathcal{B}_i \partial_{z_i} w_{\overline{0}, \overline{0}'} = \sum_n c_n (\mathcal{B}_n \partial_{z_n} \psi_n) T_n \\
\sum_n (\partial_{z_n} c_n) (\mathcal{B}_n \psi_n) T_n + \sum_n c_n (\mathcal{B}_n \psi_n) (\partial_{z_n} T_n) &= \sum_n \sum_k c_n \tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} \psi_k T_n \\
+ \sum_n \sum_k \partial_{z_i} c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k T_n - \sum_n \sum_k c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k (\partial_{z_i} \lambda_n) t T_n, & \quad i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що $w_{\overline{0}, \overline{1}_i}$ є лінійним в

$$(v_{1i} \bar{\sigma}', v_{1i} \overline{f \Omega'}, v_{0i} \bar{\sigma}', v_{0i} \overline{f \Omega'}), \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Отримавши наближений розв'язок [123]

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \approx w_{\overline{0}, \overline{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\overline{1}_j, \overline{0}'} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} w_{\overline{0}, \overline{1}_i'}$$

для ціни похідного активу. Для більш точного результату припустимо, що Функція виплати $H(x)$ та $H'(x)$ неперервні і обмежені, ясно що деякі види деривативів не підходять під таке припущення наприклад опціони. Для доведення точності наближення цін [215-217] обмежуємо аналіз деривативів гладкою і обмеженою виплатою, в цьому випадку точність оцінки ґрунтується на такій теоремі:

Теорема 4.4: Для фіксованих $(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ існує стала C така, що для будь-якого $\epsilon_j \leq 1, \delta_i \leq 1$ маємо:

$$\left| w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} - \left(w_{\overline{0}, \overline{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\overline{1}_j, \overline{0}'} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} w_{\overline{0}, \overline{1}_i'} \right) \right| \leq C \left(\sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right).$$

Доведення. До встановлення основного результату точності сформулюємо таку лему.

Лема 4.1. Нехай $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ зростає поліноміально. Тоді для кожного $(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ і $s < t$, існує додатна стала $C < \infty$ така, що для будь-якого $\epsilon_j \leq 1$, та $\delta_i \leq 1$, маємо наступну нерівність

$$\tilde{\mathbb{E}}_{y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n} [|J(Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns})|] \leq C.$$

Доведення лема 4.1. Достатньо, довести результат для $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = y_j^k$ і $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = z_i^k$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Доведемо спочатку $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = z_i^k$. Під фізичною мірою $\mathbb{P}$ розуміємо

$$\mathbb{E}[|Z_{is}|^k] = \mathbb{E}\left[|Z_{i\delta_{is}}^{(1)}|^k\right] \leq \sup_{\delta_i \leq 1} \mathbb{E}\left[|Z_{i\delta_{is}}^{(1)}|^k\right] \leq C_i(s, k) \leq C_i(t, k), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тепер визначимо експоненціальні мартингали $M_t^{(\Gamma_i)}$, які пов'язують динаміку Z_i під нейтральним ризиком вимірювання $\tilde{\mathbb{P}}$ в його динаміці відповідно до фізичної міри $\mathbb{P}$ [36-40]. Маємо

$$M_t^{(\Gamma_i)} := \exp\left(-\int_0^t \Gamma_i(Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) dW_s^{z_i} - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_i^2(Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds\right) = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

математичне сподівання $|Z_s|^k$ можна знайти наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}[|Z_{is}|^k] &= \mathbb{E}\left[|Z_{is}|^k M_s^{(\Gamma_i)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|Z_{is}|^k \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^s \Gamma_i^2(Y_{1u}, \dots, Y_{lu}, Z_{1u}, \dots, Z_{nu}) du\right) \left(M_s^{(2\Gamma_i)}\right)^{1/2}\right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left[|Z_{is}|^{2k} \exp\left(\int_0^s \Gamma_i^2(Y_{1u}, \dots, Y_{lu}, Z_{1u}, \dots, Z_{nu}) du\right)\right]\right)^{1/2} \\ &\quad \left(\mathbb{E}\left[M_s^{(2\Gamma_i)}\right]\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{за Коші – Шварцом}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\mathbb{E} \left[|Z_{is}|^{2k} \exp \left(\int_0^s \Gamma_i^2 (Y_{1u}, \dots, Y_{lu}, Z_{1u}, \dots, Z_{nu}) du \right) \right] \right)^{1/2} \\
&\quad (M^{(2\Gamma_i)} - \epsilon \mathbb{P} - \text{мартингалом}) \\
&\leq \left(\mathbb{E} \left[|Z_{i\delta_{is}}^{(1)}|^{2k} \right] \exp(s \|\Gamma_i\|_\infty^2) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C.
\end{aligned}$$

Розглянемо тепер випадок $J(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) = y_j^k$. Маємо

$$\mathbb{E} \left[|Y_{js}|^k \right] = \mathbb{E} \left[|Y_{js/\epsilon_j}^{(1)}|^k \right] \leq \sup_{\epsilon_j \leq 1} \mathbb{E} \left[|Y_{js/\epsilon_j}^{(1)}|^k \right] \leq C_j(k).$$

Використовуючи вище наведені міркування, легко показати [221],

$$\widetilde{\mathbb{E}} \left[|Y_{js}|^k \right] = \mathbb{E} \left[|Y_{js}|^k M_s^{(\Lambda_j)} \right] \leq \left(\mathbb{E} \left[|Y_{js/\epsilon_j}^{(1)}|^{2k} \right] \exp(s \|\Lambda_j\|_\infty^2) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_j.$$

Лему доведено.

Доведемо теорему 4.4. Почнемо з визначення залишкового члена $R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$

$$\begin{aligned}
&w_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}_j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} w_{\bar{0}, \bar{1}_i'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j \left(w_{\bar{2}_j, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{3}_j, \bar{0}'} \right) \\
&w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = + \sum_{k \neq j}^l \sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}_{kj}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \left(\sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}_j \bar{1}_i'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{2}_j \bar{1}_i'} \right) \\
&\quad + \sum_{k \neq j}^l \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \sqrt{\epsilon_k} \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}_{kj}, \bar{1}_i'} + R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}.
\end{aligned}$$

Функції $w_{\bar{0}, \bar{0}'}$, $w_{\bar{1}_j, \bar{0}'}$ і $w_{\bar{0}, \bar{1}_i'}$ є єдиним розв'язком рівнянь (4.35), (4.36)

і (4.37), відповідно. Функція $w_{\bar{2}_j, \bar{0}'}$ задається (4.25), $w_{\bar{2}_j, \bar{0}'}$ є розв'язком

рівняння Пуассона (4.15). Щоб охарактеризувати $w_{\bar{1}_j \bar{1}_i'}$ і $w_{\bar{2}_j \bar{1}_i'}$ продовжимо

сингулярний аналіз збурень рівняння (4.14).

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\epsilon_j \delta_i}\right) 0 = \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{3j1'_i}} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{2j1'_i}} + \sum_{k \neq j}^l \mathfrak{L}_{1k} w_{\overline{1_{kj}1'_i}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{1j1'_i}} \\ \mathcal{O} + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\overline{2j,0'}} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\overline{1j,0'}}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

Рівняння (4.41) є рівнянням Пуассона виду (4.19). Для того, щоб для (4.41) визначити розв'язок $w_{\overline{3j1'_i}}$ в $L^2(\mathbb{R}, \pi)$, повинна виконуватися умова центрування (4.19). В (4.41) умовою центрування є

$$0 = \langle \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{2j1'_i}} \rangle + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{1j1'_i}} + \langle \mathfrak{M}_{3ij} w_{\overline{2j,0'}} \rangle + \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\overline{1j,0'}}, \quad (4.42)$$

віднявши (4.32) від (4.31), можемо виразити $w_{\overline{2j1'_i}}$,

$$\begin{aligned} 0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,1'_i}} + \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\overline{0,0'}} - \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\overline{0,1'_i}} \\ + \mathfrak{M}_{1i} w_{\overline{0,0'}} + \sum_{j=1}^l \mathfrak{M}_{3ij} w_{\overline{1j,0'}} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\overline{1j1'_i}}, \end{aligned}$$

зведемо подібні доданки

$$0 = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + (\mathfrak{L}_2 - \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{\overline{0,1'_i}} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\overline{0,0'}} - \langle \mathfrak{M}_{1i} \rangle w_{\overline{0,0'}} = \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} +$$

$$\left(\left(-\frac{1}{2} a^2 (\bar{\sigma}^2 - f^2) \right) \partial_{xx}^2 + a(f\Omega - \bar{f}\bar{\Omega}) \partial_x \right) w_{\overline{0,1'_i}} +$$

$$[g_i(\rho_{xz_i} a f \partial_x - \Gamma_i) \partial_{z_i} - g_i(\rho_{xz_i} a \langle f \rangle \partial_x - \langle \Gamma_i \rangle) \partial_{z_i}] w_{\overline{0,0'}}$$

$$= \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + \left(\left(-\frac{1}{2} a^2 (\bar{\sigma}^2 - f^2 \mp \bar{\sigma}_1^2 \mp \bar{\sigma}_{12}^2 \mp \dots \mp \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2) \right) \partial_{xx}^2 \right.$$

$$\left. + a(f\Omega - \bar{f}\bar{\Omega} \mp \bar{f}\bar{\Omega}_1 \mp \bar{f}\bar{\Omega}_{12} \mp \dots \mp \bar{f}\bar{\Omega}_{l-2,l-1}) \partial_x \right) w_{\overline{0,1'_i}} +$$

$$[g_i(\rho_{xz_i} a (f - \langle f \rangle \mp \langle f \rangle_1 \mp \langle f \rangle_{12} \mp \dots \mp \langle f \rangle_{l-2,l-1}) \partial_x$$

$$-(\Gamma - \langle \Gamma \rangle \mp \langle \Gamma \rangle_1 \mp \langle \Gamma \rangle_{12} \mp \dots \mp \langle \Gamma \rangle_{l-2,l-1}) \partial_{z_i} w_{\overline{0}, \overline{0'}} \Big]$$

Розглянемо такі системи рівнянь Пуассона

$$\mathfrak{L}_{01} \varphi_1 = f^2 - \bar{\sigma}_1^2, \quad \mathfrak{L}_{02} \varphi_2 = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_{12}^2, \dots,$$

$$\mathfrak{L}_{0j} \varphi_j = \bar{\sigma}_{j-2,j-1}^2 - \bar{\sigma}_{j-1,j}^2, \dots,$$

$$\mathfrak{L}_{0l} \varphi_l = \bar{\sigma}_{l-2,l-1}^2 - \bar{\sigma}_{l-1,l}^2, \quad \mathfrak{L}_{01} \eta_1 = f\Omega - \overline{f\Omega}_1, \dots,$$

$$\mathfrak{L}_{0l} \eta_l = \overline{f\Omega}_{l-2,l-1} - \overline{f\Omega},$$

$$\mathfrak{L}_{01} \xi_1 = f - \langle f \rangle_1, \quad \mathfrak{L}_{02} \xi_2 = \langle f \rangle_1 - \langle f \rangle_{12}, \dots,$$

$$\mathfrak{L}_{0l} \xi_l = \langle f \rangle_{l-2,l-1} - \langle f \rangle, \quad \mathfrak{L}_{01} \zeta_1$$

$$= \Gamma - \langle \Gamma \rangle_1, \dots, \mathfrak{L}_{0l} \zeta_l = \langle \Gamma \rangle_{l-2,l-1} - \langle \Gamma \rangle,$$

Функції $\xi_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$, $\eta_j(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ є розв'язки відповідних рівнянь Пуассона, має місце формула

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\overline{2j1'_i}} + \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} \left(-\frac{1}{2} a^2 \varphi_j \partial_{xx}^2 + a \eta_j \partial_x \right) w_{\overline{0}, \overline{1'_i}} \\ & + [g_i (\rho_{xz_i} a \xi_j \partial_x - \zeta_j) \partial_{z_i}] w_{\overline{0}, \overline{0'}}. \end{aligned}$$

Тому [147, 161, 197, 265]

$$\begin{aligned} w_{\overline{2j1'_i}} &= - \left(\frac{1}{2} a^2 \phi_j \partial_{xx}^2 - a \eta_j \partial_x \right) w_{\overline{0}, \overline{1'_i}} \\ &- g_j (\rho_{xz_i} a \xi_j \partial_x - \zeta_j) \partial_{z_i} w_{\overline{0}, \overline{0'}} + D_j, \quad \forall j = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

$D_j(x, z_1, \dots, z_n)$ є константою, яка не залежить від y . Підставляючи (4.43) в (4.42) знайдемо $w_{\overline{1j1'_i}}$ знаючи $w_{\overline{0}, \overline{0'}}$, $u_{\overline{1j}, \overline{0'}}$ і $w_{\overline{0}, \overline{1'_i}}$. $w_{\overline{1j1'_i}}$ є розв'язком (4.42) з

крайовими умовами $w(0, x, z_1, \dots, z_n) = 0$.

Візьмемо

$$w_{\overline{1k}, \overline{0'}} \equiv 0, \quad \forall k \neq j, k = \overline{1, l}.$$

Обчислимо

$$\begin{aligned}
0 &= (-\partial_t + \mathfrak{L}_{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}) w_{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \left(-\partial_t + \mathfrak{L}_{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \right) R_{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \\
&\quad + \sum_{j=1}^l \frac{1}{\epsilon_j} F_{0j} + \sum_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} F_{1j} + \sum_{j=1}^l F_{2j} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \sqrt{\delta_i} \left(\frac{1}{\epsilon_j} F_{3ji} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} F_{4ji} + F_{5ji} \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^l \epsilon_j R_{1j}^{\epsilon_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j \delta_i} R_{2j}^{\epsilon_j} + \sum_{i=1}^n \delta_i R_{3j}^{\epsilon_j}, \tag{4.44}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
F_{0j} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{0}, \bar{0}'}, & F_{1j} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{0}, \bar{0}'}, \\
\sum_{j=1}^l F_{2j} &= \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{2}j, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{0}, \bar{0}'}, \\
F_{3ji} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}, & F_{4ji} &= \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{0}, \bar{0}'}, \\
\sum_{j=1}^l F_{5ji} &= \sum_{j=1}^l \mathfrak{L}_{0j} w_{\bar{2}j, \bar{1}'_i} + \sum_{k \neq j} \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{0}, \bar{0}'} \\
&\quad + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}, \\
R_{1j}^{\epsilon_j} &= (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{2}j, \bar{0}'} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{3}j, \bar{0}'} + \sqrt{\epsilon_j} (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{3}j, \bar{0}'}, \\
R_{2ij}^{\epsilon_j} &= (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i} + \mathfrak{L}_{1j} w_{\bar{2}j, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{2}j, \bar{0}'} \\
&\quad + \sqrt{\epsilon_j} \left((-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{\bar{2}j, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{1i} w_{\bar{2}j, \bar{0}'} + \mathfrak{M}_{3ij} w_{\bar{3}ij, \bar{0}'} \right) + \epsilon_j \mathfrak{M}_{1j} w_{\bar{3}j, \bar{0}'}, \\
R_{3ij}^{\epsilon_j} &= \mathfrak{M}_{1j} w_{\bar{0}, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{2j} w_{\bar{0}, \bar{0}'} + \mathfrak{M}_{3j} w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i} \\
&\quad + \sqrt{\epsilon_j} \left(\mathfrak{M}_{1j} w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{2j} w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \mathfrak{M}_{3j} w_{\bar{1}j, \bar{1}'_i} \right) + \epsilon_j \left(\mathfrak{M}_{1j} w_{\bar{2}j, \bar{1}'_i} + \mathfrak{M}_{2j} w_{\bar{2}j, \bar{0}'} \right).
\end{aligned}$$

Легко бачити, $F_{0j} = F_{1j} = F_{3ij} = F_{4ij} = F_{5ij} = 0$.

Отже маємо

$$0 = \left(-\partial_t + \mathfrak{L}^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}\right) R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j R_{1j}^{\epsilon_j} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\epsilon_j \delta_i} R_{2ij}^{\epsilon_j} + \delta_i R_{3ij}^{\epsilon_j} \right), \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) &= \sum_{j=1}^l \epsilon_j G_{1j}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) \\ &+ \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j \delta_i} G_{2ij}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n), \end{aligned} \quad (4.46)$$

де

$$G_{1j}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) := -w_{\bar{2}j, \bar{0}'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$$

$$-\sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{3}j, \bar{0}'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n),$$

$$G_{2ij}^{\epsilon_j}(x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) := -w_{\bar{1}j \bar{1}_i'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$$

$$-\sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{2}j \bar{1}_i'}(0, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n).$$

Використовуючи формули Фейнмана-Каца, виразимо $R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ розв'язок рівняння (4.45) з крайовими умовами (4.46), як математичне сподівання [88,138,169]

$$\begin{aligned} R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n) &= \\ &= \sum_{j=1}^l \epsilon_j \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n} \left[e^{-\int_0^t k(X_s) ds} G_{1j}^{\epsilon_j}(X_t, Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right] \\ &+ \int_0^t e^{-\int_0^s k(X_u) du} R_{1j}^{\epsilon_j}(s, X_s, Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds + \sqrt{\epsilon \delta} \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n} \\ &\left[e^{-\int_0^t k(X_s) ds} G_2^{\epsilon}(X_t, Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t e^{-\int_0^s k(X_u) du} R_{2ij}^{\epsilon_j}(s, X_s, Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds \Big] \\
& + \delta \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n} \left[e^{-\int_0^s k(X_u) du} R_{3ij}^{\epsilon_j}(s, X_s, Y_{1s}, \dots, Y_{ls}, Z_{1s}, \dots, Z_{ns}) ds \right].
\end{aligned}$$

Можна зробити висновок, що функції $(R_{1j}^{\epsilon_j}, R_{2ij}^{\epsilon_j}, R_{3ij}^{\epsilon_j}, G_{1j}^{\epsilon_j}, G_{2ij}^{\epsilon_j})$ обмежені по x і поліноміально зростають по $(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_n)$ [4]. Таким чином, по за лемою 1 маємо

$$|R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}| \leq \sum_{j=1}^l \epsilon_j C_{1j} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j \delta_i} C_{2ij} + \sum_{i=1}^n \delta_i C_{3i} \leq \left(\sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right) C_4.$$

а значить

$$\begin{aligned}
& \left| w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} - (w_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{1}j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^n \delta_i w_{\bar{0}, \bar{1}'_i}) \right| \leq |R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}| + \\
& \left| \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{2}j, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j^{3/2} w_{\bar{3}j, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j \delta_i} w_{\bar{1}j \bar{1}'_i} + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\delta_i} \epsilon_j w_{\bar{2}j \bar{1}'_i} \right| \\
& \leq \left(\sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right) C_4 + \sum_{j=1}^l \epsilon_j |w_{\bar{2}j, \bar{0}'} + \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{3}j, \bar{0}'}| \\
& + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_j \delta_i} |w_{\bar{1}j \bar{1}'_i} + \sum_{j=1}^l \epsilon_j w_{\bar{2}j \bar{1}'_i}| \leq \left(\sum_{j=1}^l \epsilon_j + \sum_{i=1}^n \delta_i \right) C,
\end{aligned}$$

точність результату доведено.

Теорема 4.4 дає нам інформацію про те, як наближена ціна веде себе при

$\epsilon_j \rightarrow 0$ і $\delta_i \rightarrow 0$. На практиці ϵ_j і δ_i є малими, але фіксованими (вони не прямують до нуля). Не знаючи, якою є стала C в Теоремі 4.4, важко добитися великої точності наближення.

4.2. Моделі двобар'єрних опціонів з багатфакторною волатильністю

Спектральне зображення щільності одновимірної дифузії отримано в [233]. Спектральна теорія є важливим інструментом для аналізу фінансових моделей дифузії, при дослідженні розкладу по власних функціях лінійних операторів. Спектральну теорію використовували багато науковців, а саме для прогнозування цін опціонів [177], знаходження відсоткової ставки на цінні папери [246], моделювання волатильності фінансових активів [139]. Як спектральна теорія так і стохастичні моделі волатильності стали незамінним інструментом у фінансовій математиці, це пов'язано з тим, що ціни деривативів підпорядковуються броунівському руху і корелюють з волатильністю [162]. Дослідження стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що контролюється нелокальною дифузією [173].

Процес Орнштейна–Уленбека описується диференціальним рівнянням параболічного типу другого порядку виду

$$\partial_t w(t, x) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 w(t, x) + k(\theta - x) \partial_x w(t, x) \quad (4.47)$$

де k, σ, θ

Обчислимо щільність розподілу цього процесу. Для цього розглянемо задачу Коші для (4.47). З початковою умовою

$$w(0, x) = w_0(x) - \delta \quad (4.48)$$

$w_0(x)$ - гладка фінітна функція.

Застосуємо перетворення Фур'є. Зокрема

$$w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} v(t, \xi) d\xi,$$

тобто

$$v(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} w(t, x) dx.$$

Тоді рівняння (4.47) зведеться до рівняння

$$\partial_t v = \frac{\sigma^2}{2} (-i\xi)^2 v + k\xi \partial_\xi v + k(1 - i\theta\xi)v = 0 \quad (4.49)$$

При цьому будемо враховувати, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} w'_x(t, x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{ix\xi} xw]_{-\infty}^{+\infty} \\ &- \left(\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{ix\xi} x w(t, x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} u(t, x) dx \right) = -\xi \partial_\xi v - v. \end{aligned}$$

Початкова умова має вигляд

$$v(0, \xi) = v_0(\xi) \quad (4.50)$$

Задача Коші (4.49), (4.50) для лінійного неоднорідного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку, розв'язується методом характеристик

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - k\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \left(-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + (1 - i\theta\xi) \right) v \\ dt &= \frac{d\xi}{k\xi} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$dt = \frac{dv}{\left(-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + (1 - i\theta \xi)\right)v} \quad (4.52)$$

(4.51) і (4.52) – рівняння характеристик.

З (4.51) рівняння маємо

$$\ln|\xi| = -kt + \ln C, \quad C > 0, \quad \xi = Ce^{-kt}$$

Підставимо в (4.52)

$$dt = \frac{dv}{\left(-\frac{\sigma^2 C^2 e^{-2kt}}{2} + (1 - i\theta C e^{-kt})\right)v};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int_0^t \left(-\frac{\sigma^2 C e^{-k\beta}}{2} + k(1 - i\theta C e^{-k\beta})\right) d\beta + \ln C_1, \quad C_1 > 0.$$

$$v = C_1 \exp \left\{ \int_0^t \left(-\frac{\sigma^2 C e^{-k\beta}}{2} + k(1 - i\theta C e^{-k\beta})\right) d\beta \right\}.$$

При $t = 0$, $v_0(\hat{C}) = C_1$, $\hat{C} = \hat{\xi}$.

Тоді v на характеристиках має вигляд

$$v = v_0(\xi \exp\{kt\}) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\xi^2 e^{2kt}}{2 \cdot -2k} \right.$$

$$\left. + k \left(t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\xi e^{kt}}{-k} \right) \right\}$$

$$v(t, \xi) = v_0(\xi \exp\{kt\}) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1)\xi^2 e^{2kt}}{2 \cdot -2k} \right.$$

$$\left. + k \left(t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1)\xi e^{kt}}{-k} \right) \right\}$$

$$w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\exp\{-i\xi x\}) v(t, \xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp\{-i\xi x\})$$

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1) \xi^2 e^{2kt}}{-2k} + k \left(t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1) \xi e^{kt}}{-k} \right) \right\} v(t, \xi) d\xi = \\
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i\gamma x \exp \left\{ -kt - \frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1) \gamma^2}{-2k} + k \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1) \gamma}{-k} \right) \right\} \right\} \frac{v_0(\gamma)}{e^{kt}} d\gamma = \\
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i\gamma x \exp \left\{ (-kt - y) - \frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1) \gamma^2}{-2k} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + k \left(t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1) \gamma}{-k} \right) \right\} \right\} \frac{d\gamma dy}{e^{kt}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma (xe^{-kt} - y)} \\
& \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (e^{-2kt} - 1) \gamma^2 e^{2kt}}{-2k} + k \left(t - i\theta \frac{(e^{-kt} - 1) \gamma e^{kt}}{-k} \right) \right\} d\gamma.
\end{aligned}$$

Виділимо повний квадрат по γ

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2kt}) \gamma^2}{2} + 2i\gamma \left(\frac{xe^{kt} - y}{2} - \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right) \frac{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}}{2\sqrt{k}} \\
& \frac{2\sqrt{k}}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} \pm i^2 \left(\frac{xe^{kt} - y}{2} - \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right)^2 \frac{4k}{\sigma^2(1 - e^{-2kt})} = \\
& \left(\frac{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}}{2\sqrt{k}} \gamma + i \left(\frac{xe^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right) \frac{2\sqrt{k}}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} \right)^2 \\
& + \left(\frac{xe^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right)^2 \frac{4k}{\sigma^2(1 - e^{-2kt})};
\end{aligned}$$

Зробивши заміну

$$\frac{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}}{2\sqrt{k}} \gamma + i \left(\frac{xe^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right) \frac{2\sqrt{k}}{\sigma(1 - e^{-2kt})^{1/2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

використавши інтегральну теорему Коші

$$\int_R^A e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \rightarrow 0, \quad \int_{A_1}^{-R} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \rightarrow 0, \quad (4.54)$$

при $R \rightarrow \infty$, тому має місце рівність (4.53).

Перевіримо, що прямує до нуля при $R \rightarrow +\infty$.

$$\left| \int_R^A e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \right| = \left| \int_0^{|\alpha_{10}|} e^{-\frac{(R+i\alpha_1)^2}{2}} d\alpha_1 \right| \leq e^{-R^2} e^{|\alpha_{10}|} |\alpha_{10}|.$$

При фіксованому x, θ, k, t, σ , $e^{|\alpha_{10}|} = \text{const}$, тому оскільки

$$e^{-R^2} \rightarrow 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^A e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = 0.$$

Аналогічно $\int_{A_1}^{-R} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$. Одержимо

$$w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\gamma) \exp \left\{ - \left(\frac{x e^{kt} - y}{2} + \frac{\theta(e^{-kt} - 1)}{2} \right)^2 \frac{4k}{\sigma^2(1 - e^{-2kt})} \right\} dy,$$

тому фундаментальний розв'язок, або функція Гріна має вигляд

$$\begin{aligned} p(t, x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})}} \exp \left\{ - \frac{(x e^{kt} - y + \theta(e^{-kt} - 1))^2}{\frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})}} \exp \left\{ - \frac{(y - x + (x - \theta)(1 - e^{-kt}))^2}{\frac{\sigma^2}{k} (1 - e^{-2kt})} \right\}. \end{aligned}$$

З іншого боку, з ймовірнісної сторони функція Гріна є щільністю розподілу.

Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну двобар'єрних опціонів

Орнштейна-Уленбека з багатофакторною волатильністю, як розклад за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори $(l+n+1)$ вимірної дифузії, $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$ тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної, l -вимірного швидкозмінного чинника і n -вимірного повільно змінного чинника. Дана робота є розширенням робіт [126, 171, 227, 234], в [227] $l=1$ та $n=1$.

Процес X може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів. Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний короткий відсоток і т.д. Ще ширше, X це зовнішній чинник, який характеризує вартість будь-яких із згаданих вище процесів. Під фізичною мірою $\mathbb{P}$ процесу X , розуміють процес X , який має миттєвий дрейф $v(X_t)$ і стохастичну волатильність $a(X_t)f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt}) > 0$, який містить обидві компоненти: локальну $a(X_t)$ і нелокальну $f(Y_{1t}, \dots, Y_{lt}, Z_{1t}, \dots, Z_{nt})$. Зауважимо, що нескінченно малі генератори (інфінітезимальні) для Y_j та Z_i мають вигляд $\forall i, j$

$$\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j} = \frac{1}{\epsilon_j} \left(\frac{1}{2} \beta_j^2(y_j) \partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j(y_j) \partial_{y_j} \right), \mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i} = \delta_i \left(\frac{1}{2} g_i^2(z_i) \partial_{z_i z_i}^2 + c_i(z_i) \partial_{z_i} \right),$$

характеризуються величинами $\frac{1}{\epsilon_j}$ та δ_i відповідно. Таким чином, $Y_1, \dots, Y_l$ та $Z_1, \dots, Z_n$ мають внутрішню шкалу часу $\epsilon_j > 0$ і $\frac{1}{\delta_i} > 0$. Вважатимемо $\epsilon_j < 1$ і $\delta_i \ll 1$, щоб внутрішня шкала часу Y_j була малою, а внутрішня шкала часу Z_i великою. Отже, $Y_j, j = \overline{1, l}$, це швидко змінні чинники, а $Z_i, i = \overline{1, n}$ повільно змінні чинники. Зауважимо, що $\mathfrak{L}_{Y_j}^{\epsilon_j}$ та $\mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i}$ мають форму виду процесу Орнштейна-Уленбека [20]

$$\partial_t w = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 w + r x \partial_x w - r w,$$

права частина якого має вигляд

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 x^2 y'' + rxy' - ry = 0, \quad (4.55)$$

Зведемо (4.55) до рівняння $y'' + \lambda y = 0$, де $\lambda = \text{const}$, щоб не було першої похідної в одержаному рівнянні тобто шукаємо розв'язок у вигляді

$$y = s(x)v(x),$$

де $v(x)$ – нова невідома функція, а $s(x)$ – виберемо так, щоб

$$v'' + \lambda(x)v = 0. \quad (4.56)$$

Підставивши у рівняння (4.55) матимемо $\bar{\sigma}^2 x^2 s' + rxs = 0$, звідси

$$s(x) = \exp\left\{-\int \frac{rx}{\bar{\sigma}^2 x^2} dx\right\} = \exp\left\{-\frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right\}.$$

$$\lambda(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{rx}{\bar{\sigma}^2 x^2}\right) - \left(\frac{rx}{\bar{\sigma}^2 x^2}\right)^2 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2 x^2} = -\frac{r}{\bar{\sigma}^2 x^2} - \frac{r^2}{\bar{\sigma}^4 x^2},$$

отримаємо

$$v'' - \frac{r}{\bar{\sigma}^2 x^2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\sigma}^2}\right) v = 0.$$

Отже

$$y = s(x)v(x), \text{ де } s(x) = \exp\left\{-\frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right\}.$$

У нашому випадку

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} \exp\left\{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right\}, \quad s(x) = s^2(x).$$

Для того щоб в рівнянні (4.56) була не функція $\lambda(x)$, а $\lambda = \text{const}$ то зробимо заміну змінних $x = \sigma(\theta)$ в (4.55).

$$y'_\theta \theta'_x = \frac{1}{\sigma'_\theta \theta} y'_\theta; \quad y''_{x^2} = y''_{\theta^2} \frac{1}{\sigma'^2_\theta} - y'_\theta \frac{\sigma''_{\theta^2}}{\sigma'^3_\theta},$$

підставивши в (4.55) отримаємо

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \sigma' x^2 y'' + \left(rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \sigma'' x^2\right) y' - r\sigma'^3 y = 0, \quad (4.57)$$

Застосуємо до (4.57) ті ж самі міркування що й у (4.54) $y = s^* v$ тоді

$$s^* = \exp \left\{ - \int \frac{rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma''x^2}{\bar{\sigma}^2\sigma'x^2} d\theta \right\} = \sqrt{\sigma'} s.$$

Запишемо значення нового $\lambda^*(\theta)$.

$$\lambda^*(\theta) = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma''x^2}{\bar{\sigma}^2\sigma'x^2} \right) - \left(\frac{rx\sigma'^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\sigma''x^2}{\bar{\sigma}^2\sigma'x^2} \right)^2 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2x^2},$$

З міркувань відносно розв'язку зробимо підстановку $x = \exp \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2}{\sqrt{2}} \theta \right\}$

щоб знайти λ^*

$$\begin{aligned} \lambda^* &= -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{r}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{r}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{2}} \right)^2 - r = -\left(\frac{r}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2\sqrt{2}} \right)^2 - r \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 - r, \end{aligned}$$

будемо мати

$$v'' - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 + r \right) v = 0,$$

$$k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 - r = 0, \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 + r},$$

потрібно щоб в точках L і R розв'язок дорівнював 0, а x^{k_1} і x^{k_2} не дають такої картини, тому зробимо заміну змінних $x = Le^\theta$, будемо мати

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 + r \right) v = 0,$$

або

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' - \left(\frac{v^2}{2} + r \right) v = 0,$$

на власні значення і власні функції будемо досліджувати

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' - \left(\frac{v^2}{2} + r \right) v = \lambda v, \quad \frac{\bar{\sigma}^2}{2} v'' = -\lambda_n^2 v, \quad L \leq x \leq R,$$

$$0 \leq \theta \leq \ln \frac{R}{L},$$

тоді

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} k^2 = -\lambda_n^2, \quad \lambda_n > 0, \quad k^2 = -\frac{2}{\bar{\sigma}^2} \lambda_n^2, \quad k_{12} = \pm \frac{i\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$v = C_1 \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \theta \right) + C_2 \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \theta \right),$$

перевіримо виконання граничних умов, якщо $\theta = 0$, то $C_1 = 0$, при $\theta =$

$$\ln \frac{R}{L}, \quad \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \ln \frac{R}{L} \right) = 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}} \lambda_n \ln \frac{R}{L} = n\pi,$$

звідси

$$\lambda_n = \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}}, \quad v_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta.$$

З того що

$$\int_0^{\ln \frac{R}{L}} \sin^2 \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}.$$

Маємо

$$v_n = \frac{\sin \frac{n\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}}} = \frac{\sin \frac{n\pi\bar{\sigma} \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}}}.$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{n\pi\bar{\sigma}}{2 \ln \frac{R}{L}} \right)^2 \left(\lambda_n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^2 + r \right) \sqrt{\frac{2x}{\ln \frac{R}{L}}} \exp \left\{ -\frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} \sin \frac{n\pi\bar{\sigma} \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}},$$

Знайдемо скалярний добуток

$$\begin{aligned} (\psi_n(x), \psi_m(x)) &= \int_L^R \frac{x\bar{\sigma}^2}{\ln \frac{R}{L}} \exp \left\{ -\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} \sin \left(\frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \right) \sin \left(\frac{m\pi \ln \frac{x}{L}}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \right) \\ &\quad \frac{2}{x^2 \bar{\sigma}^2} \exp \left\{ \frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} dx = \frac{1}{\ln \frac{R}{L}} \int_L^R \frac{2}{x} \sin \left(\frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}} \right) \sin \left(\frac{m\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^1 \sin n\pi t \sin m\pi t dt = 2 \int_0^1 [\cos(n-m)\pi t + \cos(n+m)\pi t] dt = \\ &= -\frac{\sin(n-m)\pi t}{(n-m)\pi} \Big|_0^1 - \frac{\sin(n+m)\pi t}{\pi} \Big|_0^1 = 0, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

При $n = m$

$$\int_0^1 \sin^2 n\pi t dt = \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi t) dt = 1 - \frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi} \Big|_0^1 = 1.$$

Отже

$$(\psi_n(x), \psi_m(x)) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Нехай X цінний папір без виплат дивідендів по активу (наприклад, акція, індекс тощо). Часто X моделюється як геометричний броунівський рух з сталою волатильністю (наприклад формула Блека-Шоулза) [220]. Розглянемо X — як модель геометричного броунівського руху з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\tilde{\mathbb{P}}$ динаміки в X задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)X_t d\widetilde{W}_t^x, \quad h(X_t) = 0,$$

Обчислимо наближену ціну подвійного бар'єрного опціону визначеного на X .

Запишемо оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю $m(x)$

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 + rx \partial_x - r, \quad m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} \exp\left(\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right). \quad (4.58)$$

Для подвійного бар'єрного опціону з величиною бар'єрів L і R , виплата має вигляд:

$$H(X_t) \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = (X_t - K)^+ \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}, \quad I = (L, R), \quad 0 < L < K < R,$$

Щоб обчислити значення цього параметра, потрібно спочатку знайти власні значення оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ з крайовими умовами

$$\lim_{x \rightarrow L} \psi_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow R} \psi_n(x) = 0.$$

Зауважимо, що введено регулярний кілінг крайових умов на кінцях L і R . Рівняння

$$-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in \text{dom}(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle)$$

із зазначеним вище крайовими умовами можна знайти в [126]

$$\psi_n(x) = \frac{\bar{\sigma} \sqrt{x}}{\sqrt{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}} \exp\left(-\frac{r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right) \sin\left(\frac{n\pi \ln\left(\frac{x}{L}\right)}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi \bar{\sigma}}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{2} + r \right), \quad v = \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2}.$$

Запишемо вирази для операторів $\mathcal{A}_j$ та $\mathcal{B}_i$

$$\mathcal{A}_j = -\vartheta_{3j} x \partial_x x^2 \partial_{xx}^2 - \vartheta_{2j} x^2 \partial_{xx}^2, \quad \mathcal{B}_i = -\vartheta_{1i} x \partial_x - \vartheta_{0i}. \quad (4.59)$$

На основі (4.59) обчислимо $\mathcal{A}_{jk,n}$, $\mathcal{B}_{ik,n}$ і $\widetilde{\mathcal{B}}_{ik,n}$. Для $k \neq n$ знайдемо

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}j_{k,n} &= -\vartheta_{2j} \left(\frac{(-1 + (-1)^{k+n})knr}{(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^2 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right) \\
&\quad - \vartheta_{3j} \left(\frac{(-1 + (-1)^{k+n})kn \left(4n^2\pi^2\bar{\sigma}^4 + (-12r^2 + 4r\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^4)\ln^2\left(\frac{R}{L}\right) \right)}{2(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^4 \ln^3\left(\frac{R}{L}\right)} \right), \\
\mathcal{B}_{ik,n} &= \vartheta_{i1} \frac{2(-1 + (-1)^{k+n})kn}{(k - n)(k + n) \ln\left(\frac{R}{L}\right)}, \\
\tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} &= -\vartheta_{1i}\bar{\sigma}'(\gamma_{k,n}) - \vartheta_{i0}\bar{\sigma}' \left(\frac{8(-1 + (-1)^{k+n})knr \ln\left(\frac{R}{L}\right)}{(k^2 - n^2)^2\pi^2\bar{\sigma}^3} \right), \\
v_{k,n} &:= \frac{4nkr(\ln(L) - (-1)^{k+n} \ln(R))}{(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \\
&\quad - \frac{2(-1 + (-1)^{k+n})kn \left((k - n)(k + n)\pi^2\bar{\sigma}^4 - 2r(-2r + \bar{\sigma}^2)\ln^2\left(\frac{R}{L}\right) \right)}{(k^2 - n^2)^2\pi^2\bar{\sigma}^5 \ln\left(\frac{R}{L}\right)},
\end{aligned}$$

і для $k = n$ знайдемо

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{jn,n} &= -\vartheta_{3j} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^3} \left(\frac{3n^2\pi^2 v}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} - v^3 \right) - \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left(v^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \vartheta_{j2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left(v^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} \right) + \frac{v}{\bar{\sigma}} \right) \right), \\
\mathcal{B}_{in,n} &= \vartheta_{i1} \left(\frac{2r - \bar{\sigma}^2}{2\bar{\sigma}^2} \right) - \vartheta_{i0}, \\
\tilde{\mathcal{B}}_{in,n} &= -\vartheta_{i1}\bar{\sigma}' \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{rv(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^4 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right) - \vartheta_{i0}\bar{\sigma}' \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right).
\end{aligned}$$

Розрахунок c_n можна знайти в [18, 20, 26]

$$c_n = (\psi_T(\cdot), (\cdot - K)^+) = \frac{L^{\frac{\nu}{\bar{\sigma}}}}{\log\left(\frac{R}{L}\right)} (L\Phi_n(\nu + \bar{\sigma}) - K\Phi_n(\nu)),$$

$$\Phi_n(\gamma) := \frac{2}{\omega_n^2 + z^2}$$

$$(\exp(\mathfrak{K}\gamma) (\omega_n \cos(\omega_n \mathfrak{K}) - \gamma \sin(\omega_n \mathfrak{K}) - \exp(\mathfrak{U}\gamma) (-1)^n \omega_n),$$

$$\omega_n := \frac{n\pi}{\mathfrak{U}}, \quad \mathfrak{K} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{K}{L}\right), \quad \mathfrak{U} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{R}{L}\right).$$

Наближену ціну опціонів можна обчислити за допомогою теорем 4.1 – 4.3

Зауважимо, що рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [20, 227] .

4.3. Моделі визначення цін деривативів методами спектрального аналізу

Моделі динаміки короткострокових відсоткових ставок розглядались в роботі Васічека [271] для ціноутворення деривативів. Значний внесок у теорію відсоткових ставок зроблено в роботах [135, 140, 154, 162, 235, 259] а саме: знаходження кредитного спреду інструментів кредитного ринку, визначення цін опціонів на відсоткову ставку, визначення ризику і доходності похідних фінансових інструментів фондового ринку. Розроблені цими вченими моделі мають свої переваги та недоліки, але кожна з них застосовується для підвищення ліквідності фінансових ринків. Використання складніших моделей, незважаючи на свою теоретичну обґрунтованість, зумовлює отримання складних

багатопараметричних функцій кривої прибутковості, а це спричиняє значні похибки в обчисленнях.

Використовуючи спектральний аналіз Лінецький [140] застосував спектральну теорію самоспряжених операторів до різних моделей, а зокрема до моделі Васічека. В роботі Лоріга [227] розглядалися короткострокові відсоткові ставки, описані моделлю Васічека з стохастичною волатильністю, залежною від двох чинників, один з яких швидко, а другий повільно мінливий. Спектральна теорія та теорія сингулярних і регулярних збурень застосована до самоспряжених операторів у гільбертових просторах, які описують процеси з багатовимірною стохастичною волатильністю, що має l -швидко мінливих, n -повільно мінливих чинників, $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$. Зокрема дана теорія застосована до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, отримали явні формули для наближень цін облігацій та дохідності.

Нехай X являють собою короткі відсоткові ставки. Однією з найбільш широко відомих моделей коротких курсів відсоткових ставок є модель Васічека, в якій X моделюється як процес Орнштейна-Уленбека з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\tilde{\mathbb{P}}$ динаміки X задані

$$dX_t = (\kappa(\theta - X_t) - f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_r)\Omega(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_r))dt + f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_r) + d\tilde{W}_t^x, \quad r(X_t) = X_t, \quad h(X_t) = 0,$$

де $Y_1, \dots, Y_l$, та $Z_1, \dots, Z_r$ є швидко і повільно змінними чинниками волатильності, як описано. Обчислимо наближену ціну облігації з нульовим купоном.

Запишемо оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю $m(x)$

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \partial_{xx}^2 + \kappa(\bar{\theta} - x) \partial_x - x, \quad (4.60)$$

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2} \exp\left(\frac{-k}{\bar{\sigma}^2} (\bar{\theta} - x)^2\right), \quad \bar{\theta} = \theta - \frac{1}{\kappa} f \bar{\Omega}.$$

Для облігації з нульовим купоном, повна виплата є:

$$H(X_t) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = 1. \quad (4.61)$$

Оператору $\mathfrak{L}_2$ відповідає диференціальне рівняння

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 y'' + \kappa(\theta - x) y' - xy = 0,$$

Зробимо заміну, щоб не було першої похідної в одержаному рівнянні:

$$y = s(x)u(x), \quad y'(x) = s'(x)u(x) + s(x)u'(x),$$

$$y''(x) = s''(x)u(x) + 2s'(x)u'(x) + s(x)u''(x),$$

де $u(x)$ – невідома функція, $s(x)$ – підберемо з одержаного рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 s(x)u''(x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 2s'(x)u'(x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 s''(x)u(x) \\ & + \kappa(\theta - x)(s(x)u'(x) + s'(x)u(x)) - xs(x)u(x) = 0, \end{aligned}$$

звідки

$$\kappa(\theta - x)s(x) + \bar{\sigma}^2 s'(x) = 0,$$

тобто

$$\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{\kappa(\theta - x)}{\bar{\sigma}^2}, \quad s(x) = \exp\left\{\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\}.$$

Одержимо рівняння

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 s(x)u''(x) + \left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 s''(x) + \kappa(\theta - x)s'(x) - xs(x)\right)u(x) = 0.$$

оскільки

$$s(x) = \exp\left\{\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\},$$

то

$$s'(x) = -\frac{\kappa(\theta - x)}{\bar{\sigma}^2} \exp\left\{\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\},$$

$$s''(x) = \left(\frac{\kappa}{2} - x + \frac{\kappa^2(\theta - x)^2}{\bar{\sigma}^2}\right) \exp\left\{-\frac{\kappa(\theta - x)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\},$$

підставивши одержимо

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4},$$

$$\psi_n = \mathcal{N}_n \exp\left(-A\xi - \frac{1}{2}A^2\right) H_n(\xi + A),$$

$$\mathcal{N}_n = \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2}, \quad A = \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}},$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}), \quad \lambda_n = \bar{\theta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\kappa^2} + \kappa n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Підставимо всі значення змінних в ψ_n

$$\psi_n = \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) - \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\kappa^3}\right)$$

$$H_n\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right),$$

де $\bar{\theta} = \theta - \frac{1}{\kappa} \overline{f\Omega}$, а H_n - многочлен Ерміта.

Знайдемо скалярний добуток $(\psi_n(x), \psi_m(x))$:

$$\begin{aligned}
 (\psi_n(x), \psi_m(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2^{n+1} 2^{m+1} n! m!}} \exp\left(-\frac{2\bar{\sigma}}{\kappa}(x - \bar{\theta}) - \frac{\bar{\sigma}^2}{\kappa^3}\right) \\
 &H_n\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) \frac{2}{\bar{\sigma}^2} \exp\left(\frac{\kappa}{\bar{\sigma}^2}(x - \bar{\theta})^2\right) dx \\
 &= \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n 2^m n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{\kappa}{\bar{\sigma}^2}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right)^2\right\} \\
 &H_n\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}\right) dx.
 \end{aligned}$$

Зробивши заміну змінної $\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} = \alpha$ матимемо

$$\begin{aligned}
 (\psi_n(x), \psi_m(x)) &= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n 2^m n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\alpha^2\} H_n(\alpha) H_m(\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi n! m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+m} \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d^m}{d\alpha^m} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(n)} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(m)} d\alpha &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(m+n)} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \\
 &= (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{m+n} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(n)} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)^{(m)} d\alpha = \begin{cases} \neq 0, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

$$\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \right)^2 d\alpha = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \right)^{(2n)} d\alpha.$$

Інтегруючи частинами, враховуючи, що такий інтеграл містить парні степені α^k понижується і зводиться до $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$, а інтеграл який містить α^k , k – непарні дорівнює нулю, $2n$ разів взявши частинами одержимо $(\psi_n(x), \psi_m(x)) = 1$.

Щоб знайти ціну облігації з виплатами $H(X_t) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = 1$, потрібно розв'язати рівняння (4.61) на знаходження власних значень на відрізку $I = (-\infty, \infty)$ з $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, згідно з (4.61). Оскільки обидва кінці $-\infty$ і ∞ є природними границями, то розв'язок має вигляд [195, 265].

$$\psi_n = \left(\sqrt{\kappa} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1} n!} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} (x - \bar{\theta}) - \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\kappa^3} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} (x - \bar{\theta}) + \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}} \right),$$

H_n -поліноми Ерміта [189], які мають вигляд

$$H_n = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j}{2^j} \frac{n!}{j! (n-2j)!} x^{n-2j}.$$

Запишемо вирази для операторів $\mathcal{A}_j$ та $\mathcal{B}_j$:

$$\mathcal{A}_j = -\vartheta_{j3} \partial_{xxx}^3 - (\vartheta_{j2} + \mathfrak{U}_{j2}) \partial_{xx}^2 - \mathfrak{U}_{j1} \partial_x, \quad \mathcal{B}_j = \vartheta_{j1} \partial_x - \vartheta_{j0}.$$

Оператори $\mathcal{A}_{jk,n}, \mathcal{B}_{jk,n}$, і $\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n}$ записуються на основі рекурентних співвідношень:

$$\partial_x H_n = 2n H_{n-1}, \quad 2x H_n = H_{n+1} + \partial_x H_n,$$

$$\mathcal{A}_{jk,n} = -\vartheta_{j3} \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{3}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{3-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -(\vartheta_2 + \mathfrak{U}_{j_2}) \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{2}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{2-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\
& - \mathfrak{U}_{j_1} \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}, \\
\mathcal{B}_{jk,n} = & -\vartheta_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\} - \vartheta_{j_0} \delta_{k,n}, \\
\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n} = & -\vartheta_{j_1} \bar{\sigma}' \left\{ \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \delta_{k,n} \right. \\
& + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \\
& + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \\
& \left. + \left[\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-3)! \mathcal{N}_{n-3}} \delta_{k,n-3} \right\} - \vartheta_{i_0} \bar{\sigma}' \\
& \left\{ \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
& - \vartheta_{i_1} \overline{f\Omega}' \left\{ \left(\frac{1}{\kappa^3} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma}\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
& - \vartheta_{i_0} \overline{f\Omega}' \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa^2} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2}{\bar{\sigma}\sqrt{\kappa}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Розрахунок c_n можна знайти в [18, 20, 26]

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Наближена ціна облігації тепер може бути розрахована з використанням теорем 4.1 4.3.

Для облігації з нульовим купоном, часто розглядають криву прибутковості, а не саму ціну облігації. Дохід $R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ в облігації з нульовим купоном, за якою виплачується один долар в момент часу t визначається через співвідношення:

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} = \exp(-R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} t),$$

Отримаємо наближення для облігації з нульовим купоном, розкладаючи в ряд, як ціни облігації, $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ таким і дохід $R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ за степенями $\sqrt{\epsilon_j}$ і $\sqrt{\delta_i}$:

$$\begin{aligned} w_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} w_{\bar{1}_j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} w_{\bar{0}, \bar{1}_i'} + \dots = \\ \exp \left\{ - \left(R_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} R_{\bar{1}_j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} R_{\bar{0}, \bar{1}_i'} \right) t \right\} \\ = e^{-R_{\bar{0}, \bar{0}'} t} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} R_{\bar{1}_j, \bar{0}'} e^{-R_{\bar{0}, \bar{0}'} t} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} R_{\bar{0}, \bar{1}_i'} e^{-R_{\bar{0}, \bar{0}'} t} + \dots. \end{aligned}$$

Згрупувавши по степенях $\sqrt{\epsilon_j}$ і $\sqrt{\delta_i}$ отримаємо:

$$R^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'} \approx R_{\bar{0}, \bar{0}'} + \sum_{j=1}^l \sqrt{\epsilon_j} R_{\bar{1}_j, \bar{0}'} + \sum_{i=1}^r \sqrt{\delta_i} R_{\bar{0}, \bar{1}_i'},$$

$$R_{\bar{0}, \bar{0}'} = -\frac{1}{t} \ln(w_{\bar{0}, \bar{0}'}), \quad R_{\bar{1}_j, \bar{0}'} = \frac{-w_{\bar{1}_j, \bar{0}'}}{t w_{\bar{0}, \bar{0}'}}, \quad R_{\bar{0}, \bar{1}_i'} = \frac{-w_{\bar{0}, \bar{1}_i'}}{t w_{\bar{0}, \bar{0}'}}.$$

Зауваження: рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [26, 227].

Основною перевагою розглянутої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії, регулярної теорії збурень і

теорії сингулярних збурень зводиться все до розв'язання рівнянь на знаходження власних функцій та власних значень.

4.4. Спектральне дослідження деривативів на базі моделі CEV з багатовимірною волатильністю

Модель CEV є узагальненням моделей геометричного броунівського руху. Вперше ця модель запропонована для дослідження ціни європейського опціону [85, 90, 189, 265]. Вона ґрунтується на припущенні, що ризик-нейтральний процес, який описує ціну акції S має вигляд

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma S^\alpha dz,$$

де r -безризикова відсоткова ставка, q -дивідендна дохідність, σ -параметр волатильності, α -додатня константа, dz -вінерівський процес. При $\alpha = 1$ модель CEV співпадає з моделлю геометричного броунівського руху, якщо $\alpha < 1$ то при зменшенні вартості активу його волатильність збільшується, якщо $\alpha > 1$ то при зростанні вартості активу його волатильність також зростає. Це відповідає усмішці волатильності і означає, що волатильність є зростаючою функцією залежною від ціни активу.

Порівнюючи з моделями геометричного броунівського руху переваги моделі CEV полягають у тому, що коефіцієнт нестабільності співвідноситься з ціною ризикованих активів і може пояснити емпіричні упередження, такі як нестабільність посмішки волатильності [90]. Модель CEV зазвичай застосовується для розрахунку теоретичної ціни, чутливості та передбачуваної волатильності опціонів [31, 213]. Протягом останніх років проблема інвестицій для пенсійного фонду є дуже важливою,

виявилося що модель *CEV* успішно застосовується для вивчення оптимальної інвестиційної стратегії [113, 136, 151, 179].

В кінці минулого століття увагу вчених фінансистів привернула проблема зв'язку між ціною активу та його волатильністю [193]. Було встановлено, що ціна активу веде себе як волатильність. У відомій моделі Блека-Шоулза волатильність є сталою [195]. Це зумовило низку праць для уточнення цієї моделі. Емпіричними дослідженнями встановлено, що волатильність є випадковою величиною залежною від часу [218, 235, 271]. В [169] запропоновано аналітичні моделі, що мають стохастичну волатильність. Лінецький та низка інших авторів [210, 217, 174, 177] досліджували модель стохастичної волатильності зі стрибками. Модель *CEV* є узагальненням моделей динамічної волатильності. Зокрема вона дає можливість дослідити ціну активів, які змінюються неперервно в часі [135, 138, 161]. У роботі розглядається модель *CEV* з багатовимірною стохастичною волатильністю. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю *CEV* з стохастичною волатильністю залежною від l -швидко змінних та n -повільно змінних чинників, $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$ і локальної змінної.

Вважатимемо, що актив задається через $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} X_t$. Оскільки S повинно бути додатним, простором станів X буде $e_1, e_2 = (0, \infty)$.

Багатовимірна дифузія утворюється на скачку дефолту моделі сталої варіації [234]. Зокрема, $\mathbb{P}$ динаміка X до дефолту задаються:

$$dX_t = (\mu + cX_t^{2\eta})X_t dt + (f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)X_t^\eta)X_t d\tilde{W}_t^x,$$

$$h(X_t) = \mu + cX_t^{2\eta}.$$

Для зручності обчислень безризикова відсоткова ставка рівна нулю: $r = 0$. Константи μ і c строго додатні. Як завжди, $Y_1, \dots, Y_l$ і $Z_1, \dots, Z_n$ є швидко і повільно змінні чинники волатильності. Зауважимо, що волатильність X має і локальну компоненту X_t^η і нелокальні чинники багато вимірності $f(Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_n)$. Припустимо, що $\eta < 0$, тобто X_t^η зростає при спаданні X_t , відображаючи той факт, що ціни і волатильність мають відємну кореляцію. Стохастичний рівень ризику $h(X_t)$ також зростає, коли X спадає, тобто ймовірність дефолту збільшується коли X прямує до нуля. Відзначимо, що S є $\mathbb{P}$ -мартингалом. Обчислимо наближену ціну європейського опціону що описується за допомогою S .

Запишемо оператор $\langle \mathcal{Q}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю $m(x)$:

$$\langle \mathcal{Q}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta}) x \partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \quad (4.62)$$

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2} x^{\frac{2c}{\bar{\sigma}^2-2-2\eta}} \exp(Ax^{-2\eta}), \quad A = \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2|\eta|}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} y'' + (\mu + cx^{2\eta}) x y' - (\mu + cx^{2\eta}) y = 0,$$

Зробимо заміну, щоб не було першої похідної в одержаному рівнянні:

$$y = s(x)u(x), \quad y'(x) = s'(x)u(x) + s(x)u'(x),$$

$$y''(x) = s''(x)u(x) + 2s'(x)u'(x) + s(x)u''(x),$$

де $u(x)$ – невідома функція, $s(x)$ – підберемо з одержаного рівняння

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s(x)u''(x) + \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s'(x)u'(x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s''(x)u(x)$$

$$+ (\mu + cx^{2\eta}) x s(x)u'(x) + (\mu + cx^{2\eta}) x u(x)s'(x) -$$

$$(\mu + cx^{2\eta})s(x)u(x) = 0,$$

звідки

$$\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} s'(x) + (\mu + cx^{2\eta})xs(x) = 0,$$

тобто

$$\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{(\mu + cx^{2\eta})x}{\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2}}, \quad \frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{\mu + cx^{2\eta}}{\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+1}},$$

$$\ln s(x) = -\int \frac{\mu + cx^{2\eta}}{\bar{\sigma}^2 x^{2\eta+1}} dx, \quad \ln s(x) = -\frac{\mu x^{-2\eta}}{2\bar{\sigma}^2 |\eta|} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \ln x, \quad (\eta < 0).$$

$$s = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\mu x^{-2\eta}}{\bar{\sigma}^2 |\eta|} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\} = \exp \left\{ -\frac{A}{2} x^{-2\eta} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \ln x \right\}, \quad A = \frac{\mu}{2\bar{\sigma}^2 |\eta|}$$

Знайдемо похідні

$$s' = \left(\frac{A\eta}{x^{2\eta+1}} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right) s = \left(A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right) s,$$

$$s'' = \left[\left(A\eta(-2\eta - 1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x^2} \right) + \left(A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right)^2 \right] s.$$

підставимо в рівняння, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}^2}{2} x^{2\eta+2} u''_{x^2} + \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2}{2} x^{2\eta+2} \left[A\eta(-2\eta - 1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right)^2 \right] + x(\mu + cx^{2\eta}) \left(A\eta x^{-2\eta-1} - \frac{c}{\bar{\sigma}^2 x} \right) \right. \\ \left. - (\mu + cx^{2\eta}) \right\} u = 0, \end{aligned}$$

Спростивши, отримаємо

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{2} x^{2\eta+2} u''_{x^2} + \left[-\frac{\mu}{2} + \mu \left(\eta + \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \right) - x^{-2\eta} \frac{\mu}{2\bar{\sigma}^2} - x^{2\eta} c \left(\frac{1}{2} - \frac{c+1}{\bar{\sigma}^2} \right) \right] u = 0.$$

Зробимо заміну змінних

$\sqrt{A}x^{-2\eta} = \theta$, тоді $x = \theta^{-\frac{1}{\eta}}A^{\frac{1}{2\eta}}$, а відповідні похідні набудуть вигляду

$$u'_x = u'_\theta \theta'_x = u'_\theta \sqrt{A}(-\eta)x^{-\eta-1},$$

$$\theta''_{x^2} = \sqrt{A}(-\eta)(-\eta-1)x^{-\eta-2},$$

$$u''_{x^2} = (u'_\theta \theta'_x)'_x = u''_{\theta^2}(u'_\theta)^2 + u'_\theta \theta''_{x^2},$$

$$u''_{x^2} = u''_{\theta^2} A \eta^2 x^{-2\eta-2} + u'_\theta \sqrt{A}(-\eta)(-\eta-1)x^{-\eta-2},$$

$$\frac{\mu}{|\eta|} x^{-2\eta-2} x^{2\eta+2} u''_{\theta^2} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \sqrt{A}(-\eta)(-\eta-1)x^{-\eta-2} x^{2\eta+2} u'_\theta$$

$$+ \left[\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\sigma^2} x^{-2\eta-1} + \frac{c}{\sigma^2 x} \right) \right] u = 0,$$

$$\frac{\mu|\eta|}{2} u''_{\theta^2} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \sqrt{A} \eta (\eta+1) x^\eta u'_\theta + \left[\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] u = 0,$$

$$\frac{\mu|\eta|}{2} u''_{\theta^2} + \frac{\mu(-\eta-1)}{2} \theta^{-1} u'_\theta + \left[\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] u = 0,$$

$$\frac{\mu|\eta|}{2} u''_{\theta^2} + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} \theta^{-1} u'_\theta + \left[\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] u = 0,$$

Зробимо заміну $u = v s$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu|\eta|}{2} v'' s + \mu|\eta| v' s' + \frac{\mu|\eta|}{2} v s'' + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} \theta^{-1} v' s + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} v s' \theta^{-1} \\ & + \left[\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta-1)x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] v s = 0, \end{aligned}$$

звідси

$$\mu|\eta| s' + \frac{\mu(|\eta|-1)}{2} \theta^{-1} s = 0,$$

тобто

$$\frac{s'}{s} = -\frac{(|\eta|-1)}{2|\eta|\theta}, \quad \ln s = -\frac{(|\eta|-1)}{2|\eta|} \ln \theta,$$

$$s = \exp \left\{ -\frac{(|\eta| - 1)}{2|\eta|} \ln \theta \right\}, \quad s' = \frac{|\eta| - 1}{2|\eta|\theta}, \quad s'' = \frac{|\eta| - 1}{2|\eta|\theta^2},$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu|\eta|}{2} v''_{\theta^2} + \frac{\mu(|\eta|^2 - |\eta|)}{4|\eta|\theta^2} - \frac{\mu(|\eta|^2 - 2|\eta| + 1)}{4|\eta|\theta^2} \\ & + \left[\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} (-2\eta - 1) x^{-2\eta-2} + \frac{c}{\sigma^2 x^2} \right) \right] v = 0, \end{aligned}$$

Потрібно щоб в точках L і R розв'язок дорівнював нулю, тому для зручності зробимо заміну $x = \sigma(\theta) = Le^\theta$ тоді будемо мати

$$\frac{\sigma^2}{2} V''_{\theta^2} - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + r \right) V = 0,$$

Тому на власні значення і власні функції досліджуємо

$$\frac{\sigma^2}{2} V''_{\theta^2} - \left(\frac{V^2}{2} + r \right) V = \lambda V.$$

Маємо

$$\lambda_n = \frac{n\pi\sigma}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}}, \quad V_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\sigma}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta,$$

з того що

$$\int_0^{\ln \frac{L}{R}} \sin^2 \frac{n\pi\sigma}{\sqrt{2} \ln \frac{R}{L}} \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln \frac{R}{L}$$

маємо

$$V_n(\theta) = \left(\sqrt{\frac{\ln \frac{R}{L}}{2}} \right)^{-1} \sin \frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}},$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{n\pi\sigma}{2 \ln \frac{R}{L}} \right)^2 \left(\lambda_n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + r \right)$$

$$\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\ln \frac{R}{L}}} \exp \left\{ -\frac{r}{\sigma^2} \ln x \right\} \sin \frac{n\pi \ln \frac{x}{L}}{\ln \frac{R}{L}}$$

Запишемо оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю

$m(x)$:

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta}) x \partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \quad (4.63)$$

$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2} x^{\frac{2c}{\bar{\sigma}^2-2-2\eta}} \exp(Ax^{-2\eta}), \quad A = \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2 |\eta|}.$$

Для дифузії, пов'язаної з нескінченно малим генератором (4.63), кінець інтервалу $e_2 = \infty$ є природною границею. Однак, класифікація кінцевої точки $e_1 = 0$ залежить від величини η і $c/\bar{\sigma}^2$, а саме:

- 1) $c/\bar{\sigma}^2 \geq 1/2$, $\eta < 0$, $e_1 = 0$ – тривіальний випадок,
- 2) $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, $\eta \in \left[\frac{c}{\bar{\sigma}^2} - 1/2, 0 \right)$, $e_1 = 0$ – це число відіграє

роль початкового моменту,

- 3) $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, $\eta < \frac{c}{\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{2}$, $e_1 = 0$ при такій умові початок

інтервалу є сталим.

Якщо параметри $(c, \bar{\sigma}, \eta)$ задовольняють $c/\bar{\sigma}^2 \in (0, 1/2)$, а $\eta \in \left[\frac{c}{\bar{\sigma}^2} - \frac{1}{2}, 0 \right)$, $e_1 = 0$, то e_1 вважають кіллінговою межею. Щоб обчислити наближену ціну європейського опціону, потрібно знайти власні функції та власні значення (4.53) на інтервалі $(0, \infty)$ для оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ записаного за допомогою (4.54) та з крайовими умовами

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_n = 0, \quad \text{якщо} \quad \frac{c}{\bar{\sigma}^2} \in \left(0, \frac{1}{2} \right).$$

Розв'язок має вигляд [88]

$$\psi_n = A^{\frac{v}{2}} \sqrt{\frac{(n-1)! \mu}{\Gamma(v+n)}} x \exp(-Ax^{-2\eta}) L_{n-1}^{(v)}(Ax^{-2\eta}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda_n = 2\mu|\eta|(n + v), \quad v = \frac{1 + 2(\frac{2}{\sigma^2})}{2|\eta|},$$

де $L_n^{(v)}$ є узагальненими поліномами Лагерра, які мають наступний вигляд [151, 261]

$$L_n^{(v)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+v}{n-i} \frac{x^i}{i!}.$$

Запишемо вирази для операторів $\mathcal{A}_j$ і $\mathcal{B}_j$:

$$\mathcal{A}_j = -v_{j3}x^{\eta+1}\partial_x x^{2\eta+2}\partial_{xx}^2 - v_{j2}x^{2\eta+2}\partial_{xx}^2,$$

$$\mathcal{B}_j = -v_{j1}x^{\eta+1}\partial_x - v_{j0}.$$

Аналітичні вирази для $\mathcal{A}_{jk,n}$, $\mathcal{B}_{jk,n}$ і $\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n}$ легко отримати, зробивши заміну змінних $Ax^{-2\eta} \rightarrow y$, використовуючи

$$\partial_y L_n^v(y) = -L_{n-1}^{(v+1)}(y),$$

$$\int_0^\infty y^\gamma e^{-y} L_n^{(\alpha)}(y) L_m^{(\beta)}(y) dy = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + n) \Gamma(\beta + 1 + m) \Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha - \gamma) \Gamma(\beta + 1) n! m!}$$

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \gamma + 1, & -m, & \gamma + 1 - \alpha \\ \beta + 1, & \gamma + 1 - \alpha - n, \end{matrix} ; 1 \right)$$

де ${}_3F_2$ є узагальненою гіпергеометричною функцією [138] і має вигляд

$${}_3F_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2) \dots (\gamma + n)(-m)(-m + 1) \dots (-m + n - 1)}{n! (\beta + 1)(\beta + 2) \dots (\beta + n)(\gamma + 1 - \alpha - n)}$$

$$\frac{(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 2 - \alpha) \dots (\gamma - \alpha + n)}{(\gamma + 1 - \alpha - n + 1) \dots (\gamma - \alpha)} x^n.$$

Виграш європейського опціону з ціною виконання $K > 0$ можна розкласти наступним чином:

$$(K - S_t)^+ = (K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + K(1 - \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}). \quad (4.63)$$

Перший доданок в правій частині (4.63) є виграш опціону до дефолту в час t . Другий член представляє виграш опціону даного після дефолту, який може відбутися в час t . Таким чином, вартість опціону з ціною виконання K позначається $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K)$ може бути виражена у вигляді суми двох частин:

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = w_o^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) + w_D^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K),$$

де

$$w_o^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r}[(K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}],$$

$$w_D^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = K - K \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] =$$

$$K - K \int_0^\infty \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] dx'$$

$$= K - K \int_0^\infty w_1^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; x') dx',$$

$$w_1^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; x') = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_r}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}].$$

Зауважимо, що $1 \notin L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$ використано той факт, що

$1 = \int_0^\infty \delta_{x'}(X_t) dx'$ на множині $\{\tau > T\}$. Так, як функції виграшу

$H_0(x) = (K - x)^+$ і $H_1(x) = \delta_{x'}(x)$ належать $L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$, можемо обчислити:

$$c_{0,n} = (\psi_n(\cdot), (K - \cdot)^+), \quad c_{1,n} = (\psi_n, \delta_{x'}).$$

Вираз для $c_{0,n}$ можна знайти в [96]. $c_{1,n}$ обчислюється тривіально. У роботі

$$c_{0,n} = \frac{A^{\frac{v}{2}+1} K^{\frac{2c}{\sigma^2}+1-2\eta} \sqrt{\Gamma(v+n)}}{\Gamma(v+n) \sqrt{\mu(n-1)!}} \times$$

$$\left[\frac{|\eta|}{\frac{c}{\sigma^2} + |\eta|} {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 - n & \frac{\frac{c}{\sigma^2}}{|\eta|} + 1 \\ v + 1 & \frac{c}{\sigma^2} + 2 \end{matrix} ; AK^{-2\eta} \right) - \frac{\Gamma(v+1)(n-1)!}{\Gamma(v+n+1)} L_{n-1}^{(v+1)}(AK^{-2\eta}) \right],$$

$$c_{1,n} = \psi_n(x')m(x').$$

Наближену ціну європейського опціону тепер можна обчислити за допомогою теорем 4.1 4.3 [26].

Зауважимо, що волатильність $I^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$ опціону з ціною $w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K)$ визначається за допомогою формули

$$w^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}(t, x; K) = w^{BS}(t, x, I^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}; K)$$

де $w^{BS}(t, x, I^{\epsilon, \delta}; K)$ ціна Блека-Шоулза з волатильністю $I^{\bar{\epsilon}, \bar{\delta}'}$.

Зауважимо, що рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [121, 227].

Спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу дифузії, а саме в дослідженні розвинень за власними функціями лінійних операторів. Для фінансових моделей дифузії є основним процесом, тому не дивно, що методи спектральної теорії внесли свій вклад у фінансову математику. Зокрема, багато проблем, пов'язаних з оцінкою похідних активів були розв'язані аналітично за допомогою методів спектральної теорії. Використовуючи методи з спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, можна знайти наближену ціну деривативів як розклад за власними функціями. Використовуючи інфінітезимальні генератори $(l+n+1)$ вимірної дифузії, при $l=1$ та $n=1$ отримаємо методику роботи [227], тобто дифузія залежить від однієї локальної змінної,

одновимірний швидкозмінний чинник і одновимірний повільно змінний чинник.

Спектральний метод застосовувався до ціноутворення похідних фінансових інструментів через представлення ціни активу $w(t, x)$ функцією від майбутньої вартості основного процесу X . Математично це виражається, як [139]

$$w(t, x) = \tilde{E}_x [H(X_t)] = \int H(y) p(t, x, y) dy. \quad (4.65)$$

де $p(t, x, y)$ – щільність переходу X по P . Якщо інфінітезимальний (нескінченно малий) генератор L базового процесу самоспряжений в гільбертовому просторі з приростом міри $m(x)dx$, і спектр L є дискретним, то щільність переходу X має розклад в ряд за власними функціями:

$$p(t, x, y) = m(y) \sum_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(y) \varphi_n(x), \quad (4.66)$$

де $\{\lambda_n\}$ – власні значення $(-L)$ і $\{\varphi_n\}$ – власні функції: тобто

$$-L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

Значення ціни деривативу може бути виражене аналітично шляхом підстановки (4.66) в (4.65):

$$w(t, x) = \sum c_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x), \quad c_n = (\varphi_n, H) := \int H(y) \varphi_n(y) m(y) dy.$$

Розглянемо інфінітезимальний генератор загальної одновимірної дифузії:

$$L = \frac{1}{2} a^2(x) \partial_{xx}^2 + b(x) \partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \quad (4.67)$$

з областю визначення $\text{dom}(L)$, який завжди самоспряжений в гільбертовому просторі $H = L^2(I, m)$, де $I \in R$, $I = (e_1, e_2)$ та m – швидкість щільності дифузії.

$$m(x) := \frac{2}{a^2(x)} \exp \left(\int_{x_0}^x \frac{2b(y)}{a^2(y)} dy \right).$$

Нижня межа інтегрування $x_0 \in I$ є довільною. Таким чином, при одномірній дифузії для опису основної динаміки, спектральний метод є потужним інструментом для аналітичного ціноутворення.

Одномірні дифузії широко застосовуються в фінансах, але існують випадки, у яких одномірні дифузії не є адекватними для опису динаміки базового активу [89]. Це стосується, наприклад, досліджень стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, та контролюється нелокальною дифузією, в цьому випадку інфінітезимальний генератор багатовимірної дифузії буде самоспряженим тільки тоді, коли вектор зсуву задовольняє певні обмеження, пов'язані з волатильністю кореляційної матриці [160].

Комбінуючи методи з теорії сингулярних збурень і спектральної теорії, можна наближено обчислити ціну деривативу, як розклад в ряд за власними функціями, використовуючи інфінітезимальні не самоспряжені генератори двовимірної дифузії.

Спочатку розглянемо загальну одномірну дифузію

$$dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)dW_t,$$

в якій є можливість проявляти кіллінг (стрибок дефолту) на швидкості $h(X_t) \geq 0$, W_t – геометричний броунівський рух (ГБР), X завжди строго додатній. До загальної дифузії додаємо два чинники нелокальної волатильності: $a(X_t) \rightarrow a(X_t)f(Y_t, Z_t)$. Перший Y – вектор швидко змінних чинників. Другий чинник Z змінюється повільно. Таким чином, наша модель є багатовимірною стохастичною волатильною моделлю.

Нехай (Ω, F, P) ймовірнісний простір, який підтримує корельований броунівський рух (W^x, W^y, W^z) . Експоненціальна випадкова змінна $\varepsilon \sim \text{Exp}(1)$, не залежить від (W^x, W^y, W^z) . Будемо вважати, що економіка

з трьома чинниками, описана однорідним часом, неперервним процесом Маркова $\chi = (X, Y, Z)$, який приймає значення в деякому просторі станів $E = I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $I = (e_1, e_2)$, $-\infty \leq e_1 < e_2 \leq \infty$. Припустимо, що χ починається в E і миттєво зникає, як тільки $X \notin I$, тобто:

$$\chi_t = \begin{cases} (X_t, Y_t, Z_t), & \tau_I > t \\ \Delta, & \tau_I \leq t \end{cases}, \quad \tau_I = \inf(t > 0: X_t \notin I),$$

де (X, Y, Z) , задаються

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = v(X_t)dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)dW_t^x, \\ dY_t = \frac{1}{\epsilon}\alpha(Y_t)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)dW_t^y, \\ dZ_t = \delta c(Z_t)dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)dW_t^z, \\ d\langle W^x, W^y \rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\langle W^x, W^z \rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\langle W^y, W^z \rangle_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E. \end{array} \right. \quad (4.68)$$

$|\rho_{xy}|, |\rho_{xz}|, |\rho_{yz}| \leq 1$ та $1 + 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{yz}^2 \geq 0$ так, щоб матриця кореляції броунівського руху була додатно визначена.

Генератори Y та Z мають вигляд

$$\mathfrak{L}_Y^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{2} \beta^2(y) \partial_{yy}^2 + \alpha(y) \partial_y \right), \quad \mathfrak{L}_Z^\delta = \delta \left(\frac{1}{2} g^2(z) \partial_{zz}^2 + c(z) \partial_z \right), \quad (4.69)$$

узгоджені з чинниками $\frac{1}{\epsilon}$ та δ відповідно. Таким чином, Y та Z мають внутрішню шкалу часу $\epsilon > 0$ і $\frac{1}{\delta} > 0$. Зауважимо, що $\mathfrak{L}_Y^\epsilon$ і $\mathfrak{L}_Z^\delta$ мають вид

(4.66) з $k(x) = 0$ для всіх $x \in I$. Нас цікавить оцінка похідного активу, з виплатою в час $t > 0$, яка залежить від траєкторії X . Зокрема, розглянемо форми виплати:

$$H(X_t) \mathbb{I}_{(\tau > t)}, \quad (4.70)$$

де τ – випадковий час, несплати похідного активу, визначимо динаміку (X, Y, Z) за оцінкою міри з нейтральним ризиком, яку позначимо, як $\tilde{\mathbb{P}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = (b(X_t) - a(X_t)f(Y_t, Z_t)\Omega(Y_t, Z_t))dt + a(X_t)f(Y_t, Z_t)d\tilde{W}_t^x, \\ dY_t = \left(\frac{1}{\epsilon} \alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \beta(Y_t)\Lambda(Y_t, Z_t) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \beta(Y_t)d\tilde{W}_t^y, \\ dZ_t = (\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta} g(Z_t)\Gamma(Y_t, Z_t))dt + \sqrt{\delta} g(Z_t)d\tilde{W}_t^z, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^y \rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\langle \tilde{W}^x, \tilde{W}^z \rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\langle \tilde{W}^y, \tilde{W}^z \rangle_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E, \end{array} \right. \quad (4.71)$$

де

$$d\tilde{W}_t^x := dW_t^x + \left(\frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)f(Y_t, Z_t)} + \Omega(Y_t, Z_t) \right) dt, d\tilde{W}_t^y := dW_t^y + \Lambda(Y_t, Z_t)dt, \\ d\tilde{W}_t^z := dW_t^z + \Gamma(Y_t, Z_t)dt.$$

Припустимо, що (4.71) має єдиний сильний розв'язок, τ – час похідного активу, дефолт може відбутися одним із двох способів: X виходить за інтервал I , або у випадковий час τ_h , яким управляє рівень небезпеки $h(X_t) \geq 0$. Математично виражаємо час дефолту τ наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = \inf\{t \geq 0: X_t \notin I\}, \\ \tau_h = \inf\left\{t \geq 0: \int_0^t h(X_s)ds \geq \varepsilon\right\}, \varepsilon \sim \text{Exp}(1), \varepsilon \perp (X, Y, Z). \end{array} \right. \quad (4.72)$$

Припустимо, що економіка включає надійний актив, який росте миттєво на короткий рівень $r(X_t) \geq 0$. Таким чином, якщо економіка включає, наприклад, "не платити дивіденди" виносить на обговорення неплатіжний актив S , ціновий процес, який описується: $S_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}} X_t$, де простір станів X на $I = (0, \infty)$, тоді ціна активу має вигляд:

$$\left\{ e^{-\int_0^t r(X_s)ds} S_t, t \geq 0 \right\},$$

$(\tilde{\mathbb{P}}, \mathbb{G})$ – повинен бути мартингальним, $\mathbb{G}$ – розширена фільтрація процесу. $b(X_t) = [r(X_t) + h(X_t)]X_t$ і $\Omega(Y_t, Z_t) = 0$ у (4.25). З іншого боку, якщо X тільки описує надійний відсоток через $r(X_t)$, то зміна ймовірнісної міри $\mathbb{P}$ на $\tilde{\mathbb{P}}$, не має причини змінити дрейф від X до $v(X_t)$, до $b(X_t)$. Однак, якщо є ефект включення ринкової ціни ризику, то в цьому випадку можливе $b(X_t) = v(X_t)$, і $\Omega(Y_t, Z_t) \neq 0$ в (4.71).

Оцінимо похідний актив деякого виграшу, який має вигляд (4.70), де час дефолту виражається формулою (4.72). Використовуючи нейтральний ризик ціноутворення і властивість Маркова X , ціна $u^{\epsilon, \delta}(t, x, y, z)$ деяких похідних активів при $t=0$ має вигляд:

$$w^{\epsilon, \delta}(t, x, y, z) = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y, z} \left[\exp \left(- \int_0^t r(X_s) ds \right) H(X_t \mathbb{I}_{\{t > \tau\}}) \right],$$

де $(x, y, z) \in E$ вихідна точка процесу (X, Y, Z) , $u^{\epsilon, \delta}(t, x, y, z)$ задовольняє наступній задачі Коші:

$$w^{\epsilon, \delta} = 0, \quad (x, y, z) \in E, t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.73)$$

$$w^{\epsilon, \delta}(0, x, y, z) = H(x), \quad (4.74)$$

де оператор $\mathfrak{L}^{\epsilon, \delta}$ має вигляд:

$$\mathfrak{L}^{\epsilon, \delta} = \frac{1}{\epsilon} \mathfrak{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}} \mathfrak{M}_3 + \sqrt{\delta} \mathfrak{M}_1 + \delta \mathfrak{M}_2, \quad (4.75)$$

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2} \beta^2(y) \partial_{yy}^2 + \alpha(y) \partial_y,$$

$$\mathfrak{L}_1 = \beta(y) (\rho_{xy} a(x) f(y, z) \partial_x - \Lambda(y, z)) \partial_y, \quad (4.76)$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{2} a^2(x) f^2(y, z) \partial_{xx}^2 + (b(x) - a(x) \Omega(y, z) f(y, z)) \partial_x - k(x),$$

$$\mathfrak{M}_3 = \rho_{xz}\beta(y)g(z)\partial_{yz}^2, \quad \mathfrak{M}_1 = g(z)(\rho_{xz}a(x)f(y,z)\partial_x - \Gamma(y,z))\partial_z,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2}g^2(z)\partial_{zz}^2 + c(z)\partial_z, \quad k(x) = r(x) + h(x).$$

Крім початкової умови (4.66) функція $w^{\epsilon,\delta}(t,x,y,z)$ повинна задовольняти на кінцях інтервалу I додаткові крайові умови. З рівняння (4.67) бачимо, що $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_Y^1$. Вважаємо, що дифузія з генератором $\mathfrak{L}_Y^1$ має інваріантний розподіл з щільністю π , оператор $\mathfrak{L}_0$ з $dom(\mathfrak{L}_0) = L^2(\mathbb{R}, \pi)$ є самоспряженим в Гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R}, \pi)$.

Розв'яжемо задачу Коші (4.73)–(4.74). Для сукупності $(f, \alpha, \beta, \Lambda, c, g, \Gamma)$ не існує ніякого аналітичного розв'язку. Однак, для фіксованого δ , умови (4.75), які містять ϵ відхиляються в як завгодно малому околі ϵ , що призводить до сингулярних збурень. Тим часом, для фіксованого ϵ умови, які містять δ є малими для деякого малого околу δ , що зумовлює регулярні збурення. Таким чином, ϵ -окіл та δ -окіл дають початок об'єднаному сингулярно-регулярному збуренню $\mathcal{O}(1)$ оператора $\mathfrak{L}_2$. Це говорить про те, що потрібно шукати асимптотичний розв'язок задачі Коші (4.73) – (4.74). Для цього розкладемо $w^{\epsilon,\delta}$ по степенях $\sqrt{\epsilon}$ та $\sqrt{\delta}$ наступним чином: $u^{\epsilon,\delta} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} \sqrt{\epsilon}^i \sqrt{\delta}^j u_{i,j}$. Тому наближення цін має вигляд

$$w^{\epsilon,\delta} \approx w_{0,0} + \sqrt{\epsilon}w_{1,0} + \sqrt{\delta}w_{0,1}.$$

Розглянемо регулярний розклад збурень, які породжені δ а потім здійснимо сингулярний аналіз збурень, які стосуються ϵ .

Регулярне розклад збурень для $\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta}$ і $w^{\epsilon,\delta}$, що стосується $\sqrt{\delta}$.

$$\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta} = \mathfrak{L}^\epsilon + \sqrt{\delta}\mathfrak{M}^\epsilon + \delta\mathfrak{M}_2, \quad u^{\epsilon,\delta} = \sum_{o \geq 0} \left(\sqrt{\delta} \right)^o w_j^\epsilon, \quad (4.77)$$

де

$$\mathfrak{L}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \mathfrak{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2, \quad \mathfrak{M}^\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1. \quad (4.78)$$

$$w_j^\epsilon = \sum_{i \geq 0} (\sqrt{\epsilon})^i w_{i,j}, \quad (4.79)$$

Підставивши розклад (4.77) в (4.73) і збираючи члени з степенями $\sqrt{\delta}$ отримаємо рівняння з регулярним розкладом збурень:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^\epsilon) w_0^\epsilon, \quad (4.80)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta}): \quad 0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^\epsilon) w_1^\epsilon + \mathfrak{M}^\epsilon w_0^\epsilon. \quad (4.81)$$

В рівняннях (4.80) і (4.61) застосуємо сингулярний розклад збурень по відношенню до ϵ . Підставимо (4.78) – (4.79) в (4.80) і зберемо члени зі степенями $\sqrt{\epsilon}$. В результаті порядок $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ і $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$ рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{0,0}, \quad (4.82)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{1,0} + \mathfrak{L}_1 w_{0,0}. \quad (4.83)$$

якщо $w_{0,0}$ і $w_{1,0}$ не залежать від y , то вони задовольняють рівняння (4.82) і (4.83), тому вибираємо $w_{0,0} = w_{0,0}(t, x, z)$ і $w_{1,0} = w_{1,0}(t, x, z)$. Проведемо асимптотичний аналіз для порядку $\mathcal{O}(1)$ і $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{2,0} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{0,0}, \quad (4.84)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{3,0} + \mathfrak{L}_1 w_{2,0} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{1,0}, \quad (4.85)$$

Рівняння (4.3) і (4.85) є рівняннями Пуассона виду:

$$0 = \mathfrak{L}_0 w + \mathcal{X}. \quad (4.86)$$

$w \in \text{dom}(\mathfrak{L}_0) = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \pi)$.

$$\langle \mathcal{X} \rangle := \int \mathcal{X}(y) \pi(y) dy = 0, \quad (4.87)$$

З рівнянь (4.82) і (4.85) і умови центрованості (4.87) випливає:

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{0,0}, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}): \quad 0 = \langle \mathfrak{L}_1 w_{2,0} \rangle + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{1,0}. \quad (4.89)$$

Оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ має вигляд:

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 a^2(x) \partial_{xx}^2 + (b(x) - \bar{f} \bar{\Omega} a(x)) \partial_x - k(x), \quad x \in (e_1, e_2), \quad (4.90)$$

$$\bar{\sigma}^2 := \langle f^2(\cdot, z) \rangle, \quad \bar{f} \bar{\Omega} := \langle f(\cdot, z) \Omega(\cdot, z) \rangle.$$

Враховуючи відповідні крайові умови знайдемо розв'язок рівняння (4.88)

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 w_{2,0} &= -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{0,0} = -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2) w_{0,0} + (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{0,0} \\ &= -\left(\frac{1}{2} a^2 (f^2 - \bar{\sigma}^2) \partial_{xx}^2 - a(f\Omega - \bar{f}\bar{\Omega}) \partial_x \right) w_{0,0}. \end{aligned}$$

Позначимо $\phi(y, z)$ і $\eta(y, z)$ розв'язки рівнянь Пуассона:

$$\mathfrak{L}_0 \phi = f^2 - \bar{\sigma}^2, \quad \mathfrak{L}_0 \eta = f\Omega - \bar{f}\bar{\Omega}. \quad (4.91)$$

Використовуючи (4.91) знайдемо $w_{2,0}$, як:

$$w_{2,0} = -\left(\frac{1}{2} a^2 \phi \partial_{xx}^2 - a \eta \partial_x \right) w_{0,0} + C, \quad (4.92)$$

де C – константа незалежна від y . Підставимо (4.76) та (4.92) в $\langle \mathfrak{L}_0 w_{2,0} \rangle$ отримаємо:

$$\langle \mathfrak{L}_1 w_{2,0} \rangle = \langle (\beta(\rho_{xy} a f \partial_x - \Lambda) \partial_y) \left(\frac{1}{2} a^2 \phi \partial_{xx}^2 - a \eta \partial_x \right) w_{0,0} \rangle = -\mathcal{A} w_{0,0}. \quad (4.93)$$

Оператор $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -v_3 a(x) \partial_x a^2(x) \partial_{xx}^2 - v_2 a^2(x) \partial_{xx}^2 - \mathcal{U}_2 a(x) \partial_x a(x) \partial_x \\ &\quad - \mathcal{U}_1 a(x) \partial_x, \end{aligned} \quad (4.94)$$

де

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{\rho_{xy}}{2} \langle \beta f \partial_y \phi \rangle, \quad v_2 = \frac{1}{2} \langle \beta \Lambda \partial_y \phi \rangle, \\ \mathcal{U}_2 &= \rho_{xy} \langle \beta f \partial_y \eta \rangle, \quad \mathcal{U}_1 = -\langle \beta \Lambda \partial_y \eta \rangle. \end{aligned}$$

Підставивши (4.93) в (4.89) отримаємо:

$$\mathcal{A}w_{0,0} = (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)w_{1,0}. \quad (4.95)$$

Враховуючи вираз для $w_{0,0}$ і відповідні крайові умови, можна знайти вираз для $w_{1,0}$. Повернемося до рівняння $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$. Для сингулярного аналізу збурень рівняння (4.81), підставимо (4.78) і (4.79) в (4.81) згрупуємо по степенях $\sqrt{\epsilon}$. В результаті для $\mathcal{O}(\sqrt{\delta}/\epsilon)$ і $\mathcal{O}(\sqrt{\delta}/\sqrt{\epsilon})$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\epsilon}\right): \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{0,1}, \quad (4.96)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\epsilon}}\right) \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{1,1} + \mathfrak{L}_1 w_{0,1}, \quad (4.97)$$

де $\mathfrak{M}_3 w_{0,0} = 0$. Якщо $w_{0,1}$ і $w_{1,1}$ не залежать від y , то вони автоматично будуть задовольняти рівняння (4.96) та (4.97), тому $w_{0,1} = w_{0,1}(x, z)$ і $w_{1,1} = w_{1,1}(x, z)$. Продовжуючи асимптотичний аналіз, для $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta}) \quad 0 = \mathfrak{L}_0 w_{2,1} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{0,1} + \mathfrak{M}_1 w_{0,0}, \quad (4.98)$$

оскільки $\mathfrak{L}_1 w_{1,1} = 0$ і $\mathfrak{M}_3 w_{1,0} = 0$ для (4.98) знайдемо розв'язок

$w_{2,1} \in L^2(\mathbb{R}, \pi)$, умова центрування (4.87) виконується. В (4.98) умові центрування відповідає

$$0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)w_{0,1} + \langle \mathfrak{M}_1 \rangle w_{0,0}. \quad (4.99)$$

де $w_{0,0}(t, x, z)$ залежить від z тільки через $\bar{\sigma}$ і $\overline{f\Omega}(z)$. Таким чином, в (4.99)

$\langle \mathfrak{M}_1 \rangle$ можна записати: $\langle \mathfrak{M}_1 \rangle = -\mathcal{B}\partial_z$,

$$\mathcal{B} = -v_1 a(x) \partial_x - v_0, \quad v_1 := g \rho_{xz} \langle f \rangle, \quad v_0 = g \langle \Gamma \rangle, \quad (4.100)$$

$$\partial_z = \bar{\sigma}' \partial_{\bar{\sigma}} + \overline{f\Omega}' \partial_{\overline{f\Omega}}, \quad \bar{\sigma}' := \partial_z \overline{f\Omega}. \quad (4.101)$$

$$\mathcal{O}(1): \quad (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle)u_{0,0} = 0 \quad w_{0,0}(0, x, z) = H(x), \quad (4.102)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}): \quad (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{1,0} = \mathcal{A} w_{0,0}, \quad w_{1,0}(0, x, z) = 0, \quad (4.103)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\delta}): \quad (-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{0,1} = \mathcal{B} \partial_z w_{0,0}, \quad w_{0,1}(0, x, z) = 0. \quad (4.104)$$

Оператори $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ та ∂_z визначені в (4.90), (4.94), (4.100) та (4.101) відповідно, та введені крайові умови при $t = 0$.

Розв'яжемо рівняння (4.102) – (4.104) з точки зору власних функцій $\{\psi_n\}$, власних значень $\{\lambda_n\}$ оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$. Зауважимо, що $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, поданий у (4.90), має вигляд інфінітезимального генератора одномірної дифузії (4.67) з волатильністю $\bar{\sigma}a(x)$, відхиленням $(b(x) - \overline{f\Omega}a(x))$ і кілінг з рівнем $k(x)$, $dom(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle)$ включає крайові умови, які накладені на кінцях e_1 та e_2 . Припустимо що $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ має чисто дискретний спектр. Зафіксуємо Гільбертів простір $\mathcal{H} = \mathfrak{L}^2(I, m)$, де m – щільність швидкості, яка відповідає $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$. Оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ самоспряжений в $\mathcal{H}$ і його область визначення є щільною підмножиною в $\mathcal{H}$. Таким чином, власні функції $\{\psi_n\}$ оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ формують ортогональну базу в $\mathcal{H}$. Позначимо [213]:

$$dom(\mathcal{A}) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{A}\psi \in \mathcal{H}\}, \quad dom(\mathcal{B}) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{B}\psi \in \mathcal{H}\},$$

$$dom(\partial_z) := \{\psi \in \mathcal{H}, \partial_z \psi \in \mathcal{H}\}.$$

Сформулюємо та доведемо наступні теореми [20, 26, 123]

Теорема 4.5: Нехай рівняння власного значення:

$$-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in dom(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle) \quad (4.105),$$

і припустимо, що $H \in \mathcal{H}$. Тоді розв'язок $w_{0,0}$ можна подати у вигляді:

$$w_{0,0} = \sum_n c_n \psi_n T_n, \quad c_n = (\psi_n, H), \quad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

Теорема 4.6: Нехай c_n , ψ_n , T_n є такими, як описано в теоремі 4.1 і визначимо

$$\mathcal{A}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{A}\psi_n), \quad U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Тоді розв'язок $w_{1,0}$ рівняння (4.104) має вигляд:

$$w_{1,0} = \sum_n \sum_{k \neq n} c_n A_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{n,n} \psi_n t T_n \quad (4.106)$$

Теорема 4.7: Нехай c_n , ψ_n і T_n є такими, як описано в теоремі 4.5, нехай $U_{k,n}$ є таким, як в Теоремі 4.6, визначимо

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{k,n} &:= (\psi_k, \mathcal{B} \partial_z \psi_n), \quad \mathcal{B}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B} \psi_n), \quad V_{k,n} \\ &:= \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{t T_n}{\lambda_k - \lambda_n}. \end{aligned}$$

Тоді розв'язок $w_{0,1}$ рівняння (4.103) має вигляд:

$$\begin{aligned} w_{0,1} &= \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \tilde{B}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \tilde{B}_{n,n} \psi_n t T_n \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{n,n} \psi_n t T_n + \\ &\sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{B}_{k,n} \psi_k (\partial_z \lambda_n) V_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{n,n} \psi_n (\partial_z \lambda_n) \frac{1}{2} t^2 T_n. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Отримані наближення для ціни похідного активу мають вигляд

$$w^{\epsilon, \delta} \approx w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1}$$

Однак, дана похідна покладена на формальні сингулярні і регулярні аргументи збурень. Для більш точного результату, потрібно вимагати щоб функція виплати $H(x)$ і всі її похідні були гладкими і обмеженими. Тоді уточнення виглядає наступним чином:

Теорема 4.8: Для фіксованих (t, x, y, z) існує стала C така, що для будь-якого $\epsilon \leq 1$, $\delta \leq 1$ маємо:

$$|w^{\epsilon, \delta} - (w_{0,0} + \sqrt{\epsilon}w_{1,0} + \sqrt{\delta}w_{0,1})| \leq C(\epsilon + \delta).$$

Нехай X цінний папір, по якому не виплачуються дивіденди. В цьому випадку X – модель ГБР з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\mathbb{P}$ динаміки в X задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(Y_t, Z_t)X_t d\tilde{W}_t^x, \quad h(X_t) = 0,$$

де r – без ризикова відсоткова ставка, а Y , і Z є швидкими і повільними чинниками нестабільності, які описані в (4.71). Відзначимо, що за зниженою ціною активу, $e^{-rt}X_t$ є мартингалом з мірою $\mathbb{P}$. Обчислимо наближену ціну опціону подвійного бар'єру визначеного на X , спочатку, використаємо рівняння (4.68) і (4.90), щоб записати оператор $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю $m(x)$

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 + rx \partial_x - r \quad m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} \exp\left(\frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right) \quad (4.108).$$

Для подвійного бар'єру опціону з бар'єрами L і R , опціон виплат:

$$H(X_t) \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = (X_t - K)^+ \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}, \quad I = (L, R), \quad 0 < L < K < R,$$

Щоб обчислити значення цього параметра, потрібно спочатку знайти власні значення рівняння (4.108) з $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ і з крайовими умовами

$$\lim_{x \searrow L} \psi_n(x) = 0, \quad \lim_{x \nearrow R} \psi_n(x) = 0.$$

$$\psi_n(x) = \frac{\bar{\sigma} \sqrt{x}}{\sqrt{\ln(\frac{R}{L})}} \exp\left(\frac{-r}{\bar{\sigma}^2} \ln x\right) \sin\left(\frac{n\pi \ln(\frac{x}{L})}{\ln(\frac{R}{L})}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi \bar{\sigma}}{\ln(\frac{R}{L})} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{2} + r \right), \quad v = \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2}.$$

розрахуємо коефіцієнти $\mathcal{A}_{k,n}$, $\mathcal{B}_{k,n}$ і $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$. Для $k \neq n$ знайдемо

$$\mathcal{A}_{k,n} = -\vartheta_3$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(-1 + (-1)^{k+n})kn(4n^2\pi^2\bar{\sigma}^4 + (-12r^2 + 4r\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}^4)\ln^2(\frac{R}{L}))}{2(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^4\ln^3(\frac{R}{L})} \right) \\
& - \vartheta_2 \left(\frac{(-1 + (-1)^{k+n})knr}{(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^2 \ln(\frac{R}{L})} \right), \\
& \mathcal{B}_{k,n} = \vartheta_1 \frac{2(-1 + (-1)^{k+n})kn}{(k - n)(k + n) \ln(\frac{R}{L})}, \\
& \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} = -\vartheta_1 \bar{\sigma}'(\gamma_{k,n}) - \vartheta_0 \bar{\sigma}' \left(\frac{8(-1 + (-1)^{k+n})knr \ln(\frac{R}{L})}{(k^2 - n^2)^2 \pi^2 \bar{\sigma}^3} \right), \\
& \gamma_{k,n} := \frac{4nkr(\ln(L) - (-1)^{k+n} \ln(R))}{(k^2 - n^2)\bar{\sigma}^3 \ln(\frac{R}{L})} \\
& - \frac{2(-1 + (-1)^{k+n})kn \left((k - n)(k + n)\pi^2 \bar{\sigma}^4 - 2r(-2r + \bar{\sigma}^2)\ln^2(\frac{R}{L}) \right)}{(k^2 - n^2)^2 \pi^2 \bar{\sigma}^5 \ln(\frac{R}{L})},
\end{aligned}$$

і для $k = n$ знайдемо

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{n,n} = -\vartheta_3 \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^3} \left(\frac{3n^2\pi^2\nu}{\ln^2(\frac{R}{L})} - \nu^3 \right) - \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left(\nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2(\frac{R}{L})} \right) \right. \\
& \quad \left. - \vartheta_2 \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left(\nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2(\frac{R}{L})} \right) + \frac{\nu}{\bar{\sigma}} \right) \right) \\
& \mathcal{B}_{n,n} = \vartheta_1 \left(\frac{2r - \bar{\sigma}^2}{2\bar{\sigma}^2} \right) - \vartheta_0, \\
& \tilde{\mathcal{B}}_{n,n} = -\vartheta_1 \bar{\sigma}' \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{rv(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^4 \ln(\frac{R}{L})} \right)
\end{aligned}$$

$$-\vartheta_0 \bar{\sigma}' \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r(\ln^2(R) - \ln^2(L))}{\bar{\sigma}^3 \ln\left(\frac{R}{L}\right)} \right).$$

$$c_n = (\psi_T(\cdot), (\cdot - K)^+) = \frac{L^{\frac{\nu}{\bar{\sigma}}}}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)} (L\Phi_n(\nu + \bar{\sigma}) - K\Phi_n(\nu)),$$

$$\Phi_n(z) := \frac{2}{\omega_n^2 + z^2} (\exp(\mathfrak{K}z) (\omega_n \cos(\omega_n \mathfrak{K}) - z \sin(\omega_n \mathfrak{K}) - \exp(\mathfrak{U}z) (-1)^n \omega_n),$$

$$\omega_n := \frac{n\pi}{\mathfrak{U}}, \quad \mathfrak{K} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{K}{L}\right), \quad \mathfrak{U} := \frac{1}{\bar{\sigma}} \ln\left(\frac{R}{L}\right).$$

Наближені ціни опціонів обчислимо за допомогою теорем 4.5 – 4.7.

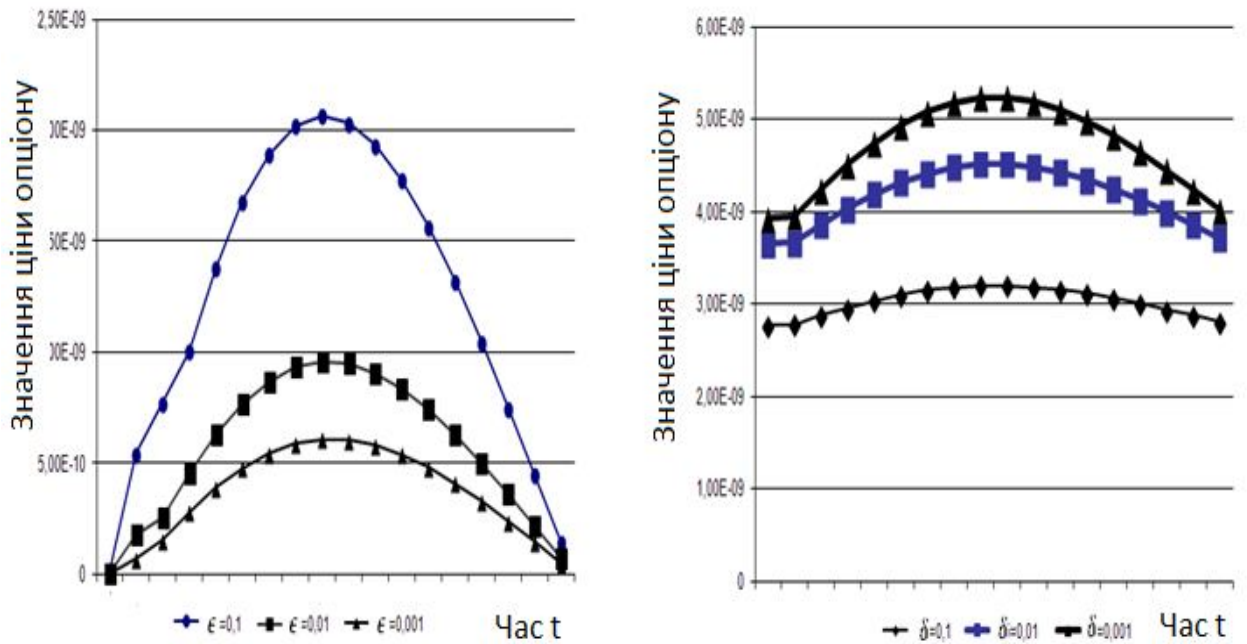


Рис. 4.1. Ціна опціону з подвійним бар'єром, при значеннях

$L = 300, K = 350, R = 400, y = 0, z = 2, \beta = 1, \sigma = 0,34,$

$r = 0,05, g = 2, \rho_{xy} = 0,5, \rho_{xz} = 0,18, \rho_{yz} = 0,18.$

На лівій частині рисунку 4.1 зображена наближена ціна

$w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0}$ з подвійним бар'єром опціону для конкретної моделі, яка має тільки швидко змінні чинники волатильності у припущенні, що відома динаміка Y і функції волатильності [18]

$$f := \sigma \exp(Y_t + Z_t) \exp\left(\frac{\beta^2}{2} - z\right);$$

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon} Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{erf}(Y_t)\right) dt + \beta d\tilde{W}_t^y, \quad f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)}, \quad (4.109)$$

$$\operatorname{erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Права частина рисунку 4.1 репрезентує наближену ціну

$w_{0,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1}$ з подвійним бар'єром опціону на конкретну модель, яка містить чинники волатильності, що змінюються повільно, за умови, що динаміка Z і функції волатильності задана

$$dZ_t = \left(-\delta Z_t - \sqrt{\delta} g \operatorname{erf}(Z_t)\right) dt + \sqrt{\delta} g d\tilde{W}_t^z, \quad f(Z_t) = \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp(z)}. \quad (4.110)$$

Розвинуто загальний метод отримання наближеної ціни для широкого класу похідних активів. Виграш похідних може бути шляхо-залежним і процесом, що лежить в основі деривативу може проявляти стрибок, також комбіновані нелокальні стохастичні волатильності. Інтенсивність стрибка може бути залежною. Нелокальна компонента волатильності може бути багатовимірною. Її спонукають один швидко мінливий і один повільно чинники. Однією з ключових переваг нашої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії, теорії сингулярних збурень і регулярної теорії збурень, зводимо обчислення ціни активу до розв'язання одного рівняння для знаходження власних значень [20-24].

Продовжуючи тематику роботи [121], поширюючи її на теорію відсоткових ставок, які описуються процесом Орнштейна–Уленбека, застосовуючи методику [18, 20, 26] розглянемо приклад. Нехай X репрезентують короткі відсоткові ставки. Однією з найвідоміших моделей коротких курсів є модель Васічека [271], в якій X моделюється як процес Орнштейна–Уленбека з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\mathbb{P}$ динаміки X задані

$$dX_t = (\kappa(\theta - X_t) - f(Y_t, Z_t)\Omega(Y_t, Z_t))dt + f(Y_t, Z_t) + d\tilde{W}_t^x,$$

$$r(X_t) = X_t, h(X_t) = 0,$$

де Y та Z є швидко і повільно змінними чинниками волатильності, обчислимо наближену ціну облігації з нульовим купоном. запишемо оператор $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$ і пов'язану з ним щільність $m(x)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \partial_{xx}^2 + \kappa(\bar{\theta} - x) \partial_x - x, \\ m(x) &= \frac{2}{\bar{\sigma}^2} \exp\left(\frac{-k}{\bar{\sigma}^2} (\bar{\theta} - x)^2\right), \bar{\theta} = \theta - \frac{1}{\kappa} f \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Повна виплата за облігацію з нульовим купоном має вигляд:

$$H(X_t) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = 1. \quad (4.112)$$

Для того, щоб знайти ціну облігації з виплатами (4.112), знайдемо власне значення (4.111) на відріжку $I = (-\infty, \infty)$ з $\langle \mathcal{L}_2 \rangle$,

$$\psi_n = \mathcal{N}_n \exp\left(-A\xi - \frac{1}{2}A^2\right) H_n(\xi + A), \quad \mathcal{N}_n = \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2}$$

$$A = \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}}, \quad \xi = \frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}(x - \bar{\theta}), \lambda_n = \bar{\theta} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\kappa^2} + \kappa n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{H\}_n$ є Ермітовим поліномом [171]. запишемо вирази для операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = -\vartheta_3 \partial_{xxx}^3 - (\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2) \partial_{xx}^2 - \mathfrak{U}_1 \partial_x, \quad \mathcal{B} = \vartheta_1 \partial_x - \vartheta_0,$$

знайдемо $\mathcal{A}_{k,n}, \mathcal{B}_{k,n}$, і $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$, на основі рекурентних співвідношень:

$$\partial_x H_n = 2n H_{n-1}, \quad 2x H_n = H_{n+1} + \partial_x H_n, \quad H_n = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^{2n}} e^{-x^2},$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k,n} = & -\vartheta_3 \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{3}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{3-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\ & -(\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2) \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{2}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{2-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\ & -\mathfrak{U}_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}, \\ \mathcal{B}_{k,n} = & -\vartheta_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\} - \vartheta_0 \delta_{k,n}, \\ \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} = & -\vartheta_1 \bar{\sigma}' \left\{ \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \delta_{k,n} \right. \\ & + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \\ & + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \\ & \left. + \left[\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-3)! \mathcal{N}_{n-3}} \delta_{k,n-3} \right\} \\ & -\vartheta_0 \bar{\sigma}' \left\{ \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right. \\ & \left. + \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \end{aligned}$$

$$-\vartheta_1 \overline{f\Omega}' \left\{ \left(\frac{1}{\kappa^3} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma} \kappa^2} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\}$$

$$-\vartheta_0 \overline{f\Omega}' \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa^2} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2}{\bar{\sigma} \sqrt{\kappa}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}.$$

$$c_n = (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Орієнтовна ціна облігації розраховується на основі теорем 4.4.–4.7.

Для облігації з нульовим купоном дохід $R^{\epsilon, \delta}$ визначається з формули:

$$w^{\epsilon, \delta} = \exp(-R^{\epsilon, \delta} t).$$

Наступне наближення для облігації з нульовим купоном, отримаємо розкладаючи, як ціну облігації, $w^{\epsilon, \delta}$ так і дохід $R^{\epsilon, \delta}$ за степенями $\sqrt{\epsilon}$ і $\sqrt{\delta}$:

$$\begin{aligned} w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1} + \dots &= e^{-(R_{0,0} + \sqrt{\epsilon} R_{1,0} + \sqrt{\delta} R_{0,1})t} \\ &= e^{-R_{0,0}t} + \sqrt{\epsilon} (-R_{1,0}t) e^{-R_{0,0}t} + \sqrt{\delta} (-R_{0,1}t) e^{-R_{0,0}t} + \dots \end{aligned}$$

$$R^{\epsilon, \delta} \approx R_{0,0} + \sqrt{\epsilon} R_{1,0} + \sqrt{\delta} R_{0,1},$$

де

$$R_{0,0} = -\frac{1}{t} \ln(w_{0,0}), \quad R_{1,0} = \frac{-w_{1,0}}{t w_{0,0}}, \quad R_{0,1} = \frac{-w_{0,1}}{t w_{0,0}}.$$

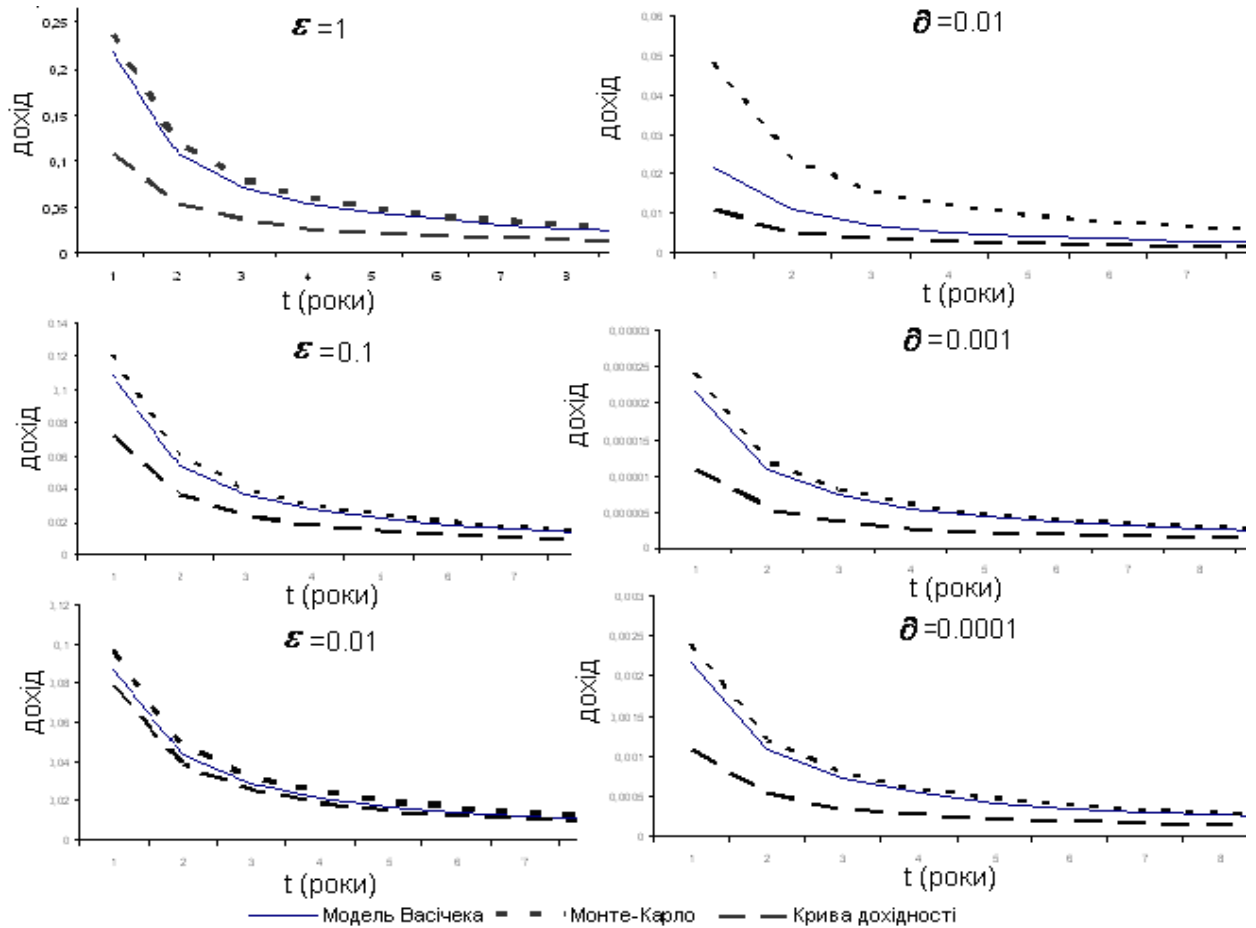


Рис.4.2. Дохід облігації з нульовим купоном $k = 0.1, g = p = 1$,
 $\theta = \Omega = 0.01$, $\rho_{xy} = -0.65$, $\rho_{xz} = 0.47$, $\rho_{yz} = -0.47$.

Дохід облігації з нульовим купоном, зображений, як функція від часу в залежності від терміну погашення t . Зліва на рисунку зображено модель Васічека з швидкозмінним чинником волатильності Y та побудовано наближений дохід $R_{0,0} + \sqrt{\epsilon}R_{1,0}$ для цієї моделі, вона має тільки швидко змінні чинники волатильності, а динаміка Y і f та функція волатильності задаються [19, 24, 33]:

$$f := \sigma^2 \exp\left(Y_t + \frac{\beta^2}{2} + Z_t - \frac{g^2}{2}\right), f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)}, \text{erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon}Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\frac{\beta}{\sqrt{\epsilon}}\text{erf}(Y_t)\right)dt + \beta\sqrt{\epsilon}d\tilde{W}_t^y.$$

З правого боку рисунка 4.2 побудовано модель Васічека з повільно змінним чинником волатильності Z , та наближений дохід $R_{0,0} + \sqrt{\delta}R_{0,1}$ облігації з нульовим купоном для цієї моделі, яка має тільки повільно мінливий чинник волатильності, динаміка Z і f задаються [26]:

$$dZ_t = \left(-\delta Z_t - \sqrt{\delta}g \operatorname{erf}(Z_t)\right)dt + \sqrt{\delta}gd\tilde{W}_t^Z, \quad f(Z_t) = \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp(\frac{g^2}{2})}.$$

Як і слід було очікувати, оскільки ϵ і δ прямують до нуля, наближення прямує до повної прибутковості.

Продовжуючи тематику робіт [171, 234], поширюючи її на теорію моделі CEV [227], розглянемо приклад.

Нехай потрібно виплатити дивіденди по активу $S_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}X_t$, $S > 0$. то простором станів X буде $e_1, e_2 = (0, \infty)$. Розглянемо багатовимірний дифузійний процес на кілінгу (скачку дефолту) сталої варіативної моделі. Зокрема, $\mathbb{P}$ динаміка X дефолту задається як

$$dX_t = (\mu + cX_t^{2\eta})X_t dt + (f(Y_t, Z_t)X_t^\eta)X_t d\tilde{W}_t^X, h(X_t) = \mu + cX_t^{2\eta}.$$

Для спрощення обчислень вважатимемо, що безризикова відсоткова ставка $r = 0$, $\mu > 0$, $c > 0$, Y і Z є швидко і повільно змінні чинники волатильності, які визначаються системою стохастичних рівнянь [197]

Обчислимо наближену ціну європейського опціону для активу S . Ціну європейського опціону можна знайти за формулою (4.105).

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 + (\mu + cx^{2\eta})x \partial_x - (\mu + cx^{2\eta}), \quad (4.113)$$

$\mathfrak{L}_2$ – нескінченно малий генератор

Розв'язок (4.105) має вигляд [234]

$$\psi_n = A^{\frac{v}{2}} \sqrt{\frac{(n-1)! \mu}{\Gamma(v+n)}} x \exp(-Ax^{-2\eta}) L_{n-1}^{(v)}(Ax^{-2\eta}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A = \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2 |\eta|}, \quad \lambda_n = 2\mu |\eta| (n + v), \quad v = \frac{1 + 2(\frac{2}{\bar{\sigma}^2})}{2|\eta|},$$

де

$$L_n^{(v)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+v}{n-i} \frac{x^i}{i!}$$

є узагальненими поліномами Лагерра [151, 261].

При асимптотичному дослідженні розглядаємо задачу

$$(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{0,0} = 0, \quad w_{0,0}(0, x, z) = H(x),$$

$$(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{1,0} = \mathcal{A} w_{0,0}, \quad w_{1,0}(0, x, z) = 0,$$

$$(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle) w_{0,1} = \mathcal{B} \partial_z w_{0,0}, \quad w_{0,1}(0, x, z) = 0.$$

де $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ мають вигляд

$$\mathcal{A} = -v_3 x^{\eta+1} \partial_x x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2 - v_2 x^{2\eta+2} \partial_{xx}^2, \quad \mathcal{B} = -v_1 x^{\eta+1} \partial_x - v_0.$$

$$\mathcal{A} w_{0,0} = \sum_n c_n (\mathcal{A} \psi_n) T_n = \sum_n \sum_k c_n \mathcal{A}_{k,n} \psi_k T_n$$

$$\mathcal{B} \partial_z u_{0,0} = \sum_n c_n (\mathcal{B} \partial_z \psi_n) T_n + \sum_n (\partial_z c_n) (\mathcal{B} \psi_n) T_n + \sum_n c_n (\mathcal{B} \psi_n) (\partial_z T_n)$$

$$= \sum_n \sum_k c_n \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} \psi_k T_n + \sum_n \sum_k (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{k,n} \psi_k T_n -$$

$$\sum_n \sum_k c_n \mathcal{B}_{k,n} \psi_k (\partial_z \lambda_n) t T_n.$$

Аналітичні вирази для $\mathcal{A}_{k,n}$, $\mathcal{B}_{k,n}$ і $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$ можна отримати, зробивши заміну змінних [247] $Ax^{-2\eta} \rightarrow y$, використовуючи

$$\partial_y L_n^v(y) = -L_{n-1}^{(v+1)}(y), \quad \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} L_n^{(\alpha)}(y) L_m^{(\alpha)}(y) dy = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \delta_{nm},$$

де δ_{nm} символ Кронекера. Формули для визначення $\mathcal{A}_{k,n}$, $\mathcal{B}_{k,n}$ і $\tilde{\mathcal{B}}_{k,n}$, мають вигляд [227].

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k,n} = & -\vartheta_3 \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{3}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{3-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\
& -(\vartheta_2 + \mathfrak{U}_2) \left\{ \sum_{m=0}^{3 \wedge n} \binom{2}{m} \left(\frac{-1}{\kappa} \right)^{2-m} \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right)^m \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-m)! \mathcal{N}_{n-m}} \delta_{k,n-m} \right\} \\
& -\mathfrak{U}_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}, \\
\mathcal{B}_{k,n} = & -\vartheta_1 \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\} - \vartheta_0 \delta_{k,n}, \\
\tilde{\mathcal{B}}_{k,n} = & -\vartheta_1 \bar{\sigma}' \left\{ \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \delta_{k,n} \right. \\
& + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \\
& + \left[\left(\frac{-1}{\kappa} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \\
& \left. + \left[\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \right] \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-3)! \mathcal{N}_{n-3}} \delta_{k,n-3} \right\} \\
& -\vartheta_0 \bar{\sigma}' \left\{ \left(\frac{1}{2\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3} - \frac{n}{\bar{\sigma}} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right. \\
& \left. + \left(\frac{-2}{\bar{\sigma}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
& -\vartheta_1 \overline{f\Omega}' \left\{ \left(\frac{1}{\kappa^3} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{-4}{\bar{\sigma}\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} + \left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-2)! \mathcal{N}_{n-2}} \delta_{k,n-2} \right\} \\
& -\vartheta_0 \overline{f\Omega}' \left\{ \left(\frac{-1}{\kappa^2} \right) \delta_{k,n} + \left(\frac{2}{\bar{\sigma}\sqrt{\kappa}} \right) \frac{n! \mathcal{N}_n}{(n-1)! \mathcal{N}_{n-1}} \delta_{k,n-1} \right\}. \\
c_n = & (\psi_n, 1) = \frac{2}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.
\end{aligned}$$

Знайдемо власні значення рівняння:

$$-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \psi_n \in \text{dom}(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle),$$

і припустимо, що $H \in \mathcal{H}$. Тоді розв'язок $w_{0,0}$ дається у вигляді:

$$u_{0,0} = \sum_n c_n \psi_n T_n, \quad c_n = (\psi_n, H), \quad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

Визначимо

$$\mathcal{A}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{A}\psi_n), \quad U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

тоді можемо знайти $w_{1,0}$:

$$w_{1,0} = \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{A}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{n,n} \psi_n t T_n.$$

визначимо

$$\tilde{\mathcal{B}}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B} \partial_z \psi_n), \quad \mathcal{B}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B} \psi_n),$$

$$V_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{t T_n}{\lambda_k - \lambda_n},$$

тепер $w_{0,1}$ набуде вигляду:

$$\begin{aligned} w_{0,1} &= \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \tilde{\mathcal{B}}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \tilde{\mathcal{B}}_{n,n} \psi_n t T_n + \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{k,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n (\partial_z c_n) \mathcal{B}_{n,n} \psi_n t T_n \\ &+ \sum_n \sum_{k \neq n} c_n \mathcal{B}_{k,n} \psi_k (\partial_z \lambda_n) V_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{n,n} \psi_n (\partial_z \lambda_n) \frac{1}{2} t^2 T_n. \end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що $w_{0,1}$ є лінійним в $(\nu_1 \bar{\sigma}', \nu_1 \overline{f \Omega'}, \nu_0 \bar{\sigma}', \nu_0 \overline{f \Omega'})$,

а для фіксованих (t, x, y, z) існує стала C така, що для будь-якого $\epsilon \leq 1$,

$\delta \leq 1$ маємо:

$$|w^{\epsilon, \delta} - (w_{0,0} + \sqrt{\epsilon} w_{1,0} + \sqrt{\delta} w_{0,1})| \leq C(\epsilon + \delta).$$

Виграш європейського опціону з ціною виконання $K > 0$ можна розкласти наступним чином [209]:

$$(K - S_t)^+ = (K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + K(1 - \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}). \quad (4.114)$$

Перший доданок в правій частині (4.114) є прибуток опціону поданого до дефолту у момент часу t . Другий член це прибуток опціону після дефолту, який відбувається у момент часу t . Таким чином, вартість опціону з ціною виконання K – позначається як $w^{\epsilon, \delta}(t, x; K)$ і може бути виражена у вигляді суми:

$$w^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = w_o^{\epsilon, \delta}(t, x; K) + w_D^{\epsilon, \delta}(t, x; K),$$

де

$$w_o^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y, z}[(K - X_t)^+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}],$$

$$w_D^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = K - K \tilde{\mathbb{E}}_{x, y, z}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] =$$

$$K - K \int_0^\infty \tilde{\mathbb{E}}_{x, y, z}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] dx'$$

$$= K - K \int_0^\infty u_1^{\epsilon, \delta}(t, x; x') dx',$$

$$w_1^{\epsilon, \delta}(t, x; x') = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y, z}[\delta_{x'}(X_t) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}], \quad 1 \notin L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$$

використавши, що [271] $1 = \int_0^\infty \delta_{x'}(X_t) dx'$, на множині $\{\tau > T\}$.

Так, як функції виграшу $H_0(x) = (K - x)^+$ і $H_1(x) = \delta_{x'}(x)$ належать $L^2(\mathbb{R}^+, \mathfrak{m})$, можемо обчислити:

$$c_{0,n} = (\psi_n(\cdot), (k - \cdot)^+), \quad c_{1,n} = (\psi_n, \delta_{x'}).$$

Вирази для $c_{0,n}$ та $c_{1,n}$ можна знайти з [121].

$$c_{0,n} = \frac{A^{\frac{v}{2}+1} K^{\frac{2c}{\bar{\sigma}^2}+1-2\eta} \sqrt{\Gamma(v+n)}}{\Gamma(v+n) \sqrt{\mu(n-1)!}} \times$$

$$\left[\frac{|\eta|}{\frac{c}{\bar{\sigma}^2} + |\eta|} {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 - n & \frac{\frac{c}{\bar{\sigma}^2}}{|\eta|} + 1 \\ v + 1 & \frac{c}{\bar{\sigma}^2} + 2 \end{matrix} ; AK^{-2\eta} \right) - \frac{\Gamma(v+1)(n-1)!}{\Gamma(v+n+1)} L_{n-1}^{(v+1)}(AK^{-2\eta}) \right],$$

$$c_{1,n} = \psi_n(x')m(x'),$$

де

$${}_2F_2(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n,$$

узагальнена гіпергеометрична функція, а

$$L_{n-1}^{(v+1)}(AK^{-2\eta}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+v}{n-i} \frac{(AK^{-2\eta})^i}{i!},$$

поліноми Лагерра.

Орієнтовну вартість європейського опціону тепер можна обчислити за допомогою теорем 4.5-4.7 [121]. Волатильність опціону $I^{\epsilon, \delta}$ з ціною $w^{\epsilon, \delta}(t, x; K)$ визначається з використанням [205]

$$w^{\epsilon, \delta}(t, x; K) = w^{BS}(t, x, I^{\epsilon, \delta}; K),$$

де $w^{BS}(t, x, I^{\epsilon, \delta}; K)$ ціна Блека-Шоулза з волатильністю $I^{\epsilon, \delta}$.

Результати обчислень цін європейських опціонів наведено на рис.

4.3.

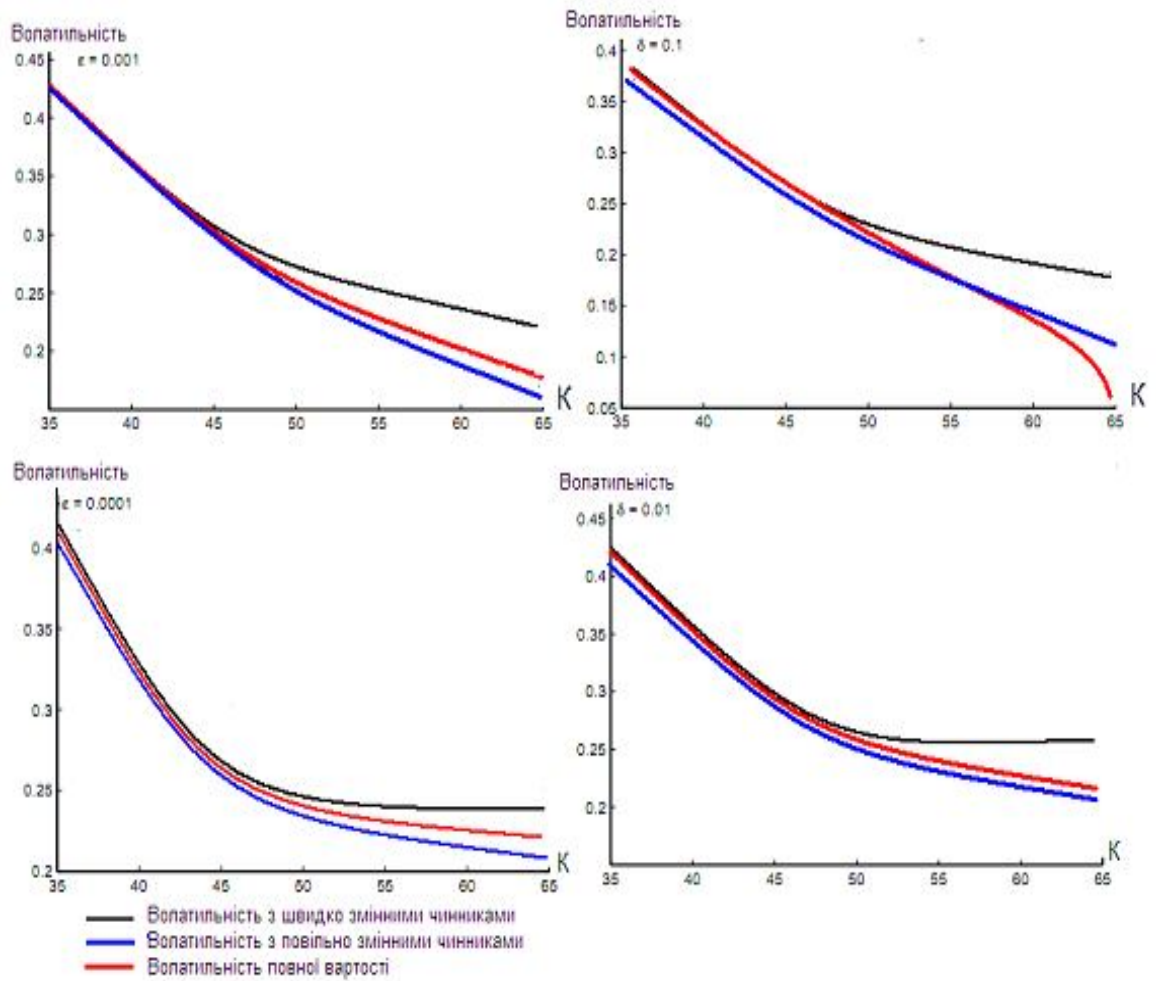


Рис.4.3. Динаміка волатильності цін європейських опціонів

На лівій стороні рисунка 4.3 побудовано волатильність яка залежить від ціни $w_{0,0} + \sqrt{\epsilon}w_{1,0}$, опціону для моделі, яка має тільки швидко змінні чинники волатильності. Динаміка Y і функція волатильності f задаються формулою [32].

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\epsilon}Y_t - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta \text{Erf}(Y_t) \right) dt + \beta d\tilde{W}_t^y, \quad f(Y_t) = \frac{\sigma \exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)},$$

$$\text{Erf}(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Для порівняння, побудовано волатильність, повної вартості w^ϵ і На правій стороні рисунка 4.3 наведено волатильність викликану наближеною

ціною $w_{0,0} + \sqrt{\delta}w_{1,0}$, опціону для моделі, яка має тільки повільно мінливий чинник волатильності. Динаміка Z і функція волатильності f задаються

$$dZ_t = (-\delta Z_t - \sqrt{\delta}g\text{Erf}(Z_t))dt + g d\tilde{W}_t^Z, \quad f(Z_t) = \frac{\sigma \exp(Z_t)}{\exp(z)}.$$

Побудовано волатильність, повної вартості w^δ і $w_{0,0}$. Як і слід було очікувати, при ϵ і δ які прямують до нуля волатильність прямує до ціни волатильності імплікованою повною ціною [35].

Однією з основних переваг розглянутої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, обчислення ціни активу зводиться до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій та розв'язання рівнянь Пуассона [37].

Застосовано методику знаходження ціни для похідних активів, які задовольняють модель CEV з волатильністю, що степеневно зростає по основній змінній процесу і залежить від повільно та швидко змінних чинників. Сильними сторонами даної методики ціноутворення є комбінування методів спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, за допомогою яких обчислюється ціна активу зведенням до розв'язання рівняння методом знаходження власних значень, власних функцій та розв'язання відповідного рівняння Пуассона, зокрема знаходження резольвенти у відповідному Гільбертовому просторі [121].

Під час розробки та реалізації моделей багатофакторної волатильності деривативів методами спектрального аналізу зроблено наступні висновки.

1. Розроблено алгоритм знаходження наближеної ціни двобар'єрних опціонів та знайдено явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розкладу за власними функціями та власними

значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін деривативів, за шкалами систем повільно і швидко діючих чинників від яких залежить волатильність похідних фінансових інструментів.

2. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни деривативів з стохастичною волатильністю залежною від l -швидко змінних та n -повільно змінних чинників, $l \geq 1, n \geq 1, l \in N, n \in N$ і локальної змінної.

3. Отримано загальний метод знаходження наближеної ціни для широкого класу похідних фінансових інструментів. Встановлено, що виплати за деривативами можуть бути шляхозалежними, а процес, що лежить в їх основі може проявляти стрибок, інтенсивність якого залежить від багатовимірної волатильності. Ціна опціонів залежить від стохастичної багатовимірної волатильності, що описується шляхозалежним процесом. Знаходження ціни деривативів зводиться до розв'язання задачі знаходження власних значень і власних функцій конкретного рівняння, що відповідає даній моделі.

4. Встановлено орієнтовну ціну облігацій та їхню дохідність методами спектральної теорії та хвильової теорії збурень. Застосовано спектральну теорію та теорію сингулярних і регулярних збурень до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність.

5. Розширено методику знаходження наближеної ціни для широкого класу деривативів. Використовуючи спектральну теорію

самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю CEV з стохастичною волатильністю, яка залежить від l -швидко змінних та n -повільно змінних чинників.

6. Розроблено методи обчислення наближеної ціни опціонів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії у випадку впливу швидко та повільно діючих чинників. Комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну похідних фінансових інструментів, як розклад за власними функціями, працюючи з інфінітезимальними генераторами багатовимірної дифузії.

Основні результати наукового дослідження, що отримані в даному розділі опубліковані автором у наукових працях [18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 26; 31; 32; 33; 35; 120; 121; 123].

РОЗДІЛ 5

МОДЕЛІ ЦІНОУТВОРЕННЯ ДЕРИВАТИВІВ ТА ВОЛАТИЛЬНОСТІ ВИРОДЖЕНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

5.1. Методологія ціноутворення деривативів з врахуванням вироджених дифузійних процесів

Моделювання та прогнозування динаміки цін фінансових інструментів є важливим елементом інвестиційної діяльності, оскільки їм притаманний високий рівень фінансового важелю, а виконання зобов'язань за ними здійснюється в перспективі. Ціни на деривативи мають тенденцію до змін, а передбачити їх поведінку стає все складніше. За допомогою похідних фінансових інструментів здійснюються різноманітні операції з фінансовими інструментами, придатними для купівлі-продажу [85, 91, 103, 126]. Ефективність прийняття інвестиційних рішень під час діяльності на фондовому ринку України є головним чинником зацікавленості в ньому інвесторів. Для успішних фінансових результатів діяльності учасникам ринку цінних паперів необхідно добре орієнтуватися в процесах ціноутворення деривативів. Операції з похідними цінними паперами займають важливе місце у фінансовій діяльності фондового ринку бо кожному учаснику потрібно хеджувати ризики, щоб отримати додатковий прибуток на основі спекуляцій на фондовому ринку [132, 161 174]. Тому деривативи є одним із основних інструментів ринку цінних паперів. Важливим завданням є дослідження стану і динаміки вітчизняного фондового ринку в тісному взаємозв'язку з фондовими ринками інших країн, аналіз волатильності фінансових

інструментів з метою підвищення ефективності інвестиційних операцій. В даний час розроблено багато підходів до обчислення локальної та стохастичної волатильності, які описують спільну динаміку ціни базового активу, за допомогою моделей CEV [197, 213], JDCEV [234], Heston [189], але застосування цих моделей вимагає використання спеціальних функцій та чисельного інтегрування складних функцій. Це означає що можуть бути значні похибки в обчисленнях, але при розгляді часових залежностей значна частина моделей стає нестійкою. Для безпосереднього обчислення потрібні інші методи знаходження ціни деривативів [244, 245, 252]. Використання розкладу за допомогою рядів залежить від структури моделі, зокрема від властивостей функції які використовуються в моделі та від можливостей моделі утримувати стійкість при зміні часу.

У нашій роботі розглянуто моделі без дефолту процесу дифузії з інерцією, коефіцієнти яких залежать від змінних (t, x, y) і для знаходження цін деривативів використовуємо розклад у ряди Тейлора для вироджених дифузійних процесів. Зокрема в працях [223, 225, 226, 230, 244] кореляційні матриці є невивроджені, а в нашій роботі є виродженими, тому застосування цієї ідеї вимагає нових підходів викликаних труднощами виродження.

Випадкові процеси, які описуються рівнянням дифузії з інерцією широко використовуються в теорії масового обслуговування, зокрема в теорії черг. Найчастіше такі процеси відбуваються на фондових ринках при ціноутворенні європейських та азійських опціонів. Теорія ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності є необхідними для гнучкості в прийнятті управлінських стратегічних рішень менеджерами. Обґрунтованість стратегічних рішень дозволяє менеджерам здійснювати покрокове прийняття рішень для

отримання додаткових інвестицій та збереження стратегічних позицій компанії на фондовому ринку. Як правило, високий рівень волатильності дає менеджеру більше можливостей для зміни своїх рішень у майбутньому. Волатильність має важливе значення для трейдерів при ціноутворенні декількох різних серій опціонів з різними цінами виконання і термінами погашення. Оскільки в моделі Блека-Шоулса [174, 182] волатильність є сталою то в цих випадках можуть виникнути спекулятивні зміни в ціні які неможливо перевірити без наявності певних знань. Це один із прикладів того, як волатильність ціноутворення опціонів, пов'язана з принципами моделювання та управління ризиками на фінансовому ринку. Тому потрібно використовувати моделі із змінною волатильністю.

Для зручності обчислень, припускаємо що ринок є без арбітражу, нульових відсоткових ставок і без дивідендів. Усі результати роботи можна легко поширити на детерміністичні відсоткові ставки. Використовуємо еквівалентну мартингальну міру Q , обрану ринком на повному відфільтрованному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t > 0\}, Q)$. Фільтрація $\{\mathcal{F}_t, t > 0\}$ - це історія (ретроспективні значення) ринку. Всі випадкові процеси, визначені в цьому просторі ймовірності. Розглянемо базовий актив S , чинники динаміки якого задаються

$$\begin{aligned} S_t &= \mathbb{I}_{\{\zeta > t\}} e^{X_t}, \\ dX_t &= \mu(t, X_t, Y_t)dt + \sigma(t, X_t, Y_t)dW_t, X_0 = x \in R, \\ dY_t &= \alpha(t, X_t, Y_t)dt, Y_0 = y \in R, \end{aligned} \quad (5.1)$$

де ζ це час зупинки, який є можливою по замовчуванні подією

$$\zeta = \inf \left\{ t \geq 0: \int_0^t \gamma(s, X_s, Y_s)ds \geq \varepsilon \right\},$$

з експоненціальним розподілом ε , що не залежить від X . Оскільки ціна активу S є мартингалом, функція дрейфу μ задається [209]

$$\mu(t, X_t, Y_t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t, Y_t) + \gamma(t, X_t, Y_t)$$

Рівняння (5.1) включає практично всі моделі локальної волатильності, всі однофакторні моделі стохастичної волатильності та всі однофакторні локально-стохастичні моделі волатильності. Крім того, результати цієї роботи можна розширити на моделі з n не локальними чинниками волатильності. Хоча для простоти обмежуємо наш аналіз єдиним не локальним чинником з виродженням.

Позначимо через V без арбітражну ціну європейського похідного активу, яка закінчується в момент T з виграшем $H(S_T)$. [147, 224], що

$$V_t = K + \mathbb{I}_{\{\zeta > t\}} \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_t^T \gamma(s, X_s, Y_s) ds} (h(X_T) - K) | X_t, Y_t \right\}, t < T.$$

$$K = H(0), h(x) = H(e^x).$$

Щоб знайти ціну європейського опціону, потрібно обчислити наступні функції

$$w(t, x, y) = \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_t^T \gamma(s, X_s, Y_s) ds} (h(X_T) - K) | X_t = x, Y_t = y \right\} \quad (5.2)$$

Функція w , визначена (5.2), задовольняє рівнянню Колмогорова дифузії з інерцією

$$(\partial_t - x\partial_y + \mathcal{A})w = 0, w(T, x, y) = h(x, y), \quad (5.3)$$

де оператор $\mathcal{A}$ явно виражається

$$\mathcal{A} = a(t, x, y)(\partial_x^2 - \partial_x) + \gamma(t, x, y)(\partial_x - 1) \quad (5.4)$$

де функції $a(t, x, y)$ визначаються як

$$a(t, x, y) := \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, y).$$

Для детермінованих відсоткових ставок $r(t)$ потрібно обчислити математичне сподівання такого вигляду

$$\tilde{w}(t, \tilde{x}, y) = \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_t^T \gamma(s, \tilde{X}_s, Y_s) ds} (h(\tilde{X}_T) - K) | \tilde{X}_t = \tilde{x}, Y_t = y \right\},$$

$$d\tilde{X}_t = dX_t + r(t)dt.$$

У цьому випадку проста заміна змінних

$$w(t, x(t, \tilde{x}), y) := e^{\int_t^T r(s)ds} \tilde{w}(t, \tilde{x}, y), \quad x(t, \tilde{x}) := \tilde{x} + \int_t^T r(s)ds, \quad (5.5)$$

показує, що w , як визначено в (5.5), задовольняє (5.3).

Для побудови наближеного розв'язку задачі Коші (5.3) розвиваємо ідеї [186, 187, 263], які засновані на розширенні застосування інтегро-диференціальних операторів ціноутворення типу Леві. Нашою метою є впровадження єдиного підходу до ціноутворення та імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора. Зокрема, для будь-якої аналітичної функції $f = f(t, x, y)$, ми можемо розширювати фіксовану точку $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ наступним чином

$$f(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^n f_{n-h,h}(t) (x - \bar{x})^{n-h} (y - \bar{y})^h,$$

$$f_{n-h,h}(t) := \frac{1}{(n-h)! h!} \partial_x^{n-h} \partial_y^h f(t, \bar{x}, \bar{y}).$$

Для компактності запису, коли $n = h = 0$, просто запишемо f_0 замість $f_{0,0}$. Застосувавши вище викладені міркування до коефіцієнтів (a, γ) отримуємо, що формально оператор $\mathcal{A}$ в (5.4) допускає представлення форми

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n, \quad \mathcal{A}_n := \sum_{h=0}^n (x - \bar{x})^{n-h} (y - \bar{y})^h \mathcal{A}_{n-h,h}, \quad (5.6)$$

де $\{\mathcal{A}_{n-h,h}\}$ є послідовністю диференціальних операторів з залежними від часу коефіцієнтами

$$\mathcal{A}_{n-h,h} := a_{n-h,h}(t)(\partial_x^2 - \partial_x) + \gamma_{n-h,h}(t)(\partial_x - 1).$$

Оператор $\mathcal{A}$ параболічного типу по x та має вироджену параболічність по y (бо немає похідної другого порядку по y), що як

правило діє у фінансових просторах. На основі розширення для $\mathcal{A}$ також розширюємо функцію ціноутворення w наступним чином [263]

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad (5.7)$$

Підставляючи (5.6) та (5.7) в (5.3), знаходимо, що функції $\{w_n\}$ задовольняють наступній послідовності задач Коші

$$(\partial_t - x\partial_y + \mathcal{A}_0)w_0 = 0, \quad w_0(T, x, y) = h(x, y), \quad (5.8)$$

$$(\partial_t - x\partial_y + \mathcal{A}_n)w_n = - \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_k u_{n-k}, \quad w_n(T, x, y) = 0, \quad (5.9)$$

Покажемо, що можна знайти явний вираз для n -ї функції w_n , використовуючи лише загальні властивості функцій розподілу, таких як класичне рівняння Чепмена-Колмогорова-Планка та згортку розподілів [198, 199, 276].

Розглянемо задачу Коші (5.8). Оператор $\mathcal{A}_0$ - це параболічний оператор з залежними від часу коефіцієнтами. Таким чином, розв'язок w_0 можна записати як

$$w_0(t, x, y) = e^{\int_t^T \gamma_0(s) ds} \int_{R^2} \mathcal{E}_0(t, x, y; T, \xi, \omega) h(\xi, \omega) d\xi d\omega, \quad (5.10)$$

де $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, \xi, \omega)$ є двомірною гаусівською щільністю процесу дифузії з інерцією.

Знайдемо $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, \xi, \omega)$. Для цього розв'яжемо задачу Коші для рівняння дифузії з інерцією із змінними коефіцієнтами

$$\partial_t w - x\partial_y w + a_0(t)(\partial_x^2 w - \partial_x w) + \gamma_0(t)(\partial_x - 1)w = 0 \quad (5.11)$$

$$w(t, x, y)|_{t=T} = h(x, y). \quad (5.12)$$

Застосуємо перетворення Фур'є для розв'язання задачі Коші (5.11),(5.12) вважаючи що $w, w_t, w_x, w_{x^2}, w_y$ абсолютно інтегровні по (x, y) .

$$F(w(t, x, y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \exp\{ix\xi + i\eta y\} w(t, x, y) dx dy = v(t, \xi, \eta),$$

$$(\xi, \eta) \in R^2, 0 < t \leq T.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} F(\partial_t w(t, x, y)) &= \partial_t v(t, \xi, \eta), \\ F(x \partial_y w(t, x, y)) &= -\eta \partial_\xi v(t, \xi, \eta), \\ F(\partial_x w(t, x, y)) &= -i\xi v(t, \xi, \eta), \\ F(\partial_x^2 w(t, x, y)) &= -\xi^2 v(t, \xi, \eta), \end{aligned}$$

то будемо мати

$$\begin{aligned} (\partial_t + \eta \partial_\xi) v(t, \xi, \eta) + \{a_0(t)[(-i\xi)^2 + i\xi] + \gamma_0(t) - i\xi - 1\} v(t, \xi, \eta) \\ = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$v(t, \xi, \eta)|_{t=T} = \tilde{h}(\xi, \eta). \quad (5.14)$$

де $\tilde{h}(\xi, \eta) = F(h(x, y))$.

Задача (5.11), (5.12) звелася до (5.13), (5.14) це задача Коші для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку.

Складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$dt = \frac{d\xi}{\eta} = \frac{dv}{v(\xi^2 a_0(t) - i\xi a_0(t) + i\xi \gamma_0(t) + \gamma_0(t))}.$$

Рівняння характеристик

$$dt = \frac{d\xi}{\eta}; \quad dt = \frac{dv}{v \left(\xi^2 a_0(t) - i\xi(a_0(t) + \gamma_0(t)) + \gamma_0(t) \right)}.$$

Звідси маємо перший інтеграл $\xi = \eta t + C_1$; із

$$\frac{dv}{v} = (\xi^2 a_0(t) - i\xi a_0(t) + i\xi \gamma_0(t) + \gamma_0(t)) dt,$$

отримаємо

$$\ln v = \int_0^t [(\xi^2 - i\xi) a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)(i\xi + 1)] d\beta + \ln C_2, \quad C_2 > 0,$$

враховуючи що $\xi = \eta t + C_1$, маємо

$$v(t, \eta t + C_1, \eta) = C_2 \exp \left\{ \int_0^t \{[(\eta\beta + C_1)^2 - i(\eta\beta + C_1)]a_0(\beta) + \gamma_0(\beta) i(\eta\beta + C_1) + 1\} d\beta \right\},$$

при $t = T$,

$$\begin{aligned} v(T, \eta T + C_1, \eta) &= \tilde{h}(\eta T + C_1, \eta) \\ &= C_2 \exp \left\{ \int_0^T \{[(\eta\beta + C_1)^2 - i(\eta\beta + C_1)]a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)(i(\eta\beta + C_1) + 1)\} d\beta \right\}, \end{aligned}$$

$$C_2 = \tilde{h}(\eta T + C_1, \eta) \exp \left\{ - \int_0^T \{[(\eta\beta + C_1)^2 - i(\eta\beta + C_1)]a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)(i(\eta\beta + C_1) + 1) d\beta \} \right\}.$$

$$\begin{aligned} v(t, \eta t + C_1, \eta) &= \tilde{h}(\eta T + C_1, \eta) \\ &\exp \left\{ \int_t^T \{[-(\eta\beta + C_1)^2 + i(\eta\beta + C_1)]a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)(-i(\eta\beta + C_1) - 1) d\beta \} \right\}, \end{aligned}$$

оскільки $C_1 = \xi - \eta t$, то

$$\begin{aligned}
v(t, \xi, \eta) &= \tilde{h}(\eta(T - t) \\
&+ \xi, \eta) \exp \left\{ \int_t^T \{ [-(\eta(\beta - t) + \xi)^2 + i(\eta(\beta - t) + \xi)] \right. \\
&\left. a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)(-i(\beta - t)\eta - \xi i - 1) d\beta \} \right\}
\end{aligned}$$

Візьмемо обернене перетворення Фур'є від $v(t, \xi, \eta)$

$$\begin{aligned}
F^{-1}(v(t, \xi, \eta)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \exp\{-ix\xi - i\eta y\} v(t, \xi, \eta) d\xi d\eta = w(t, x, y), \\
w(t, x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \tilde{h}(\xi + \eta(T - t), \eta) \exp \left\{ \int_t^T \{ [-(\eta(\beta - t) + \xi)^2 + \right. \\
&i(\eta(\beta - t) + \xi)] a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)[-i(\beta - t)\eta - \xi i - 1] \} d\beta \} \\
&\left. \{-ix\xi - i\eta y\} d\xi d\eta. \right. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

В (5.15) зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \xi + \eta(T - t) = \gamma, & \xi = \gamma - \eta(T - t), \\ \eta = \eta, \end{cases}$$

тоді

$$\begin{aligned}
w(t, x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \tilde{h}(\gamma, \eta) \exp\{-ix(\gamma - \eta(T - t)) - i\eta y \\
&+ \int_t^T \{ [-(\eta(\beta - T) + \gamma)^2 + i\eta(\beta - T) + i\gamma] a_0(\beta) \\
&+ \gamma_0(\beta)[-i\eta(\beta - T) - i\gamma - 1] \} d\beta \} d\gamma d\eta, \tag{5.16}
\end{aligned}$$

підставивши значення $\tilde{h}(\gamma, \eta) = Fh(x, y)$ в (5.16) одержимо

$$\begin{aligned}
w(t, x, y) &= \int_{R^2} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \exp\{ix'\gamma + i\eta y'\} h(x', y') dx' dy' - ix\gamma - i\eta y \right. \\
&\left. + ix\eta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (T-t) + \int_t^T \{[-(\eta(\beta-T) + \gamma)^2 + i\gamma + i\eta(\beta-T)]a_0(\beta) + \gamma_0(\beta) \\
& \quad [-i\eta(\beta-T) - i\gamma - 1]d\beta\} d\gamma d\eta = \\
& \quad \int_{\mathbb{R}^2} h(x', y') e^{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta} \mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y') dx' dy'. \\
& \mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{i\gamma(x' - x) + i\eta(y' - y + x(T-t)) + \\
& \quad \int_t^T \{[-(\eta(\beta-T) + \gamma)^2]a_0(\beta) + i(\eta(\beta-T) + \gamma)a_0(\beta) \\
& \quad + \gamma_0(\beta)[-i\eta(\beta-T) - \gamma i]\} d\beta\} d\gamma d\eta, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_0(t, x, y; T, \xi, \eta)$ щільність двовимірного процесу дифузії з інерцією, із коефіцієнтами залежними від часової змінної [147]. Розглянемо спочатку інтеграл по β .

$$\begin{aligned}
I = & -\gamma^2 \int_t^T a_0(\beta) d\beta - 2\gamma\eta \int_t^T (\beta - T)a_0(\beta) d\beta - \eta^2 \int_t^T (\beta - T)^2 a_0(\beta) d\beta \\
& + i\gamma \int_t^T a_0(\beta) d\beta + i\eta \int_t^T (\beta - T)a_0(\beta) d\beta - i\eta \int_t^T (\beta - T)\gamma_0(\beta) d\beta \\
& - i\gamma \int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta,
\end{aligned}$$

виділимо в показнику експоненти повний квадрат по γ

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 \int_t^T a_0(\beta) d\beta + 2\gamma \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} \frac{\eta \int_t^T (\beta - T)a_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} - 2\gamma \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} \\
& \frac{i}{2} \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + 2\gamma \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} \frac{i}{2} \frac{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} - i(x' - x)\gamma =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\gamma \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\eta \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} - \frac{i(x' - x)}{2\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right. \\
& + \left(-\frac{i}{2} \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{\frac{i}{2} \int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right)^2 - 2i\eta \frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \\
& \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right) \\
& + \frac{1}{4} \left(-\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right)^2 \\
& - \frac{\eta^2 \left(\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \right)^2}{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{(x' - x)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \\
& + i\eta(x' - x) \frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} \\
& - \frac{(x' - x)}{2\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \left(-\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right), \\
& c = \frac{i}{2} \left(-\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right)
\end{aligned}$$

Виділимо повний квадрат по η

$$\begin{aligned}
& \eta^2 \left[\int_t^T (\beta - T)^2 a_0(\beta) d\beta - \frac{\left(\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \right)^2}{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right] - 2\eta \frac{i}{2} \frac{c^*}{c^*} \\
& \left(\frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} c \right) - i\eta(y' - y) + ix\eta(T - t) - i\eta \\
& \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta + i\eta \int_t^T (\beta - T) \gamma_0(\beta) d\beta \\
& + i\eta(x' - x) \frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} \\
& = \left(\eta c^* - \frac{ci}{2} \frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} c^*} - \frac{i}{2} \frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{c^*} + \right. \\
& \frac{i(x' - x) \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{2c^* \int_t^T a_0(\beta) d\beta} - \frac{i(y' - y + x(T - t))}{2c^*} \\
& \left. + \frac{i}{2} \frac{\int_t^T (\beta - T) \gamma_0(\beta) d\beta}{c^*} \right)^2 \\
& - c^{**2} + \frac{(x' - x)^2 \left(\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 c^{*2}} + \frac{(y' - y + x(T - t))^2}{4c^{*2}} \\
& + \frac{2c^{**} i(x' - x) \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{2c^* \int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{2c^{**} i(y' - y + x(T - t))}{2c^*} \\
& + \frac{(x' - x)(y' - y + x(T - t)) \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{2c^{*2} \int_t^T a_0(\beta) d\beta}.
\end{aligned}$$

де

$$c^{**} = -\frac{i}{2} \frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{c^* \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} - \frac{i}{2} \frac{\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{c^*} + \frac{i}{2} \frac{\int_t^T (\beta - T) \gamma_0(\beta) d\beta}{c^*},$$

$$c^{*2} = \int_t^T (\beta - T)^2 a_0(\beta) d\beta - \frac{\left(\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \right)^2}{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} > 0.$$

Зауважимо, що нерівність легко встановити, дійсно:

$$\int_t^T (\beta - T)^2 a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - \left(\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \right)^2$$

монотонно спадає функція по t . Найменше значення при $t = T$ дорівнює 0.

Обчислимо похідну і знайдемо її знак:

$$\begin{aligned} & \left(\int_t^T (\beta - T)^2 a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - \left(\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \right)^2 \right)'_t = \\ & -(t - T)^2 a_0(t) \int_t^T a_0(\beta) d\beta - a_0(t) \int_t^T (\beta - T)^2 a_0(\beta) d\beta + \\ & 2 \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta (t - T) a_0(t) = \int_t^T a_0(\beta) a_0(t) \\ & [-(t - T)^2 - (\beta - T)^2 + 2(\beta - T)(t - T)] d\beta = \\ & - \int_t^T a_0(\beta) a_0(t) [T - t - T + \beta]^2 d\beta = - \int_t^T a_0(\beta) a_0(t) [\beta - t]^2 d\beta < 0, \end{aligned}$$

$0 \leq t < T$.

Зробивши заміну змінних

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{\eta \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} - \frac{i(x' - x)}{\sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} + c = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}, \\ \eta c^* + c^{**} + \frac{i(x' - x) \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{2c^* \int_t^T a_0(\beta) d\beta} - \frac{i(y' - y + x(\beta - T))}{2c^*} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Використавши інтегральну теорему Коші, зведемо інтеграл яким виражається $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y')$ до вигляду:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y') = & \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{\alpha_2^2}{2} \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 \exp \left\{ -\frac{(x' - x)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right. \\ & + \frac{ic(x' - x)}{4 \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} + c^2 - \frac{2c^{**} i(x' - x) \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{2c^* \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \\ & - \frac{(x' - x)^2 \left(\int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4c^{*2} \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2} + c^{**2} \\ & - \frac{(y' - y + x(T - t))^2}{4c^{*2}} \\ & + \frac{(x' - x)(y' - y + x(T - t)) \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta}{2c^{*2} \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \\ & \left. - \frac{c^{**} i(y' - y + x(T - t))}{c^*} \right\} \frac{1}{4\pi c^* \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{\alpha_2^2}{2} \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 = 1,$$

то

$$\mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y') = \frac{1}{4\pi c^* \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \exp \left\{ -\frac{(x' - x)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} + c^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{ic(x' - x)}{4\sqrt{\int_t^T a_0(\beta)d\beta}} - \frac{c^{**}i(x' - x)}{c^*\sqrt{\int_t^T a_0(\beta)d\beta}} - \frac{(x' - x)^2}{4c^{*2}\int_t^T a_0(\beta)d\beta} - c^{**2} \\
& - \frac{(y' - y + x(T - t))^2}{4c^{*2}} + \frac{(x' - x)(y' - y + x(T - t))}{2c^{*2}\sqrt{\int_t^T a_0(\beta)d\beta}} \\
& - \frac{c^{**}i(y' - y + x(T - t))}{c^*} \Big\}, \quad 0 \leq t < T, \quad (x, y) \in R^2, \\
& (x', y') \in R^2.
\end{aligned}$$

Зведемо подібні члени, то $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y')$ дорівнює

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y') &= \left(4\pi c^* \int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^{-1} \exp \left\{ - \left(4 \int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^{-1} \right. \\
& \quad \left(x' - x - \int_t^T (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta))d\beta \right)^2 - (2c^*)^{-2} \\
& \quad \left[y' - y + x(T - t) - (x' - x) \int_t^T (\beta - T)a_0(\beta)d\beta \left(\int_t^T a_0(\beta)d\beta \right)^{-1} \right. \\
& \quad \left. + \int_t^T (\beta - T)a_0(\beta)d\beta \left(\int_t^T a_0(\beta)d\beta \right)^{-1} \left(\int_t^T (-a_0(\beta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \gamma_0(\beta))d\beta \right) - \int_t^T (\beta - T)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta))d\beta \right]^2 \Big\}, \\
& 0 \leq t < T, \quad (x, y) \in R^2, \quad (x', y') \in R^2.
\end{aligned}$$

(t, x, y) -початкова точка, (T, x', y') -кінцева точка (поточна) [16-18].

Розглянемо задачу Коші (9) з $n = 1$. Нехай, $h = \sigma(X, Y)$ так що u безпосередньо відповідає щільності переходу процесу [100, 101, 147],

$$w(t, x, y) = \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y).$$

Для будь-якого оператора $\mathcal{A}$ позначимо через $\tilde{\mathcal{A}}$ його формальну зв'язність, яка отримана шляхом інтегрування частинами [144, 200, 208].

Для чіткості, в розрахунках нижче пишемо $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(x,y)}(t)$, щоб вказати, що $\mathcal{A}$ приймає t як аргумент і діє на змінні (x, y) . Маємо

$$\begin{aligned} w_1(t, x, y) e^{\int_t^T \gamma_0(s) ds} &= \\ &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\omega \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \omega) \mathcal{A}_1^{(\xi, \omega)} \mathcal{E}_0(s, \xi, \omega; T, X, Y) \\ &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\omega \left(\tilde{\mathcal{A}}_1^{(\xi, \omega)} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \omega) \right) \mathcal{E}_0(s, \xi, \omega; T, X, Y) \\ &= \int_t^T ds \mathcal{G}_1^{(x,y)}(t, s) \int_{R^2} d\xi d\omega \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \omega) \mathcal{E}_0(s, \xi, \omega; T, X, Y) \\ &= \int_t^T ds \mathcal{G}_1^{(x,y)}(t, s) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y). \end{aligned}$$

Помножимо обидві сторони на $e^{\int_t^T \gamma_0(s) ds}$ та використавши (5.10) ми знаходимо

$$w_1(t, x, y) = \mathcal{L}_1 w_0(t, x, y), \quad \mathcal{L}_1 := \int_t^T ds \mathcal{G}_1(t, s),$$

Оператор $\mathcal{L}_1$ приймає t як аргумент і діє на змінні (x, y) , має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(t, s) = \int_t^T ds \left\{ \left[x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x + \right. \right. \\ \left. (a_{10}(\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) + \gamma_{10}(\partial_x + (s-t)\partial_y) + \right. \\ \left. 2 \int_t^s a_0(\beta)(\beta - t) d\beta \partial_y) + \left(y - Y - x(s-t) - 2 \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + \right. \right. \\ \left. 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right. \\ \left. \left. + 2 \int_t^s (\beta - s)(\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right) \left[(\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - (\partial_x + (s-t)\partial_y) a_{01} \right] + \gamma_{01}(\partial_x + (s-t)\partial_y) \right\}. \end{aligned}$$

Дійсно

$$\begin{aligned}
w_1(t, x, y) &= w_1(t, x, y; T, X, Y), \\
w_1(t, x, y; T, X, Y) e^{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta} &= \\
\int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \mathcal{A}_1^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y). & \quad (5.19)
\end{aligned}$$

інтегруючи частинами, одержимо:

$$\int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \left(\tilde{\mathcal{A}}_1^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \right) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y).$$

Знайдемо $\tilde{\mathcal{A}}_1^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_1^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) = \\
&\sum_{h=0}^1 (\xi - X)^{1-h} (\eta - Y)^h \mathcal{A}_{1-h, h}^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) \\
&= (\xi - X) [a_{1,0}(s) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{1,0}(s) (\partial_\xi - 1)] \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) \\
&+ (\eta - Y) [a_{0,1}(s) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{0,1}(s) (\partial_\xi - 1)] \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y).
\end{aligned}$$

Інтегруванням частинами одержимо (5.19), маємо

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_1^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) &= [(\xi - X) \gamma_{1,0} - \gamma_{0,1} (\eta - Y)] \\
&\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) + [(\xi - X) a_{1,0} (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) - \gamma_{1,0} \partial_\xi + \\
&(\eta - Y) (a_{0,1} (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{0,1} \partial_\xi)] \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta).
\end{aligned}$$

Знайдемо похідні по ξ і x , від $\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$.

Похідна по ξ має вигляд:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))'_\xi \\
&= \left[- \left(\xi - x - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + (2c^{*2}(t, s))^{-1} \left(\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + \int_t^s (-a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)) d\beta \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \\
& \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} - \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \Bigg) \\
& \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right) \Bigg] \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Похідна по x має вигляд:

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))'_x \\
& = \left[\left(\xi - x - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
& \quad \left. - (2c^{*2}(t, s))^{-1} \left(\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right. \right. \\
& \quad \left. \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} - \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta - \right. \\
& \quad \left. \int_t^T (\beta - T) a_0(\beta) d\beta \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right) \\
& \quad \left. \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + (s - t) \right) \right] \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Для порівняння (5.20), (5.21) знайдемо похідну по y .

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))'_y = \left[\left(\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right. \right. \\
& \quad \left. \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
& \quad \left. \int_t^s (-a_0(\beta) + \gamma_0(\beta)) d\beta - \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) (2c^{*2}(t, s))^{-1} \Bigg] \\
& \quad \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Враховуючи (5.22), маємо

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))'_\xi = \\ & -(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))'_x + (s - t)(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))'_y. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Знайдемо $(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{\xi^2}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{\xi^2} = & \left\{ - \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} - \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right)^2 \right. \\ & \left(2c^{*2}(t, s) \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-2} + \left[- \left(\xi - x - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + \int_t^s \gamma_0(\beta) d\beta \right) \right. \\ & \left. \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + (2c^{*2}(t, s))^{-1} \right. \\ & \left. \left(\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right) \right. \\ & \left. \left. \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right]^2 \right\} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Запишемо $(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{\xi^2}$ через $(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{x^2}$,

$(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{y^2}$, для цього знайдемо похідну $(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{x^2}$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{x^2} = & \left\{ \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} - (2c^{*2}(t, s))^{-1} \right. \\ & \left. \left((s - t) + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right)^2 - \right. \\ & \left. \left[(\xi - x) - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} - (2c^{*2}(t, s))^{-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
& \quad \left. - \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \\
& \quad \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
& \quad \left. + (s - t) \right) \Bigg] \Bigg\}^2 \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Знайдемо $(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{y^2}$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{y^2} = & \left\{ - \left[\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right. \right. \\
& \left. \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} - \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
& \left. \left. - \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta - \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right]^2 \right. \\
& \left. (2c^{*2}(t, s))^{-2} - (2c^{*2}(t, s))^{-1} \right\} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Порівнюючи (5.24), (5.25), (5.26) одержимо

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{\xi^2} = (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{x^2} - \\
& \left((s - t)^2 + 2(s - t) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right) \\
& (\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta))''_{y^2}, \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Враховуючи виведені формули для похідних підставимо їх в $\tilde{\mathcal{A}}_1^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$, будемо мати

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_1^{(\xi, \eta)}(s) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) = & \left\{ \left(x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + \right. \right. \\
& 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x + 2 \int_t^s (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \Big) \left[a_{10} \left((\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 - \right. \right. \\
& (\partial_x + (s - t) \partial_y) + \gamma_{10} (\partial_x + (s - t) \partial_y) \Big] + (y - Y - x(s - t) + \\
& \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + \int_t^s (\beta - t) (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_y \\
& + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \Big) \left[a_{01} \left((\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 - \partial_x + (s - t) \partial_y \right) \right. \\
& \left. \left. \gamma_{01} \partial_x + (s - t) \partial_y \right] \right\} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) = \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \\
\mathcal{E}_0(t, \xi, \eta; T, X, Y) = & \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(t, s) = & \int_t^T ds \left\{ \left[x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x + \right. \right. \\
& (a_{10} (\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 - (\partial_x + (s - t) \partial_y) + \gamma_{10} (\partial_x + (s - t) \partial_y) + \\
& 2 \int_t^s a_0(\beta) (\beta - t) d\beta \partial_y) + \left(y - Y - x(s - t) - 2 \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + \right. \\
& 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \\
& \left. \left. + 2 \int_t^s (\beta - s) (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right) \left[(\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - (\partial_x + (s - t) \partial_y) a_{01} \right] + \gamma_{01} (\partial_x + (s - t) \partial_y) \right\}. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}
e^{\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta} u_1(t, x, y) \\
= \int_t^T \mathcal{G}_1(t, s) ds \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{R^2} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) d\xi d\eta = \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y).$$

Це рівняння Колмогорова-Чепмена-Планка для рівняння дифузії з інерцією [208, 244, 253], тоді

$$w_1(t, x, y) = \int_t^T \mathcal{G}_1(t, s) ds e^{-\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta} \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y). \quad (5.29)$$

де $\mathcal{G}_1(t, s)$ це оператор $\tilde{\mathcal{A}}_1^{(\xi, \eta)}(s)$, який діє на змінні x, y, X, Y та похідні ∂_x, ∂_y за формулою (5.28).

Для знаходження $w_1, w_2, \dots, w_n$ ми використовуємо представлення $(\xi - X)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$, $(\eta - Y)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$, $(\xi - X)^k (\eta - Y)^l \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$, через похідні по x і y . $n, k, l \in N$.

Зокрема

$$\begin{aligned} (\xi - X)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) = & \left(x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right. \\ & + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \left[\left(\xi - x + \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\ & - \left(\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\ & - \left. \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right. \\ & \left. \left. + \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) (2c^{*2})^{-1} \right. \\ & \left. \left. \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + (s - t) \right) \right] \right]^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \end{aligned}$$

$$= \left(x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x + \right. \\ \left. 2 \int_t^s (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta).$$

Отже

$$(\xi - X)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) = \left(x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + \right. \\ \left. 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x + 2 \int_t^s (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \quad (5.30)$$

Розглянемо

$$(\eta - Y)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \\ = \left(y - Y \mp x(s - t) \pm (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right. \\ \left. \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + \eta - y \pm \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta - \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \right)^n \\ \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) = (y - Y - x(s - t) + (\eta - y + x(s - t) - (\xi - x) \\ \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1}) \pm \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right. \\ \left. \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right. \\ \left. \mp \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \\ \left. + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right)^n$$

$$\begin{aligned}
& \left(\xi - x - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right) \mp \\
& \left(\eta - y + x(s-t) - (\xi - x) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
& + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \\
& \left. - \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \\
& + (s-t)(2c^{*2})^{-1} 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \Big)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) = \\
& \left(y - Y - x(s-t) - \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right. \\
& \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2c^{*2} \partial_y \\
& + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \\
& \left. 2 \left(\int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta + (s-t) \right) \partial_y \right)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta).
\end{aligned}$$

Після зведення і врахування значення c^* , маємо:

$$\begin{aligned}
& \left(y - Y - x(s-t) - \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right. \\
& \quad \left. + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right. \\
& \quad \left. + \int_t^s (\beta - s)(\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^n \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Позначимо

$$M_{1n}(t, s) := \left(x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right.$$

$$+2 \int_t^s (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \Big)^n, \quad (5.32)$$

$$M_{2n}(t, s) := \left(y - Y - x(s - t) - \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right. \\ \left. + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x + 2 \int_t^s (\beta - s)(\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^n. \quad (5.33)$$

Використовуючи (5.32), (5.33) перевіркою легко встановити, що

$$(\xi - X)^k (\eta - Y)^l \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) = M_{1k} M_{2l} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta). \quad (5.34)$$

Оскільки

$$(-\partial_t + x\partial_y + \mathcal{A}_0)w_n = - \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_k w_{n-k}, \quad w_n(T, x, y),$$

Знайдемо друге наближення щільності

$$(-\partial_t + x\partial_y + \mathcal{A}_0)w_2 = -\mathcal{A}_1 w_1 - \mathcal{A}_2 w_0,$$

тому за перетворенням Дюамеля [141, 196, 221]

$$w_2(t, x, y) = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \left(\mathcal{A}_1^{(\xi, \eta)}(s) u_1(s, \xi, \eta; T, X, Y) \right. \\ \left. - \mathcal{A}_2^{(\xi, \eta)}(s) w_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) \right),$$

де

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_1^{(\xi, \eta)}(s) u_1(s, \xi, \eta; T, X, Y) \\ &= [(\xi - X) \mathcal{A}_{1,0} + (\eta - Y) \mathcal{A}_{0,1}] w_1(s, \xi, \eta; T, X, Y) \\ &+ [(\xi - X)^2 \mathcal{A}_{2,0} + (\eta - Y)^2 \mathcal{A}_{0,2} + (\xi - X)(\eta - Y) \mathcal{A}_{1,1}] w_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) \\ &= \{(\xi - X)[a_{1,0}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{1,0}(\partial_\xi - 1)] + (\eta - Y) \\ &[a_{0,1}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{0,1}(\partial_\xi - 1)]\} \int_s^T ds_1 \mathcal{G}_1(t, s_1) \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \\ &+ \{(\xi - X)^2[a_{2,0}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{2,0}(\partial_\xi - 1)] + (\xi - X)(\eta - Y) \\ &[a_{1,1}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{1,1}(\partial_\xi - 1)] + (\eta - Y)^2[a_{0,2}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{0,2}(\partial_\xi - 1)]\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$$

Використавши формули (5.30), (5.31) і позначення (5.32),(5.33), (5.34) при $n = 2$ маємо

$$\mathcal{A}_2^{(\xi, \eta)}(s)w_0 = (M_{12}\mathcal{A}_{20} + M_{22}\mathcal{A}_{02} + M_{11}M_{21}\mathcal{A}_{11})\mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y),$$

тому

$$\begin{aligned} \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \mathcal{A}_2^{(\xi, \eta)}(s)w_0 &= \int_t^T ds [M_{12}(a_{20} \\ &\left((\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) + \gamma_{20}(\partial_x + (s-t)\partial_y - 1) \right) + \\ &M_{11}M_{12} \left(a_{11}(\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) + \gamma_{20}(\partial_x + (s-t)\partial_y - 1) \right) \\ &M_{20} \left(a_{02}(\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) + \gamma_{02}(\partial_x + (s-t)\partial_y - 1) \right)] \\ \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) &= \int_t^T ds \mathcal{G}_2(t, s)\mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Знайдемо $\mathcal{A}_1 u_1$ використовуючи знайдену формулу для $w_1(s, \xi, \eta; T, X, Y)$.

Оскільки:

$$\begin{aligned} w_1(t, x, y) &= \int_t^T \{M_{11}(s) [a_{10}(\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) + \\ &\gamma_{10}(\partial_x + (s-t)\partial_y - 1)] \\ &+ M_{21}(s) [a_{10}(\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) \\ &\gamma_{01}(\partial_x + (s-t)\partial_y - 1)]\} \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) ds \ e^{-\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta} = \\ &e^{-\int_t^T \gamma_0(\beta) d\beta} \int_t^T \mathcal{G}_1(t, s)\mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) ds. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{(\xi, \eta)}(s)u_1(s, \xi, \eta; T, X, Y) = & \left[(\xi - X) \left(a_{1,0}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{1,0}(\partial_\xi - 1) \right) + \right. \\ & \left. (\eta - Y) \left(a_{0,1}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{0,1}(\partial_\xi - 1) \right) \right] e^{-\int_s^T \gamma_0(\beta) d\beta} \\ & \int_s^T \mathcal{G}_1(s, s_1) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) ds_1. \end{aligned}$$

Використаємо формули для перших похідних і проінтегрувавши частинами в інтегралі

$$\int_t^T ds \int_s^T ds_1 \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \mathcal{A}_1^{(\xi, \eta)} u_1(s, \xi, \eta; T, X, Y) = I_1,$$

в результаті одержимо

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \int_{R^2} d\xi d\eta \left\{ M_{11} \left(a_{10} \left((\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) \right) \right. \right. \\ & + \gamma_{10}(\partial_x + (s-t)\partial_y) + M_{21} \left(a_{01} \left((\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y) \right) \right. \\ & \left. \left. + \gamma_{01}(\partial_x + (s-t)\partial_y - 1) \right) \right\} \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \mathcal{G}_1(s, s_1) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y). \end{aligned}$$

і ще проінтегруємо частинами

$$\begin{aligned} I_1 = & e^{-\int_s^T \gamma_0(\beta) d\beta} \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \mathcal{G}_1(s, s_1) \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \\ & \left(\xi - X - \int_s^{s_1} (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2 \int_s^{s_1} a_0(\beta) d\beta \partial_\xi \right. \\ & \left. + 2 \int_s^{s_1} (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_\eta \right) \left[a_{10} \left((\partial_\xi + (s_1 - s)\partial_\eta)^2 + (\partial_\xi + (s_1 - s)\partial_\eta) \right) \right. \\ & \left. + \gamma_{10}(\partial_\xi + (s_1 - s)\partial_\eta) \right] \\ & + \left(\eta - Y - \xi(s_1 - s) + \int_s^{s_1} (\beta - s_1)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_s^{s_1} (\beta - s)(\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_\eta + 2 \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_\xi \Big) \\
& \left[\left(a_{01} \left((\partial_\xi + (s_1 - s) \partial_\eta) \right)^2 + (\partial_\xi + (s_1 - s) \partial_\eta) \right) + \gamma_{01} (\partial_\xi + (s_1 - s) \partial_\eta) \right] \\
& \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y).
\end{aligned}$$

Зробивши усі попередні перетворення одержимо:

$$I_1 = e^{-\int_s^T \gamma_0(\beta) d\beta} \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{G}_1(t, s_1) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y).$$

Отже друге наближення щільності має вигляд:

$$\begin{aligned}
w_2(t, x, y; T, X, Y) &= \int_t^T ds \mathcal{G}_2(t, s) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) + \\
& \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{G}_1(t, s_1) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y), \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Маючи w_1, w_2 , знайдемо w_3 — третє наближення щільності:

$$\begin{aligned}
w_3(t, x, y; T, X, Y) &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) \left(\mathcal{A}_3^{(\xi, \eta)}(s) w_0 + \right. \\
& \left. \mathcal{A}_2^{(\xi, \eta)}(s) w_1 + \mathcal{A}_1^{(\xi, \eta)}(s) w_2 \right) = I_{30} + I_{21} + I_{12}.
\end{aligned}$$

Знайдемо I_{30} .

$$\begin{aligned}
I_{30} &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \left[\sum_{j=0}^3 |\xi - X|^{3-j} |\eta - Y|^j \right. \\
& \left. \left(a_{3-j,j} (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{3-j,j} (\partial_\xi - 1) \right) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) \right].
\end{aligned}$$

Використовуючи властивості щільності $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y)$, інтегруючи частинами і звівши подібні одержимо:

$$\begin{aligned}
I_{30} = & \int_t^T ds \left(\sum_{j=0}^3 \left(x - X - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x + \right. \right. \\
& \left. \left. \int_t^s (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^{3-j} \left(y - Y - x(s - t) \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_t^s (\beta - s) (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x + 2 \int_t^s (\beta - s) (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^j \right. \\
& \left. \left(a_{3-j,j} \left((\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 - (\partial_x + (s - t) \partial_y) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \gamma_{3-j,j} (\partial_x + (s - t) \partial_y - 1) \right) \right) \right. \\
& \left. \varepsilon_0(t, x, y; T, X, Y) = \int_t^T ds \sum_{j=0}^3 M_{1,3-j} M_{2,j} \left(a_{3-j,j} \left((\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (\partial_x + (s - t) \partial_y) + \gamma_{3-j,j} (\partial_x + (s - t) \partial_y - 1) \right) \varepsilon_0(t, x, y; T, X, Y) = \right. \right. \\
& \left. \left. \int_t^T ds \mathcal{G}_3(t, s) \varepsilon_0(t, x, y; T, X, Y). \right. \right. \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Знайдемо I_{21} , підставивши у вираз для I_{31} формули для w_1 , маємо:

$$\begin{aligned}
I_{21} = & \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \varepsilon_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \left[\sum_{j=0}^2 |\xi - X|^{2-j} |\eta - Y|^j \right. \\
& \left. \left(a_{2-j,j} (\partial_\xi^2 - \partial_\eta) + \gamma_{2-j,j} (\partial_\xi - 1) \right) \int_s^T ds_1 \mathcal{G}_1(s, s_1) \varepsilon_0(s, \xi, \eta; T, X, Y) \right] = \\
& \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \mathcal{G}_2(t, s) \mathcal{G}_1(t, s_1) \varepsilon_0(t, x, y; T, X, Y), \quad (5.38)
\end{aligned}$$

Знайдемо I_{12} , використавши значення w_2 , будемо мати:

$$\begin{aligned}
I_{1\,2} = & \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) (|\xi - X| (a_{1\,0}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \\
& \gamma_{1\,0}(\partial_\xi - 1)) + |\eta - Y| (a_{0\,1}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) + \gamma_{0\,1}(\partial_\xi - 1)) \\
& \left(\int_s^T ds_1 \mathcal{G}_1(s, s_1) + \int_s^T ds_1 \int_s^T ds_2 \mathcal{G}_1(s, s_1) \mathcal{G}_1(s_1, s_2) \right) \mathcal{E}_0(s, \xi, \eta; T, X, Y).
\end{aligned}$$

Повторюючи попередні міркування, зроблені для одержання w_1, w_2 , інтегрування частинами, враховуючи значення $\mathcal{G}(t, s)$ одержимо [112, 125, 161, 274]:

$$\begin{aligned}
I_{1\,2} = & \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{G}_1(t, s_1) \mathcal{G}_1(t, s_2) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) \\
& + \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{G}_2(t, s_2) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y). \quad (5.39)
\end{aligned}$$

Зібравши значення $I_{3\,0}, I_{2\,1}, I_{1\,2}$ одержимо третє наближення w_3

$$\begin{aligned}
w_3(t, x, y; T, X, Y) = & \left[\int_t^T ds \mathcal{G}_3(t, s) + \int_t^T ds \int_s^T ds_1 (\mathcal{G}_2(t, s) \mathcal{G}_1(t, s_1) + \right. \\
& \left. \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{G}_2(t, s_1)) + \int_t^T ds \int_s^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \mathcal{G}_1(t, s) \mathcal{G}_1(t, s_1) \mathcal{G}_1(t, s_2) \right. \\
& \left. \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y). \quad (5.40) \right]
\end{aligned}$$

За $n - 1$ крок наближення w_{n-1} має вигляд:

$$\begin{aligned}
w_{n-1} = & \sum_{j=1}^{n-1} \int_t^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \dots \int_{s_{j-1}}^T ds_j \sum_{l \in I_{n-1,j}} \mathcal{G}_{l_1}(t, s_1) \dots \mathcal{G}_{l_j}(t, s_j) \\
& \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y). \quad (5.41)
\end{aligned}$$

$$I_{n-1,j} = \{l = (l_1, \dots, l_j) \in N^j \mid l_1 + \dots + l_j = n - 1, \quad l \leq j \leq n - 1\}.$$

З (5.40) одержуємо аналогічну формулу для w_n

$$w_n = \sum_{j=1}^n \int_t^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \dots \int_{s_{j-1}}^T ds_j \sum_{l \in I_{n,j}} G_{l_1}(t, s_1) \dots G_{l_j}(t, s_j) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y). \quad (5.42)$$

де

$$I_{n,j} = \{l = (l_1, \dots, l_j) \in N^j \mid l_1 + \dots + l_j = n, \quad l \leq j \leq n\}.$$

$$G_l(t, s) = \sum_{j=1}^l M_{1\ l-j}(t, s) M_{2\ j}(t, s) (a_{l-j,j} [(\partial_x + (s-t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s-t)\partial_y)] + \gamma_{l-j,j}(\partial_x + (s-t)\partial_y - 1)).$$

$$M_{1k}(t, s) := \left(x - \bar{X} - \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x + 2 \int_t^s (\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^k,$$

$$M_{2l}(t, s) := \left(y - \bar{Y} - \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta - x(s-t) + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x + 2 \int_t^s (\beta - s)(\beta - t) a_0(\beta) d\beta \partial_y \right)^l.$$

З формули для w_n і виразу для похідних щільності легко одержати асимптотичну формулу для w_n по $(T-t)$ при $t \rightarrow T^-$.

$$\begin{aligned} & \text{Дійсно: } x' - x + \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \text{ завжди йде з } (T-t)^{-\frac{1}{2}}, \\ & y' - y + x(s-t) \\ & - \left(x' - x + \int_t^s (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \end{aligned}$$

$$\left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + \int_t^s (\beta - s)(a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta,$$

йде в парі $(T - t)^{-\frac{3}{2}}$.

В M ∂_x входить з множником $\int_t^s a_0(\beta) d\beta$ оскільки $a(t, x, y)$ — обмежена функція в $R^2 \times [0, T]$, то $a_0(\beta)$ теж обмежена функція

$$\left| \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right| \leq C(s - t), \quad C > 0, \quad C = \text{const}.$$

звідси випливає, що

$$\left| \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^l \right| \leq C |(s - t)^l \partial_x^l|, \quad C > 0,$$

Похідна ∂_y входить з множником $\int_t^s a_0(\beta)(\beta - s)(\beta - t) d\beta$ тому

$$\left| \int_t^s a_0(\beta)(\beta - s)(\beta - t) d\beta \partial_y \right| \leq C(s - t)^3 |\partial_y|, \quad C = \text{const} > 0.$$

Отже маємо, що при $t \rightarrow T^-$, веде себе так:

$$w_{n+1} = \mathcal{O} \left((T - t)^{\frac{n+1}{2}} \right), \quad \forall n \in N.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ збіжний, то

$$w(t, x, y; T, X, Y) = w(t, x, y) = \sum_{j=0}^n w_j + \mathcal{O} \left((T - t)^{\frac{n+1}{2}} \right). \quad (5.43)$$

де

$$w_n = \mathcal{L}_n w_0(t, x, y),$$

$$\mathcal{L}_n = \sum_{l=1}^n \int_t^T ds_1 \dots \int_{s_{l-1}}^T ds_l \sum_{i \in E_{n,l}} \mathcal{G}_{i_1}(t, s_1) \dots \mathcal{G}_{i_l}(t, s_{i_l}).$$

$$E_{n,l} = \{i = (i_1, \dots, i_l) \in N^l, |i_1 + i_2 + \dots + i_l = n\}, \quad 1 \leq l \leq n.$$

Доведемо що ряд (5.43) абсолютно збіжний в $R^2 \times (0, T]$. Запишемо варіанту Даламбера:

$$\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \left| \sum_{l=1}^{n+1} \int_t^T ds_1 \dots \int_{s_{l-1}}^T ds_l \sum_{i \in E_{n+1,l}} \mathcal{G}_{i_1}(t, s_1) \dots \mathcal{G}_{i_l}(t, s_{i_l}) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) \right|$$

$$\left(\left| \sum_{l=1}^n \int_t^T ds_1 \dots \int_{s_{l-1}}^T ds_l \sum_{i \in E_{n,l}} \mathcal{G}_{i_1}(t, s_1) \dots \mathcal{G}_{i_l}(t, s_{i_l}) \mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y) \right| \right)^{-1}.$$

Щоб обчислити це відношення, оцінимо загальний член ряду (5.43).

Для цього відмітимо, що $\mathcal{G}_l(t, s)$ діє на $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y)$ та має вигляд

$$\sum_{l=0}^l \left(-2 \int_s^T a_0(\beta) d\beta \partial_x - 2 \int_s^T a_0(\beta)(\beta - t) d\beta \partial_y + \right.$$

$$\left. \int_s^T (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta)) d\beta \right)^{l-j} \left(-2 \int_s^T a_0(\beta)(\beta - t)(\beta - t) d\beta \partial_y - 2 \int_s^T a_0(\beta)(\beta - t) d\beta \partial_x + X(T - s) + \int_s^T (a_0(\beta) - \gamma_0(\beta))(\beta - s) d\beta \right)^j$$

$$\left[a_{l-j,j} \left((\partial_x + (s - t)\partial_y)^2 - (\partial_x + (s - t)\partial_y) \right) + \gamma_{l-j,j} \left((\partial_x + (s - t)\partial_y) - 1 \right) \right].$$

Також використаємо, що $|a + b|^n \leq 2^n(|a|^n + |b|^n)$, в w_{n+1} міститься $n + 1$ доданок де входять $(w_0^*, w_1^*, \dots, w_n^*)$, кожен із доданків w_k^* складається з доданків, що по кількості їх менше ніж 2^k тому w_{n+1} містить не більше ніж $2^{n+1} - 1$ доданків.

Із властивостей похідних $\mathcal{E}_0(t, x, y; T, X, Y)$ та властивостей многочленів Білла маємо оцінку w_{n+1} .

Зауважимо, що многочлен Білла має вигляд

$$B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{j_1! \dots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}},$$

$$j_1 + j_2 + \dots = k, \quad j_1 + 2j_2 + 3j_3 \dots = n.$$

Оцінка w_{n+1} :

$$|w_{n+1}| \leq C M^{2(n+1)} (2^{n+1} - 1)^2 \frac{|1+x|^{n+1}}{(n+1)!} (T-t)^{\frac{n+1}{2}}, \quad (5.44)$$

де

$$C > 0, \quad M = \sup\{|a_0(\beta)|, |\partial_x^k a(\beta, X, Y)|, |\partial_{xy}^{k+j} a(\beta, X, Y)|, |\partial_y^k a(\beta, X, Y)|,$$

$$|\partial_x^k \gamma(\beta, X, Y)|, |\partial_{xy}^{k+j} \gamma(\beta, X, Y)|, |\partial_y^k \gamma(\beta, X, Y)|,$$

$$\forall k \in N \cup \{0\}, \forall j \in N \cup \{0\}\}.$$

Розглянемо аналітичні функції $a(t, x, y), \gamma(t, x, y)$ по x, y , які обмежені разом з похідними в R^2 . На кожному компактi в R^2 (на кожній обмеженій замкнутій множині) M можна вибрати незалежним від (x, y) .

Підставивши (5.44) в формулу Даламбера матимемо абсолютну (рівномірну збіжність на компактi) в $R^2 \times [0, T]$, $0 < \varepsilon < 1$, $\forall \varepsilon \in R$.

Аналогічно можна показати, що ряд (5.43) є нескінченно диференційовний по x, y і має похідну по t , (5.43) задовольняє відповідну задачу Коші для рівняння дифузії з інерцією.

З оцінки для w_{n+1} , має місце зображення (5.43)

$$w(t, x, y) = \sum_{k=0}^n w_k(t, x, y) + \mathcal{O}\left((T-t)^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

При умовах накладених на коефіцієнти рівняння Колмогорова, задача Коші має єдиний розв'язок [21]. Якщо є єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння Колмогорова то існує єдиний розв'язок спряженої задачі при аналогічних коефіцієнтах. [25, 29, 141, 238].

5.2. Моделі знаходження імплікованої волатильності вироджених дифузійних процесів

Розглянемо властивості функції Блека-Шоулса як функції від імплікованої волатильності. Нехай ціна опціону визначена за допомогою функції Блека-Шоулса позначається $w^{BS}(\sigma)$:

$$w^{BS}(\sigma) := \exp(x)\mathcal{N}(d_+(\sigma)) - \exp(\kappa)\mathcal{N}(d_-(\sigma)) \quad (5.45)$$

де

$$\mathcal{N}(d_{\pm}(\sigma)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(x-\kappa \pm \sigma^2(T-t))/2}{\sigma\sqrt{T-t}}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$$

В цій формулі використовується волатильність, яка відповідає ціні опціону кол $w \in (\exp \kappa - \exp x, \exp x)$, така волатильність є єдиним додатним σ – розв’язком рівняння [36]

$$w^{BS}(\sigma) = w(t, x, y; T, \kappa, Y) \quad (5.46)$$

де

$$w(t, x, y; T, \kappa, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t, x, y; T, \kappa, Y) \quad (5.47)$$

Щоб знайти ймовірну волатильність для фіксованої точки $(t, x; T, \kappa)$, використаємо розклад в ряд Тейлора ціни Блека-Шоулса за степенями δ^n , де

$$\sigma = \sigma_0 + \delta, \quad \delta = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n, \quad (5.48)$$

тобто

$$w^{BS}(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} \partial_{\sigma}^n w^{BS}(\sigma_0).$$

Враховуючи (5.47) і (5.48), одержимо

$$w^{BS}(\sigma) = w^{BS}(\sigma_0 + \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} \partial_{\sigma}^n w^{BS}(\sigma_0) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad (5.49)$$

з (5.49) знайдемо невідомі σ_n . В якості σ_0 візьмемо

$$\sigma_0 = \left(2 \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{\frac{1}{2}} (T - t)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.50)$$

Щоб отримати w_n з (5.47), знайдемо $\partial_x w^{BS}(\sigma_0)$,

$\partial_x^2 w^{BS}(\sigma_0)$, $\partial_t w^{BS}(\sigma_0)$, оскільки

$$w^{BS}(\sigma_0) = \exp(x) \mathcal{N}(d_+(\sigma_0)) - \exp(\kappa) \mathcal{N}(d_-(\sigma_0)) = I_1 - I_2,$$

то

$$\begin{aligned} \partial_x I_1 &= \left(\exp(x) (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{(x-\kappa+\int_t^T a_0(\beta)d\beta)/\sqrt{2\int_t^T a_0(\beta)d\beta}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt \right)'_x \\ &= \exp(x) \mathcal{N}(d_+(\sigma_0)) + \exp(x) \exp\left\{-\frac{\left(x-\kappa+\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^2}{4\int_t^T a_0(\beta)d\beta}\right\} \\ &\quad \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta)d\beta} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

відповідно

$$\begin{aligned} \partial_x^2 I_1 &= \exp(x) \mathcal{N}(d_+(\sigma_0)) + 2 \exp(x) \exp\left\{-\frac{\left(x-\kappa+\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^2}{4\int_t^T a_0(\beta)d\beta}\right\} \\ &\quad \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta)d\beta} \right)^{-1} - \frac{\left(x-\kappa+\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)}{4\sqrt{\pi} \left(\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \exp\left\{x - \frac{\left(x-\kappa+\int_t^T a_0(\beta)d\beta\right)^2}{4\int_t^T a_0(\beta)d\beta}\right\}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

аналогічно

$$\partial_x I_2 = \exp(\kappa) \exp \left\{ - \left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \left(4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right\} \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1}, \quad (5.53)$$

а тому

$$\begin{aligned} \partial_x^2 I_1 = & - \left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right) \\ & \left(4 \sqrt{\pi \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^3} \right)^{-1} \exp \left\{ - \left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \left(4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Знайдемо $\partial_t I_1$, як похідну від інтеграла із змінною верхньою межею [28], яка в свою чергу є функцією від t

$$\begin{aligned} \partial_t I_1 = & \exp(x) \exp \left\{ - \left(x - \kappa + \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \left(4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right\} \\ & \left(-a \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} + \left(x - \kappa + \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right) \right. \\ & \left. a_0 \left(4 \sqrt{\pi \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^3} \right)^{-1} \right). \quad (5.54) \end{aligned}$$

Знайдемо похідну по t від I_2 .

$$\partial_t I_2 = \exp \left\{ \kappa - \left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \left(4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} \right\}$$

$$\left(a_0 \left(2 \sqrt{\pi \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)} \right)^{-1} + a_0 \left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right) \right. \\ \left. \left(4 \sqrt{\pi \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^3} \right)^{-1} \right). \quad (5.55)$$

Підставивши (5.51)(5.55) в оператор Колмогорова і врахувавши [62-63] що

$$\partial_y w^{BS}(\sigma_0) = 0,$$

маємо

$$-\partial_t w^{BS}(\sigma_0) - x \partial_y w^{BS}(\sigma_0) - a_0(t)(\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}(\sigma_0) = 0$$

тому в якості w_0 беремо $w^{BS}(\sigma_0)$.

Для знаходження наближень функції Блека-Шоулса використаємо метод рядів Тейлора. Знайдемо w_1 з рівняння

$$-\partial_t - x \partial_y - a_0(t)(\partial_x^2 - \partial_x) w_1 = ((x - \bar{x}) a_{10} + a_{01}(y - \bar{y}))(\partial_x^2 - \partial_x) w_0.$$

Використавши формулу Дюамеля, маємо:

$$w_1 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) ((\xi - \bar{x}) a_{10} + a_{01}(\eta - \bar{y}))(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) \\ - \partial_\xi) v_0 \\ = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) ((\xi - \bar{x}) a_{10} + a_{01}(\eta - \bar{y}))(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) \\ (I_1 - I_2) = H_1 + H_2.$$

Застосуємо інтегрування частинами, властивості фундаментального розв'язку задачі Коші дифузії з інерцією із змінними коефіцієнтами в параболічній частині $\mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta)$, зокрема:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) dy = \mathcal{E}^*(t, x, T, X),$$

фундаментальний розв'язок задачі Коші рівняння

$$-\partial_t w - a_0(\partial_x^2 - \partial_x)w = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) dy = 0.$$

Тому:

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) (\xi - \bar{x}) a_{10} (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) (I_1 - I_2) \\ &= \int_t^T ds \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \mathcal{E}^*(t, x, s, \xi) a_{10} (\xi - \bar{x}) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) (I_1 - I_2) \\ &= \int_t^T ds \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta - 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \\ &\quad \exp \left(- \frac{(\xi - x + \int_t^s a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} \right) \left(2 \sqrt{\pi \int_t^s a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) \\ &\quad \left(\exp(\xi) \int_{-\infty}^{(\xi - \kappa + \int_s^T a_0(\beta) d\beta) \left(\sqrt{2 \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1}} \exp \left(- \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha \right. \\ &\quad \left. - \exp(\kappa) \int_{-\infty}^{(\xi - \kappa + \int_s^T a_0(\beta) d\beta) \left(\sqrt{2 \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1}} \exp \left(- \frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha \right) (\sqrt{2\pi})^{-1}. \end{aligned}$$

Використаємо, що w_0 задовольняє рівняння

$$-\partial_t w_0 = a_0(t)(\partial_x^2 - \partial_x)w_0, \quad a_0(t) \neq 0.$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_t^T ds a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta - 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \int_{R^1} d\xi \mathcal{E}^*(t, x; s, \xi) \\ &\quad \left\{ \left(2 \sqrt{\pi \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} + \frac{(\xi - \kappa - \int_s^T a_0(\beta) d\beta)}{4\sqrt{\pi} \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{(\xi - \kappa - \int_s^T a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta)d\beta} + \kappa\right) - \exp\left(\xi - \frac{(\xi - \kappa + \int_t^s a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta)d\beta}\right) \\
& - \left(2 \sqrt{\pi \int_t^s a_0(\beta) d\beta}\right)^{-1} + \frac{(\xi - \kappa + \int_t^s a_0(\beta)d\beta)}{4\sqrt{\pi}(\int_t^s a_0(\beta)d\beta)^{3/2}} \Bigg\} \\
& = \int_t^T ds a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta)d\beta - 2 \int_t^s a_0(\beta)d\beta \partial_x \right) \\
& \int_{\mathbb{R}^1} \mathcal{E}^*(t, x; s, \xi) \left[\partial_\xi \left(\exp\left(\xi - \frac{(\xi - \kappa + \int_t^s a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta)d\beta}\right) (\partial_\xi - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. + \exp\left(\kappa - \frac{(\xi - \kappa - \int_s^T a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta)d\beta}\right) \right) \right] d\xi \left(2 \sqrt{\pi \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} \\
& = \int_t^T ds a_{10} \left(2 \sqrt{\pi \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} \left(x - \bar{x} \right. \\
& \quad \left. - \int_t^s a_0(\beta)d\beta - 2 \int_t^s a_0(\beta)d\beta \partial_x \right) \\
& \partial_x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}^*(t, x; s, \xi_1) \left(\exp\left(\xi - \frac{(\xi - \kappa + \int_t^s a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta)d\beta}\right) \right) d\xi - (\partial_x - 1) \\
& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}^*(t, x; s, \xi_1) \exp\left(\kappa - \frac{(\xi - \kappa + \int_s^T a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta)d\beta}\right) d\xi \Bigg]
\end{aligned}$$

Щоб обчислити ці інтеграли, виділимо повні квадрати по ξ в показнику експоненти, яка є добутком експонент в кожному інтегралі по ξ .

$$\frac{(\xi - x + \int_t^s a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta)d\beta} + \frac{(\xi - \kappa + \int_s^T a_0(\beta)d\beta)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta)d\beta} - \xi =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi^2 - 2\xi x + 2\xi \int_t^s a_0(\beta) d\beta}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} + \frac{x^2 - 2x \int_t^s a_0(\beta) d\beta + \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta\right)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} - \xi \\
& + \frac{\xi^2 - 2\xi \int_s^T a_0(\beta) d\beta - 2\kappa\xi - 2\kappa \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa^2 + \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta\right)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \\
& = \frac{\xi^2 \int_t^T a_0(\beta) d\beta}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta} + 2\xi \sqrt{\int_t^T a_0(\beta) d\beta} \left(-x \int_s^t a_0(\beta) d\beta \right. \\
& \left. + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta - \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta - 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right) \\
& \left(2 \sqrt{\int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta} 2 \sqrt{\int_s^t a_0(\beta) d\beta \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} \\
& \pm \frac{\left(x \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \\
& + \frac{x^2 - 2x \int_t^s a_0(\beta) d\beta + \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta\right)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} \\
& + \frac{\kappa^2 - 2\kappa \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta\right)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} = \\
& \left(\xi \left(\frac{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. - \frac{x \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta}{2 \sqrt{\int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(x \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta\right)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{(x - \int_t^s a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} + \\
& \frac{\left(\kappa - \int_s^T a_0(\beta) d\beta\right)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta) d\beta}.
\end{aligned}$$

Зведемо подібні доданки в чисельнику дробу, що дорівнює сумі трьох останніх доданків у останньому виразі.

$$\begin{aligned}
& x^2 \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \right) - 2x\kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta \\
& \int_s^T a_0(\beta) d\beta - 2x \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \\
& \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - 2\kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta + \\
& \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa^2 \\
& \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}
& \left(x^2 \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - 2x\kappa \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^s a_0(\beta) d\beta - 2\kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right. \\
& \left. \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - 2K \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - \kappa^2 \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \\
& \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa^2 \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta \Bigg) \\
& \left(4 \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Отже в показнику експоненти маємо:

$$\begin{aligned}
& - \left(\xi \sqrt{\frac{\int_t^T a_0(\beta) d\beta}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{x \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta}{2 \sqrt{\int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta}} \right)^2 \\
& \quad - \frac{\left(x - \kappa + \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} + x.
\end{aligned}$$

Зробивши заміну змінної

$$\begin{aligned}
& \left(\xi \int_t^T a_0(\beta) d\beta / \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^{1/2} \\
& \quad - \left(x \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right) \\
& \quad \left(2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1/2} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

одержимо

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}^*(t, x; s, \xi_1) \exp \left(\xi \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left(\xi - x + \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta) d\beta} \right) d\xi \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} \\
& = \exp \left\{ - \frac{\left(x - \kappa + \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \kappa \right\} \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} . \\
& H_1 = \int_t^T ds a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta - 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \partial_x \\
& \left[\exp \left\{ x - \frac{\left(x - \kappa + \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} - \exp \left\{ \kappa - \frac{\left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \right] \\
& \quad + \int_t^T ds a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta - 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \\
& \quad \exp \left\{ \kappa - \frac{\left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

Другий доданок одержується аналогічно, виділенням повного квадрата в показнику експоненти. Запишемо аналітично виділення повного квадрата

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\xi - x - \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} - \kappa + \frac{\left(\xi - \kappa - \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta) d\beta} = \\
& \left(\xi^2 \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta + \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right) + 2\xi \left(-x + \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right) \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-x + \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 - 2\xi \left(\kappa + \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right) \int_t^s a_0(\beta) d\beta \\
& \left(\kappa + \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \left(4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} = \\
& \left(\xi \left(\int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(-x \int_s^T a_0(\beta) d\beta - \right. \right. \\
& \left. \left. \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right) 2^{-1} \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \\
& - \frac{\left(x \int_s^T a_0(\beta) d\beta + \kappa \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_s^t a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta} + \frac{\left(-x + \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^s a_0(\beta) d\beta} \\
& + \frac{\left(\kappa + \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_s^T a_0(\beta) d\beta} - \kappa.
\end{aligned}$$

Згрупуємо всі доданки, які містять x^2 та x ;

$$\begin{aligned}
& x^2 \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta - \int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \\
& = x^2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta ;
\end{aligned}$$

З степенями x^0 ; x ; маємо

$$-2x\kappa \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^s a_0(\beta) d\beta - 2x \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta + 2\kappa$$

$$\begin{aligned}
& \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta + K^2 \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right. \\
& \left. - \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \right) + \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^2 \int_s^T a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta \\
& + \left(\int_s^T a_0(\beta) d\beta \right)^2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \int_t^T a_0(\beta) d\beta.
\end{aligned}$$

Тоді отримаємо:

$$\frac{\left(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} - \kappa$$

Обчислимо H_2 використовуючи усі вище наведені міркування:

$$H_2 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) a_{01}(\eta - \bar{y}) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) v_0.$$

Використаємо

$$\begin{aligned}
\eta - \bar{y} &= \eta \mp y \pm x(s - t) \pm \left(\xi - x + \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right) \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \\
\left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} &\pm \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta - \bar{y} = y - \bar{y} - x(s - t) + (\xi - x) + \\
&\int_t^s a_0(\beta) d\beta \left(\int_t^s a_0(\beta) d\beta \right)^{-1} + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta + 2c^*(t, s) \partial_y = \\
&y - \bar{y} - x(s - t) - 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x +
\end{aligned}$$

$$2 \left(c^*(t, s) + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right) \partial_y \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta,$$

оскільки похідні по y від

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) dy = 0,$$

то

$$\begin{aligned} H_2 = & \int_t^T ds \left(y - \bar{y} - x(s - t) + 2\partial_x \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right. \\ & \left. + \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right) \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}^*(t, x, s, \xi) a_{01}(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) v_0 d\xi = \int_t^T ds a_{01}(y - \bar{y} - x(s - t) + \\ & \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x) \left[\partial_x \left(2\sqrt{\pi} \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^{-1/2} \right. \\ & \left. \left(\exp \left\{ -\frac{(x - \kappa + \int_t^T a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} + x \right) - \right. \\ & \left. \exp \left\{ \kappa - \frac{(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \right] + \int_t^T ds a_{01}(y - \bar{y} - x(s - t) + \\ & 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x - \exp \left\{ \kappa - \frac{(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \\ & \left. \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Додавши H_1 і H_2 , одержимо w_1 :

$$\begin{aligned}
 w_1(t, x, T, \kappa) = & \int_t^T ds \left(a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \partial_x + \right. \\
 & a_{01} \left(y - \bar{y} - x(s - t) - 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right. \\
 & \left. \left. + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \partial_x \right) \\
 & \left(\exp \left\{ x - \frac{(x - \kappa + \int_t^T a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} - \exp \left\{ \kappa - \frac{(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \right) \\
 & \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1} \\
 & + \int_t^T ds a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \\
 & \exp \left\{ \kappa - \frac{(x - \kappa - \int_t^T a_0(\beta) d\beta)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

Знайдемо, w_2 з рівняння

$$-\partial_t - x\partial_y - a_0(\partial_x^2 - \partial_x)w_2 = \mathcal{P}_1 w_1 + \mathcal{P}_2 w_0,$$

де

$$\mathcal{P}_1 = (a_{10}(x - \bar{x}) + a_{01}(y - \bar{y}))(\partial_x^2 - \partial_x)$$

$$\mathcal{P}_2 = (a_{20}(x - \bar{x})^2 + a_{11}(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + a_{02}(y - \bar{y})^2)(\partial_x^2 - \partial_x)$$

Використовуючи формулу Дюамеля,

$$\begin{aligned}
w_2 &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) (\mathcal{P}_1 w_1 + \mathcal{P}_2 w_0) \\
&= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) (a_{10}(\xi - \bar{x}) + a_{01}(\eta - \bar{y}))(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w_1 \\
&\quad + (a_{20}(\xi - \bar{x})^2 + a_{11}(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y}) + a_{02}(\eta - \bar{y})^2)(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w_0 \\
&= H_3 + H_4,
\end{aligned}$$

де H_3 має вигляд

$$\begin{aligned}
H_3 &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) (a_{20}(\xi - \bar{x})^2 + a_{11}(\xi - \bar{x})(\eta - \bar{y}) \\
&\quad + a_{02}(\eta - \bar{y})^2)(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w_0.
\end{aligned}$$

Використовуючи попередні обчислення і аналогічні міркування одержимо

$$\begin{aligned}
H_3 &= \int_t^T ds a_{20} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \mathcal{E}^*(t, x, s, \xi) \\
&\quad (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) v_0 + \int_t^T ds a_{11} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \\
&\quad \left(y - \bar{y} - x(s - t) - \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \\
&\quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \mathcal{E}^*(t, x, s, \xi) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) v_0 + \int_t^T ds a_{02}
\end{aligned}$$

$$\left(y - \bar{y} - x(s - t) + 2 \int_t^s (s - t) a_0(\beta) d\beta \partial_x - \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \right)^2 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \mathcal{E}^*(t, x, s, \xi) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w_0.$$

З обчислення H_1 і H_2 , маємо:

$$H_3 = \int_t^T ds \left[a_{20} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^2 + \right. \\ \left. a_{11} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \right. \\ \left(y - \bar{y} - x(s - t) - \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) + \\ \left. a_{02} \left(y - \bar{y} - x(s - t) - \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^2 \right] \\ \left\{ \partial_x \left[\exp \left\{ x - \frac{\left(x - k + \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \exp \left\{ k - \frac{\left(x - k - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \right] \right. \\ \left. \left. + \exp \left\{ k - \frac{\left(x - k - \int_t^T a_0(\beta) d\beta \right)^2}{4 \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right\} \right] \right\} \left(2 \sqrt{\pi \int_t^T a_0(\beta) d\beta} \right)^{-1}.$$

Враховуючи значення $(\partial_x - 1)w_0$ одержимо

$$\begin{aligned}
H_3 = \int_t^T ds \left[\sum_{j=0}^2 a_{2-j,j} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \right. \\
\left. \left(y - \bar{y} - x(s-t) - \int_t^s (\beta-s) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s (\beta-s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \right] \\
(\partial_x^2 - \partial_x) w_0.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Для знаходження w_2 , залишилося обчислити H_4 :

$$\begin{aligned}
H_4 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) (a_{10}(\xi - \bar{x}) + a_{01}(\eta - \bar{y})) (\partial_\xi^2 \\
- \partial_\xi) w_0 \\
\int_t^T ds_1 \left[\left(\xi - x - \int_s^{s_1} a_0(\beta) d\beta + 2 \int_s^{s_1} a_0(\beta) d\beta \partial_\xi \right) + a_{01} \right. \\
\left. \left(\eta - \bar{y} - \xi(s_1 - s) - \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_\xi \right) \right] \\
(\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w_0 = \int_t^T ds \left[a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^s a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) + \right. \\
a_{01} \left(y - \bar{y} - x(s-t) - \int_t^s (\beta-s) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^s (\beta-s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \\
(\partial_x^2 - \partial_x) \int_t^T ds \left[a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^{s_1} a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_1} a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) + a_{01} \right. \\
\left. \left(y - \bar{y} - x(s_1-t) - \int_t^{s_1} (\beta-s_1) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_1} (\beta-s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \right] \\
(\partial_x^2 - \partial_x) w_0.
\end{aligned}$$

При обчисленні H_4 використано інтегрування частинами, властивості щільності розподілу $\mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta)$ та обчислення інтегралів H_1, H_2 при цьому оператор

$$\eta - \bar{y} - \xi(s_1 - s) - \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_\xi$$

переходить в

$$y - \bar{y} - x(s_1 - t) - \int_t^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_x$$

Дійсно

$$\begin{aligned} \eta - \bar{y} - \xi(s_1 - s) - \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_\xi = \\ y - \bar{y} - x(s - t) - x(s_1 - s) - \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \\ + 2 \int_s^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_x \\ + \int_t^s (s_1 - s) a_0(\beta) d\beta - 2 \int_t^s (s_1 - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x + 2 \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \\ - \\ \int_t^s (\beta - s) a_0(\beta) d\beta = y - \bar{y} - x(s_1 - t) - \int_t^s (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \\ + 2 \int_t^s (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_x. \end{aligned}$$

Враховуючи значення H_3 і H_4 одержимо формулу для w_2 :

$$w_2 = \int_t^T ds_1 \mathcal{B}_{12}(t, s_1) w_0 + \int_t^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \mathcal{B}_{11}(t, s_1) \mathcal{B}_{21}(t, s_2) w_0,$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{12}(t, s_1) = & \sum_{j=0}^2 a_{2-j,j} \left(x - \bar{x} - \int_t^{s_1} a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_1} a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^{2-j} \\ & \left(y - \bar{y} - x(s_1 - t) - \int_t^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_1} (\beta - s_1) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^j \\ & (\partial_x^2 - \partial_x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j1}(t, s_j) = & \left[a_{01} \left(y - \bar{y} - x(s_j - t) - \int_t^{s_j} (\beta - s) a_0(\beta) d\beta + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \int_t^{s_j} (\beta - s) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) + a_{10} \left(x - \bar{x} - \int_t^{s_j} a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_j} a_0(\beta) d\beta \partial_x \right) \right] \\ & (\partial_x^2 - \partial_x), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Методом математичної індукції доводимо, що

$$\begin{aligned} w_n = & \int_t^T ds_1 \mathcal{B}_{1n}(t, s_1) w_0 + \int_t^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \mathcal{B}_{1n-1}(t, s_1) \mathcal{B}_{21}(t, s_2) w_0 + \dots + \\ & \int_t^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \dots \int_{s_{l-1}}^T ds_l \mathcal{B}_{1j_1}(t, s_1) \mathcal{B}_{2j_2}(t, s_2) \dots \mathcal{B}_{lj_l}(t, s_l) w_0 + \dots + \\ & \int_t^T ds_1 \int_{s_1}^T ds_2 \dots \int_{s_{n-1}}^T ds_n \mathcal{B}_{11}(t, s_1) \mathcal{B}_{22}(t, s_2) \dots \mathcal{B}_{kn}(t, s_n) w_0, \quad n \in N, \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{B}_{1j_k}(t, s_k) = \sum_{i=0}^{j_k} a_{j_k-i,i} \left(x - \bar{x} - \int_t^{s_k} a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_k} a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^{j_k-i}$$

$$\left(y - \bar{y} - x(s_k - t) - \int_t^{s_k} (\beta - s_k) a_0(\beta) d\beta + 2 \int_t^{s_k} (\beta - s_k) a_0(\beta) d\beta \partial_x \right)^i (\partial_x^2 - \partial_x), \quad j_1 + \dots + j_k = n. \quad (5.57)$$

Для обчислення наближення імплікованої волатильності, запишемо розклад в ряд Тейлора функції Блека-Шоулса по степенях σ_n . Оскільки функція Блека-Шоулса (ціна) w^{BS} має вигляд [224]

$$w^{BS}(\sigma_0 + \varepsilon) = w^{BS}(\sigma_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{\sigma}^n w^{BS}(\sigma_0) \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad (5.58)$$

де w_n задовольняє (5.57),

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n,$$

σ_n -приріст імплікованої волатильності. Із (5.58) маємо нульове наближення σ_0

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2 \int_t^T a_0(\beta) d\beta}{T - t}}, \quad (5.59)$$

$$w_1 = \sigma_1 \partial_{\sigma} w^{BS}(\sigma_0),$$

тому

$$\sigma_1 = \frac{w_1}{\partial_{\sigma} w^{BS}(\sigma_0)}. \quad (5.60)$$

Для знаходження другого наближення σ_2 використовуємо таку рівність:

$$w_2 = \sigma_2 \partial_{\sigma} w^{BS}(\sigma_0) + \frac{1}{2} \sigma_1 \partial_{\sigma}^2 w^{BS}(\sigma_0)$$

звідси

$$\sigma_2 = \frac{w_2}{\partial_{\sigma} w^{BS}(\sigma_0)} - \frac{\frac{1}{2} \sigma_1 \partial_{\sigma}^2 w^{BS}(\sigma_0)}{\partial_{\sigma} w^{BS}(\sigma_0)}, \quad (5.61)$$

Щоб знайти третє наближення σ_3 використовуємо рівність:

$$w_3 = \sigma_3 \partial_\sigma w^{BS}(\sigma_0) + \frac{1}{3!} \sigma_1^3 \partial_\sigma^3 w^{BS}(\sigma_0) + \frac{1}{2!} 2\sigma_1 \sigma_2 \partial_\sigma^2 w^{BS}(\sigma_0),$$

звідси

$$\sigma_3 = \frac{w_3}{\partial_\sigma w(\sigma_0)} - \frac{\frac{1}{3!} \sigma_1^3 \partial_\sigma^3 w^{BS}(\sigma_0) + \sigma_1 \sigma_2 \partial_\sigma^2 w^{BS}(\sigma_0)}{\partial_\sigma w^{BS}(\sigma_0)},$$

Для n-го наближення маємо

$$w_n = \sigma_n \partial_\sigma w^{BS}(\sigma_0) + \frac{1}{2!} 2\sigma_{n-1} \partial_\sigma^2 w^{BS}(\sigma_0) + \frac{1}{3!} 3\sigma_{n-2}^2 \sigma_2 \partial_\sigma^3 w^{BS}(\sigma_0) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \sigma_1^n \partial_\sigma^n w^{BS}(\sigma_0),$$

Послідовно знайшовши $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, підставляємо їх в формулу .

$$\sigma_n = \frac{w_n}{\partial_\sigma w^{BS}(\sigma_0)}$$

$$- \left(\frac{1}{n!} \sigma_1^n \partial_\sigma^n w^{BS}(\sigma_0) + \frac{1}{(n-1)!} (n-1) \sigma_1^{n-1} \sigma_2 \partial_\sigma^{n-1} w^{BS}(\sigma_0) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!} 3\sigma_2^2 \sigma_{n-2} \partial_\sigma^2 w^{BS}(\sigma_0) + \frac{1}{2!} 2\sigma_1 \sigma_{n-1} \partial_\sigma^2 w^{BS}(\sigma_0) \right)$$

Варто також врахувати, що ціни на європейські опціони зазвичай котируються в одиницях непрямой міри, а не в грошових одиницях [38]. Фактично, у фінансовій індустрії, параметри моделі для нейтральної для ризику динаміки системи безпеки регулярно отримують шляхом калібрування на ймовірну поверхню волатильності на ринку. Оскільки калібрування вимагає обчислень, які б передбачували коливання за різними цінами (страйками) та термінами погашення, значним набором параметрів моделі, тоді надзвичайно важливо мати швидкий метод обчислення ймовірних коливань [12, 19].

Розглянемо $\partial_t - x\partial_y + \frac{e^y}{2}(\partial_x^2 - \partial_x)$ – оператор Колмогорова що відповідає виродженій моделі Хестона (виродження по y).

$\bar{y}$ – фіксоване

$$\partial_t - x\partial_y + \frac{e^{\bar{y}}}{2}(\partial_x^2 - \partial_x) = -\frac{e^{\bar{y}}}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} (y - \bar{y})^h (\partial_x^2 - \partial_x).$$

$\partial_t - x\partial_y + \frac{e^{\bar{y}}}{2}(\partial_x^2 - \partial_x)$ має фундаментальний розв'язок.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x, y; T, x', y') = \exp \left\{ - \left(x' - x + \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right)^2 (2e^{\bar{y}}(T - t))^{-1} - \right. \\ \left. \left(y' - y + x(T - t) + \left(x' - x + \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right) \frac{(T - t)}{2} + \frac{e^{\bar{y}}}{2} \frac{(T - t)^2}{2} \right)^2 \right. \\ \left. \left(\frac{e^{\bar{y}}}{6} (T - t)^3 \right)^{-1} \right\} \frac{\sqrt{3}}{2\pi e^{\bar{y}}(T - t)^2}, \quad T - t > 0, \quad (x, y) \in R^2. \end{aligned}$$

Перше наближення

$$w^{BS} = e^x N(d_+) - e^{\kappa} N(d_-).$$

$w_0 = w^{BS}$ функція Блека-Шоулса, це функція залежності ціни від волатильності в точці $\sigma_0 = \frac{e^{\bar{y}}}{2}$, ціна кол опціону $w(t, x) \in (e^x - e^{\kappa}, e^x)$.

w_1 –перше наближення дохідності [122].

$$\begin{aligned} w_1 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) \frac{e^{\bar{y}}}{2} (\eta + \bar{y}) (\partial_{\xi}^2 - \partial_{\xi}) w^{BS} = \\ \frac{e^{\bar{y}}}{2} \int_t^T ds \left(y - \bar{y} - x(s - t) - e^{\bar{y}}(s - t)^2 \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(s - t)^3}{12} \partial_y + \right. \\ \left. \frac{e^{\bar{y}}(s - t)^2}{4} \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} = \frac{e^{\bar{y}}}{2} \left((y - \bar{y})(T - t) - x \frac{(T - t)^2}{2} \right. \\ \left. + e^{\bar{y}} \frac{(T - t)^3}{3} \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(T - t)^3}{12} \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}. \end{aligned}$$

Тут враховано, що $w^{BS'}_y = 0$. Знайдемо друге наближення w_2 :

$$w_2 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) \left(\frac{e^{\bar{y}}}{4} (\eta - \bar{y})^2 (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) v^* + \right. \\ \left. + \frac{e^{\bar{y}}}{2} (\eta - \bar{y}) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w_1 \right) = I_1 + I_2.$$

$$I_2 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) \left(\frac{e^{\bar{y}}}{2} (\eta - \bar{y}) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) \frac{e^{\bar{y}}}{2} ((\eta - \bar{y}) \right. \\ \left. (T - s) - \frac{\xi(T - s)^2}{2} + \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^3}{3} \partial_\xi - \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^3}{12}) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w^{BS} \right);$$

Замінімо $\eta - \bar{y}$ через диференціювання щільності по η і відповідно по y .

$$I_2 = \frac{e^{2\bar{y}}}{4} \int_t^T ds \left(y - \bar{y} - x(s - t) + e^{\bar{y}}(s - t)^2 \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(s - t)^3}{12} \partial_y \right. \\ \left. - \frac{e^{\bar{y}}(s - t)^2}{2} \right) \left((\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 - (\partial_x + (s - t) \partial_y) \right) \\ \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) \left((\eta - \bar{y})(T - s) - \frac{\xi(T - s)^2}{2} + \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^3}{3} \partial_\xi \right. \\ \left. - \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^3}{12} \right) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w^{BS} = \frac{e^{2\bar{y}}}{4} \int_t^T ds (y - \bar{y} - x(s - t) + e^{\bar{y}}(s - t)^2 \partial_x \\ - \frac{e^{\bar{y}}(s - t)^3}{12} \partial_y - \frac{e^{\bar{y}}(s - t)^2}{2}) \left((\partial_x + (s - t) \partial_y)^2 - (\partial_x + (s - t) \partial_y) \right) \\ \left[\left(y - \bar{y} - x(s - t) + e^{\bar{y}}(s - t)^2 \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(s - t)^2}{2} \right) (T - s) \right. \\ \left. + \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^2}{2} (s - t) \partial_x + \frac{x(T - s)^2}{2} + \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^2}{4} (s - t) + \right. \\ \left. \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^3}{3} \partial_x - \frac{e^{\bar{y}}(T - s)^3}{12} \right] (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS};$$

Зробимо деякі спрощення виразу для I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{e^{2\bar{y}}}{4} \int_t^T ds \left(y - \bar{y} - x(s-t) + \frac{e^{\bar{y}}(s-t)^3}{12} \partial_y + e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x \right. \\
& + \frac{e^{\bar{y}}(s-t)^2}{2} \left. \left\{ \left((t-s)(T-s) + e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x^2 + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (s-t) \partial_x^2 - \frac{(T-s)^2}{2} + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^3}{3} \partial_x^2 \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} - \right. \right. \\
& \left[\left(y - \bar{y} - x(s-t) + e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(s-t)^2}{2} \right) (T-s) - \right. \\
& \left. \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{2} (s-t) \partial_x + \frac{x(T-s)^2}{2} + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{4} (s-t) \right. \\
& \left. \left. + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^3}{3} \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^3}{12} \right] (\partial_x^2 - \partial_x)^2 w^{BS} \right\} \\
& + \frac{e^{2\bar{y}}}{4} \int_t^T ds \left(y - \bar{y} - x(s-t) + e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(s-t)^2}{2} \right) \\
& \left(e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x^3 + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{2} (s-t) \partial_x^3 + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{3} \partial_x^3 \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} = \\
& \frac{e^{2\bar{y}}}{4} \int_t^T ds \left(y - \bar{y} - x(s-t) + e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x - \frac{e^{\bar{y}}(s-t)^2}{2} \right) \\
& \left((t-s)(T-s) + e^{\bar{y}}(s-t)^2 (T-s) \partial_x^2 + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{2} (s-t) \partial_x^2 - \right. \\
& \left. \frac{(T-s)^2}{2} + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^3}{3} \partial_x^2 - e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x^3 \right. \\
& \left. - \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{2} (s-t) \partial_x^3 - \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^3}{3} \partial_x^3 \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} + \\
& \frac{e^{2\bar{y}}}{4} \int_t^T ds \left(\left[\left(y - \bar{y} - x(s-t) + e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(s-t)^2}{2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. (T-s) - \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{2} (s-t) + x \frac{(T-s)^2}{2} + \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^2}{4} (s-t) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^3}{3} \partial_x - \frac{e^{\bar{y}}(T-s)^3}{12} \Big] \Big(y - \bar{y} - x(s-t) - e^{\bar{y}}(s-t)^2 \partial_x + \frac{e^{\bar{y}}(s-t)^2}{2} \Big) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}.$$

Обчислимо ці інтеграли і будемо мати

$$\begin{aligned} I_2 = & 2(y - \bar{y}) \left[\frac{(T-t)^2(y - \bar{y})}{4} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^3}{3} \partial_x^2 + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{24} \partial_x^2 - \frac{(T-t)^3}{6} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{12} \partial_x^2 - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^3}{3} \partial_x^3 - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{24} \partial_x^3 - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{12} \partial_x^3 \right] + 2x \left[\frac{(T-t)^3}{3} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{4} \partial_x^2 - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{60} \partial_x^2 + \frac{(T-t)^4}{24} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{180} \partial_x^2 + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{4} \partial_x^3 + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{60} \partial_x^3 + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{180} \partial_x^3 \right] - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (4\partial_x - 1) \left[\frac{(T-t)^4}{4} \frac{e^{\bar{y}}(4\partial_x - 1)}{4} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{5} \partial_x^2 + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^6}{120} \partial_x^2 - \frac{(T-t)^5}{60} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{5} \partial_x^3 - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^6}{120} \partial_x^3 - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^6}{180} \partial_x^3 \right] (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} - \\ & \left((y - \bar{y}) \frac{(T-t)^2}{2} - x \frac{(T-t)^3}{6} + \frac{e^{\bar{y}}}{4} (4\partial_x + 1) \frac{(T-t)^4}{12} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{24} \partial_x + \frac{x(T-t)^3}{6} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{48} + \frac{e^{\bar{y}}}{48} (4\partial_x + 1) (T-t)^4 \right) \partial_x + \\ & \left((y - \bar{y}) \frac{(T-t)^2}{2} - x \frac{(T-t)^3}{6} - \frac{e^{\bar{y}}}{4} (4\partial_x + 1) \frac{(T-t)^4}{12} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{24} \partial_x + \frac{x(T-t)^3}{6} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{48} - \frac{e^{\bar{y}}}{48} (4\partial_x + 1) (T-t)^4 \right) \partial_x^2 (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}. \end{aligned}$$

Знайдемо I_1 :

$$I_1 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}(t, x, y; s, \xi, \eta) \frac{e^{\bar{y}}}{4} ((\eta - \bar{y}))^2 (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w^{BS} =$$

$$\frac{e^{\bar{y}}}{4} \int_t^T ds \left(y - \bar{y} - x(s - t) + \frac{e^{\bar{y}}}{4} (s - t)^2 (4\partial_x - 1) \right)^2 (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}.$$

Піднісши до квадрату, обчислимо I_1 :

$$I_1 = \frac{e^{\bar{y}}}{4} \int_t^T ds \left((y - \bar{y})^2 + x^2(s - t)^2 + \frac{e^{2\bar{y}}}{16} (s - t)^4 (4\partial_x - 1)^2 \right.$$

$$\left. - 2(y - \bar{y})x(s - t) - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (y - \bar{y})(s - t)^2 (4\partial_x - 1) \right.$$

$$\left. + x \frac{e^{\bar{y}}}{2} (s - t)^3 (4\partial_x - 1) \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} = \frac{e^{\bar{y}}}{4} ((y - \bar{y})^2 (T - t)^3$$

$$+ \frac{x^2(T - t)}{3} + \frac{e^{2\bar{y}}}{80} (T - t)^5 (4\partial_x - 1)^2 - 2x(y - \bar{y}) \frac{(T - t)^2}{2}$$

$$- \frac{e^{\bar{y}}}{6} (y - \bar{y})(4\partial_x - 1)(T - t)^3 + \frac{xe^{\bar{y}}}{8} (4\partial_x - 1)(T - t)^4)$$

$$(\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}.$$

Зауважимо, що

$$w_0 = w^{BS},$$

$$w_1 = \frac{e^{\bar{y}}}{2} \left((y - \bar{y})(T - t) - x \frac{(T - t)^2}{2} - \frac{e^{\bar{y}}}{12} (4\partial_x + 1)(T - t)^3 \right) (\partial_x^2$$

$$- \partial_x) w^{BS}.$$

$$w_2 = I_1 + I_2.$$

Маючи наближення w_1 , знайдемо наближення волатильності:

$$\sigma_0 = e^{\frac{\bar{y}}{2}}, \quad \sigma_1 = \frac{w_1}{\partial_\sigma w^{BS}}.$$

Підставимо значення w_1 в чисельник формули для σ_1 (першого наближення волатильності)

σ_1

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{e^{\bar{y}}}{2} \left((y - \bar{y})(T - t) - x \frac{(T - t)^2}{2} - \frac{e^{\bar{y}}}{12} (4\partial_x - 1)(T - t)^3 \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} \right)}{\partial_\sigma v^*} \\
 &= \frac{\left(\frac{e^{\bar{y}}}{2} \left((y - \bar{y})(T - t) - x \frac{(T - t)^2}{2} - \frac{e^{\bar{y}}}{12} (4\partial_x - 1)(T - t)^3 \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} \right)}{e^{\frac{\bar{y}}{2}} (T - t) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}}.
 \end{aligned}$$

Для обчислення можна використати похідну w'_t

$$\begin{aligned}
 w'_t &= (\sqrt{2\pi})^{-1} \left(\exp \left\{ x - \frac{\left(x - \kappa + \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right)^2}{2e^{\bar{y}}(T - t)} \right\} \frac{x - \kappa + \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t)}{2e^{\frac{\bar{y}}{2}}(T - t)^{3/2}} \right. \\
 &\quad \left. \exp \left\{ \kappa - \frac{\left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right)^2}{2e^{\bar{y}}(T - t)} \right\} \frac{x - \kappa + \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t)}{2e^{\frac{\bar{y}}{2}}(T - t)^{3/2}} \right).
 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \frac{w_1}{\partial_\sigma w^{BS}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{\bar{y}} \left((y - \bar{y})(T - t) - \frac{x(T - t)^2}{2} - \frac{e^{\bar{y}}(T - t)^3}{12} \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}}{2e^{\frac{\bar{y}}{2}}(T - t) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}} \\
 &= \frac{e^{2\bar{y}}(T - t)^3 \partial_x (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}}{6e^{\frac{\bar{y}}{2}}(T - t) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}} = \frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}}{2(T - t)} \left((y - \bar{y})(T - t) - \frac{x(T - t)^2}{2} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{e^{\bar{y}}(T - t)^3}{12} \right) - \frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}(T - t)^3}{6(T - t)} \frac{2e^{\bar{y}} \left(x - \kappa - e^{\frac{\bar{y}}{2}}(T - t) \right)}{e^{\frac{\bar{y}}{2}} \sqrt{2(T - t)}} \frac{1}{e^{\frac{\bar{y}}{2}} \sqrt{2(T - t)}}.
 \end{aligned}$$

Отримаємо наступне значення

$$\sigma_1 = -\frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}}{6} \left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right) (T - t) + e^{\frac{\bar{y}}{2}} \left((y - \bar{y}) - \frac{x(T - t)}{2} - \frac{e^{\bar{y}}}{12} (T - t)^2 \right).$$

Знайдемо σ_2 ,

$$\sigma_2 = \frac{w_2 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \partial_\sigma^2 w^{BS}}{\partial_\sigma w^{BS}}.$$

Використаємо, що

$$\partial_\sigma w^{BS} = \sigma_0 (T - t) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}$$

тоді другий доданок матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{2} \sigma_1^2 \partial_\sigma^2 w^{BS}}{\partial_\sigma w^{BS}} &= \frac{-\frac{1}{2} \sigma_1^2 \partial_\sigma (\sigma_0 (T - t) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS})}{(T - t) \sigma_0 (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \sigma_1^2 (\partial_x^2 - \partial_x) (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} \sigma_0 (T - t)}{(\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}} = -\frac{1}{2} \sigma_1^2 \sigma_0 (T - t) \\ &\quad \left(\frac{\partial_x^2 (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}}{(\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}} - \frac{\partial_x (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}}{(\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS}} \right). \end{aligned}$$

Підставимо значення σ_1 в одержаний вираз, а також підставимо значення відношення похідних

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{2} \sigma_1^2 \partial_\sigma^2 w^{BS}}{\partial_\sigma w^{BS}} &= -\frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}} (T - t)}{2} \left(-\frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}}{6} \left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right) (T - t) \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{\bar{y}}{2}} \left((y - \bar{y}) - \frac{x(T - t)}{2} - \frac{e^{\bar{y}}}{12} (T - t)^2 \right) \right)^2 \left[\left(-\frac{1}{e^{\frac{\bar{y}}{2}} \sqrt{2(T - t)}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-2 + \frac{2 \left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right)^2}{e^{\bar{y}} (T - t)} - \frac{x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t)}{e^{\bar{y}} (T - t)} \right) \\
& = \frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}}{2} \left[-\frac{(T - t)}{6} \left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right) + e^{\frac{\bar{y}}{2}} \left((y - \bar{y}) - \frac{x(T - t)}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{e^{\bar{y}}}{12} (T - t)^2 \right) \right]^2 \left(-1 + \frac{\left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right)^2}{e^{\bar{y}} (T - t)} - \left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{y}}}{2} (T - t) \right) \right). \quad (5.62)
\end{aligned}$$

Потрібно обчислити $\frac{w_2}{\partial_\sigma w^{BS}}$ перший доданок виразу для σ_2 .

Враховуючи значення w'_t , знайдемо

$$\begin{aligned}
\frac{w_2}{\partial_\sigma w^{BS}} &= -\frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}}{4e^{\frac{\bar{y}}{2}}(T-t)(\partial_x^2 - \partial_x)w^{BS}} \left\{ \left[(y - \bar{y}) \left(\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^3}{3} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{8} \right) \right. \right. \\
&+ \\
& x \left(-\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{4} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{45} \right) - e^{\bar{y}} \left(\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{5} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^6}{72} \right) - \frac{e^{\bar{y}}}{4} \\
& \left. \left(\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{5} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^6}{72} \right) \right] \partial_x^3 (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} - \\
& \left[(y - \bar{y}) \left(\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^3}{3} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{8} \right) + x \left(-\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{4} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{45} \right) - \right. \\
& (y - \bar{y})^2 \frac{(T-t)^2}{2} - \frac{x^2(T-t)^3}{3} - \frac{e^{2\bar{y}}(T-t)^5}{5} \\
& \left. - \frac{e^{\bar{y}}}{4} \left(\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{5} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^6}{72} \right) \right] (\partial_x^2 - \partial_x)(\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} + \\
& + \left[(y - \bar{y}) \frac{(T-t)^2}{6} + x \left(\frac{(T-t)^3}{3} - \frac{(T-t)^4}{24} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{e^{\bar{y}}}{3} \left(\frac{(T-t)^4}{4} - \frac{(T-t)^5}{60} \right) \Big] (\partial_x^2 - \partial_x) w^{BS} \Big\}.$$

Після спрощень отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{\partial_\sigma w^{BS}} = & -\frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}}{4} \left\{ (y - \bar{y}) \frac{(T-t)}{3} + x \left(\frac{(T-t)^2}{3} - \frac{(T-t)^3}{24} \right) - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^3}{3} \right. \\ & + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{240} + \frac{e^{\frac{\bar{y}}{2}}}{4} \left(-\frac{e^{\bar{y}}(T-t)^3}{3} + \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{60} \right) \Big\} \frac{2 \left(x - k - \frac{e^{\bar{y}}}{2}(T-t) \right)}{2e^{\bar{y}}(T-t)} \\ & + \frac{e^{2\bar{y}}}{4e^{\frac{\bar{y}}{2}}} \left[(y - \bar{y}) \left(\frac{(T-t)^2}{3} + \frac{(T-t)^3}{8} \right) - x \left(\frac{(T-t)^3}{4} + \frac{(T-t)^4}{45} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^4}{20} - \frac{e^{\bar{y}}(T-t)^5}{288} \right] \frac{(-1)^2}{2e^{\bar{y}}(T-t)} \right. \\ & \left(2 - \frac{2 \left(x - k - \frac{e^{\bar{y}}}{2}(T-t) \right)^2}{e^{\bar{y}}(T-t)} \right) + \frac{e^{2\bar{y}}}{4e^{\frac{\bar{y}}{2}}} \left[(y - \bar{y}) \left(\frac{(T-t)^2}{3} - \frac{(T-t)^3}{24} \right) \right. \\ & \left. + x \left(\frac{(T-t)^3}{4} + \frac{(T-t)^4}{45} \right) - \frac{3e^{\bar{y}}(T-t)^4}{20} \right] \frac{(-1)^3}{(2e^{\bar{y}}(T-t))^{3/2}} \\ & \left(\frac{10 \left(x - k - \frac{e^{\bar{y}}}{2}(T-t) \right)}{\sqrt{2e^{\bar{y}}(T-t)}} - \frac{8 \left(x - k - \frac{e^{\bar{y}}}{2}(T-t) \right)^3}{(2e^{\bar{y}}(T-t))^{3/2}} \right). \quad (5.63) \end{aligned}$$

Перший доданок $\frac{w_2}{\partial_\sigma w^{BS}}$ обчислено за допомогою формули (5.62), а

другий $\frac{\frac{1}{2}\sigma_1^2 \partial_\sigma^2 w^{BS}}{\partial_\sigma w^{BS}}$ за допомогою (5.63) [12].

Одержані значення імплікованої волатильності і послідовних наближень ціни дають можливість зробити аналіз проходжень процесу на фондовому ринку, а також зробити корекцію і конкретні кроки для покращення ситуації щодо оптимізації фінансових стратегій. Знайдена

щільність розподілу для вироджених дифузійних процесів коли коефіцієнти залежать тільки від часу.

Розроблена методика побудови щільності розподілу у випадку залежності коефіцієнтів від часу і просторових змінних коли кореляційна матриця не є строго додатно визначеною.

На прикладі виродженої моделі Хестона, що описує процес динаміки ціноутворення та розвиток імплікованої волатильності, при початковому наближенні функцією ціни Блека-Шоулза проведено обчислення волатильності та дохідності за другим наближенням Тейлора та методом найменших квадратів. Отримані результати майже ідентичні, що свідчить про високу точність наближення.

Знання наближеної ціни та імплікованої волатильності на кожному кроці в фіксований момент часу дає можливість позбутися спекулятивних змін у ціноутворенні [122].

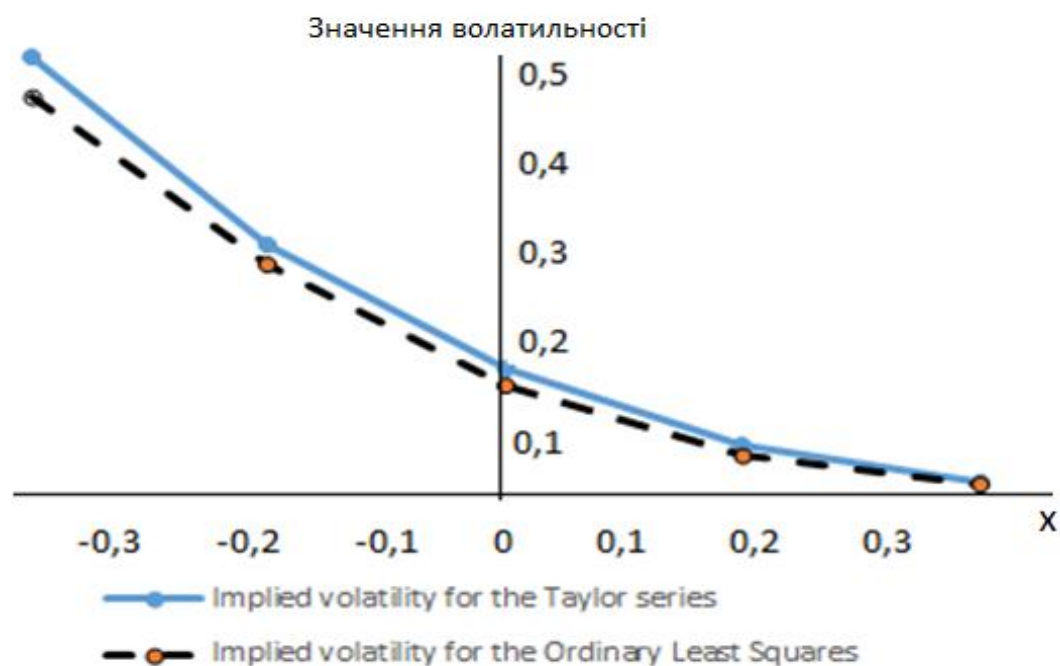


Рис.5.1: Імплікована волатильність, отримана за допомогою методу найменших квадратів та наближення другого порядку за допомогою ряду Тейлора для виродженої моделі Хестона. $e^y = 0,249^2$, $T = 0.125$, $t = 0$.

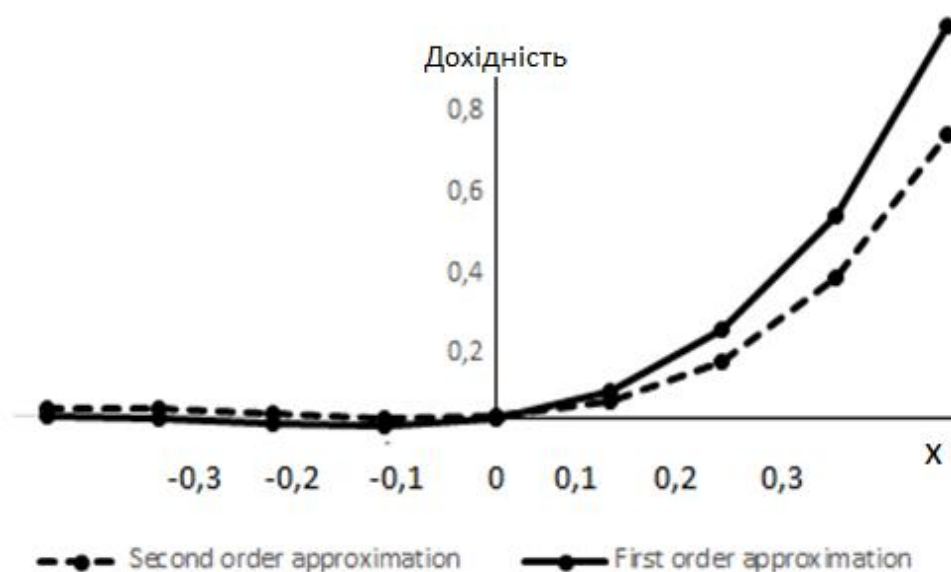


Рис. 5.2: Крива дохідності апроксимації першого та другого порядку отримані за допомогою ряду Тейлора для виродженої моделі Хестона. $e^y = 0,249^2$, $T = 0.125$, $t = 0$.

Розглянуто вироджений дифузійний процес, що описує динаміку ціни та імплікованої волатильності, в залежності від часу, індексів базових активів, акцій, опціонів величин фінансових потоків [36]. Дослідження проведено на базі рядів Тейлора. Побудовано щільність розподілу ймовірностей проходження цього процесу. Маючи щільності розподілу можна знайти ціну в будь-який момент часу.. За знайденими наближеннями використовуючи як початкове наближення функцію ціни Блека-Шоулса одержано явні формули для знаходження початкових наближень імплікованої волатильності. Відмітимо, що вони по формі запису співпадають з формулами [225], але в нашому випадку вони складніші за рахунок виродженості рівняння і формули для наближення ціни.

Наближення ціни отримується за допомогою розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією. Якщо виплата опціонів є функцією лише від x , тоді розклад в ряд Тейлора коефіцієнтів не залежить від t і значно спрощується аналітичний вираз фундаментального розв'язку щільності розподілу випадкового процесу.

Розроблено метод за яким нескладно (без використання спеціальних функцій) отримується наближення ціни опціону та його імплікованої волатильності. Використано при цьому лише задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова та розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів рівняння. Така модель відповідає значній кількості випадкових процесів на фінансовому ринку. Для знаходження імплікованої волатильності формули є явними і точними.

Впроваджено підхід до ціноутворення похідних цінних паперів та знаходження імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора коли стохастичний процес описується рівнянням дифузії з інерцією (виродженим параболічним рівнянням). Для виродженого параболічного рівняння знаходження наближеної ціни опціонів є достатньо простим оскільки використовує тільки оцінки похідних щільності розподілу дифузії з інерцією.

5.3. Моделі знаходження наближень ціни деривативів та їхньої волатильності

$$\partial_t w - x \partial_y w + a(t, x, y)(\partial_x^2 - \partial_x)w = 0, \quad a(t, x, y) = \frac{e^{x-y}}{2},$$

де початкове наближення w_0 – функція Блека–Шоулса

$$w_0 = e^x N(d_+) - e^k N(d_-),$$

$\partial_t - x\partial_y + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(\partial_x^2 - \partial_x)$ – оператор Колмогорова що відповідає виродженій моделі Хестона (виродження по y).

$\bar{y}$ – фіксоване значення по y .

$$\partial_t - x\partial_y + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(\partial_x^2 - \partial_x) = (-1)^h \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} (y - \bar{y})^h (\partial_x^2 - \partial_x).$$

Оператор $\partial_t - x\partial_y + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(\partial_x^2 - \partial_x)$ має фундаментальний розв'язок вигляду [67]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(t, x, y; T, x', y') = & \exp \left\{ - \left(x' - x + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T - t) \right)^2 (2e^{\bar{x}-\bar{y}} (T - t))^{-1} - \right. \\ & \left(y' - y + x(T - t) + \left(x' - x + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T - t) \right) \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \int_t^T (\beta - T) d\beta \right. \\ & \left. \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \int_t^T d\beta \right)^{-1} + \int_t^T \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\beta - T) d\beta \right)^2 \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T - t)^3}{2 \cdot 12} \right)^{-1} \Big\} \\ & \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T - t)^{1/2}}{\sqrt{2}} \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T - t)^{3/2}}{12} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{12}} \right)^{-1} = \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{4(T - t)^2 \sqrt{3}} \\ & \exp \left\{ - \frac{\left(x' - x + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T - t) \right)^2}{2e^{\bar{x}-\bar{y}} (T - t)} - \frac{24e^{-\bar{x}+\bar{y}}}{(T - t)^3} (y' - y + x(T - t) + \right. \\ & \left. \left(x' - x + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T - t) \right) \frac{T - t}{2} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T - t)^2}{4} \right)^2 \Big\}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & 0 < T < +\infty, \quad (x, y) \in R^2. \end{aligned}$$

Знаходження першого наближення функції Блека–Шоулса w_1 :

$$\begin{aligned}
w_1 &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \, \varepsilon_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\xi - \bar{x}) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\eta - \bar{y}) \right) \\
(\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2) w_0 &= \int_t^T \left[\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (s - t) + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s - t) \partial_x \right) \right] ds \\
(\partial_x^2 - \partial_y^2) w_0 &- \int_t^T \left[\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left(y - \bar{y} - x(s - t) + e^{\bar{x}-\bar{y}} \int_t^s (\beta - s) d\beta \partial_x - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \int_t^s (\beta - s) d\beta \right) \right] ds \, (\partial_x^2 - \partial_y^2) w_0 = \left[\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} ((x - \bar{x})(T - t) - \right. \\
&\quad \left. \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} (T - t)^2 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T - t)^2 \partial_x) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left((y - \bar{y})(T - t) - x \frac{(T - t)^2}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \frac{(T - t)^3}{3} \partial_x - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(T - t)^3}{12} \right) \right] (\partial_x^2 - \partial_y^2) w_0.
\end{aligned}$$

Обчислимо друге наближення функції Блека-Шоулса w_2 , за визначенням воно має вигляд:

$$\begin{aligned}
w_2 &= \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \, \varepsilon_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \left[\left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} (\xi - \bar{x})^2 - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\xi - \bar{x}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (\eta - \bar{y}) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} (\eta - \bar{y})^2 \right) (\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2) w_0 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\xi - \bar{x}) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\eta - \bar{y}) \right) (\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2) w_1 \right] = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Розглянемо першу групу доданків, що містять w_0 і позначимо їх I_1 .

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_t^T \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} \left[\left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (s - t) + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s - t) \partial_x \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. 2 \left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (s - t) + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s - t) \partial_x \right) (y - \bar{y} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x(s-t) + e^{\bar{x}-\bar{y}} \int_t^s (\beta-s) d\beta \partial_x - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \int_t^s (\beta-s) d\beta \\
& + e^{\bar{x}-\bar{y}} \int_t^s (\beta-t)(\beta-s) d\beta \partial_y \Bigg) \\
& \left(y - \bar{y} - x(s-t) + e^{\bar{x}-\bar{y}} \int_t^s (\beta-s) d\beta \partial_x + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \int_t^s (\beta-s) d\beta \right)^2 \Bigg] ds \\
& (\partial_x^2 - \partial_x) w_0 = \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2! 2} \left[(x - \bar{x})^2 (T-t) + \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^3}{4} \frac{3}{3} + \right. \\
& \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^3}{3} \partial_x^2 - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (x - \bar{x}) (T-t)^2}{2} - e^{\bar{x}-\bar{y}} (x - \bar{x}) (T-t)^2 \partial_x - \\
& \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^3}{3} \partial_x - 2(x - \bar{x})(y - \bar{y})(T-t) + 2e^{\bar{x}-\bar{y}} (y - \bar{y})(T-t)^2 \\
& \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) + x(x - \bar{x})(T-t)^2 + 2e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{x(T-t)^3}{3} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) + \\
& \frac{2e^{(\bar{x}-\bar{y})} (x - \bar{x}) (T-t)^3}{6} \partial_x - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})} (x - \bar{x}) (T-t)^3}{6} \\
& - \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^4}{8} (2\partial_x - 1)^2 + (y - \bar{y})^2 (T-t) + \frac{x^2 (T-t)^3}{3} + \\
& \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^5}{20} \partial_x^2 + \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^5}{4} \frac{5}{20} - (y - \bar{y}) x (T-t)^2 + \\
& (y - \bar{y}) \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t)^3}{3} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) - \frac{x e^{(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^4}{4} \\
& \left. \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t)^4}{24} \right] (\partial_x^2 - \partial_x) w_0.
\end{aligned}$$

Друга група доданків має вигляд:

$$I_2 = \int_t^T ds \int_{R^2} d\xi d\eta \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\xi - \bar{x}) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\eta - \bar{y}) \right)$$

$$\begin{aligned}
(\partial_\xi^2 - \partial_\xi)w_1 = & \int_t^T \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left[\left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(s-t) + e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)\partial_x \right. \right. \right. \\
& e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(s-t)}{2} \partial_y \Big) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left(y - \bar{y} - x(s-t) + 2 \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \int_t^s (\beta-t)(\beta-s) d\beta \right. \\
& \left. \left. \left. + e^{\bar{x}-\bar{y}} \int_t^s (\beta-s) d\beta \partial_x - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \int_t^s (\beta-s) d\beta \right) \right] (\partial_x^2 - \partial_x) \right. \\
& \int_{R^2} d\xi \, d\eta \, \mathcal{E}_0(t, x, y; s, \xi, \eta) \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\xi - \bar{x})(T-s) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} (T-s)^2 \right. \\
& \left. + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-s)^2 \partial_\xi \right) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\eta - \bar{y})(T-s) - \frac{(T-s)^2}{2} \xi \\
& \left. - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}}{2} \frac{(s-T)^3}{3} \partial_\xi + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} \frac{(T-s)^3}{3} \right) (\partial_\xi^2 - \partial_\xi) w_0.
\end{aligned}$$

В цьому обчисленні ми використали значення w_1 , тепер використаємо властивості щільності

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int_t^T \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left[\left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(s-t) + e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)\partial_x \right. \right. \right. \\
& - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(s-t)^2}{2} \partial_y \Big) - \left(y - \bar{y} - x(s-t) - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(t-s)^2}{4} \right. \\
& \left. \left. \left. e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(t-s)^3}{6} \partial_y \right) \right] (\partial_x^2 - \partial_x) \left[\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(s-t) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (s-t)\partial_x - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(t-s)^2}{2} \partial_y \right) (T-s) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-s)^2 \right. \\
& \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \left(\left(y - \bar{y} - x(s-t) - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(t-s)^2}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} \frac{(t-s)^2}{2} \partial_x - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(t-s)^3}{6} \partial_y \right) (T-s) \right.
\end{aligned}$$

$$- \left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (s-t) + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t) \partial_x - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(t-s)^2}{2} \partial_y \right) \frac{(T-s)^2}{2} \\ - \bar{x} \frac{(T-s)^2}{2} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-T)^3}{2} \partial_x - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-s)^3}{4} \partial_y \Bigg] (\partial_x^2 - \partial_x) w_0.$$

У внутрішніх квадратних дужках ∂_y можна опустити тому, візьмемо $\partial_x^2 - \partial_x$ від квадратної дужки, отримаємо наступний вираз:

$$I_2 = \int_t^T ds \left(\frac{e^{2\bar{x}-2\bar{y}}}{4} \left[\left((x - \bar{x}) + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t) \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(s-t)^2}{2} \partial_y \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(y - \bar{y} - x(s-t) - e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(s-t)^3}{6} \partial_y + e^{\bar{x}-\bar{y}} \frac{(s-t)^2}{2} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \right. \\ \left. \left\{ 2 \left((T-s) \left(1 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (s-t) \partial_x^2 \right) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} (T-s)^2 \partial_x^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + (s-t)(T-s) + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t) \frac{(T-s)^2}{2} \partial_x - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} (s-t)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(T-s)^2}{2} \partial_x^2 + \frac{(T-s)^2}{2} \right) \partial_x - \left((T-s) \left(1 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)}{2} \partial_x^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-s)^2}{4} \partial_x^2 + (s-t)(T-s) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)(T-s)^2}{2} \partial_x^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)^2 (T-s)^2}{4} \partial_x^2 + \frac{(T-s)^2}{2} \right) \partial_x + \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)(T-s)}{2} \partial_x^3 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-s)^3}{4} \partial_x^3 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)(T-s)^2}{2} \partial_x^3 - e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(T-s)^2}{4} \partial_x^3 \right) + \left[\left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)}{2} + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t) \partial_x \right) \right. \right. \\ \left. \left. (T-s) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-s)^2}{2} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) - \left(y - \bar{y} - x(s-t) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)^2}{2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)^2}{2} \partial_x \right) (T-s) - \left[\left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t)}{2} + e^{\bar{x}-\bar{y}} (s-t) \partial_x \right) \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{(T-s)^2}{2} - \bar{x} \frac{(T-s)^2}{2} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-s)^3}{2} \partial_x + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-s)^3}{4} \partial_x^2 \right\} + \\
& \left(e^{\bar{x}-\bar{y}} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) + x \right) (s-t) \left\{ 2 \left((T-s) \left(1 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (s-t) \partial_x^2 \right) \right. \right. \\
& + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} (T-s)^2 \partial_x^2 + (s-t)(T-s) + e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t) \frac{(T-s)^2}{2} \partial_x - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} \\
& (s-t)^2 \frac{(T-s)^2}{2} \partial_x^2 + \frac{(T-s)^2}{2} \left. \right) \partial_x - \left((T-s) \left(1 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)}{2} \partial_x^2 \right) \right. \\
& + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-s)^2}{4} \partial_x^2 + (s-t)(T-s) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)(T-s)^2}{2} \partial_x^2 \\
& - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)^2(T-s)^2}{4} \partial_x^2 + \frac{(T-s)^2}{2} \left. \right) \partial_x + \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)(T-s)}{2} \partial_x^3 \right. \\
& - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-s)^3}{4} \partial_x^3 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)(T-s)^2}{2} \partial_x^3 - e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)^2 \\
& \left. \frac{(T-s)^2}{4} \partial_x^3 \right) + \left[\left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)}{2} + e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t) \partial_x \right) \right. \\
& (T-s) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-s)^2}{2} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) - \left(y - \bar{y} - x(s-t) + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)^2}{2} \right. \\
& - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)^2}{2} \partial_x \left. \right) (T-s) - \left[\left(x - \bar{x} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)}{2} + e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t) \partial_x \right) \right. \\
& \left. \frac{(T-s)^2}{2} - \bar{x} \frac{(T-s)^2}{2} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-s)^3}{2} \partial_x + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-s)^3}{4} \partial_x^2 \right\} \\
& \left. \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)^2}{2} + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(s-t)^3}{6} \right) \frac{(T-s)^2}{2} \right) (\partial_x^2 - \partial_x) w_0.
\end{aligned}$$

Проінтегруємо вище отриманий вираз, отримаємо

$$I_2 = \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}}{4} \left\{ (x - \bar{x} - y + \bar{y}) \left(\left((T-t) + \frac{2e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{3} \partial_x^2 \right) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{16}\partial_x^2 + \frac{2(T-t)^3}{3} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24}\partial_x^2 - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^5}{240} \\
& + \frac{(T-t)^3}{6}\partial_x \Big) - \frac{(T-t)^2}{2} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{6}\partial_x^2 - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{32}\partial_x^2 \\
& + \frac{(T-t)^3}{3} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24}\partial_x^2 - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^5}{480} - \frac{(T-t)^3}{12} \\
& \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{6}\partial_x^3 + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{12}\partial_x^3 + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24}\partial_x^3 \\
& \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^5}{240}\partial_x^3 + \left[(x-\bar{x})\frac{(T-t)^2}{2} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{12} + \right. \\
& \left. \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{12}\partial_x + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{6}\partial_x^3 \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) - \left((y-\bar{y})\frac{(T-t)^2}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - x\frac{(T-t)^3}{6} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24}\partial_x - \left((x-\bar{x})\frac{(T-t)^3}{6} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{12}\partial_x \right) - \bar{x}\frac{(T-t)^3}{6} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{48} \right) \partial_x^2 + \left(e^{(\bar{x}-\bar{y})} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) + x \right) \left(\frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24} + \right. \right. \\
& \left. \frac{(T-t)^3}{3} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{48}\partial_x^2 + \frac{(T-t)^4}{12} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^5}{60} + \frac{(T-t)^3}{6} \right. \\
& \left. - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^6}{480} + \frac{(T-t)^3}{3} \right) \partial_x - \left(\frac{(T-t)^2}{2} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{3}\partial_x^2 \right. \\
& \left. + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{32}\partial_x^2 + \frac{(T-t)^3}{3} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{96}\partial_x^2 + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^5}{480} \right. \\
& \left. - \frac{(T-t)^3}{2} \right) \partial_x + \left(\frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24}\partial_x^3 + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{48}\partial_x^3 + \right. \\
& \left. \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^5}{60}\partial_x^3 - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^6}{480} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{24} \left(\partial_x - \frac{1}{2} \right) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left((y - \bar{y}) \frac{(T - t)^3}{6} - x \frac{(T - t)^4}{12} + \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^4}{24} - \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^4}{48} \partial_x \right) \right. \\
& - \left((x - \bar{x}) \frac{(T - t)^4}{24} - \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^5}{120} + \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^5}{60} - \bar{x} \frac{(T - t)^4}{12} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^5}{120} + \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^5}{60} \right) - \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^5}{120} + \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{e^{(\bar{x} - \bar{y})}(T - t)^5}{240} \right) \right\} (\partial_x^2 - \partial_x) w_0.
\end{aligned}$$

Маючи перше наближення w_1 , знайдемо перше наближення σ_1 волатильності.

Оскільки

$$\sigma_1 = \frac{w_1}{\partial_\sigma w^*(\sigma_0)},$$

то

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = & \left[\left(\frac{e^{2(\bar{x} - \bar{y})}}{4} (T - t)^2 - \frac{e^{2(\bar{x} - \bar{y})}}{4} \frac{(T - t)^3}{3} \right) \partial_x (\partial_x^2 - \partial_x) w_0 \right. \\
& + \left(\frac{e^{\bar{x} - \bar{y}}}{2} (x - \bar{x}) \right. \\
& (T - t) \pm x \frac{(T - t)^2}{2} \frac{e^{\bar{x} - \bar{y}}}{2} - \frac{e^{\bar{x} - \bar{y}}}{2} (y - \bar{y})(T - t) - \frac{e^{\bar{x} - \bar{y}}}{8} (T - t)^2 + \\
& \left. \left. \frac{e^{2(\bar{x} - \bar{y})}}{24} (T - t)^3 \right) \partial_x (\partial_x^2 - \partial_x) w_0 \right] / \partial_\sigma w^*(\sigma_0).
\end{aligned}$$

Використавши властивість похідної $\partial_\sigma w^*(\sigma_0)$:

$$\partial_\sigma w^*(\sigma_0) = (T - t) \sigma_0 \partial_x (\partial_x^2 - \partial_x) w^*(\sigma),$$

де $w^*(\sigma) = w_0$,

отримаємо, що

$$\sigma_1 = \frac{w_1}{(T - t) \sigma_0 \partial_x (\partial_x^2 - \partial_x) w_0},$$

а таке представлення дає можливість до

$$\frac{\partial_x^n (\partial_x^2 - \partial_x) w_0(\sigma_0)}{(\partial_x^2 - \partial_x) w_0(\sigma_0)}$$

застосувати зображення через поліноми Ерміта $H_n(\chi)$

$$\chi := \frac{x - k - \frac{1}{2}\sigma_0^2(T-t)}{\sigma_0\sqrt{2(T-t)}}, \quad \sigma_0 = e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}, \quad H_n(\chi) = (-1)^n e^{\chi^2} \partial_\chi^n e^{-\chi^2}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial_x^n (\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{(\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)} = \frac{(-1)^n H_n(\chi)}{(\sigma_0\sqrt{2(T-t)})^n},$$

тому маємо

$$\frac{(\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{\partial_\sigma w^*(\sigma_0)} = \frac{(\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{\sigma_0(T-t)(\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)} = \frac{1}{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}(T-t)},$$

$$\frac{\partial_x (\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{\sigma_0(T-t)(\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)} = \frac{(-1)(-1)(e^{\chi^2} \partial_\chi e^{-\chi^2})}{\sigma_0(T-t)\sigma_0\sqrt{2(T-t)}}$$

$$= - \frac{\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)\right)}{e^{3\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}(T-t)^2},$$

$$\frac{\partial_x^2 (\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{\partial_\sigma w^*(\sigma_0)} = \frac{\partial_x^2 (\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{\sigma_0(T-t)(\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)} = \frac{1}{\sigma_0(T-t)} \frac{4\chi^2 - 2}{\sigma_0^2 2(T-t)} =$$

$$\frac{\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)\right)^2 - e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)}{e^{5\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}(T-t)^3},$$

$$\frac{\partial_x^3 (\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{\partial_\sigma w^*(\sigma_0)} = \frac{\partial_x^3 (\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)}{\sigma_0(T-t)(\partial_x^2 - \partial_x) w_0^*(\sigma_0)} = \frac{(-1)^3}{\sigma_0(T-t)}$$

$$\frac{(-1)^3 (e^{\chi^2} \partial_\chi e^{-\chi^2})}{\sigma_0^3 (\sqrt{2(T-t)})^3} = - \frac{\left(x - k - \frac{\sigma_0^2}{2}(T-t)\right)^3}{\sigma_0^7 (T-t)^4} + \frac{3\left(x - k - \frac{\sigma_0^2}{2}(T-t)\right)}{\sigma_0^5 (T-t)^3} =$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\left(x-k-\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)\right)^3}{e^{7\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}(T-t)^4} + \frac{3\left(x-k-\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)\right)}{e^{5\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}(T-t)^3}, \\
& \frac{\partial_x^4(\partial_x^2 - \partial_x)w_0^*(\sigma_0)}{\partial_\sigma w^*(\sigma_0)} = \frac{\partial_x^4(\partial_x^2 - \partial_x)w_0^*(\sigma_0)}{\sigma_0(T-t)(\partial_x^2 - \partial_x)w_0^*(\sigma_0)} = \frac{1}{\sigma_0(T-t)} \\
& \left(\frac{-1}{\sigma_0\sqrt{2}(T-t)}\right)^4 (-1)^4(16\chi^4 - 48\chi^2 + 12) = \frac{1}{\sigma_0^5(T-t)^3} \\
& \frac{4\left(x-k-\frac{\sigma_0^2}{2}(T-t)\right)^4}{\sigma_0^4(T-t)^2} - \frac{24\left(x-k-\frac{\sigma_0^2}{2}(T-t)\right)^2}{\sigma_0^2(T-t)+12} = \\
& \frac{e^{\frac{3(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4}\left(\frac{1}{6}-\frac{(T-t)}{48}\right)\left(\frac{4\left(x-k-\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)\right)^4}{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^2}\right. \\
& \quad \left.-\frac{24\left(x-k-\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)\right)^2}{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)+12}\right).
\end{aligned}$$

то враховуючи всі вище наведені формули отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{2}(x-\bar{x}) + x\frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{4} - \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{2}(y-\bar{y}) - \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{8}(T-t) \\
& \quad + \frac{e^{3\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{24}(T-t)^2 - \\
& \quad \left(\frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{4} - \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{12}(T-t)\right)\left(x-k-\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)\right) \\
&= \frac{\sigma_0}{2}\left((x-\bar{x}) + \frac{x}{2} - (y-\bar{y}) - \right.
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{(T-t)}{4} + \frac{\sigma_0^2(T-t)^2}{12}\right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{(T-t)}{6}\right) \left(x - k - \frac{\sigma_0^2}{2}(T-t)\right).$$

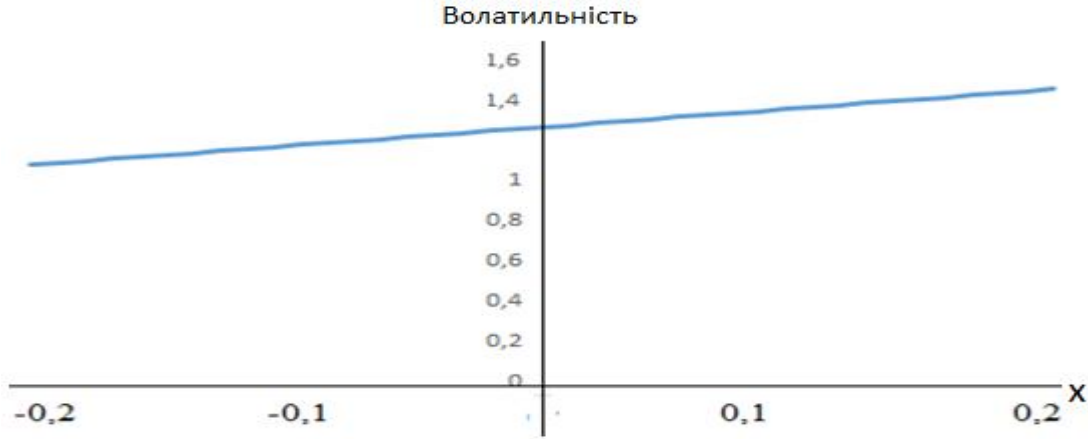


Рис.5.3. Наближення першого порядку значення волатильності, отримане за допомогою ряду Тейлора для виродженої моделі Хестона

Знайдемо друге наближення волатильності σ_2

$$\sigma_2 = \frac{w_2 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \partial_\sigma w^*(\sigma_0)}{\partial_\sigma w^*(\sigma_0)}$$

Підставивши в формулу для σ_2 значення другого наближення w_2 і зneyдене перше наближення волатильності σ_1 , будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{4} & \left[(x - \bar{x})^2 - 2(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + (y - \bar{y})^2 - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(x - \bar{x})(T-t)}{2} \right. \\ & - x((y - \bar{y})(T-t) + (x - \bar{x})(T-t)) - e^{\bar{x}-\bar{y}}(y - \bar{y})(T-t) + \frac{x^2(T-t)^2}{3} \\ & - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(x - \bar{x})(T-t)^2}{6} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(y - \bar{y})(T-t)^2}{6} + \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^2}{12} \\ & \left. - x \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)^2}{3} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{8} \right) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)^3}{24} - \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{8} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^4}}{80} \Big] + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} \left(2(y-\bar{y}) - (x-\bar{x}) - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^2}}{3} \right. \\
& + \frac{(x-\bar{x})(T-t)}{3} + x \left(\frac{2(T-t)}{3} - \frac{(T-t)^2}{4} \right) + \frac{(y-\bar{y})(T-t)}{3} \\
& \left. + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^2}}{2} \right) \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right) + \frac{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \\
& \left(\frac{1}{3} - \frac{(T-t)}{2} + \frac{(T-t)^2}{20} \right) \left(\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2 - e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t) \right) + \\
& \frac{e^{\frac{3(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left((x-\bar{x}-y+\bar{y}) \left(1 + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^4}}{240} \right) - \frac{(T-t)}{2} + \frac{(T-t)^2}{4} \right. \\
& + \frac{5e^{(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^4}}{96} + (x-\bar{x}) \left(\frac{7(T-t)}{6} - \frac{(T-t)^3}{24} \right) + \frac{(y-\bar{y})(T-t)^2}{2} \\
& \left. - e^{(\bar{x}-\bar{y})} \left(\frac{(T-t)^2}{12} + \frac{(T-t)^3}{16} + \frac{(T-t)^5}{480} \right) \right. \\
& \left. - \frac{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(x \left(\frac{11(T-t)}{6} + \frac{(T-t)^2}{12} \right) \right. \right. \\
& + (-\bar{x}-y+\bar{y}) \frac{(T-t)}{6} - \frac{1}{2} - \frac{(T-t)}{3} - e^{(\bar{x}-\bar{y})} \left(\frac{3(T-t)}{4} + \frac{(T-t)^2}{48} \right. \\
& \left. + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^2}}{4} + \frac{(T-t)^3}{120} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^3}}{120} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})(T-t)^4}}{960} \right. \\
& \left. \left. - x \left(\frac{(T-t)^2}{24} - \frac{(T-t)^3}{60} + \frac{(T-t)^4}{480} \right) \right) \right) \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right) + \\
& + \frac{e^{\frac{3(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(\frac{5(y-\bar{y})}{6} + (x-\bar{x}) + e^{(\bar{x}-\bar{y})} \left(-(x-\bar{x}-y+\bar{y}) \frac{(T-t)}{48} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} + \frac{(T-t)}{32} + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)}{24} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^2}{60} \\
& \quad - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{480} - \frac{(T-t)^3}{480} \Bigg) \\
& \left(\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t) \right)^2 - e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t) \right) + \frac{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)}{96} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} + \frac{(T-t)^2}{48} - \frac{(x-3)(T-t)}{48} \right) \left(- \frac{\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t) \right)^3}{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)} \right. \\
& \quad \left. + 3 \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t) \right) \right) + \frac{e^{\frac{3(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(\frac{1}{6} - \frac{(T-t)}{48} \right) \\
& \quad \left(\frac{4 \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t) \right)^4}{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^2} - \frac{24 \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t) \right)^2}{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t) + 12} \right) - \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{2}(T-t) \\
& \quad \left(\frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{2}(x - \bar{x}) + x \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{4} - \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{2}(y - \bar{y}) - \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{8}(T-t) + \frac{e^{3\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{24}(T-t)^2 - \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{4} - \frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{12}(T-t) \right) \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t) \right) \right)^2 \\
& \quad \left[\left(\frac{\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t) \right)^2}{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)} - 1 \right) \frac{1}{2e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)} + \frac{x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T-t)}{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)} \right].
\end{aligned}$$

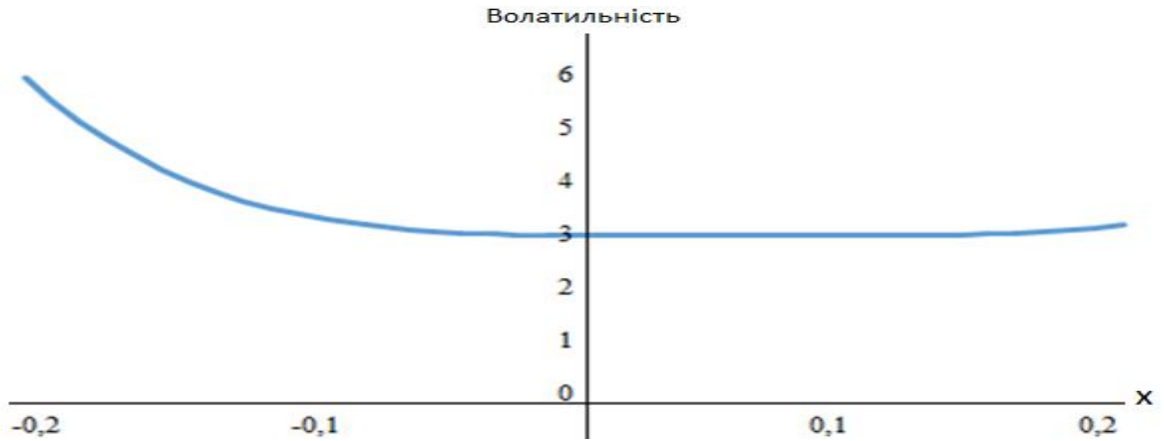


Рис.5.4. Наближення другого порядку значення волатильності
отримане за допомогою ряду Тейлора для виродженої моделі Хестона

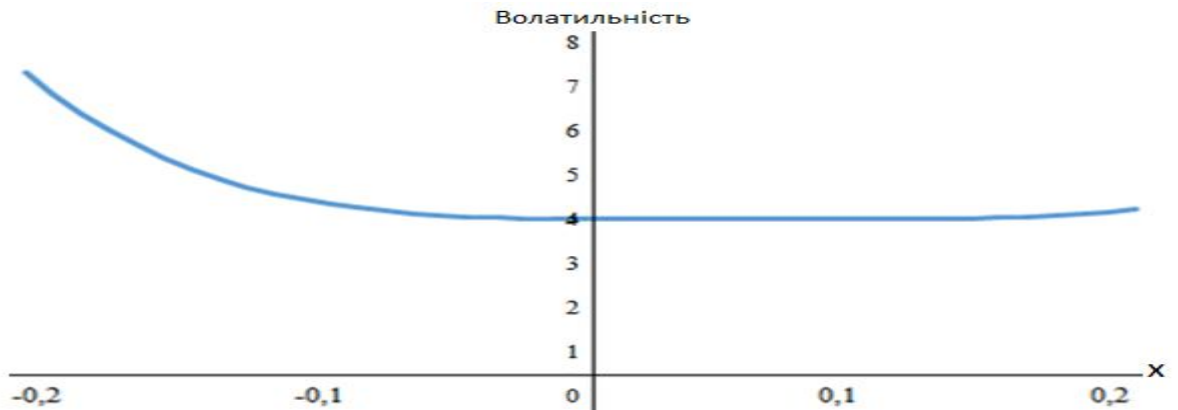


Рис.5.5. Імплікована волатильність, отримана за допомогою ряду
Тейлора для виродженої моделі Хестона

Оскільки: $\partial_t w_0 + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (\partial_x^2 - \partial_x) w_0 = 0$, а $\sigma_1 = \frac{w_1}{(T-t)\sigma_0(\partial_x^2 - \partial_x)w_0}$ тоді

використавши формулу

$$w'_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\exp \left\{ x - \frac{\left(x - \kappa + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2}{2e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)} \right\} \frac{x - \kappa - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t)}{2^{3/2} e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2} (T-t)^{3/2}}} - \right. \\ \left. \exp \left\{ \kappa - \frac{\left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2}{2e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)} \right\} \frac{x - \kappa + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t)}{2^{3/2} e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2} (T-t)^{3/2}}} \right),$$

можна легко обчислити

$$\begin{aligned}
 w_1 = & -\sigma_1 \sigma_0 (T-t) (\partial_x^2 - \partial_x) w_0 = -\sigma_1 e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}} (T-t) \frac{2}{e^{\bar{x}-\bar{y}}} w'_t = \\
 & - \left(\frac{(T-t)}{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left((x-\bar{x}) + \frac{x}{2} - (y-\bar{y}) - \frac{(T-t)}{4} + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t)^2}{12} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{(T-t)}{6} \right) \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right) \right) \\
 & \left(\exp \left\{ x - \frac{\left(x - \kappa + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2}{2e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t)} \right\} \frac{x - \kappa - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t)}{2^{3/2} e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}} (T-t)^{3/2}} - \right. \\
 & \quad \left. \exp \left\{ \kappa - \frac{\left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2}{2e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t)} \right\} \frac{x - \kappa + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t)}{2^{3/2} e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}} (T-t)^{3/2}} \right).
 \end{aligned}$$

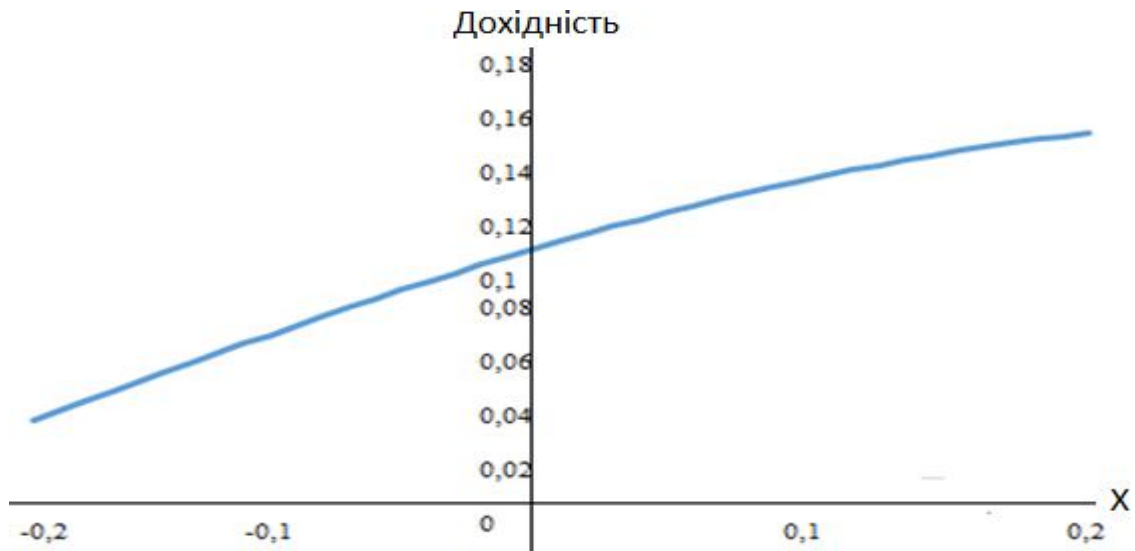


Рис. 5.6. Крива дохідності апроксимації першого порядку отримана за допомогою ряду Тейлора для виродженої моделі Хестона

Знайдемо w_2

$$\begin{aligned}
 w_2 = & - \left(\frac{e^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}}{4} \left[(x - \bar{x})^2 - 2(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + (y - \bar{y})^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(x - \bar{x})(T - t)}{2} \right. \right. \\
 & - x((y - \bar{y})(T - t) + (x - \bar{x})(T - t)) - e^{\bar{x}-\bar{y}}(y - \bar{y})(T - t) + \frac{x^2(T - t)^2}{3} \\
 & \quad - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(x - \bar{x})(T - t)^2}{6} - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(y - \bar{y})(T - t)^2}{6} + \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^2}{12} \\
 & - x \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T - t)^2}{3} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^3}{8} \right) - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T - t)^3}{24} - \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^3}{8} \\
 & \quad \left. + \frac{e^{2(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^4}{80} \right] + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{4} \left(2(y - \bar{y}) - (x - \bar{x}) - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^2}{3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(x - \bar{x})(T - t)}{3} + x \left(\frac{2(T - t)}{3} - \frac{(T - t)^2}{4} \right) + \frac{(y - \bar{y})(T - t)}{3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^2}{2} \right) \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T - t) \right) + \frac{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \\
 & \left(\frac{1}{3} - \frac{(T - t)}{2} + \frac{(T - t)^2}{20} \right) \left(\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2}(T - t) \right)^2 - e^{\bar{x}-\bar{y}}(T - t) \right) + \\
 & \frac{e^{\frac{3(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left((x - \bar{x} - y + \bar{y}) \left(1 + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^4}{240} \right) - \frac{(T - t)}{2} + \frac{(T - t)^2}{4} \right. \\
 & \left. + \frac{5e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T - t)^4}{96} + (x - \bar{x}) \left(\frac{7(T - t)}{6} - \frac{(T - t)^3}{24} \right) + \frac{(y - \bar{y})(T - t)^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{(\bar{x}-\bar{y})} \left(\frac{(T-t)^2}{12} + \frac{(T-t)^3}{16} + \frac{(T-t)^5}{480} \right) \\
& \quad - \frac{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(x \left(\frac{11(T-t)}{6} + \frac{(T-t)^2}{12} \right) \right. \\
& + (-\bar{x} - y + \bar{y}) \frac{(T-t)}{6} - \frac{1}{2} - \frac{(T-t)}{3} - e^{(\bar{x}-\bar{y})} \left(\frac{3(T-t)}{4} + \frac{(T-t)^2}{48} \right. \\
& \quad + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^2}{4} + \frac{(T-t)^3}{120} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{120} - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^4}{960} \\
& \quad \left. \left. - x \left(\frac{(T-t)^2}{24} - \frac{(T-t)^3}{60} + \frac{(T-t)^4}{480} \right) \right) \right) \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right) + \\
& + \frac{e^{\frac{3(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(\frac{5(y-\bar{y})}{6} + (x-\bar{x}) + e^{(\bar{x}-\bar{y})} \left(-(x-\bar{x}-y+\bar{y}) \frac{(T-t)}{48} \right. \right. \\
& \quad + \frac{3}{2} + \frac{(T-t)}{32} + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)}{24} + \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^2}{60} \\
& \quad \left. \left. - \frac{e^{(\bar{x}-\bar{y})}(T-t)^3}{480} - \frac{(T-t)^3}{480} \right) \right) \\
& \left(\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2 - e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t) \right) + \frac{e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(\frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)}{96} \right. \\
& \quad + \frac{1}{4} + \frac{(T-t)^2}{48} - \frac{(x-3)(T-t)}{48} \left(- \frac{\left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^3}{e^{\bar{x}-\bar{y}}(T-t)} \right. \\
& \quad \left. \left. + 3 \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right) \right) \right) + \frac{e^{\frac{3(\bar{x}-\bar{y})}{2}}}{4} \left(\frac{1}{6} - \frac{(T-t)}{48} \right)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{4 \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^4}{e^{2(\bar{x}-\bar{y})} (T-t)^2} - \frac{24 \left(x - k - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2}{e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t) + 12} \right) e^{-\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\exp \left\{ x - \frac{\left(x - \kappa + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2}{2e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t)} \right\} \frac{x - \kappa - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t)}{2^{3/2} e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}} (T-t)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. \exp \left\{ \kappa - \frac{\left(x - \kappa - \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t) \right)^2}{2e^{\bar{x}-\bar{y}} (T-t)} \right\} \frac{x - \kappa + \frac{e^{\bar{x}-\bar{y}}}{2} (T-t)}{2^{3/2} e^{\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{2}} (T-t)^{3/2}} \right).$$



Рис. 5.7. Крива дохідності апроксимації другого порядку отримана за допомогою ряду Тейлора для виродженої моделі Хестона

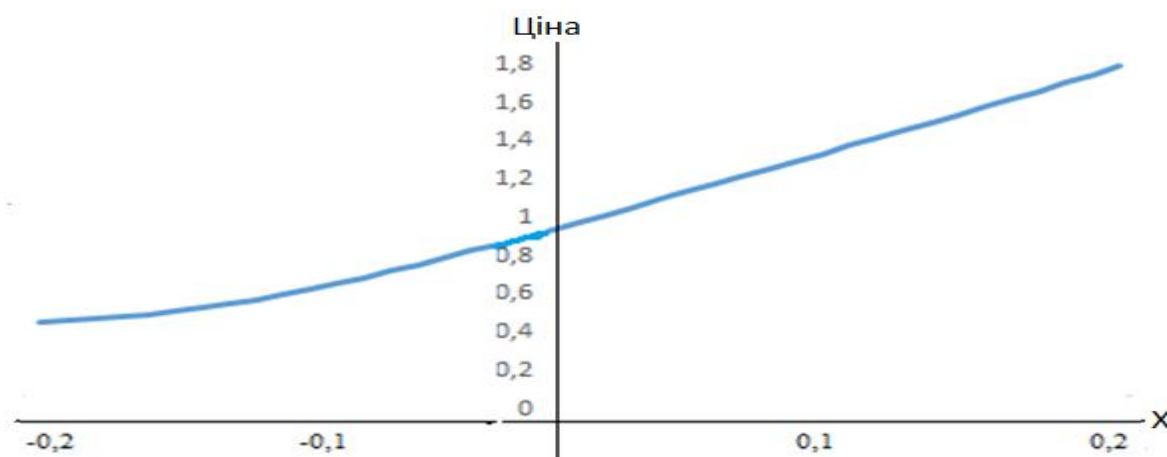


Рис.5.8. Наближена ціна деривативу отримана за допомогою розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією.

Наведені на рисунках 5.3-5.8 значення імплікованої волатильності і послідовних наближень ціни знайдених за допомогою методики розкладу в ряд Тейлора, дозволяють провести аналіз тривалості процесів ціноутворення на фондовому ринку. Коректувати ситуацію та робити конкретні кроки для оптимізації фінансових стратегій. Розроблена стратегія управління процесами ціноутворення, зокрема управління динамікою ціни базового активу та його волатильності, ціни індексів, акцій, опціонів, величиною фінансових потоків. Здійснено дослідження ціноутворення та обчислення волатильності європейських опціонів із загальною локально-стохастичною волатильністю за допомогою методики використання рядів Тейлора для вироджених дифузійних процесів. Застосування цієї ідеї вимагає нових підходів викликаних труднощами виродження. Наближення ціни отримується за допомогою розв'язку задачі Коші диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією, наближення волатильності є повністю явними, тобто вони не вимагають спеціальних функцій.

Змінюючи час $T - t$ можна знаходити:

а) ціну деривативу на цьому проміжку часу,

- б) зміну ціни по часу покроково,
- в) волатильність для будь-якого часового проміжку,
- г) волатильність покроково, фіксуючи різні параметри, такі як t, x, y, k .

Такі обчислення дають можливість передбачати зміну ціни та зміну волатильності відповідно до ситуації на ринку, та керуватися знайденими величинами u_n і σ_n у виборі стратегій поведінки на фондовому ринку.

Метод рядів Тейлора дуже зручний у використанні і має значну швидкість збіжності. Розглянутим методом можна обчислити величини фондових індексів, що відповідають динаміці фондового ринку та величини фінансових потоків, які описуються процесами Колмогорова (Вінерівські процеси з виродженням дифузії), що залежать від фактора u . Дану методику можна застосувати до обчислення волатильності коли вона залежить від групи змінних з різними ступенями виродження. Дана методика обчислення цін деривативів та їхньої волатильності дозволяє звести до мінімуму спекулятивні зміни в ціноутворенні. Обчислення проводиться за допомогою простих схем, які не потребують використання складних спеціальних функцій.

Розв'язано задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова та проведено розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів рівняння. Така модель відповідає значній кількості випадкових процесів на фінансовому ринку і дає можливість обчислити величини фінансових потоків, швидкість росту ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

Використавши моделі ціноутворення деривативів та дослідивши волатильність вироджених дифузійних процесів можна зробити наступні висновки.

1. Одержані значення імплікованої волатильності і послідовних наближень ціни дають можливість робити аналіз тривалості процесу на фондовому ринку, робити корекцію і конкретні кроки для покращення ситуації щодо оптимізації фінансових стратегій як учасників ринку так і в цілому економічних агентів.

2. На прикладі виродженої моделі Хестона, що описує процес динаміки ціноутворення та розвиток імплікованої волатильності, при початковому наближенні функцією ціни Блека-Шоулза проведено обчислення волатильності та дохідності похідних фінансових інструментів за другим наближенням Тейлора та методом найменших квадратів. Отримані результати майже ідентичні, що свідчить про високу точність наближення.

3. Наближення ціни отримується за допомогою розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних дифузії з інерцією. Якщо виплата опціонів є функцією лише від x , тоді розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів не залежить від t і значно спрощується аналітичний вираз фундаментального розв'язку щільності розподілу випадкового процесу.

4. Розроблено метод за яким нескладно (без використання спеціальних функцій) отримується наближення ціни опціону та його імплікованої волатильності. Використано при цьому лише задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова та розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів рівняння. Така модель відповідає значній кількості випадкових процесів на фондовому ринку. Для знаходження імплікованої волатильності формули є явними і точними.

5. Впроваджено підхід до ціноутворення похідних цінних паперів та знаходження імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора коли стохастичний процес описується рівнянням дифузії з інерцією (виродженим параболічним рівнянням). Для

виродженого параболічного рівняння знаходження наближеної ціни опціонів є достатньо простим оскільки використовує тільки оцінки похідних щільності розподілу дифузії з інерцією.

6. Впроваджено єдиний підхід до ціноутворення європейських опціонів, які описуються виродженими дифузійними процесами типу дифузії з інерцією, на основі класичного наближення рядами Тейлора. Використовуючи одержані результати, наближену вартість опціонів можна обчислювати так само ефективно, як і ціну Блека-Шоулса для похідних цінних паперів. Розглянутим методом можна обчислити величини фондових індексів, що відповідають динаміці фондового ринку та величини фінансових потоків, які описуються процесами Колмогорова, що залежать від фактора u . Дану методику можна застосувати до обчислення волатильності коли вона залежить від групи змінних з різними ступенями виродження.

7. Методика застосування рядів Тейлора для обчислення цін деривативів та їхньої волатильності дозволяє звести до мінімуму спекулятивні зміни в ціноутворенні, що є надзвичайно важливим для захисту фондових ринків від «перегріву» та прояву фінансових криз.

Основні результати наукового дослідження, що отримані в даному розділі опубліковані автором у наукових працях [25; 28; 36; 38; 120; 122].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему щодо розроблення теоретико-методологічного підґрунтя та практичного інструментарію щодо дослідження волатильності поведінки фондового ринку за допомогою спектрального аналізу.

1. Розроблено концепцію ціноутворення похідних фінансових інструментів на фондовому ринку, реалізація якої дозволить здійснити прогнозування ціноутворення на різних стадіях розвитку і для різних горизонтів прогнозування дає можливість формалізувати процес ціноутворення фінансових активів та знизити використання інтуїтивних методів. Така концептуальна модель дає можливість передбачати результати цілеспрямованих дій інвесторів, що відбуваються під впливом різноманітних чинників на фондовому ринку.

2. Застосовано модель Гобсона-Роджерса до значень індексу ПФТС. Вона є стохастичною моделлю волатильності, яка залежить від множини значень логарифмічної ціни з експоненціально ваговим історичним значенням. Досліджено динаміку волатильності індексу ПФТС та запропоновано ефективний метод для моделювання, аналізу і стійкої оцінки важливих ринкових параметрів.

3. Розглянуто шляхозалежну модель волатильності з метою дослідження динаміки фондового ринку. Тобто в цій моделі волатильності не потрібно постійно калібрувати її змінність (що є відомим недоліком локальних моделей волатильності), що дозволяє використовувати її для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою гармонізації динаміки фондового ринку.

4. Застосовано спектральну теорію для знаходження ціни похідних фінансових інструментів, вважаючи що процеси, які описуються, є марківськими і такими, що їх можна розглядати в Гільбертових просторах L^2 , застосовуючи теорію Штурма-Ліувілля. Всі припущення приводять до отримання аналітичних формул, які узгоджені з емпіричними даними і при практичному застосуванні адекватно відображають проходження процесів на фондових ринках.

5. Розв'язано двопараметричну задачу оцінювання інтенсивності Беселівських дифузійних процесів методами спектральної теорії. Зокрема, розглянуто бар'єри для ціни, в яких похідна фінансових потоків перетворюється в нуль. Функцію Гріна цієї задачі, яка репрезентує ймовірність поширення ціни опціону, представлено через ряди Фур'є Бесселя. Це дає можливість оцінити інтенсивність фінансових потоків фондових ринків.

6. Розроблено алгоритм знаходження наближеної ціни двохбар'єрних опціонів та знайдено явні формули для знаходження вартості деривативів на основі розвинення за власними функціями та власними значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін деривативів з врахуванням чинників, які впливають на волатильність похідних фінансових інструментів.

7. Використано методи спектральної теорії та теорії сингулярних і регулярних збурень, знайдено наближену ціну двобар'єрних опціонів з багатофакторною волатильністю, як розвинення за власними функціями використовуючи інфінітезимальні генератори $(l+n+1)$ -вимірної дифузії. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін опціонів.

Використовуючи нейтральну за ризиком оцінку, отримуємо задачу Коші, яка дозволяє обчислити наближену ціну похідних активів та їхню волатильність на основі рівняння дифузії з двома групами факторів швидко- та повільнозмінних чинників нелокальної волатильності, отримано модель з багатовимірною стохастичною волатильністю.

8. Застосовано спектральну теорію та теорію сингулярних і регулярних збурень до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, отримали явні формули для наближень цін облігацій та їх дохідності. Для отримання явних формул потрібно розв'язати 21 рівняння Пуассона.

9. Розширено методику знаходження орієнтовної ціни для широкого класу деривативів. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у Гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень, встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделлю CEV зі стохастичною волатильністю залежною від l -швидкозмінних та n -повільнозмінних факторів, $l \geq 1, n \geq 1$, $l \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ і локальної змінної. Запропоновано метод визначення орієнтовної ціни деривативів, яка задається процесом з стохастичною волатильністю, та є залежною від багатьох факторів методами спектральної теорії та хвильової теорії збурень.

10. Розроблено метод, за яким отримується наближення ціни опціону та його імплікованої волатильності. Використано при цьому лише задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова та розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів рівняння. Така модель відповідає

значній кількості випадкових процесів на фондовому ринку. Для знаходження імплікованої волатильності формули є явними і точними. Впроваджено підхід до ціноутворення похідних цінних паперів та знаходження імплікованої волатильності на основі класичного наближення рядами Тейлора, коли стохастичний процес описується рівнянням дифузії з інерцією (виродженим параболічним рівнянням). Для виродженого параболічного рівняння знаходження наближеної ціни опціонів є достатньо простим, оскільки використовує тільки оцінки похідних щільності розподілу дифузії з інерцією.

11. Покрокове знаходження зміни дохідності і волатильності при відповідному аналізі дає можливість приймати обґрунтовані стратегічні рішення трейдерами на фондових ринках.

12. Знайдено наближену ціну та імпліковану волатильність, що дають можливість на кожному кроці в фіксований момент часу позбутися спекулятивних змін у ціноутворенні, що має надзвичайно важливе значення для захисту фондових ринків від «перегріву» та прояву фінансових криз. Одержані значення імплікованої волатильності і послідовних наближень ціни дають можливість робити аналіз проходжень процесу на фондовому ринку, робити корекцію і конкретні кроки для покращення ситуації щодо оптимізації фінансових стратегій.

13. Розв'язано задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння Колмогорова та проведено розвинення в ряд Тейлора коефіцієнтів рівняння. Така модель відповідає значній кількості випадкових процесів на фондовому ринку і дає можливість обчислити величини фінансових потоків, швидкість росту ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абасова К. Валютні деривативи в Україні: стан та перспективи / К. Абасова // Вісник Національного банку України. – 2014. – № 9(223). – с. 45–48.
2. Азаренкова Г. Основні тенденції розвитку фондового ринку в посткризовий період / Г. Азаренкова, І. Шкодін // Вісник Національного банку України. – Лютий, 2012. – № 2 (192). – С. 3–7.
3. Антонов С. Організація обігу валютних деривативів в Україні: питання теорії та практики / С. Антонов, С. Шишков // Ринок цінних паперів України. – 2009. – № 5–6. – С. 37–56.
4. Бідюк П.І. Прогнозування волатильності фінансових процесів за альтернативними моделями / П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук, О.А. Кожухівська // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2012. – № 6. – С. 36-44.
5. Благун І.С. Моделювання процесів розвитку фондового ринку: монографія / І.С. Благун, І.В. Буртняк. – Івано-Франківськ: Видавець Віктор Дяків, 2011. –155 с.
6. Буртняк І.В. Оцінка і прогнозування динаміки показників фондового ринку/ І.В. Буртняк, І.С. Благун // Современные проблемы моделирования социально-экономических систем: Монография.– Х.: ИД «ИНЖЕК», 2009–С. 135-150.
7. Буртняк И.В. Моделирование динамики развития фондового рынка с помощью моделей ARCH / И. В. Буртняк // Бизнес Информ. – 2009. – №12. – С. 131–135.
8. Буртняк І.В Дослідження взаємодії між фондовими індексами на основі моделей ARCH/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Вісник

- Східноукраїнського нац. у-ту ім. В. Даля.– Луганськ, 2009. – №12. – С. 102–110
9. Буртняк И.В. Моделирование динамики индекса ПФТС/ И. В. Буртняк, А.П. Малицкая // Бизнес Информ. – 2010. – №1. – С. 60–65.
 10. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження динаміки фінансових ресурсів на базі мультиплікативної стохастичної моделі // Бізнес Информ. – 2010. – №(4)1. – С. 11–14.
 11. Буртняк І.В. Ретроспективний аналіз фондового ринку / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону. – Івано–Франківськ – 2010. – Т. 1. Вип. 6. – С. 175–181.
 12. Буртняк И.В. Метод параметрикса для ультрапараболи-ческих систем/ И. В. Буртняк, А.П. Малицкая // Карпатские математические публикации.–2010.– Т 2, № 2.–С.74–82.
 13. Буртняк І.В. Дослідження волатильності за допомогою модифікації моделі Блека–Шоулза/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ. – 2011. – №(5)1. – С. 72–75.
 14. Буртняк І.В. Застосування моделі Гобсона-Роджерса для дослідження індексу ПФТС/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Зб.наук.праць „Моделювання регіональної економіки”. – Івано-Франківськ : 2011. – №2(18). – С. 13–19.
 15. Буртняк І.В. Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних систем / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Карпатські математичні публікації. – 2012. – №1/2012/т.4. – С. 12–22.
 16. Буртняк І.В. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ. – 2012. – №3. – С. 48–50.

17. Буртняк І.В. Моделювання динаміки валютних курсів на основі спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Інноваційна економіка. – 2012. – №5.(31) – С. 259–265.
18. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ. – 2013. – №4. – С. 152–158.
19. Буртняк І.В. Про стабілізацію інтеграла Пуассона ультрапараболічних рівнянь / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Карпатські математичні публікації. – 2013. – Т.5, №2. – С. 290–297.
20. Буртняк І.В. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Проблеми економіки. – 2014. – №2. – С. 349–356.
21. Буртняк І.В. Моделювання процесу управління прибутком підприємства / І. В. Буртняк // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону – Івано-Франківськ : 2014. – Т2. №11. – С. 53–60.
22. Буртняк І.В. Моделювання стратегічного управління фінансовою діяльністю підприємства / І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2014. – №1. – С. 23–30.
23. Буртняк І.В. Моделювання фінансової стратегії поведінки компаній/ І. В. Буртняк // Вісник Черкаського університету: серія Економічні науки - Випуск №37 (330) – 2014. – С. 15-21.
24. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів, які задовольняють процес Орнштейна–Уленбека, методами спектрального аналізу/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали VI міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 3–12 квітня 2014). – Харків-Бердянськ. – 2014. – С. 91–95

25. Буртняк І.В. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Карпатські математичні публікації. – 2014. – Т.6, №2. – С. 320–328.
26. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів за допомогою моделі CEV з багатовимірною стохастичною волатильністю / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2015. – №1. – С. 509–519.
27. Буртняк І.В. Моделювання волатильності для індексу ПФТС за допомогою узагальненої моделі Гобсона-Роджерса / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2015. – №2. – С. 446–452.
28. Буртняк І.В. Структура фундаментального розв'язку задачі Коші для систем Колмогорова другого порядку / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. №1 (29). — С. 60–71.
29. Буртняк І.В. Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених параболічних систем / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Буковинський математичний журнал – Чернівці : 2015. – Т3. №3-4. – С. 111–114.
30. Буртняк І.В. Дослідження поведінки фондового ринку на основі моделей ARCH / І. В. Буртняк // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону – Івано-Франківськ : 2016. – Т2. №14. – С. 63–80.
31. Буртняк І.В. Системний підхід до оцінювання опціонів на базі моделі CEV / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ. – 2016. – №10. – С. 152–158.
32. Буртняк І.В. Знаходження ціни опціону з мультиплікативною волатильністю за допомогою рівняння Колмогорова. / І.В. Буртняк, Г.П.

- Малицька // Матеріали XXIII міжнародної науково-практичної конференція Транскордонне співробітництво: ключові ідеї та перспективи 20-22 травня 2016 Сучавський університет Штефан чел Маре– 2016. – С. 167-169
- 33.Буртняк І.В. Моделювання ціноутворення двобар'єрних опціонів з багатофакторною волатильністю / І. В. Буртняк// Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2017. – №1(29). – С. 437–449.
- 34.Буртняк І.В. Оцінювання деривативів двобар'єрних опціонів Беселівських процесів методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2017. – №2(30). – С. 14–23.
- 35.Буртняк І.В. Регуляція фінансових потоків за допомогою методів спектрального аналізу /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Міжнародної наукової конференції «Трансформація фінансових ринків в умовах глобальної нестабільності: реалії сьогодення та погляд у майбутнє», 30 жовтня 2017 – Ірпінь, 2017. – С. 66-67.
- 36.Буртняк І.В. Застосування рядів Тейлора для ціноутворення похідних цінних паперів /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Всеукраїнської науковопрактичної конференції “ Економічна кібернетика: перспективи розвитку інформаційної економіки ”, м. Дніпро, 1-2 березня 2018 р. – С. 15-19
- 37.Буртняк І.В. Оцінювання деривативів двобар'єрних опціонів Беселівських процесів методами спектрального аналізу /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали міжнародної науково-практичної конференції "Стратегія і практика інноваційного розвитку фінансового сектору України", 20-22 березня 2018– Ірпінь, 2018. – С. 21-24.

- 38.Буртняк І. В. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для систем Колмогорова другого порядку / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька// Укр. мат. журн. - 2018. - **70**, № 8. - С. 1107-1117.
- 39.Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1969. С. 576.
- 40.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С. Владимирова М.: Наука, 1981. 512 с.
- 41.Голуб Г.Г. Проблеми та перспективи розвитку строкового валютного ринку в Україні/ Г.Г. Голуб, Л.В. Кушнер // соціально-економічні дослідження в перехідний період. – 2007. – №1. – С. 379–383.
- 42.Гриценко А.А. Співвідношення стабільності та волатильності у динаміці вартості грошової одиниці / А.А. Гриценко, Н.В. Душкевич // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: зб. наук. праць. – Суми: ДВНЗ «Українська академія банківської справи НБУ», 2007. – № 19. – С. 46–53.
- 43.Економічна енциклопедія: У трьох томах. Т.3. / Редкол.: С.В. Мочерний та ін. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 952 с.
- 44.Загородній А.Г. Фінансово-економічний словник / А.Г. Загородній, Г.Л. Вознюк. – К.: Знання, 2007. – 1072 с.
- 45.Загородній А.Г. Ринок фінансових послуг: Термінологічний словник / А.Г. Загородній, Г.Л. Вознюк. – Львів: Бескид Біт, 2008. – 544 с.
- 46.Загорський В.С. Розвиток ринку цінних паперів та управління його ризиками / В.С. Загорський: монографія.–Х.:ВД «ІНЖЕК», 2008.– 192 с.
- 47.Закон України “Про цінні папери та фондовий ринок” від 18.02.2018 // ВВР – 2018. – №3480-IV. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/3480-15/ed20170604/>

- 48.Івашук Н.Л. Аналіз структури світового ринку деривативів / Н. Л. Івашук: Монографія. – Львів: Ліга-Прес, 2008. – 248 с.
- 49.Квактун О.О. Особливості участі України на світовому ринку деривативів / О.О. Квактун // Економічний простір. – 2014. – № 83.
- 50.Кишакевич Б.Ю. Проблема масштабування VarR при агрегації економічного капіталу банку / Б.Ю. Кишакевич // Економічний простір, 2016. -№111. –С. 219-228.
- 51.Колодізєв О. М., Аналіз перспектив розвитку ринку деривативів в Україні з урахуванням вирішення проблеми його нормативно-правового регулювання/ О. М. Колодізєв, О. В. Коцюба // Проблеми економіки. – 2016. – №1. – С. 242–248.
- 52.Klebanova T.S. Modeling the financial strategy of the enterprise in an unstable environment / Tamara S. Klebanova, Lidiya S. Guryanova, Tetiana N. Trunova // “ECONOMIC STUDIES” journal, 2017, issue 3 Available from: <https://www.iki.bas.bg/en/economic-studies-journal-0>
- 53.Klebanova T.S. Models of estimation in the mechanism of early informing and prevention of financial crises in corporate systems // Klebanova T.S., Gvozdytskyi V.S., Labunska S.V., Yermachenko I.V. // Financial and credit activity: problems of theory and practice, 2018, Vol2 (№25), pp. 191-197
- 54.Ляшенко В.И. Фондовые индексы и рейтинги / В.И. Ляшенко. – Д.: Сталкер, 1998. – 320 с.
- 55.Ляшенко О.І. Дослідження динаміки фондового індексу ПФТС на фінансовому ринку України на різних часових вікнах з 2001 по 2016 роки / О.І. Ляшенко, К. І. Крицун // МННЦ ІТіС. – 2016. – №21. – С. 21-

- 56.Ляшенко О.І. Мультифрактальний аналіз динаміки фондових індексів Азії: NIKKEI TA HKSE / О.І. Ляшенко, К. І. Крицун // Технологічний аудит та резерви виробництва – 2016. Том.2, №6(28). – С.15- 18.
- 57.Левицький С.І. Прогнозування волатильності фінансових ринків з використанням елементів нейромережевого моделювання / Левицький С.І., Жерліцин Д.М. // Вісник Прикарпатського університету. Серія: Економіка. – Вип. XI. – Івано-Франківськ, 2017. – С 121-134
- 58.Мертенс А.В. Инвестиции: Курс лекций по современной финансовой теории./ А.В. Мертенс– К.: Киевское инвестиционное агентство, 2007. – 41с.
- 59.Мозговий О.М. Фондовий ринок: підручник / А.Ф. Баторшина, О.Г. Величко, Т.О. Фролова та ін.; за заг. ред. О.М. Мозгового. – Київ: КНЕУ, 2013. – 543 с.
- 60.Нейман фон Дж. Теория игр и экономическое поведение / Нейман фон Дж., О. Моргенштерн ; пер. с англ. ; под ред. Н.Н. Воробьёва. – М. : Наука, 1970. — 708 с.
- 61.Оксендаль Б.. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. / Б. Оксендаль — М. : Мир, 2003. — 408 с.
- 62.Офіційний сайт фондової біржі ПФТС [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <http://www.pfts.com.ua/>
- 63.Парандій О. Ризики та втрати у торгівлі деривативами / О. Парандій // Фінансові інструменти. – 2013. –.№ 1–2. – С. 77–82.
- 64.Петришин Л.Б. Математичне моделювання процесів управління інноваційною діяльністю./ Л.Б. Петришин// Проблеми і перспективи розвитку ІТ-індустрії, 2017.-№1. С. 59-64.
- 65.Постанова ВРУ «Про Концепцію функціонування та розвитку

фондового ринку України» від 22.09.1995 № 342/95-ВР.

- 66.Примостка Л. О. Фінансові деривативи: аналітичні та облікові аспекти / Л. О. Примостка: монографія.–К.:КНЕУ, 2001.– 263 с.
- 67.Примостка Л.О. Біржовий ринок деривативів в Україні: історія, сучасність, перспективи розвитку / Л.О. Примостка, І.В. Краснова // Ринок фінансових послуг. – 2014. – № 7.
- 68.Прогнозування та хеджування фінансових ризиків: монографія / за ред. проф. Примостки Л. О. – К: КНЕУ, 2014. – 424 с.
- 69.Романов В.С. Волатильность как характеристика изменчивости финансово-экономических переменных: сб. науч. трудов / В.С. Романов. – Пенза: «Теория и практика реструктуризации предприятий», 2011. – 150 с.
- 70.Рубин Ю.Б. Фондовый портфель / Отв. ред. Ю.Б. Рубин, В. П. Солдаткин– М.: СОМИНТЭК, 1992.– 212с.
- 71.Рубцов Б.Б. Современные фондовые рынки. Учебное пособие для вузов / Б.Б. Рубцов. – М: Альпина Бизнес Букс, 2007. – 926 с.
- 72.Силантьєв С.О. Менеджмент похідних фінансових інструментів : навч. посіб. / Силантьєв С.О. — К. : КНЕУ, 2010. — 279 с.
- 73.Соловйова В.В. Дослідження тенденцій розвитку фондового ринку України / В.В. Соловйова // міжнародний науково-практичний журнал «Фінансовий простір»: електронне наукове фахове видання. – 2014. – №3 (15). – 2014
- 74.Сохацька О. М. Застосування опціонів у корпоративному управлінні / О.М. Сохацька // Економіст. – 2001. – № 3. – С. 33, 34–39.
- 75.Сохацька О. М. Біржова справа. / О. М. Сохацька. – Тернопіль : ТНЕУ, 2014. – 655 с

- 76.Твардовский В. Волатильность как инструмент для определения минимумов рынка [Электронный ресурс] / В. Твардовский // ЗАО 175 «Инвестиционная компания «Ай Ти Инвест». – Режим доступа: [http: // www.itinvest.ru /about /news /2066/](http://www.itinvest.ru/about/news/2066/)
- 77.Тихонов А. Н. Уравнения математической физики: учеб. пособие для ун-тов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1972. 736 с.
78. Фондовый рынок: підручник / [О. М. Мозговий, А. Ф. Баторшина, О.Г. Величко]; за заг. ред. д-ра екон. наук, проф. О. М. Мозгового – К.: КНЕУ, 2013. – 543 с.
- 79.Халл Дж.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Халл Дж.К. — М. : ООО «И.Д. Вильямс», 2007. — 1056 с.
- 80.Шелудько В.М. Фінансовий ринок / В.М. Шелудько. Підручник— К.: «Знання», 2006. – 535 с.
- 81.Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики / А.Н. Ширяев. — М. : ФАЗИС, 2004. — 1076 с.
- 82.Шуклін Г.В. Моделювання інвестиційних рішень на фондовому ринку / Г.В. Шуклін // Моделювання та інформаційні системи в економіці : зб. наук. праць. — 2009. — Вип. 79. — С. 62-69.
- 83.Янке Е. Специальные функции, формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. М.: Наука, 1977. 342 с.
- 84.Януль І.Є. Шляхи розвитку фондового ринку в Україні / І.Є. Януль, В.М. Шелудько // Фінанси України. – 1998. – №6. – С. 96–100.
- 85.Aboulaich R., F. Bagheri & A. Jrai (2013) Option pricing for a stochastic volatility jump-diffusion model, International Journal of Mathematics and Statistics, 13 (1), 1 - 19.

86. Albanese C. & A. Kuznetsov (2004). Unifying the three volatility models. *Risk Magazine* 17(3), 94–98.
87. Albanese C. & S. Lawi (2005). Laplace transforms for integrals of markov processes. *Markov Processes Related Fields* (11), 677–724.
88. Albanese, C., G. Campolieti, P. Carr, & A. Lipton (2001). Black-Scholes goes hypergeometric. *Risk* 14(12), 99–103.
89. Alos E. (2012). “A decomposition formula for option prices in the Heston model and applications to option pricing approximation,” *Finance and Stochastics*, vol. 16, no. 3, pp. 403–422.
90. Andersen L. & Piterbarg V. (2007), Moment explosions in stochastic volatility models, *Finance Stoch*, 11, 29 - 50.
91. Andersen L. (2011), “Option pricing with quadratic volatility: a revisit”, *Finance and Stochastics*, Volume 15, Issue 2, pp. 191–219.
92. Andersen T.G. (1994). Stochastic autoregressive volatility: A framework for volatility modeling. *Mathematical Finance* 4, 75-102.
93. Andersen T.G. (1996). Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility. *Journal of Finance* 51, 169-204.
94. Anderson T. W. (1968), *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York,— P. 584.
95. Arrow K.J. (1954) Existence an Equilibrium for a Competetive Economy / K.J. Arrow, G. Debreu // *Econometrica*. – Vol. 22, № 3, July. — P. 265–290.
96. Bachelier L. (1900) Th`eorie de la Sp`eculation / L. Bachelier // *Annales de l'Ecole Normale Superieure*. – Vol. 17. – P. 21–86
97. Baillie R.T. & Bollerslev, T. (1989). The message in daily exchange rates: A conditional variance tale. *Journal of Business and Economic Statistics* 7, 297-304.

98. Baillie R.T. & Bollerslev, T. (1991). Intra-day and inter-market volatility in foreign exchange rates. *Review of Economic Studies* 58, 565-584.
99. Batting R.J. (1999) The second fundamental theorem of asset pricing: a new approach / R.J. Batting, R.A. Jarrow // *Review of Financial Studies*. – Vol. 12, № 4. – P. 1219–1234.
100. Benhamou E., E. Gobet, & M. Miri (2010). Time dependent Heston model. *SIAM J. Financial Math.* 1(1), 289–325.
101. Berestycki H., J. Busca, & I. Florent (2002). Asymptotics and calibration of local volatility models. *Quantitative finance* 2(1), 61–69.
102. Bernhard A (1970). *More Profit and Less Risk: Convertible Securities and Warrants* / Bernhard A. – N. Y. : Arnold Bernhard & Co., Inc. — 132 p.
103. Black, F & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Other Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
104. Blahun I. (2017) Cognitive approach to analysis of investment attractiveness of the regions / I. Blahun, L. Dmytryshyn, H. Leshuk // *Науковий вісник Полісся*. – Чернігів : ЧНТУ. – № 4(12). – Ч.1. – С. 171-176.
105. Blahun I. (2017) Simulative model for evaluation of investment processes in the regions of Ukraine / I. Blahun, L. Dmytryshyn, H. Leshuk // *Investment Management and Financial Innovations*. – № 14(3), 322-329. doi:[http://10.21511/imfi.14\(3-2\).2017.032016](http://10.21511/imfi.14(3-2).2017.032016).
106. Bollerslev T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31,307-327.
107. Bollerslev T. & Engle, R.F. (1993). Common persistence in in conditional variances. *Econometrica* 61, 167-186.

108. Bollerslev T., Chou, R.Y. & Kroner, K.F. (1992). ARCH modeling in finance. *Journal of Econometrics* 52, 5-59.
109. Bollerslev Tim, Ray Y. Chou & Kenneth F. Kroner (1992), "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
110. Borodin A. and P. Salminen (2002). *Handbook of Brownian motion: facts and formulae*. Birkhauser.
111. Boyarchenko S.I. (2002) *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory* / S.I. Boyarchenko, S.Z. Levendorskii. — New Jersey ; London ; Singapore ; Hong Kong : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. — 421 p.
112. Boyarchenko S.I. and Levendorskii, S.Z. (2000). Option pricing for truncated Lévy processes. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 03(03), 549–552.
113. Brennan, M.J., & Schwartz, E.S. (1979). A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds // *Journal of Banking and Finance*.— № 3. —P. 133-154.
114. Bronzin V. (1908) *Theorie der Prämien-geschäfte* / Bronzin V. — Leipzig ; Wien : Franz Deuticke. — 89 p.
115. Bruss T. and Yor M. (2012). Stochastic processes with proportional increments and the last-arrival problem, *Stoch. Proc. and Th. Applic.*, Vol. 122 (9), 3239-3261.
116. Burtnyak I.V. & Malytska H. P. (2009) On the fundamental matrix of solutions of Cauchy problem for one system of the ultraparabolic equations // International scientific conference “Infinite dimensional analysis and topology”.—Ivano-Frankivsk.— P.93.
117. Burtnyak, I.V. & Malytska, H.P. (2017). Calculating the price for derivative financial assets of Bessel processes using the Sturm-Liouville theory, *Problems of Economics*,. 2, pp. 310–316.

118. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). Evaluating the financial flows of Bessel processes by using spectral analysis, *Business Inform*, 7, pp. 120–124
119. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). The Evaluation of Derivatives of Double Barrier Options of the Bessel Processes by Methods of Spectral Analysis, *Investment Management and Financial Innovations*, Vol. 14, Issue 3, pp. 126–134
120. Burtnyak, I.V. & Malytska, A (2017). The Investigation of Securities Cost Using Methods of Spectral Analysis. *International Journal of Economic Research*, Vol. 14, Issue 15, pp. 705–715.
121. Burtnyak, I.V. & Malytska, A (2018). Spectral study of options based on CEV model with multidimensional volatility. *Investment Management and Financial Innovations*, 15(1), 18-25. doi:[10.21511/imfi.15\(1\).2018.03](https://doi.org/10.21511/imfi.15(1).2018.03)
122. Burtnyak, I.V. & Malytska, A (2018). Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions. *Problems and Perspectives in Management*, 16(1), 224-231. doi:[10.21511/ppm.16\(1\).2018.22](https://doi.org/10.21511/ppm.16(1).2018.22)
123. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2018) Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein-Uhlenbesck processes. *Carpathian Math. Publ.* 10 (2), 273–287. doi:[10.15330/cmp.10.2.273-287](https://doi.org/10.15330/cmp.10.2.273-287)
124. Carr, P., & Schroder M. (2003). Bessel processes, the integral of geometric Brownian motion, and Asian options. Preprint. University of Mannheim.
125. Carr, P., Geman, H., Madan, D.B. & Yor, M. (2003). Stochastic volatility for Lévy processes. *Math. Finance*, 13(3), 345–382.
126. Carr, P. & V. Linetsky (2006). A jump to default extended CEV model: An application of Bessel processes. *Finance and Stochastics* 10 (3), pp. 303–330.

127. Castelli C. (1877) The theory of «options» in stocks and shares / Castelli C. – London : F.C. Mathieson. – 77 p.
128. Chernov M., A. R. Gallant E. Ghysels, and G. Tauchen (2003) Alternative models for stock price dynamics.
129. Chisholm A.M. (2010) Derivatives Demystified: A Step-by-Step Guide to Forwards, Futures, Swap and Options / Chisholm A.M. – 2nd ed. – Chichester : John Wiley & Sons Ltd. – 286 p.
130. Choi, S.-Y., J.-P. Fouque, & J.-H. Kim (2010). Option pricing under hybrid stochastic and local volatility. Submitted.
131. Coffman, E. G., Puhalskii, A. A. & Reiman, M. I. (1998). Polling systems in heavy traffic: a Bessel process limit. *Math. Operat. Res.* 23, 257–304.
132. Corielli, F., Foschi, P. & Pascucci, A., (2010), “Parametrix approximation of diffusion transition densities”, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, Volume 1, pp. 833–867.
133. Cotton, P., J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, & R. Sircar (2004). Stochastic volatility corrections for interest rate derivatives. *Mathematical Finance* 14(2).
134. Cox, J. (1975) "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions." Unpublished draft, Stanford University
135. Cox, J.C., Ross, S. & Rubinstein, M. (1976) The Valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial economics* 3, 145-166.
136. Cox, J.C., Ingersoll, J.E., & Ross, S.A. (1984). A theory of the term structure of interest rates // *Econometrica*.– Vol.53. – № 2. – P.385–408.
137. Cox J.C., Ingersoll J.E., & Ross S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates // *Econometrica*.– Vol.53. – № 2. – P.385–408.
138. Davis, M. H. A. (2004) Complete-market models of stochastic volatility. *Proc. R. Soc. Lond.* A460, 11–26.

139. Davydov D. & Linetsky V. (2001). Structuring, pricing and hedging double-barrier step options, *Journal of Computational Finance*, 5, pp. 55–88.
140. Davydov, D. & V. Linetsky (2003). Pricing options on scalar diffusions: An eigenfunction expansion approach. *Operations Research* 51(2), 185–209.
141. Deuschel, J. D., P. K. Friz, A. Jacquier, & S. Violante (2014). Marginal density expansions for diffusions and stochastic volatility I: Theoretical foundations. *Comm. Pure Appl. Math.* 67(1), 40–82.
142. Dmytryshyn L. A. (2014) Methodological Approach To Development And Optimization A Set Of Parameters For A Company's Creditworthiness Evaluating / Dmytryshyn L., Blahun I. // *Економічний часопис*. – № 7-8 (2). – С. 52-55.
143. Dmytryshyn L. (2016) A model for achieving the allocative efficiency of credit resources in Ukraine's banking system / Dmytryshyn L., Blahun I. // *Banks and Bank Systems*, Volume 11, Issue 3, P. 6-14
144. Dong, Y. & R. Sircar (2014). Time-inconsistent portfolio investment problems. In D. Crisan, B. Hambly, and T. Zariphopoulou (Eds.), *Stochastic Analysis and Applications 2014 - In Honour of Terry Lyons*. Springer.
145. Dong, Y. & A. Lewbel (2015) A simple estimator for binary choice models with endogenous regressors. *Econometric Reviews* 34, 82-104.
146. Douglas R. (2010) *Credit Derivatives Strategies: New Thinking on Managing Risk and Return* / Douglas R. — N. Y. : Bloomberg Professional. – 223 p.
147. Drimus, G. G. (2012). Options on realized variance by transform methods: a non-affine stochastic volatility model. *Quant. Finance* 12(11), 1679–1694.
148. Drost, F.C.& Nijman, T.E. (1993) Temporal aggregation of GARCH processes. *Econometrica* 61, 909-927.

149. Drost, F.C., & Werker, B.J.M. (1996). Closing the GARCH gap: Continuous time GARCH modeling. *Journal of Econometrics* 74, 31-57.
150. Dubins L: B. Shepp L: A. & Shiryaev A: N. (1993). Optimal stopping rules and maximal inequalities for Bessel processes: *Theory Probab: Appl:* 38 (226-261).
151. Dufresne, D. (2000). "Laguerre Series for Asian and Other Options", *Mathematical Finance* 10,407-428.
152. Dufresne, D. (2001). An affine property of the reciprocal Asian process. *Osaka Journal of Mathematics* 38: 379-381.
153. Elliott, R. J., M. Jeanblanc, & M. Yor (2000). On models of default risk. *Mathematical Finance* 10(2), 179–194.
154. Emanuel, D. C. & MacBeth, J. D. (1982) Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 533–554.
155. Engle, R.F. (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica* 50, 987-1008.
156. Engle, R. F. (1990), "Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of 87," *Review of Financial Studies*, 3, 103-106.
157. Ewald, C.-O. (2005). Local volatility in the Heston model: a Malliavin calculus approach. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* (3), 307–322.
158. Feller, W. (1954). Diffusion processes in one dimension. *Transactions of the American Mathematical Society* 77(1), pp. 1–31.
159. Filer H. (1962) *Understanding Put and Call Option's* / H. Filer. – 5th ed. – N. Y. : Crown Publishers. – 125 p.
160. Forde, M. & A. Jacquier (2009). Small-time asymptotics for implied volatility under the heston model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 12(06), 861–876.

161. Forde, M., Jacquier, A. & Lee, R., (2012), The small-time smile and term structure of implied volatility under the heston model, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, Volume 3, Issue 1, pp. 690–708.
162. Fouque J.-P., Papanicolaou G., & Sircar R. (2000). *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press.
163. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, & K. Solna (2003). Singular perturbations in option pricing. *SIAM J. Applied Mathematics* 63(5), 1648–1664.
164. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, & K. Sølna (2004). Multiscale stochastic volatility asymptotics. *Multiscale Modeling and Simulation* 2, 22–42.
165. Fouque, J.-P., R. Sircar, & K. Solna (2006). Stochastic volatility effects on defaultable bonds. *Applied Mathematical Finance* 13(3), 215–244.
166. Fouque, J.-P., J. Garnier, G. Papanicolaou, & K. Sølna (2007). *Wave propagation and time reversal in randomly layered media*. Springer Verlag. 34
167. Fouque J., & K. Solna (2008). Bond markets with stochastic volatility. *Advances in Econometrics* 22, 215–242.
168. Fouque, J., B. Wignall, & X. Zhou (2008). Modeling correlated defaults: First passage model under stochastic volatility. *Journal of Computational Finance* 11(3), 43.
169. Fouque J.-P., R. Sircar, & K. Solna (2009). Multiname and Multiscale Default Modeling, *Multiscale Modeling and Simulation* 7(4), 1956-1978.
170. Fouque, J.-P., G. Papanicolaou, R. Sircar, & K. Solna (2011). *Multiscale Stochastic Volatility for Equity, Interest-Rate and Credit Derivatives*. Cambridge University Press.

171. Fouque, J.-P., S. Jaimungal, & Lorig M. (2011). Spectral decomposition of option prices in fast mean-reverting stochastic volatility models. SIAM Journal on Financial Mathematics.
172. Gann W.D. (1941) How to Make Profits in Puts and Calls [Electronic resource] / W.D. Gann. – 25 p. – Access mode : – http://www.gann.su/book_eng.html.
173. Gatheral J. (2006). The Volatility Surface: a Practitioner's Guide, John Wiley and Sons, Inc.
174. Gatheral, J., Hsu, E. P., Laurence, P., Ouyang, C. & Wang, T.-H., (2012), "Asymptotics of implied volatility in local volatility models", Mathematical Finance, Volume 22, Issue 4, pp. 591–620.
175. Giraitis, L. & P.M. Robinson (2001) Whittle estimation of ARCH models. Econometric Theory 17, 608-631
176. Going-Jaesche, A. & Yor, M. (2003). A Survey and Some Generalizations of Bessel Processes. Bernoulli 9, 313–349.
177. Goldstein R S. & Keirstead W. P. (1997). On the term structure of interest rates in the presence of reflecting and absorbing boundaries, SSRN eLibrary, pp. 381–394.
178. Gömmel R. (1992) On Entstehung und Entwicklung der Effektenbörsen im 19 Jahrhundert bis 1914 / R. Gömmel // Deutsche Börsengeschichte / H. Pohl, F.K. Verlag. – Frankfurt. – S. 133–207.
179. Gorovoi, V. & V. Linetsky (2004). Black's model of interest rates as options, eigenfunction expansions and japanese interest rates. Mathematical finance 14(1), 49–78.
180. Gorovoy, V. & V. Linetsky (2007). Intensity-based valuation of residential mortgages: an analytically tractable model. Mathematical Finance 17(4), 541–573.

181. Granger C. W. J. & Hatanaka M. (1964.) *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. – P.501.
182. Grasselli, M. R. & T. R. Hurd (2007). Indifference pricing and hedging for volatility derivatives. *Applied Mathematical Finance* 14(4), 303–317.
183. Geman H. & M. Yor (1993). Bessel processes, Asian options, and perpetuities, *Math. Finance*, 3, pp. 349–374.
184. Haberman, R. (2004). *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (4 ed.). Prentice Hall.
185. Hagan, P., D. Kumar, A. Lesniewski, & D. Woodward (2002). Managing smile risk. *Wilmott Magazine* 1000, 84–108.
186. Han, Y., G. Zhou, & Y. Zhu (2016). A trend factor: Any economic gains from using information over investment horizons? *Journal of Financial Economics* 122(2), 352–375.
187. Han, Y., K. Yang, & G. Zhou (2013). A new anomaly: The cross-sectional profitability of technical analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 48(5), 1433–1461.
188. Hernandez-del-Valle, G. (2012). On the first time that a 3-D Bessel bridge hits a boundary. *Stochastic Models* 28, 649–662.
189. Heston S. (1993). A Closed-Form solution for Options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, 6 (2), 327 – 343
190. Hill, J.B. (2010) On tail index estimation for dependent, heterogeneous data. *Econometric Theory* 26, 1398-1436.
191. Hill, J.B. & A. Prokhorov (2016) GEL estimation for heavy-tailed GARCH models with robust empirical likelihood inference. *Journal of Econometrics* 190, 18-44.

192. Hirshleifer J. (1966) Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach / J. Hirshleifer // Quarterly Journal of Economics. – Vol. 80, № 2, May. — P. 252–277.
193. Ho, T.S.Y., & Lee, S., (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims // Journal of Finance. – Vol. 41.–№ 4. – P.1011–1029.
194. Hobson D. G., Rogers L. G. (1998) Complete models with stochastic volatility, Mathematical Finance 8, 27-48.
195. Hull, J. & A. White (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. The Journal of Finance 42(2), 281–300
196. Janson, S. & J. Tysk (2006). Feynman-Kac formulas for Black-Scholes-type operators. Bull. London Math. Soc. 38(2), 269–282.
197. Jeanblanc, M., M. Yor, & M. Chesney (2009). Mathematical methods for financial markets. Springer Verlag.
198. Jonsson, M. & R. Sircar (2002). Optimal investment problems and volatility homogenization approximations. In A. Bourlioux, M. Gander, and G. Sabidussi (Eds.), Modern Methods in Scientific Computing and Applications, Volume 75 of NATO Science Series II, pp. 255–281. Kluwer.
199. Jonsson, M. & R. Sircar (2002). Partial hedging in a stochastic volatility environment. Mathematical Finance 12(4), 375–409.
200. Kallsen, J. & J. Muhle-Karbe (2013). The general structure of optimal investment and consumption with small transaction costs. Submitted.
201. Kent, J. (1978), “Some probabilistic properties of Bessel functions,” Ann. Probab., 6, 760-770.
202. Knoll M.S. (2008) Ancient roots of modern financial innovation: the early history of regulatory arbitrage / M.S. Knoll // Oregon Law Review. Vol. 87, № 93. — P. 93–116.

203. Kreps D.M. (1981) Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities / D.M. Kreps // Journal of Mathematical Economics. – Vol. 8. – P. 15–34.
204. Kristensen, D. & O. Linton (2006) A closed form estimator for the GARCH(1,1)-model. *Econometric Theory* 22, 323-327.
205. Kumar, R. (2015). Effect of volatility clustering on indifference pricing of options by convex risk measures. *Applied Mathematical Finance* 22(1), 63–82.
206. Kyshakevych B. & Klymkovych I. (2018) Estimation of Z-score for Ukrainian banking system. *Scientific Journal of Polonia University*. 30, 43-51.
207. Lebedev, N.N. (1972). *Special Functions and Their Applications*. New York: Dover.
208. Lee, R. W. (2004). The moment formula for implied volatility at extreme strikes. *Mathematical Finance* 14(3), 469–480.
209. Leung, T. & M. Ludkovski (2012). Accounting for risk aversion in derivatives purchase timing. *Mathematics and Financial Economics* 6(4), 363–386.
210. Lewis, A. (1998). Applications of eigenfunction expansions in continuous-time finance. *Mathematical Finance* 8(4), 349–383.
211. Liashenko O. & Kravets T. (2013) Multifractal Analysis of Currency and Stock Indices Using Wavelet Technology // *Ekonomika*, Vol. 92(3) Supplement A, P. 296-303
212. Liashenko O. & Kravets T. (2014) The Synchronization Effects of Stock Indices Dynamics in the Multifractal Analysis Using Wavelet Technology // *Revista Economica*, 66, P. 41-57
213. Lindsay, A.E. & Brecher, D.R. (2012). Simulation of the CEV Process and

- the Local Martingale Property, *Mathematics and Computers in Simulation*, 82, pp. 868-878.
214. Linetsky V. (2004). Lookback options and diffusion hitting times: A spectral expansion approach. *Finance and Stochastics* , 8(3):373–398.
 215. Linetsky, V. (2002). Exotic spectra. *Risk Magazine*, 85–89. 35
 216. Linetsky, V. (2004). Spectral expansions for asian (average price) options. *Operations Research*, 856–867.
 217. Linetsky, V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 7(3), 337–384.
 218. Linetsky, V. (2004). The Spectral Representation of Bessel Processes with Drift: Applications in Queueing and Finance, *Journal of Applied Probability* 41, 327344.
 219. Linetsky, V. (2006). Pricing equity derivatives subject to bankruptcy. *Mathematical Finance* 16(2), 255–282.
 220. Linetsky, V. (2007). Chapter 6 spectral methods in derivatives pricing. In J. R. Birge and V. Linetsky (Eds.), *Financial Engineering*, Volume 15 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pp. 223–299. Elsevier
 221. Lipton, A. and McGhee W. (2002). Universal barriers. *Risk*, May, 81–84.
 222. Lipton, A.(2002). The volatility smile problem. *Risk Mag.*, 15(2), 61–65.
 223. Lopez, J. L. & N. M. Temme (2002). Two-point Taylor expansions of analytic functions. *Studies in Applied Mathematics* 109(4), 297–311.
 224. Lorig, M. (2013). The exact smile of certain local volatility models. *Quantitative Finance* 13(6), 897–904.
 225. Lorig, M., Pagliarani, S. & Pascucci, A., (2013), “A Taylor series approach to pricing and implied vol for LSV models”, Working Paper available at ArXiv: <http://arxiv.org/abs/1308.5019>.

226. Lorig, M., S. Pagliarani, & A. Pascucci (2015). Explicit implied volatilities for multifactor local-stochastic volatility models. To appear: *Mathematical Finance*.
227. Lorig M. J. (2014) Pricing Derivatives on Multiscale Diffusions: an Eigenfunction.
228. Lorig, M., S. Pagliarani, & A. Pascucci (2015). Analytical expansions for parabolic equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 75, 468–491.
229. Lyashenko O. (2016) Predictive models of global human development: an econometric approach. *Ukrainian Journal of Applied Economics*.—1 (2), 73-85.
230. Madan, D., P. Carr, & E. Chang (1998). The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review* 2(1), 79–105.
231. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment / Markowitz H.M. — L. ; N. Y. : Chapman & Hall Ltd., 1959. — 356 p.
232. Markowitz H.M. (1991) Foundations of Portfolio Theory / H.M. Markowitz // *Journal of Finance*. — Vol. 46, № 2, June. — P. 469–477.
233. McKean, Henry P., J. (1956). Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society* 82(2), pp. 519–548.
234. Mendoza-Arriaga, R., Carr, P., & Linetsky V., (2010). Time-changed Markov processes in unified credit-equity modeling. *Mathematical Finance* 20, pp. 527–569.
235. Merton R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*.- № 4. - P. 141- 183.
236. Merton R.C. (1973) The Relation between Put and Call Prices / R.C. Merton // *Comment, Journal of Finance*. — № 28, March. — P. 183–184

237. Merton R. C. (1980) On Estimating The Expected Return on The Market an Exploratory Investigation. / R. C. Merton //Journal of Financial Economics. Vol. 8. – P. 323-361
238. Mijatovic, A. & P. Tankov (2016). A new look at short-term implied volatility in asset price models with jumps. *Math. Finance* 26(1), 149–183.
239. Mishura Y. (2008) *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes* / Y. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag. – 393 p.
240. Neely, C. J., D. E. Rapach, J. Tu, & G. Zhou (2014). Forecasting the equity risk premium: the role of technical indicators. *Management Science* 60(7), 1772–1791.
241. Nelson S.A. (1904) *The A B C of Options and Arbitrage* / S.A. Nelson. — N. Y. : The Wall Street Library. – 96 p.
242. Nelson, Daniel B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 347-370.
243. Pagliarani, S. and A. Pascucci (2012). Analytical approximation of the transition density in a local volatility model. *Cent. Eur. J. Math.* 10(1), 250–270.
244. Pagliarani, S., A. Pascucci, & C. Riga (2013). Adjoint expansions in local L'evy models. *SIAM J. Financial Math.* 4, 265–296.
245. Pascucci, A. (2011). *PDE and martingale methods in option pricing*. Bocconi&Springer Series. New York: Springer-Verlag
246. Pelsser A. (2000). Pricing double barrier options using laplace transforms, *Finance and Stochastics*, 4 pp. 95–104.
247. Pirjol, D. & L. Zhu (2016). Short maturity Asian options in local volatility models. *SIAM J. Fin. Math.*.. 7, 947-992.

248. Piterbarg V. (2005), Stochastic Volatility Model with Time-dependent Skew, *Applied Mathematical Finance* 12, 147-184.
249. Raja, M., & M. Selvam, (2011). Measuring the time varying volatility of futures and options. *International Journal Applied Economic Finance*, 5, 18-29.
250. Reed, M. & B. Simon (1980). *Methods of modern mathematical physics. Volume I: Functional Analysis*. Academic press.
251. Reinach A.M. (1961) *The Nature of Puts and Calls* / Reinach A.M. — N. Y. : Bookmailer. — 102 p.
252. Ren, Y, Madan, D. & Qian, M.Q., (2007), “Calibrating and pricing with embedded local volatility models”, *Risk*, pp. 138–143.
253. Roper, M. & M. Rutkowski (2009). On the relationship between the call price surface and the implied volatility surface close to expiry. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 12(04), 427–441.
254. Ross S.A. (1973) *Return, Risk and Arbitrage* // *Risk and Return in Finance* / ed. I. Friend, J. Bicksler. — Wharton Discussion Paper. P. 189–217.
255. Rousan, R., & Al-Khour, R. (2005). Modeling Market Volatility in Emerging Markets in the Case of daily Data in Amman Stock Exchange 1992-2004. *International Journal of Applied Econometrics and Quantitative Studies*, 2(4), 99-118.
256. Rubinstein, M. (2001) *Rational markets: Yes or no? The affirmative case* / Rubinstein, M. // *Financial Analysts Journal*. 57(3), 15–29.
257. Salminen, P. & Yor, M. (2011). On hitting times of affine boundaries by reflecting Brownian motion and Bessel processes. *Periodica Math. Hungar.* 62, no. 1, 75–101.

258. Samuelson P.A. (2000) Modern Finance Theory Within One Lifetime / P.A. Samuelson // Mathematical Finance / [Geman H., Madan D., Pliska S.R., Vorst T.]. – Bachelier Congress, 2000. – P. 41–47.
259. Schroder M. (1989) “Computing the constant elasticity of variance option pricing formula,” Journal of Finance, vol. 44, pp. 211–219.
260. Sharpe W. (1985). Factor Models, CAPMs, and APT//Journal of Portfolio Management. Fall, 1984, pp. 21-25; Asset Allocation Tools. The Scientific Press.
261. Shawagfeh, N. (2011). A note on some integrals involving two associated laguerre polynomials. Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia 19(2).
262. Shiga, T., & S. Watanabe, (1973). Bessel Diffusions as a One-Parameter Family of Diffusion Processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb., 27, 37-46.
263. Sircar, R. & T. Zariphopoulou (2005). Bounds & asymptotic approximations for utility prices when volatility is random. SIAM J. Control & Optimization 43(4), 1328–1353.
264. Sprenkle C.M. Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences / C.M. Sprenkle // The Random Character of Stock Market Prices / ed. Paul H. Cootner. — Cambridge (Mass) : MIT Press, 1964. — P. 412–474.
265. Stein, E. & J. Stein (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. Review of financial Studies 4(4), 727.
266. Stoll H.R. (1969) The Relationship between Put and Call Option Prices / H.R. Stoll // Journal of Finance. Vol. 24, № 5, Dec. – P. 801–824.
267. Taleb N. (2010) The Black Swan : The Impact of the Highly Improbable / Taleb N. — 2nd ed. — N. Y. : Random House Trade Paperbacks. – 444 p.

268. Tehranchi, M. R. (2009). Asymptotics of implied volatility far from maturity. *Journal of Applied Probability*, 629–650.
269. Tompkins R. G. (2001) Stock index futures markets: Stochastic volatility models and smiles, *Journal of Future Markets* 21, 43-78.
270. Varian H.R. (1987) The Arbitrage Principle in Financial Economics *Journal of Economic Perspectives*. Vol. 1, № 2, Fall. – P. 55–72.
271. Vasicek O., (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5(2), 177 – 188.
272. Vaynman, I. & B.K. Beare (2014) Stable limit theory for the variance targeting estimator, in Y. Chang, T.B. Fomby & J.Y. Park (eds), *Essays in Honor of Peter C.B. Phillips*, vol. 33 of *Advances in Econometrics*: Emerald Group Publishing Limited, chapter 24, 639-672
273. Vladimirov V.S. (1981). *Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Science, 512 P.
274. Wang, J. (2010). Regularity of semigroups generated by L'evy type operators via coupling. *Stochastic Process. Appl.* 120(9), 1680–1700.
275. Welfens P.J. (2007) *Digital Economic Dynamics : Innovations, Networks and Regulations* / P.J. Welfens, M. Weske. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag. – 212 p.
276. Wiggins, J. (1987). Option Values under Stochastic Volatility. *J. Financial Economics* 19(2), 351–372.
277. Yor, M. (1984). On square-root boundaries for Bessel processes, and pole-seeking Brownian motion. *Stochastic Analysis and Applications* (Lecture Notes Math. 1095), eds A. Truman and D. Williams, Springer, Berlin, pp. 100–107.
278. Yor M. and A. & Going-Jaesche (1999). *A Survey and Some Generalizations of Bessel Processes*, ETH, Zurich.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Список публікацій за темою дисертації

Монографії:

1. Буртняк І.В. Оцінка і прогнозування динаміки показників фондового ринку / І.В. Буртняк, І.С. Благун. // Современные проблемы моделирования социально-экономических систем: Монография.– Х.: ИД «ИНЖЕК», 2009–С. 135-150.
2. Буртняк І.В. Моделювання процесів розвитку фондового ринку: монографія / І.В. Буртняк, І.С. Благун. – Івано-Франківськ: Видавець Віктор Дяків, 2011. –155 с.
3. Буртняк І. В. Моделі поведінки волатильності фінансових інструментів фондових ринків: монографія. Івано-Франківськ : ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2018. 287 с.

Статті у наукових фахових виданнях України:

4. Буртняк І.В Дослідження взаємодії між фондовими індексами на основі моделей ARCH/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Вісник Східноукраїнського нац. у-ту ім. В. Даля.– Луганськ, 2009. – №12. – С. 102–110
5. Буртняк І.В. Ретроспективний аналіз фондового ринку / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону. – Івано–Франківськ, 2010. – Т. 1. Вип. 6. – С. 175–181.
6. Буртняк І.В. Застосування моделі Гобсона-Роджерса для дослідження індексу ПФТС/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Зб.наук.праць

- „Моделювання регіональної економіки”. – Івано-Франківськ, 2011. – №2(18). – С. 13–19.
7. Буртняк І.В. Моделювання динаміки валютних курсів на основі спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Інноваційна економіка, 2012. – №5.(31) – С. 259–265.
 8. Буртняк І.В. Моделювання процесу управління прибутком підприємства / І. В. Буртняк // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону – Івано-Франківськ, 2014. –Т2. №11. – С. 53–60.
 9. Буртняк І.В. Моделювання стратегічного управління фінансовою діяльністю підприємства / І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2014. – №1. – С. 23–30.
 10. Буртняк І.В. Моделювання фінансової стратегії поведінки компаній/ І. В. Буртняк // Вісник Черкаського університету: серія Економічні науки - Випуск №37 (330), 2014. – С. 15-21.
 11. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів за допомогою моделі CEV з багатовимірною стохастичною волатильністю / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька// Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ, Плай, 2015. – №1. – С. 509–519.
 12. Буртняк І.В. Моделювання волатильності для індексу ПФТС за допомогою узагальненої моделі Гобсона-Роджерса / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька// Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2015. – №2. – С. 446–452.
 13. Буртняк І.В. Дослідження поведінки фондового ринку на основі моделей ARCH / І. В. Буртняк // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону – Івано-Франківськ, 2016. –Т2. №14. – С. 63–80.

14. Буртняк І.В. Моделювання ціноутворення двобар'єрних опціонів з багатофакторною волатильністю / І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2017. – №1(29). – С. 437–449.
15. Буртняк І.В. Оцінювання деривативів двобар'єрних опціонів Беселівських процесів методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2017. – №2(30). – С. 14-23.

**Статті в іноземних періодичних виданнях та фахових виданнях
України, які внесені до міжнародних наукометричних баз:**

16. Буртняк І.В. Моделирование динамики развития фондового рынка с помощью моделей ARCH / И. В. Буртняк // Бизнес Информ, 2009. – №12. – С. 131–135.
17. Буртняк І.В. Моделирование динамики индекса ПФТС/ И. В. Буртняк, А.П. Малицкая // Бизнес Информ, 2010. – №1. – С. 60–65.
18. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження динаміки фінансових ресурсів на базі мультиплікативної стохастичної моделі // Бізнес Інформ, 2010. – №(4)1. – С. 11–14.
19. Буртняк І.В. Дослідження волатильності за допомогою модифікації моделі Блека–Шоулза/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ, 2011. – №(5)1. – С. 72–75.
20. Буртняк І.В. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ, 2012. – №3. – С. 48–50.

21. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ, 2013. – №4. – С. 152–158.
22. Буртняк І.В. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Проблеми економіки, 2014. – №2. – С. 349–356.
23. Буртняк І.В. Системний підхід до оцінювання опціонів на базі моделі CEV/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Бизнес Информ, 2016. – №10. – С. 152–158.
24. Burtnyak, I.V., Malytska, H.P. Calculating the price for derivative financial assets of Bessel processes using the Sturm-Liouville theory, Problems of Economics, 2017. 2, pp. 310–316.
25. Burtnyak, I.V., Malytska, A. Evaluating the financial flows of Bessel processes by using spectral analysis, Business Inform, 2017, 7, pp. 120–124
26. Burtnyak, I.V., Malytska, A. The Evaluation of Derivatives of Double Barrier Options of the Bessel Processes by Methods of Spectral Analysis, Investment Management and Financial Innovations, 2017, Vol. 14, Issue 3, pp. 126–134
27. Burtnyak, I.V., Malytska, A. The Investigation of Securities Cost Using Methods of Spectral Analysis. International Journal of Economic Research, 2017. Vol. 14, Issue 15, pp. 705–715
28. Burtnyak, I.V., Malytska, A. Spectral study of options based on CEV model with multidimensional volatility. Investment Management and Financial Innovations, 2018, 15(1), 18-25.
29. Burtnyak, I.V., Malytska, A. Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions. Problems and Perspectives in Management, 2018, 16(1), 224-231.

30. Burtnyak, I.V., Malytska, A. Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein-Uhlenbesck processes. Carpathian Math. Publ. 2018, 10 (2), 273–287.
31. Буртняк І. В. Про фундаментальний розв’язок задачі Коші для систем Колмогорова другого порядку / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Укр. мат. журн. - 2018. - **70**, № 8. - С. 1107-1117.

Відомості про апробацію результатів дисертації

32. Burtnyak I.V. On the fundamental matrix of solutions of Cauchy problem for one system of the ultraparabolic equations/ // International scientific conference “Infinite dimensional analysis and topology”.—Ivano-Frankivsk, 2009. —Р.93.
33. Буртняк І.В. Системи рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами залежними від t / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. конф. (Чернівці, 8–13 червня 2009). – Чернівці, 2009. – С. 19–20.
34. Буртняк І.В. Моделювання динаміки фінансових ресурсів на базі стохастичних різницевих рівнянь/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 8–9 квітня 2010). – Харків, 2010. – С. 16–19.
35. Буртняк І.В. Рівномірна стабілізація розв’язків задачі Коші для систем рівнянь типу Колмогорова/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конф. ім. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010). – Київ, 2010. – С. 73.
36. Буртняк І.В. Теорема Ліувілля для розв’язків систем типу Колмогорова/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали всеукр. наукового семінару “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25–28 березня 2010). – Ворохта, 2010. – С. 26–27.

- 37.Буртняк І.В. Метод Леві для одного класу систем рівнянь типу дифузії з інерцією / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. математичної конф. ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011). – Дрогобич, 2011. – С. 27.
- 38.Буртняк І.В. Моделювання волатильності індексу ПФТС/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 7–9 квітня 2011). – Харків, 2011. – С. 21–24.
- 39.Буртняк І.В. Системи рівнянь Колмогорова з одновимірними групами змінних виродження / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали всеукр. наукового семінару “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 20–26 лютого 2012). – Ворохта, 2012. – С. 28.
- 40.Буртняк І.В. Застосування шляхозалежної моделі для дослідження волатильності індексу ПФТС/ І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали IV міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 9–10 квітня 2012). – Харків, 2012. – С. 84–87.
- 41.Буртняк І.В. Системи рівнянь Колмогоровського типу з одновимірними групами виродження / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали XIV міжнар. наукової конф. ім. М. Кравчука (Київ, 19–21 квітня 2012). – Київ, 2012. – С. 287.
- 42.Буртняк І.В. Про один клас систем рівнянь Колмогоровського типу з одновимірними групами виродження / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали всеукраїнської наукової конф. “АТАС-2012” (Микуличин, 20–23 вересня 2012). – Івано-Франківськ, 2012. – С. 22.
- 43.Буртняк І.В. Системи рівнянь Колмогорова з одновимірними групами виродження / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали всеукр. наукової конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та

- математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого–3 березня 2013). – Ворохта, 2013. – С. 40.
44. Буртняк І.В. Обчислення ціни двобар’єрного опціону з тривимірною стохастичною волатильністю / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали V міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 11–12 квітня 2013). – Харків, 2013. – С. 91–95.
45. Буртняк І.В. Про матрицю Гріна для системи рівнянь Колмогорова з одновимірними групами виродження / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конф. Боголюбівські читання DIF-2013 (Севастополь, 23–30 червня 2013). – Севастополь, 2013. – С. 75.
46. Буртняк І.В. Про фундаментальний розв’язок задачі Коші для одного класу рівнянь типу дифузії з інерцією та зростаючими коефіцієнтами / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали всеукр. наукової конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24 лютого–2 березня 2014). – Івано-Франківськ, 2014. – С. 27–28.
47. Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів, які задовольняють процес Орнштейна-Уленбека, методами спектрального аналізу / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали VI міжнар. науково-практичної конф. “Сучасні проблеми моделювання соціально-економічних систем” (Харків, 3–12 квітня 2014). – Харків-Бердянськ, 2014. – С. 91–95.
48. Буртняк І.В. Системи рівнянь дифузії з інерцією та зростаючими коефіцієнтами / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конф. ім. М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2014). – Київ, 2014. – С. 73.
49. Буртняк І.В. Про фундаментальний розв’язок задачі Коші для рівнянь Орнштейна-Уленбека / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали

- міжнар. наукової конф. ім. Г. Гана (Чернівці, 30червня–5 липня 2014). – Чернівці, 2014. – С. 14–15.
- 50.Буртняк І.В. Метод Леві для систем рівнянь дифузії з інерцією та зростаючими коефіцієнтами / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Тези лекцій і доповідей (Поляниця, 7–18 липня 2014). – Поляниця, 2014. – С. 48.
- 51.Буртняк І.В. Структура фундаментального розв’язку задачі Коші для одного рівняння типу рівняння дифузії з інерцією / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали всеукр. наукової конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого–1 березня 2015). – Івано-Франківськ, 2015. – С. 27-28.
- 52.Буртняк І.В. Обчислення цін опціонів з багатофакторною волатильністю за допомогою моделі Васічека / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конференції “Економічний і соціальний розвиток України в ХХІ столітті ” (Тернопіль, 2–6 березня 2015). – Тернопіль, 2015. С. 29-31.
- 53.Буртняк І.В. Про поверхні рівня типу дифузії з інерцією / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конф. ім. Г. Гана (Чернівці, 1–4 липня 2015). – Чернівці, 2015. – С. 67–68.
- 54.Буртняк І.В. Властивості фундаментальної матриці розв’язків задачі Коші для систем рівнянь Колмогорова-Ейделямана / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали всеукр. наукової конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 24-27 лютого 2016). – Івано-Франківськ, 2016. – С. 27-28.
- 55.Буртняк І.В. Обчислення ціни двох бар’єрного опціону з мультиплікативною волатильністю за допомогою моделі рівняння Колмогорова / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конференції “ Економічний і соціальний розвиток України в

- XXI столітті ” (Тернопіль, 3–7 березня 2016). – Тернопіль, 2016. С. 32-35.
56. Буртняк І.В. Знаходження ціни опціону з мультиплікативною волатильністю за допомогою рівняння Колмогорова / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали XXIII міжнародної науково-практичної конференція Транскордонне співробітництво: ключові ідеї та перспективи 20-22 травня 2016 Сучавський університет Штефан чел Маре, 2016. – С. 167-169
57. Буртняк І.В. Системи диференціальних рівнянь Колмогорова-Ейдельмана / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конф. ім. В.І. Фодчука (Чернівці, 28-30 вересня 2016). – Чернівці, 2016. – С. 70–71.
58. Буртняк І.В. Метод Леві для систем Колмогорова – Ейдельмана / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали II міжнар. наукової конференції “ Прикладні задачі математики” (Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016). – Івано-Франківськ, 2016. С. 32-35.
59. Буртняк І.В. Моделювання цін опціонів з багатофакторною волатильністю / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали VII міжнар. Науково-методичної конференції “ Моделювання економіки: проблеми, тенденції, досвід ” (Тернопіль, 20–21 жовтня 2016). – Тернопіль, 2016. С. 69-71.
60. Буртняк І.В. Стабілізація розв'язків задачі Коші та теореми Ліувілля для систем рівнянь Колмогорова-Ейдельмана / І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, 24-27 лютого 2017 р)– Івано-Франківськ, 2017. – С. 54-55
61. Буртняк І.В. Регуляція фінансових потоків за допомогою методів спектрального аналізу / І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Міжнародної наукової конференції «Трансформація фінансових ринків

в умовах глобальної нестабільності: реалії сьогодення та погляд у майбутнє», 30 жовтня 2017 – Ірпінь, 2017. – С. 66-67.

62. Буртняк І.В. Застосування рядів Тейлора для ціноутворення похідних цінних паперів /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали Всеукраїнської науковопрактичної конференції “Економічна кібернетика: перспективи розвитку інформаційної економіки ”, м. Дніпро, 1-2 березня 2018 р. – С. 15-19.
63. Буртняк І.В. Оцінювання деривативів двобар’єрних опціонів Беселівських процесів методами спектрального аналізу /І.В. Буртняк, Г.П. Малицька/ Матеріали міжнародної науково-практичної конференції "Стратегія і практика інноваційного розвитку фінансового сектору України", 20-22 березня 2018– Ірпінь, 2018. – С. 21-24.
64. Буртняк І.В. Функція Гріна для одного класу ультрапараболічних систем / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конф. Сучасні проблеми математики та її застосування (Чернівці, 17-19 вересня 2018). – Чернівці, 2018. – С. 81.
65. Буртняк І.В. Побудова фундаментальної матриці розв’язків для ультрапараболічних систем рівнянь високого порядку / І. В. Буртняк, Г.П. Малицька // Матеріали міжнар. наукової конф. ім. В.І. Фодчука (Івано-Франківськ-Микуличин, 26-28 вересня 2018). – Івано-Франківськ, 2018. – С. 33.
66. Міжкафедральний семінар розширеного засідання кафедр економічної кібернетики, теоретичної та прикладної економіки, менеджменту та маркетингу, фінансів та обліку і аудиту ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» (м. Івано-Франківськ, 03.01.2019 р., Протокол № 6).

ДОДАТОК Б.

Довідки про впровадження



ВЕРХОВНА РАДА УКРАЇНИ

Комітет з питань бюджету

01008, м.Київ, вул. Грушевського, 5; тел. +380(44) 255-49-39, 255-41-63, факс: 255-41-23

19 грудня 2018 р. №025-12/07

Довідка

про використання результатів дисертаційного дослідження
Буртняка Івана Володимировича
на тему «Спектральні методи дослідження поведінки
волатильності фондових ринків»

У Комітеті Верховної Ради України з питань бюджету за результатами розгляду основних положень дисертаційної роботи Буртняка Івана Володимировича присвяченої моделюванню динаміки фондового ринку України, та поданої у спеціалізовану вчену раду на здобуття наукового ступеня доктора економічних наук за спеціальністю 08.00.11- математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці, відмічається, що окремі рекомендації та науково-практичні висновки мають практичне значення для реалізації завдань в частині макроекономічної стабілізації та динамічного розвитку фінансового ринку та можуть бути застосовані у законотворчій діяльності Комітету при опрацюванні законопроектів та підготовці відповідних пропозицій до законодавчих документів.

Серед таких надбань автора: запропоновані спектральні методи для моделювання швидкості зміни росту портфеля акцій, величину фінансового потоку, а також дослідження темпів зростання ринкового портфеля, що забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу. Використання такого підходу сприятиме підвищенню ефективності пруденційного нагляду на фондовому ринку та контролюваності діяльності професійних учасників ринків.

Народний депутат України
секретар Комітету з питань
бюджету



ШКВАРИЛЮК В.В.
посвідчення №25

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 11, м. Івано-Франківськ,
76018, Україна
тел.: (+380-342) 75-23-51
факс: (+380-3422) 53-15-78
e-mail: rector@pnu.edu.ua



Ministry of Education and Science of Ukraine
Public Higher Education Institution
Vasyl Stefanyk
Precarpathian National University

11 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk,
76018, Ukraine
tel.: (+380-342) 75-23-51
fax: (+380-3422) 53-15-78
e-mail: rector@pnu.edu.ua

13.12.2018 № 01-15/рз/2406

на № _____ від _____

Довідка
про впровадження результатів дисертаційної роботи
Буртинка Івана Володимировича
в навчальний процес ДВНЗ «Прикарпатський
національний університет імені Василя Стефаника»

Основні результати дисертаційного дослідження «Спектральні методи дослідження поведінки волатильності фондових ринків», представленого на здобуття наукового ступеня доктора економічних наук за спеціальністю 08.00.11 – математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці, використовуються в навчальному процесі ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» при викладанні курсів «Аналіз фондових ринків та інвестиційних проєктів», «Моделювання макроекономічних процесів» та «Моделі економічної динаміки».

Довідка видана для представлення у спеціалізовану вчену раду.

Проректор з науково-педагогічної роботи
ДВНЗ «Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника»
д.ф.-м.н., професор



С.В. Шарин

Довідка
про впровадження результатів дисертаційної роботи
Буртняка Івана Володимировича
«Спектральні методи дослідження
поведінки волатильності фондових ринків»
18.12.2018р. № 01-12

Моделювання динаміки поведінки фондового ринку України наразі є актуальним питанням для всіх його учасників, в тому числі і страхових компаній, для яких є дуже актуальним розміщення своїх страхових резервів в інструменти фондового ринку. Водночас, значна волатильність, що притаманна як окремим фінансовим інструментам, операції з якими здійснюють компанії на фондовому ринку, так і ринку в цілому призводить до формування значних інвестиційних ризиків, диверсифікація яких є одним із головних завдань у фінансовому менеджменті кожної страхової компанії, адже є однією із базових умов забезпечення її платоспроможності.

Теоретико-методологічні та практичні результати дисертаційної роботи Буртняка І.В. були враховані при прийнятті інвестиційних рішень в діяльності страхової компанії «Приватне акціонерне товариство «Страхова компанія «Євроінс Україна». Зокрема при моделюванні та прогнозуванні поведінки динаміки фондового ринку України доцільно застосовувати модель шляхозалежної волатильності, яка володіє минулою інформацією та дозволяє моделювати поведінку інвесторів в різних ринкових умовах, в тому числі у випадку раптового падіння ринку, а також відображає позитивні або негативні тенденції активу.

Директор Чернівецької
дирекції ПрАТ СК «Євроінс Україна»



Рак Б.Ю.



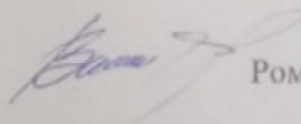
Довідка про

впровадження результатів дисертаційної роботи

Здійснена фахівцями АБ «УКРГАЗБАНК» оцінка доцільності практичного впровадження наукових результатів, отриманих Буртняком Іваном Володимировичем при підготовці дисертаційної роботи на тему «Спектральні методи дослідження поведінки волатильності фондових ринків», подану на здобуття наукового ступеня доктора економічних наук за спеціальністю 08.00.11 – математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці, свідчить, що положення цього дослідження мають суттєвий потенціал для практичної апробації в банку, який здійснює діяльність з управління цінними паперами.

Так, зокрема, отриманий Буртняком І.В. науковий результат у вигляді методу визначення ціни похідних цінних паперів за допомогою моделі Гобсона-Роджерса з метою вибору оптимального варіанту стратегії для підвищення продуктивності хеджування, а також визначення волатильності вартості становить практичний інтерес з точки зору диверсифікації ризиків операцій з фінансовими деривативами, моделювання, аналізу і оцінювання важливих ринкових параметрів.

Директор Івано-Франківської
ОД АБ «УКРГАЗБАНК»



Роман Вульчик

Належить державі

 94,94% акцій належить державі в особі
Міністерства фінансів України

Банк - агент ФГВФО

 починаючи з 2014 року
Один із 11 банків-агентів.

контакт-центр: 0-800-309-000

(вільно зі стандартних телефонів у межах України безкоштовно)

www.ukrgasbank.com

 * 94,94% акцій УКРГАЗБАНКУ належать державі
АБ «УКРГАЗБАНК». Ліцензія НБУ №123 від 06.10.2011 р.