

Відгук

офіційного опонента

про дисертацію ТЕРЛИЧ НАТАЛІЇ ІВАНІВНИ

“Прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами”,

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Актуальність теми дисертації. У зв'язку з різноманітними практичними та теоретичними завданнями впродовж останніх двох десятиліть значно зріс інтерес до прямих та обернених спектральних задач для класичних диференціальних операторів математичної фізики, таких як операторів Шредінгера, Штурма–Ліувілля, Дірака тощо, та різних їх узагальнень. Про активний розвиток цієї тематики свідчить велика кількість статей і цілий ряд монографій, зокрема авторства провідних математиків різних країн світу.

Тематика опонованої дисертаційної роботи органічно вписується в загальну картину досліджень спектральних властивостей задач для диференціальних рівнянь із негладкими коефіцієнтами, які ведуться сьогодні у світі. А саме, предметом досліджень роботи є прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля, потенціали яких, по-перше, залежать від спектрального параметра, а по-друге, мають низьку гладкість і, зокрема, можуть бути узагальненими функціями. Такі рівняння виникають у реальних моделях математичної фізики та механіки (напр., у рівняннях Кляйна–Гордона) і є важливим, але менш вивченим об'єктом порівняно з класичними операторами Штурма–Ліувілля. З огляду на сказане вважаємо тему дисертації актуальною.

Зміст дисертації. Дисертаційна робота викладена на 150 сторінках і складається з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, що містить 96 позицій.

У вступі авторка обґрунтовує актуальність поставленої задачі, приводить стисло анотацію результатів інших авторів, формулює мету та задачі дослідження, висвітлює питання новизни, практичного значення, особистого внеску, апробації результатів, наводить список публікацій.

У *першому* розділі дисертації дисертантка вводить головний об'єкт дослідження – спектральну задачу для оператора Штурма–Ліувілля на інтервалі $[0, 1]$ з потенціалом, що залежить від спектрального параметра та є узагальненою функцією. Детально пояснено, що таку задачу можна переписати в абстрактному вигляді як спектральну задачу не для фіксованого диференціального оператора, а для операторної в'язки $T(\lambda)$, тобто операторнозначної функції, що залежить квадратично від спектрального параметра λ . Далі авторка пояснює, що розуміти під спектром та власними функціями такої в'язки та чому спектральні властивості $T(\lambda)$ є значно складнішими, ніж спектральні властивості класичних операторів Штурма–Ліувілля.

У *другому* розділі досліджені загальні спектральні властивості рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами. Зокрема, авторка доводить дискретність спектру та вводить поняття алгебраїчної кратності власних значень. Далі показана еквівалентність спектральної задачі для в'язки $T(\lambda)$ та для лінеаризатора \mathcal{L} , що є матрицею 2×2 з операторними коефіцієнтами. Цей лінеаризатор \mathcal{L} виявляється самоспряженим оператором у деякому просторі Понтрягіна, тобто просторі з уведеним індефінітним скалярним добутком. Загальні властивості таких операторів дозволяють обґрунтувати симетричність спектру в'язки $T(\lambda)$ відносно дійсної прямої та одну достатню умову того, що спектр є дійсним та алгебраїчно простим.

Наступний етап досліджень спектральних властивостей початкової задачі базований на зведенні рівняння Штурма–Ліувілля до системи Дірака розміру 2×2 , що є однією з найцікавіших знахідок рецензованої дисертації. Це, з одного боку, відкрило авторці шлях до ефективного зображення розв'язків за допомогою операторів перетворення певного типу, а з іншого — можливість використати обернену спектральну теорію для операторів Дірака для розв'язування обернених спектральних задач для в'язки $T(\lambda)$ у розділах 4 та 5. Використовуючи таке зведення, авторка досить просто вивела асимптотику власних значень та власних функцій в'язки $T(\lambda)$, що зазвичай вимагає значно більших зусиль, а також встановила явну факторизаційну формулу для характеристичної функції задачі у термінах її власних значень.

У *третьому* розділі дисертантка вводить поняття нормівних множників для власних значень в'язки $T(\lambda)$, які можуть бути як недійсними, так і непростими (тобто кратності, більшої за 1). Для класичних несамоспряжених операторів Штурма–Ліувілля таке поняття було відоме (див., напр., класичну монографію В. О. Марченка), проте у випадку енергозалежних потенціалів відповідні означення та формули запропоновані вперше. Хоча у подальших дослідженнях авторка припускає, що спектри задач є дійсними та алгебраїчної кратності 1, але отримані загальні результати дозволяють навести прості умови для виконання такого припущення, а також показують, як визначити нормівні множники за спектрами задач з умовами Діріхле та крайовими умовами змішаного типу. Крім того, у цьому розділі виведені асимптотики нормівних множників та показано, що за умови від'ємності певного оператора спектри задач з умовами Діріхле та крайовими умовами змішаного типу *майже чергуються*.

Останні два розділи присвячені дослідженню обернених спектральних задач відновлення потенціалів енергозалежних рівнянь Штурма–Ліувілля за спектром та нормівними множниками (*четвертий* розділ) та двома спектрами (*п'ятий* розділ). Основною знахідкою тут є зведення таких задач до обернених спектральних задач для відповідних операторів Дірака. Зазначу, що ці оператори мають потенціали спеціального вигляду \mathcal{P} , а класична обернена теорія для операторів Дірака дозволяє однозначно відновити потенціали певного канонічного вигляду \mathcal{Q} . Тому змістовним завданням у цих розділах було дослідження структури множини ізоспектральних операторів Дірака та доведення того, що кожна така множина містить єдиний оператор із класу \mathcal{P} , що і буде шуканим. Зазначу, що таке ізоспектральне перетворення має явний вигляд (див. доведення теореми 4.6 та теореми 5.3), що дозволяє навести формули для матричного потенціалу оператора Дірака та, врешті рещт, вихідної задачі. Таким чином, теоретичні результати (існування та єдиності розв'язку оберне-

ної спектральної задачі) супроводжуються алгоритмом, що дозволяє такий розв'язок побудувати явно. Іншим цікавим моментом є те, що свобода у виборі додаткового нормівного множника (у четвертому розділі) чи додаткового власного значення (у п'ятому розділі) для побудови набору спектральних даних для оператора Дірака не впливає на єдиність розв'язку оберненої спектральної задачі для енергозалежного оператора Штурма–Ліувілля. Варто також зазначити, що обернену спектральну задачу за двома спектрами у п'ятому розділі авторка зуміла розв'язати двома методами — зведенням до такої задачі для оператора Дірака та зведенням до оберненої задачі за спектром та нормівними множниками із четвертого розділу.

Викладені в дисертації результати є новими і мають достатньо високий науковий рівень. Усі твердження, сформульовані в роботі, належним чином обґрунтовані. Доведення проведені акуратно, послідовно, чітко і ясно. Авторка продемонструвала хороше володіння сучасними методами цілої низки математичних дисциплін — функціонального аналізу, диференціальних рівнянь (звичайних та у часткових похідних), комплексного аналізу, інтегральних рівнянь, асимптотичного аналізу, просторів Понтрягіна та теорії операторів у них тощо. Відзначимо також розуміння авторкою важливості естетичної складової в отриманих нею результатах, внаслідок чого текст дисертації має привабливий вигляд.

Результати, одержані дисертанткою, з належною повнотою опубліковані у п'яти статтях у виданнях з переліку, затвердженого ДАК України (з них дві — у фахових закордонних журналах із наукометричної бази Scopus), а також доповідалися на кількох міжнародних конференціях.

Зауваження до змісту дисертації і автореферату. Дисертаційна робота написана досить акуратно, тому суттєвих зауважень нема. Одним із незначних недоліків є відсутність повноцінного огляду результатів попередників (у вступі та першій частині подана лише коротка анотація цих результатів). Проте таку ситуацію можна певною мірою виправдати тим, що, по-перше, кількість робіт із обернених спектральних задач для операторів Штурма–Ліувілля, Шредінгера та Дірака є настільки великою, що написання відповідного огляду літератури з цього питання є непосильною задачею; по-друге, статті Жина та Жилена, Пивоварчика та ван дер Мі, Саттінгера та Шмигельського та ін. досліджують обернені задачі розсіювання для енергозалежних операторів Шредінгера, і навіть лише формулювання їхніх результатів вимагало би введення багатьох понять, що не мають безпосереднього стосунку до тематики дисертації; нарешті, обернені спектральні задачі для енергозалежних операторів Штурма–Ліувілля досліджені лише у кількох публікаціях, про які авторка згадувала. Подекуди міркування викладені дуже лаконічно (напр., при доведенні теореми 4.4), хоча це частково виправдано великою кількістю різноманітного матеріалу і небажанням збільшувати обсяг дисертації; зазначу, що авторка у таких місцях дає посилання на статті, де можна знайти пропущені деталі. Також було б добре, якби дисертантка навела хоча б один конкретний приклад явного розв'язку оберненої спектральної задачі. З огляду на те, що усі кроки відновлення потенціалів є досить конструктивними, таке завдання не виглядає неможливим. Також було б цікаво дослідити випадок, коли у спектрі є кілька непростих чи недійсних власних значень, хоча це є скоріше завданням для окремого майбутнього дослідження. У тексті є кілька дрібних описок і пропущених розділових знаків, що, проте, не впли-

ває на розуміння викладу. До автореферату зауважень нема.

На підставі сказаного можна зробити такі **висновки**:

Зроблені критичні зауваження не впливають на загальне враження від роботи і її позитивну оцінку.

Основним і вагомим здобутком роботи є повний розв'язок прямих та обернених спектральних задач для рівнянь Штурма-Ліувілля з потенціалами, що залежать від спектрального параметра, за умови дійсності та простоти спектра. У дисертації отримано нові науково обгрунтовані результати, що в сукупності закладають фундамент загальної прямої та оберненої спектральної теорії для таких рівнянь.

Достовірність результатів дисертаційної роботи Н. І. Терлич підтверджується строгими математичними доведеннями лем та теорем. Ці результати з належною повнотою опубліковані у фахових виданнях, затверджених МОН України. Автореферат правильно відображає зміст та основні положення дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота "Прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма-Ліувілля з енергозалежними потенціалами" задовольняє усі вимоги "Порядку присудження наукових ступенів" щодо робіт, поданих на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її авторка Наталія Іванівна Терлич заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Завідувач кафедри
математичного та функціонального аналізу
Львівського національного університету імені Івана Франка,
кандидат фізико-математичних наук

10.05. 2018 р.

Я. В. Микитюк

Микитюк Я.В.
Терлич

Терлич
20.05.18