

В І Д Г У К

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук

Деркача Володимира Олександровича

про дисертацію

Терлич Наталії Іванівни

”Прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами”

на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності

01.01.01 - математичний аналіз

Дисертація присвячена дослідженню прямих та обернених спектральних задач для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними сингулярними потенціалами. Класична обернена спектральна задача про відновлення потенціалу за власними значеннями була розглянута Г. Боргом у 1946, який показав, що потенціал рівняння Штурма–Ліувілля однозначно визначається за двома спектрами. У 50-х роках минулого століття І. Гельфанд, М. Крейн, Б. Левітан та В. Марченко заклали основи оберненої спектральної теорії для операторів Штурма–Ліувілля, Шредінгера та Дірака з регулярними потенціалами. Прямі спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з сингулярними потенціалами вивчались методом їх регуляризації в роботах А. Савчука та А. Шкалікова. Теорію обернених спектральних задач для рівнянь Штурма–Ліувілля з сингулярними потенціалами було розвинуто у серії робіт Р. Гриніва та Я. Микитюка.

Останнім часом значний інтерес викликають рівняння Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами, які виникають у практичних задачах класичної та квантової механіки. Зокрема, обернені задачі розсіювання для таких рівнянь досліджувались у роботах В. Пивоварчика і К. ван дер Мі. Проте обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами майже не вивчались. Цим проблемам і присвячена дисертація Н.І. Терлич. З огляду на це, актуальність досліджень дисертації не викликає сумнівів.

Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, указано зв'язок з науковими програмами, сформульовано мету й завдання досліджень, визначено наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, наведено відомості про їх апробацію, установи та організації, де вони доповідались і обговорювались.

У першому розділі вводиться головний об'єкт цього дисертаційного дослідження — задачі Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами, задані диференціальними рівняннями

$$-y'' + 2\lambda ry + qy = \lambda^2 y \quad (1)$$

на (0.1) і крайовими умовами Діріхле

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

де p – дійснозначна функція з $L_2(0, 1)$, а q – дійснозначний розподіл з простору Соболева $W_2^{-1}(0, 1)$ тобто $q = r'$ для деякої функції $r \in L_2(0, 1)$. Таку спектральну задачу можна розглядати як спектральну задачу для операторної в'язки $T(\lambda) = \lambda^2 I - \lambda B - A$, де B є оператор множення на $2p$ а $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q$ оператор Штурма–Ліувілля з крайовими умовами Діріхле. Поряд з в'язкою $T(\lambda)$ в дисертації розглядається операторна в'язка $T_M(\lambda)$, що відповідає спектральній задачі для рівняння (1) з крайовими умовами змішаного типу

$$y(0) = y^{[1]}(1) = 0, \quad (3)$$

де $y^{[1]} = y' - ry$ – це квазіпохідна функції y .

У другому розділі показано, що спектр операторної в'язки $T(\lambda)$ складається лише з геометрично простих власних значень і що спектральна задача для цієї операторної в'язки є еквівалентною до спектральної задачі для деякого оператора \mathcal{L} (лінеаризації в'язки $T(\lambda)$), що виявляється самоспряженим у просторі Поптрягіна з індефінітною метрикою. Як відомо, такий оператор може мати тільки дійсний спектр, за виключенням скінченної кількості симетрично розташованих власних значень, сумарна алгебраїчна кратність яких також є скінченною. В дисертації доводиться, що енергозалежне рівняння (1) може бути зведено до системи Дірака. Це дозволило отримати в Теоремах 2.6, 2.7 асимптотику власних значень і власних функцій задачі (1)-(2) і знайти факторизацію характеристичних функцій задач (1)-(2) та (1), (3) (Теорема 2.8, 2.9).

У третьому розділі введено поняття нормівних множників для задач Штурма–Ліувілля з енергозалежними потенціалами і показано, що нормівні множники задач (1)-(2) та (1), (3) співпадають з матрицею Грама відповідних систем власних і приєднаних функцій. Використовуючи зв'язок цих нормівних множників з нормівними множниками для системи Дірака, знайдено їх асимптотику (Теорема 3.1). Виведено формули, які визначають нормівні множники задачі (1)-(2) через спектри операторних в'язок T та T_M (Теорема 3.3).

Починаючи з четвертого розділу в дисертації накладається додаткове припущення на потенціал, а саме: оператор A вважається додатним. За цього припущення всі власні значення операторної в'язки T є дійсні і прості, а відповідний оператор Дірака є самоспряженим у гільбертовому просторі $L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$, при цьому його ненульовий спектр співпадає зі спектром операторної в'язки T . Основним результатом четвертого розділу є Теорема 4.2, в якій розв'язано обернену задачу відновлення потенціалів p та $q = r'$ по спектральним даним в'язки T , тобто по множині її спектральних пар (λ, α) , де λ – власне значення квадратичної операторної в'язки T і α – відповідний нормівний множник. Доведення цієї теореми ґрунтується на результатах С. Альбереріо, Р. Гриніва, Я. Микитюка з оберненої спектральної теорії для операторів Дірака у формі АКНС і на результатах дисертанта про оператори перетворення для систем Дірака (Теорема 4.3). Фактично в Теоремі 4.2 побудовано алгоритм відновлення в'язки T , а в Теоремі 4.1 доведено єдиність цього відновлення.

У п'ятому розділі розглянуто обернену задачу відновлення потенціалів p та $q = r'$ за двома спектрами (спектром Діріхле та спектром змішаного типу). В дисертації запро-

поновано два методи її розв'язання. У першому методі використовується схема розділу 4, в якій задача відновлення потенціалів за двома спектрами зводиться до аналогічної задачі для операторів Дірака спеціального вигляду. Другий — полягає в зведенні задачі відновлення потенціалів за двома спектрами до задачі відновлення потенціалів за спектром та нормівними множниками, і використанні результатів попереднього розділу. Для кожного з цих методів розроблено алгоритм розв'язання оберненої задачі відновлення потенціалів за двома спектрами.

Дисертація написана дуже акуратно. Рецензент має тільки три зауваження.

- (1) стор. 13, рядок 6 знизу. Замість "Шредингер" повинно бути "Шредінгер"
- (2) стор. 76, рядок 3. На мій погляд замість $(z - \lambda)^m$ повинно бути $(z - \lambda)^{m-1}$
- (3) стор. 79, рядок 1 після Наслідку 3.3. Замість "розділ" повинно бути "розділі".

Ці недоліки не є суттєвими і не впливають на зміст дисертації.

Переходячи до загальної оцінки дисертації, відмітимо, що в ній отримано низку нових, вагомих і цікавих результатів в спектральній теорії для рівнянь Штурма-Ліувілля. Результати дисертації чітко сформульовані й строго доведені, вчасно і з належною повнотою опубліковані у фахових виданнях, затверджених МОН України, що забезпечує достовірність основних дисертаційних положень та висновків з них. Автореферат правильно відображає зміст та основні положення дисертації.

На підставі сказаного вважаю, що дисертаційна робота "Прямі та обернені спектральні задачі для рівнянь Штурма-Ліувілля з енергозалежними потенціалами" задовольняє усі вимоги "Порядку присудження наукових ступенів" щодо робіт, поданих на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її авторка Наталія Іванівна Терлич заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент —

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу
і диференціальних рівнянь
Донецького національного університету
імені Василя Стуса



В.О. Деркач

підпис Деркач В.О.
ЗАСВІДЧУЮ
Вчений секретар університету
Віталія О.Г. Важеніна
"18" травня 2018 р.

Прокторський відділення
університету імені Василя Стуса
Відомості № 03.02.15/116/1
18 05